VICENTE ABOITES, GILBERTO ABOITES

FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

PHILOSOPHY OF MATHEMATICS IN HIGH SCHOOL

RESUMEN. Este trabajo da a conocer una experiencia sobre la enseñanza de la filosofía de la matemática a estudiantes de nivel medio superior. Hay una discusión de los problemas enfrentados y un análisis enfocado al contenido del programa utilizado. Se concluye que la enseñanza de la filosofía de la matemática a nivel medio superior es una forma de estimular en el estudiante, de manera simultánea, el pensamiento filosófico y científico. En particular, la discusión de por qué la matemática es aplicable al mundo generó un enorme interés y debería enfatizarse en cursos similares. Debido a que la motivación observada en los estudiantes fue notable en los cursos se concluye que es conveniente incluir dichos temas en los programas tradicionales de filosofía y/o matemática.

PALABRAS CLAVE: Fundamentos de matemática, filosofía de la matemática, pedagogía de la matemática.

ABSTRACT. This work presents the experience of teaching the philosophy of mathematics to high school students (Mexican nivel medio superior). The problems they face are discussed and the content of the program followed is analyzed. The conclusion is drawn that the teaching of the philosophy of mathematics in high school is a way to simultaneously stimulate philosophical and scientific thought in students. In particular, the discussion on why mathematics is applicable to the world awakened enormous interest and it should be emphasized in similar courses. Due to the high level of student motivation observed during these courses it can be concluded that these topics should be included in traditional philosophy and/or mathematics programs.

KEY WORDS: Foundations of mathematics, philosophy of mathematics, pedagogy of mathematics

RESUMO. Este trabalho expõe uma experiência de ensinar filosofia da matemática a estudantes do nível médio. Se discute os problemas enfrentados e se analisa o conteúdo do programa utilizado. Se conclue que o ensino de filosofia da matemática no nível médio é uma forma de estimular no estudante simultaneamente o pensamento filosófico e científico. Em particular a discussão de por que a matemática é aplicável ao mundo desperta um enorme interesse e deveria ser enfatizada em cursos similares. Devido a notável motivação observada nos estudantes durante o curso, se conclui que é conveniente incluir estes temas nos programas tradicionais de filosofia e/ou matemática.

PALAVRAS CHAVE: Fundamentos da matemática, filosofia da matemática, pedagogia da matemática.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2008) 11(1): 9-47
Recepción: Marzo 28, 2007/Aceptación: Febrero 25, 2008

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous présentons une expérience d'enseignement de la philosophie des mathématiques au niveau pré-universitaire. Nous exposons les problèmes abordés et analysons le contenu du programme utilisé. Nous considérons que l'enseignement de la philosophie des mathématiques au niveau pré-universitaire permet de stimuler à la fois la pensée philosophique et scientifique chez l'étudiant. Particulièrement, nous remarquons que le problème de l'application des mathématiques au monde réel a généré un grand intérêt et devrait, selon nous, s'incorporer dans des enseignements similaires. Puisque la motivation des étudiants pendant ces enseignements a été remarquable, il est possible d'inclure ces sujets dans les programmes traditionnels de philosophie et/ou mathématiques.

MOTS CLÉS: Fondements de la mathématique, philosophie des mathématiques, pédagogie de la mathématique

1. INTRODUCCIÓN

Con frecuencia, alumnos de nivel medio superior obtienen resultados académicos pobres en materias como matemáticas, física y filosofía, debido a que, en opinión de muchos de ellos, las primeras son muy difíciles y la última es muy aburrida. La filosofía de la matemática trata de una disciplina que, de modo natural, le permite al docente discutir aspectos filosóficos que resultarán inesperados e interesantes para casi todos los alumnos, así como aspectos científicos relacionados con la matemática y su aplicación al mundo real. En particular, el último tema generará notable interés en los alumnos. Los resultados obtenidos con grupos de alumnos similares en nivel académico y habilidad intelectual de nivel medio superior, quienes ya han tomado un curso de filosofía general, confirman que la atención tanto por la discusión filosófica como por la ciencia se incrementa notablemente en alumnos que toman cursos de filosofía de la matemática. Por otra parte, también se observa que la madurez académica y el desempeño académico global de los alumnos mejoran notablemente.

El presente trabajo refiere una experiencia sobre la impartición de un curso de filosofía de la matemática a estudiantes de nivel medio superior. Por tal motivo, se expone el programa, los temas y ejemplos discutidos en clase, además de las conclusiones en torno a esta práctica docente. Con base en la idea de que la información del trabajo resulte útil a otros pedagogos interesados en el tema o en impartir cursos similares, se muestran y discuten algunos de los más relevantes problemas y experiencias enfrentados en clase, así como puntos guía para análisis de problemas y debate ante el grupo.

La segunda sección del estudio discute el programa del curso presentado a los alumnos y los antecedentes del grupo; la tercera aborda el realismo y el anti-realismo en la ciencia y la matemática, mientras que en la cuarta se expone el logicismo, formalismo e intuicionismo. En el quinto apartado se presenta un breve panorama sobre la situación actual en filosofía de la matemática; el sexto examina la aplicación de la matemática al mundo real, tomando como ejemplo la luz u ondas electromagnéticas; el séptimo da a conocer un análisis del sistema de evaluación empleado, así como de la experiencia y dificultades enfrentados por los alumnos y el profesor. La última sección ofrece las conclusiones del estudio.

2. Programa del curso

El programa de filosofía de la matemática seguido durante un semestre con alumnos de nivel medio superior fue el siguiente:

Tema I. Introducción

Tema II. Realismo y anti-realismo en la física y en la matemática

Tema III. Logicismo, intuicionismo y formalismo

Tema IV. Filosofía de la matemática contemporánea

Tema V. La aplicación de la matemática al mundo

2.1. *Descripción general*

El primer tema del curso tiene como objetivo fundamental despertar la motivación inicial de los alumnos hacia la materia. Consiste en un resumen de los puntos más relevantes del curso, que son presentados a modo de preguntas a fin de despertar la curiosidad de los alumnos por conocer las respuestas. Algunas preguntas típicas planteadas durante la Introducción del curso son las siguientes:

Tema II: ¿Si la teoría del átomo de Bohr habla de núcleos y electrones, esos núcleos y electrones son reales y existen como lo predice la teoría? O, ¿es la teoría del átomo de Bohr sólo una herramienta útil para calcular el espectro óptico de átomos ligeros como hidrógeno y helio, sin importar si lo que dice la teoría sobre electrones girando alrededor de núcleos existe en la realidad o no? ¿El número Pi existe independientemente de que haya mentes humanas que lo conciban?

Tema III: ¿Cuál es la relación entre la lógica y la matemática?, ¿son lo mismo? ¿Es el conocimiento matemático sólo un juego basado en símbolos y reglas? ¿Los teoremas de incompletes de Gödel afectan lo que podemos o no decir sobre el mundo? ¿La lógica de nuestro pensamiento es única?

Tema IV: ¿Es la matemática esencial para la ciencia, o se puede hacer ciencia sin matemáticas? ¿Es la matemática parte de una red de conocimiento o es independiente del mundo?

Tema V: ¿Qué cosa es la descripción matemática de un acontecimiento físico? ¿Cómo es que los objetos matemáticos (suponiendo que existen) se relacionan con el mundo físico, de modo que las aplicaciones de la matemática al mundo son posibles? ¿Por qué es la matemática esencial para la ciencia? ¿Cómo es que las construcciones mentales de la matemática nos permiten clarificar los hechos del universo externo? ¿Cómo puede un hecho matemático servir de explicación para hechos físicos no-matemáticos? ¿Todo lo que es posible deducir de un modelo matemático debe ocurrir en el mundo? ¿Todo lo que ocurre en el mundo tiene una descripción matemática? ¿Cómo es que las ecuaciones frecuentemente obtenidas con tantas suposiciones irreales o ficticias proporcionan una descripción que es, en muy alto grado, empíricamente verificable?

La descripción de los temas II al V del programa se presenta con mayor detalle en las siguientes secciones de este trabajo.

2.2. *Antecedentes del curso*

Como antecedentes del curso filosofía de la matemática, los alumnos habían llevado un año de filosofía a nivel bachillerato, en sesiones de tres horas por semana, que incluyó los siguientes periodos: filosofía griega, medieval, moderna, continental y analítica. A lo largo de cada uno de estos periodos se abordaron temas correspondientes a epistemología, metafísica, ética, estética y lógica. Por ello, los estudiantes comprendían y manejaban con soltura un vocabulario filosófico adecuado.

3. REALISMO Y ANTI-REALISMO CIENTÍFICO

La discusión entre realismo y anti-realismo en la matemática para alumnos de nivel medio superior puede ser iniciada con enfoque en la ciencia, planteando la realidad o irrealidad del mundo externo. Dicho debate resulta ser muy motivador y provechoso, ya que introduce términos e ideas que posteriormente son necesarios al tratar la más abstracta discusión sobre realismo y anti-realismo en la matemática.

3.1. *Realismo y anti-realismo en la física*

El realismo científico (Suppe, 1989; Putnam, 1990; Kitcher, 1993; Laudan, 1996; Cartwright, 1999) se compone por varias tesis que pretenden distinguir al realismo de cualquier otro enfoque no realista. Psilos (2000) las menciona:

1. La *tesis metafísica*, que afirma que el mundo tiene una estructura definida independientemente de la mente humana.
2. La *tesis semántica*, que señala que las teorías científicas deben tomarse como descripciones del mundo observable y no observable. Además, pueden ser verdaderas o falsas, ya que los términos teóricos de las teorías hacen referencia al mundo factual. Esto es: si las teorías científicas son verdaderas, los entes inobservables postulados a que se hace referencia también lo son.
3. La *tesis epistémica*, que afirma que las teorías científicas maduras y predictivamente exitosas están bien confirmadas y son una descripción aproximadamente verdadera del mundo. Por tanto, los entes propuestos en ellas se dan en el mundo.

La primera tesis pretende distinguir el realismo científico de cualquier otra descripción científica en la ciencia. Su carácter es claramente metafísico, pues estrictamente no podemos probar que el mundo tenga una estructura independiente de la mente humana; el realista científico decide aceptarlo como dado. Asegura que si los entes inobservables de las teorías existen, lo hacen independientemente de nuestra capacidad de conocerlos o verificarlos.

La segunda tesis hace diferente al realismo científico del instrumentalismo y de otras descripciones reduccionistas empíricas. La tercera busca distinguir al realismo científico de formas agnósticas o escépticas del empirismo; asimismo, implica que la ciencia contiene verdades teóricas y observacionales. Por ejemplo, vemos fenómenos eléctricos que son descritos a partir de la teoría electromagnética de Maxwell, la cual parte de conceptos teóricos como cargas, campos, corrientes y otros. El realista científico considerará que los referentes de esos términos teóricos son parte de la realidad, mientras que el anti-realista lo negará, sin que ello plantee que la teoría electromagnética deje de ser empíricamente útil. Muchos realistas preguntarán: ¿cómo es que teorías científicas que implican entes no observables tales como quarks, moléculas y campos tengan tanto éxito predictivo si no describieran por lo menos de modo aproximadamente correcto el mundo no observable? El anti-realista señalará que así como las teorías en el pasado tenían éxito, a pesar de que no eran correctas descripciones de la realidad, no es irrazonable suponer que lo mismo pueda ocurrir con las teorías científicas actuales.

Algunos puntos de vista, como el expresado en *The scientific image* (Van Fraassen, 1980), presentan un reto al realismo científico y argumentan a favor de un nuevo empirismo, llamado constructivo. Van Fraassen ve al empirismo y al realismo científico en puntos opuestos y diferentes en cuanto a los objetivos de la ciencia. Los empiristas, afirma, tienen como objetivo para la ciencia la anticipación a la naturaleza y producir teorías que den predicciones exitosas, mientras que los realistas científicos ven a la ciencia como algo que describe las cosas del mundo como realmente son. El empirismo generalmente se ha opuesto no al realismo científico, sino al racionalismo, como una teoría sobre las fuentes de nuestro conocimiento. De acuerdo con Van Fraassen, para los realistas científicos las teorías establecidas y aceptadas deben ser consideradas como literalmente verdaderas y no sólo como modelos útiles para predecir lo que ocurrirá o para salvar a los fenómenos. Los empiristas conciben a las teorías científicas sólo como modelos de la realidad observable y no observable que son empíricamente adecuados. No importa si son ciertos.

El realismo científico asegura que la ciencia se propone proporcionar en sus teorías una historia literalmente verdadera de lo que es el mundo, y que aceptar una teoría científica implica la creencia de que la descripción es verdadera. Podemos notar que el concepto de verdad se emplea en el sentido de correspondencia: algo es verdadero si corresponde a la realidad. Por otra parte, el empirismo constructivo dice que el objetivo de la ciencia es ofrecer teorías que únicamente son empíricamente adecuadas, y que aceptar una teoría implica que es empíricamente adecuada. Por su parte, Ellis (1999) propone la tesis pragmática, la cual formula que la ciencia pretende proporcionar la mejor descripción posible de los fenómenos naturales, y que aceptar una teoría científica implica la creencia de que pertenece a tal descripción. El problema del pragmatismo de Ellis radica en que no hay un criterio para decidir cuál descripción es la mejor. Sin embargo, cabe señalar que este problema preocupa más al filósofo de la ciencia que al científico.

El realismo científico señala, como una de sus afirmaciones centrales, que las leyes y teorías deben ser comprendidas realistamente y no instrumentalmente; es decir, las leyes y teorías son genuinas afirmaciones sobre la realidad, no se limitan a ser instrumentos de predicción más o menos exitosos. Por su parte, el realismo científico asevera que las leyes y teorías científicas son objetivamente verdaderas o falsas; una afirmación es objetivamente verdadera si y sólo si corresponde a la realidad. Podemos notar que la teoría de verdad de correspondencia es crucial para el realismo científico.

Los anti-realistas dicen que el contenido de una teoría científica abarca sólo un conjunto de afirmaciones que pueden ser apoyadas por observaciones y experimentos. En su opinión, las teorías sólo son instrumentos que vinculan las predicciones y resultados de las observaciones y experimentos; por tanto, no tiene sentido afirmar que una teoría sea verdadera o falsa. Sin embargo, Van Fraassen es un anti-realista que no es un instrumentalista, ya que sostiene que las teorías pueden ser verdaderas o falsas dentro de la postura de empirismo constructivo. El anti-realismo pretende limitar la ciencia a las afirmaciones que pueden ser sustentadas y, de este modo, evitar especulaciones injustificadas. El anti-realista supone que es posible distinguir entre el conocimiento observacional y el teórico; el hecho de que una teoría sea exitosa no indica que sea verdadera.

En resumen, para muchos los argumentos más importantes del realista y el anti-realista son los siguientes: el realista señalará el éxito predictivo de las teorías científicas como prueba de que las teorías no son sólo herramientas de cálculo, sino verdaderas descripciones del mundo. A esto, el anti-realista señalará que muchas teorías científicas predictivamente exitosas son ahora consideradas por los realistas como falsas. El primer argumento mencionado, frecuentemente llamado el último argumento, es también conocido como el de no milagros, pues esencialmente afirma que sería un milagro o coincidencia de escala cósmica que una teoría haga tantas predicciones empíricas correctas –por ejemplo, la teoría general de la relatividad o la teoría cuántica de la luz– sin que lo que la teoría dice sobre la estructura fundamental del universo sea correcto o esencialmente correcto. En estricto rigor lógico, se debe admitir que del éxito de la ciencia no se puede inferir el realismo científico de manera válida.

3.2. *Realismo y anti-realismo en la matemática*

El realismo (con mayor precisión decimos realismo en ontología) es el punto de vista según el cual algunos objetos matemáticos existen objetiva e independientemente del matemático que los concibe (Aboites, 2004; Shapiro, 2000; George & Velleman, 2002; Körner, 1960; Anglin, 1994). Por objeto matemático se entiende a aquellos acausales, eternos, indestructibles y que no forman parte del espacio-tiempo del mundo externo. El número 5 o el conjunto de los números naturales son ejemplos de lo que el realista considerará como ejemplos de objetos acausales, eternos e indestructibles.

El idealista estará de acuerdo en que los objetos matemáticos existen, pero sostendrá que dependen de la mente humana. Un idealista sostendrá la afirmación si no hubiera mentes, no habría objetos matemáticos, y el realista en ontología la negará. Ahora bien, la postura llamada platonismo es realismo en ontología, pues considera a los objetos matemáticos como ideas platónicas porque comparten el ser: son acausales, eternos, indestructibles y no forman parte del espacio-tiempo. Una pregunta importante surge: ¿cómo es posible para la mente humana obtener conocimiento de objetos acausales, eternos, indestructibles y ajenos al espacio-tiempo? Más aún, ¿cómo dichos objetos pueden estar relacionados con el mundo externo y nos permitan su descripción? Desde esta perspectiva, la matemática parece a priori e independiente de la experiencia humana, lo cual no sería aceptado por un anti-realista.

El realismo en valor de verdad sostiene que las afirmaciones matemáticas tienen un valor objetivo de verdad independiente de las mentes, lenguajes y convenciones de los matemáticos. El anti-realismo en valor de verdad afirma que si las proposiciones matemáticas tienen valores de verdad éstos serán dependientes de la mente del matemático. La relación entre el realismo en ontología y el realismo en valor de verdad se discute con mayor detalle en Benacerraf (1973).

Es posible que en la actualidad el platonismo sea más frecuente entre los matemáticos que entre los filósofos. Platón, quien era un realista en valor de verdad (al igual que muchos matemáticos), sostuvo que las proposiciones de la geometría eran objetivamente verdaderas o falsas independientemente de la mente de los matemáticos. Por tanto, pensó que la geometría estaba constituida por un mundo de objetos que existían independientemente de la mente humana; de hecho, Platón llevó el argumento de un realismo en valor de verdad a un realismo en ontología. Para él, los objetos geométricos no son físicos, sino eternos e inmutables, lo cual concuerda con las ideas del mundo platónico; entonces, la geometría no describe lo que existe en el mundo real. En el diálogo Thetetus de Platón se afirma que la aritmética, como la geometría, se aplica al mundo material sólo de manera aproximada. A manera de ejemplo, frecuentemente se menciona que el punto tangente entre un círculo y una línea existe matemáticamente, pero nunca en el mundo real.

3.3. *Experiencia y problemas ante grupo*

3.3.1. *Realidad del mundo externo*

La discusión del realismo y anti-realismo en la física surge con una exposición del pensamiento filosófico de David Hume (1993). En particular, se subraya que Hume sustenta todo conocimiento en la experiencia sensible; empero, a diferencia de Locke (1997), Hume distingue que las percepciones pueden ser de dos clases: las impresiones, que son recibidas a través de los sentidos, y las ideas, que son imágenes borrosas de las impresiones. El empirismo de Hume se basa en la premisa de que una idea es objetiva sólo si está fundamentada en una impresión, y toda idea que no provenga de una impresión no es real. Con el fin de disipar problemas sobre la interpretación de impresiones e ideas se discuten ante el grupo ejemplos de impresiones, como los siguientes:

a. *Una piedra*. La impresión de “piedra” tiene su origen en el hecho de que es captada por los sentidos de la vista y del tacto.

b. *Un alimento salado*. La impresión de “salado” surge del hecho de que es captado por el sentido del gusto. Se enfatiza que, de acuerdo con Hume, la idea de “salado” tiene su origen en la impresión de lo salado. Una persona que no haya tenido la impresión de lo salado tampoco puede tener la idea de lo salado.

A partir de tales ejemplos es viable discutir con el grupo el hecho de que, según Hume, no podemos tener ideas de términos como Dios, alma, espíritu y otros de índole metafísica, ya que no existe ninguna impresión asociada con esas nociones.

Con la anterior exposición queda preparado el camino para discutir la distinción que establece Hume entre las percepciones y las cosas existentes del mundo externo, concluyendo que lo último no es comprobable; es decir, se llega al escepticismo. De acuerdo con este pensamiento, un individuo puede afirmar que percibe algo, pero de ahí no se desprende que ese algo exista en el mundo externo. Una pregunta, famosa en los cursos de metafísica de la Universidad de Londres, es la siguiente: ¿Cómo podría probar que usted no es un cerebro metido en un barril? Al llegar a la discusión de esta pregunta con el grupo, al igual que con los alumnos de filosofía en Londres, la película Matrix (Matrix, 1999), dirigida por Andy y Larry Wachowsky, puede ser un excelente apoyo pedagógico para generar interrogantes sobre la realidad del mundo externo, con importante sentido filosófico.

3.3.1.1. *Puntos guía para discusión y análisis de problemas ante el grupo*

- Discutir por medio de ejemplos que nuestro conocimiento del mundo externo proviene de nuestros cinco sentidos.
- Discutir con el grupo: ¿Cuál es la relación precisa entre lo que yo pienso que veo y lo que está frente a mí?
- Discutir: ¿Los objetos continúan existiendo aun cuando nadie los observe?
- Discutir la pregunta: ¿Es sostenible la afirmación de Berkeley (1999) en el sentido de que lo que llamamos 'cosa' no es más que una colección de ideas? (la referencia es el libro Principios de filosofía, de Berkeley).
- Discutir la pregunta: ¿Es sostenible la afirmación de Descartes (1993) en el sentido de que podríamos estar soñando y, por tanto, no podríamos distinguir un sueño de la realidad? (hay que apoyarse en el libro Meditaciones metafísicas de Descartes).
- Discutir: ¿Qué argumentos presenta el escéptico al realista de sentido común?
- Bertrand Russell (1912) argumenta que el mundo pudo haber sido creado con nuestras memorias intactas hace sólo cinco minutos. ¿Cómo responderíamos a esto? (la base es el libro Principios de filosofía, de Russell)
- ¿Qué afirmación le parece correcta: pienso luego existo o pienso luego algo existe? Note que la segunda afirmación no prueba que yo exista, sino que algo existe.
- Discutir y elaborar una tabla con las diferencias entre el realismo de sentido común, el realismo representativo, el realismo causal y el idealismo, así como las principales objeciones a cada uno de ellos.

3.3.2. *Interpretaciones de la verdad*

Debido a que a lo largo del curso constantemente se discute y cuestiona la verdad de innumerables afirmaciones, hay una sesión en la que se debate el concepto de verdad. Todas las personas, de modo natural e intuitivo, hablan de la verdad y la aplican a infinidad de situaciones. Los padres, la escuela y la religión enseñan a hablar con la verdad y se repite que es una importante virtud en la vida. Pero, ¿qué cosa es 'la verdad'? ¿Qué queremos decir cuando afirmamos que algo es verdad?

El curso muestra que en el estudio de la filosofía, la lógica y la matemática hay algunos de los mejores y más interesantes intentos por explicar qué queremos decir cuando afirmamos que algo es verdad. Algunas de las más importantes teorías sobre la verdad que de modo elemental expone y discute el profesor ante los alumnos son:

i) La teoría pragmática de Peirce, James y Dewey (Peirce, 1998; James, 2003; Dewey, 2007) que influyó fuertemente en Quine, Dummett y Davidson (Shapiro, 2000).

ii) La teoría de coherencia de Bradley y Rescher (Bradley, 1922; Rescher, 2003)

iii) La teoría de correspondencia de Russell y Wittgenstein (Russell, 1912; Wittgenstein, 2001) que ejerció gran influencia en Austin (1975).

iv) La teoría de redundancia de Ramsey (1990).

v) La teoría minimalista de Horwich (1987).

vi) La teoría semántica de Tarski (1994).

En las tres primeras teorías, la verdad se considera como una propiedad sustantiva, mientras que en las tres últimas es un concepto que se introduce por conveniencia lógica o retórica. Durante la exposición se hace un énfasis particular en las cuatro primeras. Un libro recomendable para ahondar en dichos temas es Philosophy of logics, de Sussan Haack (1978); sin embargo, para el grupo será más práctico visitar los sitios web de la Enciclopedia de Filosofía de la Universidad de Stanford (http://plato.stanford.edu/entries/truth/), o la enciclopedia Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Truth).

En la teoría pragmática de la verdad el sentido de un concepto se da en referencia a sus consecuencias prácticas. James afirma que no hay diferencia si no hace diferencia. Se afirma que la forma correcta de preguntar sobre la verdad de algo es averiguar qué diferencia hay por el hecho de que algo sea verdad. En su esencia, la verdad tiene que ver con las consecuencias prácticas y no con ningún otro tipo de consideraciones. Debido a que, según esta teoría, "la verdad es lo que en la práctica funciona" hay serias objeciones. Un buen ejemplo para discutir en clase es el enfoque pragmático de Platón acerca de las creencias religiosas; en La República, Platón dice que aunque las creencias religiosas son falsas deben promoverse entre la población porque estimulan la buena conducta de los ciudadanos.

La teoría de la coherencia asegura que una afirmación es verdad cuando tiene coherencia con el resto de las afirmaciones de un sistema o conjunto de creencias. Como veremos, dicha teoría es muy apreciada por los matemáticos. Por ejemplo, la afirmación “en la geometría euclidiana, la suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180 grados” resulta verdadera debido a que es coherente con el conjunto de afirmaciones de dicha geometría; es decir, no entra en contradicción con ellas.

De acuerdo a esta teoría, cada afirmación implica y es implicada por todas las demás en un sistema, pero hay que precisar ante el grupo que, al hablar de afirmaciones cotidianas, con frecuencia es difícil observar cómo interpretar la coherencia. Es difícil notar cómo la afirmación “hoy mi vecino trae una playera blanca” implica y es implicada por todas las demás afirmaciones del mundo. El problema fundamental con la teoría de la verdad de la coherencia estriba en que todo sistema debe ser completo y libre de contradicciones. Aquí podemos preguntar a los alumnos: ¿Cómo podemos saber que un sistema de proposiciones es completo? ¿Cómo podemos garantizar que una nueva proposición no entrará en contradicción con el resto? El hecho de que el alumno reflexione sobre tales preguntas es además un excelente antecedente y un estímulo intelectual para la posterior discusión de los teoremas de Gödel. Por su parte, Bertrand Russell afirma que el problema de la teoría de la coherencia es que no puede distinguir entre la verdad y un cuento de hadas consistente. La astrología resulta ser un sistema de verdades tan consistente como la novela El señor de los anillos, de Tolkien.

La teoría de la correspondencia plantea que la verdad consiste en una relación entre afirmaciones y hechos. Por tanto, la proposición el gato está en el tapete es verdadera si se puede establecer una relación entre los nombres usados en la proposición y los hechos del mundo. Una objeción es que, al hablar de situaciones de mayor complejidad, no queda claro entre qué cosas se establece dicha relación; por ejemplo, ¿cuáles son los hechos relacionados con la afirmación ‘la situación política es complicada’?

Finalmente, las teorías de redundancia, minimalista y semántica consideran que la verdad es un asunto lógico, retórico o formal. Por ejemplo, para la teoría de redundancia decir que una afirmación arbitraria “P” es verdad equivale simplemente a sostener la afirmación “P”. Un posible ejemplo ante el grupo es la afirmación “es verdad que hoy está nublado”, la cual equivale a “hoy está nublado”. De acuerdo con esta teoría de verdad, mencionar que “es verdad P” sólo cumple un propósito retórico o enfático, pues igualmente podemos eliminar la expresión “es verdad” y dejar la afirmación “P”. Debido a esto, Ramsey sugiere eliminar por redundante e innecesaria la expresión “es verdad”.

3.3.2.1. *Puntos guía para discusión y análisis de problemas ante el grupo*

- Discutir con el grupo la pregunta: ¿Habiendo diversas teorías de verdad, tiene sentido hablar de ‘la verdad’?
- Discutir: ¿En la vida cotidiana cuál teoría de la verdad es la más empleada?
- Analizar: ¿Si una afirmación es verdadera en una teoría de verdad, es falsa en las otras teorías?
- A partir de ejemplos matemáticos concretos, como el teorema de Pitágoras, discutir: ¿Qué criterio de verdad se usa con más frecuencia en la matemática?

3.3.3. *Realidad en la matemática*

A partir de las preguntas formuladas por los alumnos durante el curso se observó que, en general, para ellos fue más fácil entender el realismo en la física que en la matemática. Esto probablemente se debió a que, al tomar un objeto físico, resulta claro en qué consiste la discusión sobre su existencia o no existencia. Incluso para algunos alumnos la discusión les pareció un tanto ociosa o ficticia hasta que los argumentos del anti-realista fueron presentados y discutidos con cuidado. Por otra parte, el debate del realismo en la matemática resultó en general más abstracto y complejo para los alumnos. Afirmar, como algunos de ellos hicieron, que el número 5 existía al igual que una silla o una piedra generó confusiones en el grupo, debido a que para la mayoría el número 5 tampoco existía, al verlo como una abstracción que dista de ser evidente.

En general, se nota que la posición ingenua –natural, intuitiva y sin reflexión– de los alumnos con respecto al mundo externo es realista, de ahí que el profesor tendrá que explicar con cuidado los argumentos del anti-realismo. Además, la posición ingenua de los alumnos con respecto a la matemática es en general idealista y anti-realista en valor de verdad; el problema del profesor estará en exponer con cuidado el realismo.

Ante el grupo la discusión de este tema se inició a partir de la lectura y discusión de algunos fragmentos de Platón –en particular de los diálogos Fedro, Menón y La República– y su teoría de las ideas, que es fundamental para explicar su epistemología y metafísica.

3.3.3.1. *Puntos guía para discusión y análisis de problemas ante el grupo*

- A partir de la lectura de fragmentos del diálogo Menón de Platón, donde se argumenta si la virtud puede ser enseñada, discutir su teoría de que aprender es sólo recordar lo que el alma ha aprendido en existencias anteriores. Leer y discutir en el pizarrón dibujando el ejemplo dado por Platón sobre el esclavo ignorante que, no obstante, resuelve un problema geométrico, será un excelente apoyo.
- Leer y discutir fragmentos del diálogo Fedro de Platón en el que, por primera vez en sus escritos, se menciona la existencia de un lugar de objetos totalmente diferentes a los que nos rodean y que se muestran a través de los sentidos. Los objetos platónicos, diferentes del cuerpo y el alma, son eternos y reciben el nombre de ideas; no son pensamientos ni creaciones de la mente, tienen un carácter eterno y su existencia no depende de ser conocidos o pensados.
- Aunque Platón en el diálogo Fedro no proporciona una lista de las ideas existentes, en el libro sexto de La República ofrece una respuesta general, aunque imprecisa, para identificar las ideas: “Siempre que un nombre es aplicado a diferentes cosas hay una idea que corresponde a ese nombre”. A partir de esta regla, con ayuda del profesor, los alumnos pueden proporcionar una lista de ideas platónicas que incluya no sólo objetos como camas, hombres, caballos, sino términos abstractos como justicia, belleza, virtud, al igual que términos y conceptos matemáticos como igualdad, cinco, etcétera.
- Listar y discutir con todo detalle los argumentos en que se basa el realismo, anti-realismo e idealismo en la matemática.
- Encontrar el punto de contacto entre la recta dada por la ecuación $y = x + 1$ y la circunferencia dada por la ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$, que tiene centro en el punto (2, 1) y radio igual a la raíz cuadrada de 2. La solución es que el punto de

contacto entre la circunferencia y la recta cae en el punto (1, 2). A partir de esto mostrar que no importa qué tan bien hecha se realice la gráfica de este problema ya sea en el pizarrón, una hoja o una pantalla de computadora; será imposible para cualquier humano ver que el lugar de contacto es única y exclusivamente un punto matemático ideal, como nos indica la respuesta matemática del problema.

4. LOGICISMO, FORMALISMO E INTUICIONISMO

Kant (2005) sostuvo que la matemática se conoce independientemente de la experiencia sensorial y, por tanto, es a priori; asimismo, que las verdades de la matemática no pueden ser determinadas a partir del análisis de conceptos, por lo cual son sintéticas. Las dos alternativas al enfoque kantiano son que la matemática es empírica y, por ende, a posteriori, o que la matemática es analítica. El primer punto de vista fue sostenido por John Stuart Mill en su obra *A system of logic* (1973), mientras que el segundo corresponde principalmente a la propuesta logicista de Frege (1879, 1884), que pretende reducir la matemática a lógica. Los movimientos neo-logicistas parten de dos premisas:

i) Una parte significativa de las verdades de las matemáticas se conocen a priori.

ii) Concierne a la matemática un mundo ideal de objetos que son objetivos y, en algún sentido, independientes de nuestra mente.

Desde luego, esta perspectiva enfrenta los mismos problemas que el realismo en ontología, ya que ¿cómo podemos conocer algo sobre un mundo de objetos abstractos y acausales? Actualmente, el proyecto neo-logicista continúa vigorosamente y se aplica a los números naturales y la aritmética básica. Una parte del trabajo contemporáneo fundamental radica en la extensión del logicismo hacia otras áreas de la matemática.

Otro importante enfoque en la matemática es el formalismo, el cual sostiene que la esencia de la matemática radica en la manipulación de símbolos; sólo se necesita proporcionar una lista de símbolos y las reglas permitidas por cualquier rama de la matemática para manipularlas. Esto agota todo lo que hay que saber sobre dicha rama de la matemática.

De acuerdo con el formalista, el tema de la matemática no es y no puede ser sobre “algo” o cualquier cosa que no sea símbolos gráficos y reglas para su manipulación. Tal enfoque tiene más aceptación entre matemáticos que entre filósofos de la matemática. Algunas formas radicales de formalismo sostienen que los símbolos matemáticos no tienen en sí mismos ningún sentido más allá del que tendrían las piezas de un tablero de ajedrez. Otras vertientes menos radicales aceptan que los símbolos matemáticos podrían tener algún sentido, pero es irrelevante para la práctica de la matemática. De manera clara, el formalismo resuelve o evita abordar difíciles problemas metafísicos y epistemológicos. Por ejemplo, a la pregunta ¿sobre qué trata la matemática? su respuesta es ¡sobre nada! A la pregunta ¿qué son los números, conjuntos, etcétera? da como respuesta ¡ellos no existen, o si existen podrían igualmente no existir! Y ante la pregunta ¿qué es el conocimiento matemático? contesta: ¡es el conocimiento de un juego basado en símbolos y reglas, o el conocimiento de los resultados obtenidos en ese juego!

Esto nos lleva a una interesante pregunta: ¿Si la matemática no es nada más que un juego, cómo es posible que este juego sea útil en la ciencia? O, dicho caricaturalmente: ¿Cómo es que el ‘inútil juego de la matemática’ tenga alguna aplicación en el mundo real? Desde este punto de vista, el formalismo es parecido a la posición anteriormente discutida, que en filosofía de la ciencia se conoce como instrumentalismo, la cual afirma que el conocimiento científico es nada más que un complejo instrumento para hacer predicciones sobre el mundo observable, sin que tengamos necesidad de creer que los entes teóricos propuestos por las teorías científicas sean reales. Desde luego, un importante problema que enfrentan los instrumentalistas es explicar porqué sus instrumentos funcionan tan bien. Desde el punto de vista del formalismo, la pregunta del porqué la matemática es útil parece intratable.

En su crítica al formalismo, Frege señala la condición necesaria para que el conocimiento matemático se eleve al rango de ciencia:

> ¿Por que pueden aplicarse las ecuaciones de la aritmética? Solamente porque ellas expresan pensamientos. ¿Cómo podríamos aplicar ecuaciones que expresan nada y que son nada más que un grupo de símbolos gráficos, que pueden transformarse en otros símbolos de acuerdo a ciertas reglas? Es solamente la aplicación de la aritmética al mundo la que la eleva del rango de juego, al rango de ciencia (Frege, 1892).

El formalista siempre puede responder que las aplicaciones no son parte de la matemática en sí misma, sino algo externo a ella. Sin embargo, Frege responde que el problema de la aplicabilidad de la matemática no desaparece sólo porque el formalista o el matemático rehúsen tratarlo. El formalista parece relegar el problema de la aplicabilidad de la matemática a los físicos, astrónomos, ingenieros, etcétera, pero ellos obviamente rechazan abordarlo, por lo cual queda en el limbo.

Una versión moderada del formalismo es el deductivismo de Hilbert, que expone en su libro *Grundlagen der Geometrie* (1899), donde afirma que la práctica de la matemática consiste en obtener las consecuencias lógicas de axiomas ininterpretables. La idea básica del deductivismo es ignorar las interpretaciones y concentrarse en las inferencias. Hilbert (1935) afirmó que en una axiomatización adecuada de la geometría uno debería ser capaz de sustituir los términos punto, línea y plano por mesa, silla y tarro de cerveza. Es decir, una vez que los axiomas han sido formulados, la intuición y la observación pueden ser eliminados porque no son parte de la matemática. Al igual que el formalista, el deductivista tiene respuestas claras para algunas preguntas filosóficas: ¿De qué se trata la matemática? ¡De nada! ¿Qué es el conocimiento matemático? ¡Es conocimiento sobre lo que se infiere de algo; de ahí que el conocimiento matemático es conocimiento lógico! ¿Cómo se puede aplicar una rama de la matemática? ¡La manera es encontrar interpretaciones físicas que hagan verdaderos los axiomas!

El requerimiento más importante a una rama de la matemática formalizada radica en que no debe permitir que se derive una fórmula que contradiga sus proposiciones iniciales. Una teoría formalizada T es consistente si no es posible derivar una fórmula contradictoria utilizando sus axiomas y reglas (por ejemplo, que resulten $0=0$ y $0\neq 0$). Kurt Gödel (1931, 1965), con sus teoremas de incompletes, mostró la imposibilidad del llamado Programa de Hilbert. Los dos teoremas de Gödel nos dicen en resumen que:

i) Si una teoría T es consistente, entonces hay una fórmula F que no es posible derivar en T

ii) Si una teoría T es consistente, entonces no se puede derivar dentro de T la afirmación de que T es consistente.

Por otra parte, el rechazo a ciertos modos de inferencia en la matemática generó la postura conocida como intuicionismo, que presentó L. E. J. Brower (1912). Como sabemos, la ley del medio excluido –o ley del tercero excluido– afirma que si P es una proposición, entonces P es el caso o P no es el caso, y se abrevia como P o no $-P$, o $P \vee -P$. Esta ley se encuentra íntimamente relacionada con el principio de bivalencia, que afirma que toda proposición es verdadera o falsa.

Los sistemas lógicos y matemáticos que incluyen la ley del medio excluido son llamados clásicos, mientras que los que la rechazan se les denomina intuicionistas. Por ejemplo, un intuicionista no aceptará la eliminación de la doble negación que permite inferir de la negación de la negación de P a P. Con la lógica intuicionista se puede inferir $no\ no-P$ de P, pero no al revés. Para Brouwer, cualquier proposición matemática legítima involucra directamente las habilidades mentales del ser humano; por tanto, aceptar el principio del medio excluido es reconocer un principio de omnisciencia que se encuentra más allá de la capacidad humana. Es decir, el principio del medio excluido permite afirmar que toda proposición puede ser probada o reducida al absurdo, lo cual sólo podríamos saber si fuéramos omniscientes.

Para un intuicionista, la matemática clásica introduce varios conceptos carentes de significado, como "el conjunto de puntos del espacio" o "el conjunto cuyos elementos son las funciones continuas de una variable", ya que nunca terminaríamos de construir tales conjuntos; entonces, no podemos hablar del conjunto. Desde el punto de vista de Brouwer, la lógica es sólo la codificación de las reglas usadas en la comunicación de la matemática; por tanto el logicismo y el formalismo ni siquiera tocan la esencia de la matemática. Sin embargo, este último punto no es aceptado por todos los intuicionistas. Arend Heyting (1953) desarrolló una formalización rigurosa para una lógica intuicionista llamada cálculo de predicados de Heyting. En contraste con Brouwer y Heyting, Michael Dummett (1973) se acerca al estudio de la lógica y la matemática desde un punto de vista lingüístico, al afirmar que *el significado de una proposición matemática está determinado por su uso*. Asimismo, sostiene que *debe haber una diferencia observable entre el comportamiento o capacidades de alguien que dice tener conocimiento del significado de una expresión y alguien que carece de él*.

4.1. *Experiencia y problemas ante grupo*

4.1.1. *Terminología kantiana*

Como introducción al tema de logicismo, intuicionismo y formalismo se exponen ante el grupo algunos elementos clave de la filosofía kantiana, los cuales son muy importantes para la filosofía de la matemática. De entrada, sabemos que un juicio analítico es aquel cuyo predicado está contenido en el sujeto. Un ejemplo sencillo para el grupo es "todo cuerpo ocupa un volumen". Se puede ver que el predicado "ocupa un volumen" pertenece al sujeto "cuerpo"; por tanto, es claro que no puede existir un cuerpo que no ocupe un volumen. La palabra cuerpo implica necesariamente el concepto de volumen. Por su parte, un juicio sintético es aquel cuyo predicado está fuera del concepto expresado en el sujeto. Un ejemplo sencillo para el grupo es “la silla es azul”, en el que se puede notar que el predicado “azul” no necesariamente pertenece al sujeto “silla”; es claro que el hecho de ser silla no implica el hecho de ser azul… ¡Hay sillas de todos colores! Además, sabemos que los juicios a priori son aquellos independientes de la experiencia, mientras que los juicios a posteriori sólo pueden fundamentarse con base en la experiencia sensible.

Kant se da cuenta que las afirmaciones de la ciencia deben estar constituidas por juicios sintéticos, no por juicios analíticos. Si sólo se ocuparan juicios analíticos no habría forma de garantizar el avance y progreso del conocimiento científico, pues éstos giran alrededor de sí mismos. También Kant repara que la ciencia debe estar formada por juicios a priori, ya que sólo así se garantiza la universalidad y necesidad de las afirmaciones científicas. Podemos ver que Kant ha desechado los juicios analíticos y los a posteriori, y ha dejado los sintéticos y los a priori.

Según Kant, los juicios científicos tienen que ser sintéticos para garantizar la progresividad del conocimiento y, al mismo tiempo, a priori, con el fin de garantizar su universalidad y necesidad. Las leyes de la ciencia, por ejemplo las tres leyes de la dinámica de Newton y la ley de gravitación universal, son para Kant una muestra de que el ser humano puede alcanzar, descubrir y conocer juicios sintéticos a priori. Entonces, ¿cuáles son las condiciones de posibilidad que tienen los juicios sintéticos a priori? ¿Cómo es posible que haya juicios que al mismo tiempo sean sintéticos (cuyo predicado está fuera del sujeto) y a priori (independientes de la experiencia)? ¿Cómo se logra una síntesis fuera de la experiencia sensible? ¿Cuál es la estructura del conocimiento humano que hace posible esa elaboración de juicios que, siendo a priori, no son analíticos, y siendo sintéticos, no son a posteriori? La respuesta a este problema la ofrece Kant en su libro Crítica de la razón pura, donde señala que las condiciones de posibilidad de los juicios sintéticos a priori son la materia del conocimiento (que viene de la experiencia sensible) y la forma del conocimiento (constituida por formas o categorías a priori).

La Crítica de la razón pura está dividida en tres secciones: estética, analítica y dialéctica. Cada una trata de responder la pregunta ¿cómo son posibles los juicios sintéticos a priori? La estética trascendental atiende a la interrogante ¿cómo son posibles los juicios sintéticos a priori en la matemática?; la analítica trascendental a ¿cómo son posibles los juicios sintéticos a priori en la física? y en la dialéctica trascendental Kant se cuestiona: ¿son posibles los juicios sintéticos a priori en la metafísica?

Para Kant, la matemática se basa en la aritmética y la geometría. Por ello, la respuesta que ofrece en la estética trascendental va en el sentido de que los juicios sintéticos a priori son posibles en la aritmética por la intuición de tiempo, y en la geometría por la intuición de espacio. Esto es de fundamental relevancia para iniciar la discusión sobre el logicismo.

Por otra parte, en la analítica trascendental la respuesta de Kant está basada en las doce categorías mediante las cuales podemos formular juicios sintéticos a priori en la física: tres son de cantidad (unidad, totalidad, pluralidad), tres de cualidad (realidad, negación, limitación), tres de relación (inherencia y subsistencia, causalidad y dependencia, comunidad), y tres de modalidad (posibilidad-imposibilidad, existencia-no-existencia, necesidad-contingencia). Esta es la base que le permite al hombre formular la ciencia moderna (no hay que olvidar que para Kant la ciencia moderna era fundamentalmente la física newtoniana). Por ejemplo, la primera ley de Newton –en la ausencia de fuerzas exteriores, toda partícula continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme respecto de un sistema de referencia inercial– nos permite concluir que todo objeto no perturbado que se mueva en el espacio lo hará eternamente y hasta el infinito. Es pertinente señalar ante el grupo que, de acuerdo con Kant, la formulación de esta ley, así como la conclusión a la que llegamos, sería imposible para el hombre si en su entendimiento no se encontraran las categorías mencionadas. Estas son conceptos no extraídos de la experiencia (no empíricos) que constituyen la condición de posibilidad, la cual nos permite pensar en objetos, razonar sobre ellos y formular juicios científicos universales, como las leyes de la ciencia.

4.1.1.1. *Puntos guía para discusión y análisis de problemas ante el grupo*

En esta parte hay que discutir sobre las siguientes preguntas:

- ¿Podemos pensar en la sucesión de números naturales sin recurrir, de manera simultánea, a la intuición de tiempo?
- ¿Podemos pensar en la existencia de un triángulo sin recurrir a la intuición de espacio?
- ¿Podemos cerrar los ojos y pensar en un objeto aislado de las intuiciones de espacio y tiempo?
- Si $A = B$ y $B = C$ entonces $A = C$. ¿El resultado anterior es

empírico o analítico?

- ¿Qué argumentos encuentran a favor de la afirmación de que la matemática es empírica?
- Sobre el teorema de Gödel, se sugiere debatir en clase que la existencia de un sistema incompleto no es en sí particularmente sorprendente. Por ejemplo, si se elimina el postulado del paralelismo de la geometría euclidiana se obtiene un sistema incompleto, el cual simplemente puede significar que no se han descubierto todos los axiomas necesarios.
- El formalismo, para muchos matemáticos, es un ideal de la actividad matemática creadora y un referente obligado del pensamiento científico y filosófico. Al discutir el formalismo podrá ser de gran utilidad pedagógica y los alumnos encontrarán divertido inventar las reglas de un juego y llevarlo a cabo. Se deberán investigar las conclusiones a que conducen las reglas planteadas y verificar si llevan o no a contradicciones en el juego.

5. SITUACIÓN ACTUAL

Hay dos escuelas de pensamiento en la actual filosofía de la matemática. Una sostiene que los números, conjuntos y otros objetos matemáticos existen independientemente de la mente, lenguaje y convenciones del matemático; la otra rechaza tal postura porque intenta reformular la matemática sin hacer uso de dichos términos. Los miembros de la primera escuela son realistas ontológicos y con frecuencia también realistas en valor de verdad. Aquí destacan Platón, Frege (1879, 1884), Gödel (1931, 1965), Quine (1981), Putnam (1967, 1971), Hale (1987) y Maddy (1990).

Como se mencionó anteriormente, Quine (1951) dice que la ciencia es solamente una herramienta de predicción; este es el criterio último para aceptar o rechazar cualquier teoría que en sí misma forma parte de una red de conocimiento. Quine argumenta que nosotros creemos en la existencia de objetos ordinarios como sillas o mesas por la misma razón; esto es, porque forman parte de esa red de conocimiento. Putnam (1971) señala que la física clásica y moderna constan de magnitudes medibles con números reales –volumen, velocidad, fuerza, presión– y que las relaciones entre dichas cantidades se expresan en términos de ecuaciones. A partir de ello, concluye que no es posible hacer ciencia sin números reales y sin funciones que expresen relaciones entre números reales; de ahí que los números reales existan, al igual que las funciones. Así, para que la ciencia tenga sentido debemos aceptar la existencia de funciones.

Los párrafos anteriores delinean el conocido argumento de indispensabilidad de Quine-Putnam. Una consecuencia de esto, relevante para los científicos interesados en la filosofía de la ciencia y las aplicaciones de la matemática, es que Quine sólo acepta como verdaderas las partes de la matemática que tienen aplicación científica, o que guardan alguna relación, por lejana que sea, con nuestra observación sensorial. El argumento de indispensabilidad tiene las siguientes premisas:

- El análisis real y las variables que emplea requieren de objetos abstractos llamados números reales. Si uno acepta la verdad de los axiomas del análisis real, entonces acepta la existencia de dichas entidades abstractas.
- El análisis real es indispensable para la física, ya que esta disciplina no puede ser formulada ni practicada sin el uso del análisis real.
- Si el análisis real es indispensable para la física, quien acepta la física como verdad en relación con el mundo material también admite la verdad del análisis real.
- La física es verdadera, o muy aproximadamente verdadera.

La conclusión del argumento señala que los números reales existen y lo hacen de modo independiente del matemático. Como hemos visto, es realismo en ontología.

Por su parte, los filósofos que niegan la existencia de objetos matemáticos son algunas veces llamados nominalistas, y representan una versión radical del anti-realismo en ontología. Dos de sus exponentes son Hartry Field (1980) y Charles Chihara (1990). A la postura de Field se le denomina ficcionalismo, pues supone que podemos pensar sobre los objetos matemáticos del mismo modo en que lo hacemos sobre el personaje de una obra de ficción; esto es, el número cinco y el conjunto vacío tienen el mismo estatus ontológico que el personaje Oliver Twist. Field considera que el único argumento serio para la existencia de entidades matemáticas es el de indispensabilidad de Quine-Putnam, aunque Field cuestiona su segunda premisa. Field acepta que la matemática es útil para la ciencia y el científico, pero rechaza que sea esencial para la ciencia, pues arguye que la ciencia puede ser realizada sin matemáticas. De ahí el título de su libro, *Science without numbers* (Ciencia sin números).

Ahora bien, el lenguaje nominalista no hace referencia a objetos abstractos como números o conjuntos, términos empleados en el lenguaje científico; incluso Putnam afirma que no es posible realizar ciencia en un lenguaje nominalista (1971). Sin embargo, Field intenta dar una formulación nominalista de las teorías científicas. Dado que sería demasiado presentar una versión nominalista de todas las teorías científicas (relatividad, mecánica cuántica, química, astronomía, economía, etcétera) Field se concentra en mostrar una formulación nominalista de la teoría newtoniana de la gravitación, donde maneja puntos y regiones de espacio-tiempo. Para Field, los puntos y regiones no son objetos matemáticos, sino términos concretos y no abstractos. Un ejemplo de la terminología nominalista de Field es el siguiente: ‘y ent zx’, que se interpreta como “x”, “y”, “z” son colineales, mientras que “y” está entre “x” y “z”. Field dice cómo formular surrogados de derivadas e integrales en su lenguaje de la mecánica nominalista.

Otro prominente anti-realista ontológico es Charles Chihara, quien prosigue una idea discutida por Russell en el sentido de que cualquier referencia a conjuntos debería ser eliminada y sustituida por propiedades o atributos; empero, hoy día muchos filósofos la consideran problemática. Por ejemplo, Quine (1941) argumenta que no hay criterios establecidos para distinguir atributos idénticos o distintos y propone que los atributos deben ser sustituidos por conjuntos, ya que comparten con los conjuntos y los números algunas características, como el no existir en el espacio-tiempo y no involucrarse en relaciones causales con objetos físicos. Entonces, ¿como podemos saber alguna o cualquier cosa sobre atributos? La propuesta de Chihara consiste en no hacer referencia a conjuntos, sino a expresiones abiertas; por ejemplo, en lugar de aludir “al conjunto de todos los autos” mencionamos la expresión abierta “*x* es un auto”.

Una reciente contribución a la filosofía de la matemática es la propuesta de John P. Burgess y Gideon Rosen (Burgess, 1997), quienes critican los intentos de elaborar matemáticas sin referencia a objetos abstractos como números y conjuntos. Se argumenta que, dado que no hay conexiones causales entre nosotros y las entidades matemáticas, el realista en ontología no puede explicar el conocimiento matemático sin postular las habilidades místicas que tenemos para comprender el universo matemático. Aquí se acepta como premisa que no podemos conocer nada de un objeto, a menos que haya una conexión causal entre nosotros y dicho objeto; sin embargo, nadie ha dicho qué tipo de relaciones causales se necesitan para lograr el conocimiento.

Otro enfoque es el estructuralismo sostenido por Benacerraf (1965), Hellman (1989), Resnik (1997) y Shapiro (1997), entre otros, cuya idea central postula que la matemática consiste en la ciencia de las estructuras. La mayoría de los estructuralistas son realistas en valor de verdad.

5.1. *Experiencia y problemas ante grupo*

5.1.1. *Historia y filosofías de la matemática*

Howard Eves (1990) menciona que una filosofía puede ser considerada como una explicación que intenta proporcionar algún sentido al desorden natural que forma el conjunto de nuestras experiencias. Desde tal punto de vista, es posible tener filosofía de casi cualquier cosa: del arte, de la vida, de la religión, de la educación, de la sociedad, de la historia, de la ciencia, de la matemática e incluso de la filosofía misma. Una filosofía sería resultado del proceso de refinar y ordenar experiencias y valores, de buscar relaciones entre elementos que ordinariamente se pensaba que eran ajenos y de hallar diferencias entre elementos que se pensaba eran iguales. Una filosofía de la matemática, en su esencia, consiste en un intento por reconstruir una masa caótica de conocimiento matemático acumulado durante siglos. El objetivo es darle orden y sentido.

Por supuesto, toda filosofía también depende del tiempo. Una filosofía particular, después de un lapso, puede ser vista como anacrónica o alterarse a la luz de nueva información. Es importante en un curso de filosofía de la matemática que el alumno tenga una idea razonable sobre la evolución del conocimiento matemático en la historia de la humanidad y ser capaz de asociarlo a las diferentes filosofías de la matemática.

5.1.1.1. *Puntos guía para discusión y análisis de problemas ante el grupo*

- ¿Es la ciencia sólo una herramienta de predicción? Para responder a esta interrogante resultará muy útil que el grupo investigue qué cosa es el instrumentalismo. También la lectura del libro El carácter de una ley física, de Richard Feynman, puede ser usado para motivar una ágil discusión.
- Aplicar el argumento de indispensabilidad de Quine-Putnam a una teoría científica concreta y discutir lo siguiente: la ciencia aristotélica prácticamente no empleaba matemática. ¿Sería correcto

decir que Aristóteles fue anti-realista?

6. APLICACIÓN DE LA MATEMÁTICA AL MUNDO

En esta sección se discuten algunos aspectos filosóficos vinculados con la descripción matemática del universo. A lo largo del curso se tomaron tres ejemplos que sirvieron como base para la discusión de realismo y anti-realismo científico y matemático:

i) La descripción matemática del sistema solar, en el que se debaten los modelos geocéntrico y heliocéntrico. El geocéntrico expone la idea de epiciclo, tal como fue propuesta para salvar a las observaciones astronómicas; el heliocéntrico presenta el desarrollo histórico a partir de Copérnico, así como el sustento matemático y astronómico dado por Kepler, Newton y Halley, entre otros.

ii) La descripción matemática del átomo y la mecánica cuántica, en el que se discuten los resultados de Rutherford y Planck que llevaron al modelo atómico de Bohr y al desarrollo de la mecánica cuántica por Schrödinger, Heisenberg, Born y otros prominentes científicos.

iii) La descripción matemática de las ondas electrómagnéticas. En este caso, a partir de los resultados de Ampere, Gauss y Faraday, se exponen las leyes de Maxwell, indicando que su análisis implica la existencia de ondas electromagnéticas cuya distribución espacial está dada por la ecuación de Helmholtz.

A lo largo de esta sección se responden –hasta donde es posible– las preguntas siguientes: ¿Qué es la descripción matemática de un acontecimiento físico? ¿Cómo es que los objetos matemáticos se relacionan con el mundo físico, de modo que las aplicaciones de la matemática al mundo son posibles? ¿Por qué la matemática es esencial para la ciencia? ¿Cómo es que las construcciones mentales de la matemática nos permiten clarificar los hechos del universo externo? ¿Cómo puede un hecho matemático servir de explicación para hechos físicos? ¿Todo lo que es posible deducir de un modelo matemático debe ocurrir en el mundo? ¿Todo lo que ocurre en el mundo tiene una descripción matemática? ¿Cómo es que ecuaciones frecuentemente obtenidas con tantas suposiciones irreales o ficticias proporcionen una descripción empíricamente verificable en muy alto grado?

En este trabajo sólo se detalla la exposición del tercer tema, que concierne a las ondas electromagnéticas. Por tanto, a lo largo de esta sección cada una de las preguntas anteriores es vista en referencia a la descripción matemática de las ondas electromagnéticas. Como veremos, la respuesta a muchas preguntas filosóficas frecuentemente no es única, con lo cual se hace patente tanto la labor del filósofo como la riqueza de la filosofía.

Como sabemos, el espectro de ondas electromagnéticas se extiende desde los rayos gama, rayos X, luz ultravioleta, luz visible, infrarrojo, micro-ondas y ondas de radio. Las ondas electromagnéticas son uno de los más importantes fenómenos de la naturaleza; por ellas conocemos el mundo visible y el universo microscópico y macroscópico.

Aunque hemos escrito las ecuaciones a que hace referencia el texto, su comprensión matemática es innecesaria para seguir la argumentación. La descripción de un campo electromagnético usando los vectores de campo eléctrico E y campo magnético H está dada por las ecuaciones de Maxwell (Born, 1993; Landau, 1981):

$$\nabla \times E = -\mu_{\circ} \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\nabla \times H = \varepsilon_{\circ} \frac{\partial E}{\partial t} + J \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\circ}} \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \qquad (4)$$

Donde σ y J representan la densidad de carga y corriente en el medio, y ε_o μ_o la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío, respectivamente.

Estas ecuaciones representan en el orden dado:

i) La ley de inducción de Faraday, que postula que el cambio en el tiempo de un campo magnético, descrito por el lado derecho de la ecuación 1, producirá un campo eléctrico que describe el lado izquierdo de la misma ecuación.

ii) La ley de Ampere, que dice que un campo magnético, descrito por el lado izquierdo de la ecuación 2, será producido siempre que se tenga una corriente eléctrica o se dé el cambio en el tiempo de un campo eléctrico, descrito por el lado derecho de la ecuación 2.

iii) La ley de Gauss, que establece que toda densidad de carga eléctrica, descrita por el lado derecho de la ecuación 3, generará un campo eléctrico, descrito por el lado izquierdo de la ecuación 3.

iv) La ecuación que establece la no existencia de monopolos magnéticos; esto es, que los campos magnéticos, descritos por el lado izquierdo de la ecuación 4, no requieren para ser generados de monopolos magnéticos. Por eso, el lado derecho de la ecuación 4 está igualado a cero.

Si se considera un medio con densidad de carga y corriente cero (σ = 0, J = 0) es fácil obtener, a partir de las ecuaciones anteriores, las dos ecuaciones de onda para los campos E y H:

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (5)$$

$$\nabla^2 H = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \qquad (6)$$

Estas ecuaciones son importantes porque muestran que, en ausencia de cargas y corrientes, los campos eléctricos y magnéticos pueden oscilar y propagarse como ondas electromagnéticas en el espacio vacío a la velocidad *c* (la de la luz).

Las ecuaciones de onda se pueden escribir para una, dos o tres dimensiones espaciales. Por ejemplo, la oscilación de una cuerda se describe en una dimensión espacial; la oscilación de la membrana de un tambor, o de la superficie de agua cuando cae una piedra en un lago, se da en dos dimensiones espaciales, mientras que las ondas electromagnéticas son ondas que oscilan en tres dimensiones espaciales. Es sabido que Hertz y Marconi hicieron experimentos que demostraron que las ondas de radio eran precisamente las ondas electromagnéticas que había predicho Maxwell, y que la luz, al ser una onda electromagnética, se describía por las mismas ecuaciones.

Los campos eléctrico y magnético E y H son funciones del espacio y del tiempo. Si se supone que los campos E y H pueden escribirse como el producto de una función que depende exclusivamente del espacio *D* (función de espacio), y otra que del tiempo *F* (función del tiempo), tenemos que los campos eléctrico y magnético podrán escribirse como:

E (función del espacio-tiempo)= *D* (función del espacio) × *F* (función del tiempo)

Si además suponemos que la variación temporal de los campos eléctrico y magnético es una perfecta oscilación sinusoidal, entonces resulta posible demostrar que la función *D*, que depende exclusivamente del espacio, satisface la ecuación de Helmholtz, una de las más bellas e importantes de la física.

$$\nabla^2 D + k^2 D = 0 \qquad (7)$$

Donde ∇^2 es el laplaciano; k el vector de onda cuya magnitud está dada por la relación de dispersión $k^2 = \omega^2 / c^2$; c es la velocidad de la luz, y ω la frecuencia de oscilación.

La ecuación de Helmholtz tiene una enorme importancia científica y filosófica, pues en principio cualquier función *D* que satisfaga dicha ecuación es una distribución espacial posible de campo para una onda electromagnética. Por ejemplo, la aproximación de ondas electromagnéticas planas infinitas representa una solución particular (D_1) para la función *D* de la ecuación de Helmholtz. Como su nombre indica, dichas ondas representan planos infinitos que viajan en el espacio a la velocidad de la luz. Otro ejemplo son las ondas electromagnéticas esféricas, que tienen otra solución particular (D_2) para la función D de la ecuación de Helmhotz, y se representan como ondas esféricas que parten de un origen y se expanden esférica y uniformemente al infinito. La luz que produce una bombilla eléctrica sería una representación experimental aproximada de estas ondas. Un tercer ejemplo son las ondas electromagnéticas cilíndricas, que dan una solución particular (D_3) para la función D de la ecuación de Helmholtz. Las ondas representan campos electromagnéticos cilíndricos que se expanden alejándose radialmente de un eje, que es donde se originan. Estas tres diferentes soluciones a la ecuación de Helmholtz son las que se emplean con mayor frecuencia en la descripción de ondas electromagnéticas.

Sin embargo, la invención del láser por Mainman (1961), durante el desarrollo tecnológico que ocurrió a mediados del siglo XX, enfrentó a los científicos a una nueva estructura espacial para la radiación electromagnética, ya que las descripciones de onda plana, esférica o cilíndrica no eran adecuadas. La búsqueda de una solución particular (D_4) de la ecuación de Helmholtz que pudiera describir un rayo láser dio como resultado las llamadas ondas gaussianas o de Hermite-Gauss, que son funciones matemáticas espaciales que solucionan la ecuación de Helmholtz y representan con mucha precisión la onda electromagnética de un haz láser.

En 1977, la película de ciencia ficción *Star Wars* enfrentó a los científicos con una interesante pregunta: ¿las espadas láser podrían existir en la realidad?, considerando su apariencia lumínica externa, no su ficticia capacidad destructiva. Es decir, ¿puede haber representaciones espaciales de ondas electromagnéticas que tengan la forma de una espada, o de un haz de luz de dimensión finita? La respuesta, en términos matemáticos, se traduce en los siguientes términos: ¿Existe una función matemática espacial D_5 (que es solución a la ecuación de Helmholtz) tal que muestre las características deseadas? Durnin (1987) mostró que la ecuación de Helmholtz aceptaba como solución a distribuciones de radiación electromagnética con las características deseadas. De inmediato, en varios laboratorios del mundo se inició el trabajo experimental para obtener las distribuciones de radiación electromagnética matemáticamente predichas y fueron observadas en el laboratorio. Estas ondas se conocen como ondas de Bessel no difractivas.

A partir de los ejemplos anteriores, podemos ahora preguntar: ¿Toda solución matemática de la ecuación de Helmholtz representa una distribución espacial de radiación electromagnética que puede existir en el mundo real? ¿Cómo podríamos afirmarlo? Lo que científicamente sabemos es que a toda distribución espacial de radiación electromagnética le corresponde una solución de la ecuación de Helmholtz. No se ha encontrado un contra-ejemplo. Sin embargo, no podemos afirmar que a toda solución posible de la ecuación de Helmholtz le corresponda una distribución de radiación electromagnética en el mundo real. Ni siquiera sabemos cómo podríamos probar que a toda solución matemática de la ecuación de Helmholtz le toca una distribución física real. Siempre sería imaginable un contra-ejemplo.

Resulta sorprendente que, a pesar de las aproximaciones involucradas para obtener las ecuaciones de onda y de Helmholtz, las observaciones experimentales concuerdan con la teoría. Por ejemplo, en los acercamientos para obtener las ecuaciones de onda se encuentra que no hay cargas libres ni corrientes, lo cual en la práctica nunca es verdadero, o por lo menos no podemos estar seguros de que sea verdadero, pues existe el fenómeno de creación-aniquilación aleatoria en el espacio de pares electrón-positrón. También se supone válido el hecho de que podemos realizar la separación de variables espaciales y temporales, aunque no es claro físicamente qué significa o porqué debe ser válido en el mundo real. Asimismo, para obtener la ecuación de Helmholtz se supone la existencia de oscilaciones sinusoidales ideales que, para concretarse, requerirían de tiempos infinitos para garantizar como espectro de

Fourier una delta de Dirac en frecuencia. Por tal motivo, son irreales.

A pesar de esto, la teoría electromagnética es una de las más sólidas y mejor establecidas de la ciencia moderna. ¿Qué quiere decir el científico al afirmar esto? La respuesta a dicha interrogante lleva a la discusión entre realismo y anti-realismo. El realista afirmará que la ciencia propone teorías sobre el mundo observable y no observable verdaderas, donde por verdadero o verdad podemos aceptar la noción de sentido común: correspondencia con los hechos. Por tanto, una teoría es verdadera si el mundo es como dice la teoría y falsa de otro modo. El anti-realista señalará que las teorías son nada más que instrumentos útiles para predecir resultados de observación; no deben ser interpretadas como verdaderas o falsas, sino ser usadas como meros instrumentos de predicción. Por eso, los anti-realistas frecuentemente son llamados instrumentalistas.

En el caso de la radiación electromagnética, el realista afirmará que los entes matemáticos y los campos eléctricos y magnéticos empleados son reales, mientras que el anti-realista dirá que la estructura matemática y el modelo de campos eléctrico y magnético empleado son sólo una herramienta de cálculo para predecir resultados. Para el anti-realista, cada resultado obtenido matemáticamente debe ser corroborado por la observación experimental; el realista, quien cree en la realidad del modelo, asegura todo lo que el modelo matemático del electromagnetismo prediga debe observarse en la realidad. Al obtener un resultado teórico a partir de las ecuaciones del electromagnetismo, el realista a priori sostendrá la existencia real del mismo, y el anti-realista actuará a posteriori, ya que esperará a la observación y verificación experimental del resultado teórico.

Para apoyar su postura, los anti-realistas arguyen que la historia de la ciencia ofrece innumerables casos donde teorías bien establecidas han sido demostradas como falsas, así como los entes a que hacían referencia. Sin embargo, muchas de esas teorías desechadas o rebasadas, durante algunos años, cumplieron en forma adecuada la función de ser instrumentos aproximados para predecir observaciones experimentales. En la historia de la óptica hallamos un ejemplo. La teoría de Newton propone que la luz está formada por haces de corpúsculos materiales, y la teoría de Fresnel considera a la luz como ondas transversales que se propagan en un éter. Dicho supuesto fue reinterpretado por la teoría electromagnética de Maxwell, donde las ondas mencionadas por Fresnel pasaron a ser campos eléctricos y magnéticos fluctuantes en el éter. Al inicio del siglo XX la idea del éter se eliminó, dejando sólo a los campos eléctricos y magnéticos. Finalmente, el carácter ondulatorio de la luz fue complementado con el carácter corpuscular de la teoría cuántica y la introducción del concepto de fotón.

Por tanto, primero la luz fue caracterizada a partir de partículas, luego como ondas en un medio elástico, de ahí a fluctuaciones de campos y finalmente como fotones. Cada una de estas caracterizaciones consta de un planteamiento matemático particular: ¿es entonces correcto hablar del modelo de la luz? De hecho, cada uno de los modelos o teorías anteriores fue adecuado para hacer un cierto número de predicciones, pero insuficiente para otras. Aunque muchos científicos no se preocupan por las cuestiones filosóficas, el argumento de indispensabilidad de Quine-Putnam es aceptado por la mayoría. Como hemos visto, esto es realismo en ontología.

7. EVALUACIÓN, ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA Y DIFICULTADES ENFRENTADAS DURANTE EL CURSO

Con frecuencia, los alumnos de un curso ven a la evaluación como la parte más desagradable, aunque es una de las más importantes porque se puede medir con razonable certeza el aprovechamiento y avance de los alumnos, así como valorar las virtudes o deficiencias del programa aplicado por el docente. De igual manera, es un medio para juzgar qué tan exitosamente fueron resueltas las dificultades enfrentadas por los alumnos y el docente.

A lo largo del curso se siguieron algunas sugerencias del profesor Gian-Carlo Rota (1997), científico y pedagogo del MIT, quien como producto de más de cuarenta y seis años de actividad docente publicó su artículo “Diez lecciones que desearía me hubieran enseñado”. De allí hemos tomado los siguientes aspectos:

Al dar cada clase:

a) Abordar un solo punto.
b) Nunca exceder el tiempo asignado para la clase.
c) Vincularse con el auditorio.
d) Siempre dejar tarea.

En el uso del pizarrón

a) Antes de cada clase, el pizarrón debe estar impecablemente limpio.
b) Se debe escribir en el pizarrón lo que deseamos que el alumno copie en su libreta.

Todos los puntos tienen una explicación basada en la experiencia y la práctica docente. Abordar un punto en cada exposición resulta fundamental para evitar la divagación. El profesor es responsable de garantizar que el grupo mantenga su atención en el análisis y discusión de un tema por clase. Difícilmente hay algo más complejo para un alumno que tratar de entender un tema, pues puede ser bastante abstracto cuando el profesor desvía la exposición del tema central.

No excederse del tiempo asignado a la clase es una muestra de respeto hacia el tiempo de los alumnos y ayuda a evitar que vean al docente y al curso con antipatía. Por su parte, la vinculación del profesor con el auditorio es probablemente una de las partes más importantes y difíciles, ya que el maestro debe lograr esto mediante la búsqueda por crear una atmósfera atractiva y estimulante. Se ha dicho, con razón, que el reto máximo de todo pedagogo es seducir intelectualmente a su auditorio y conseguir que se apasione tanto por el tema como el expositor mismo.

Ahora bien, dejar tarea luego de cada sesión es fundamental para lograr que el alumno mentalmente regrese y “re-viva” la exposición del profesor. Se sugiere que las tareas sean en lo posible cortas y exijan un amplio uso de internet. Finalmente, el uso del pizarrón resulta crucial para que el alumno visualice y estructure correctamente en su mente las ideas y conceptos que presenta el profesor, así como la correcta vinculación entre cada uno de ellos.

La estructura lógica de cada exposición es primordial, al igual que los ejemplos dados por el profesor, a fin de que el alumno comprenda y asimile el material expuesto de manera adecuada. En los apartados “Experiencia y problemas ante grupo” y “Puntos guía para discusión y análisis de problemas ante el grupo” hemos presentado con detalle algunos ejemplos. Otra parte fundamental de cada clase radica en la discusión que guía el profesor, donde los alumnos tienen que comentar, explicar y ejemplificar con sus palabras los temas vistos en clase. Sin duda, este es uno de los más grandes problemas que el docente y el alumno enfrentan, ya que el docente, siguiendo el método mayéutico de Platón a través de la formulación de preguntas, debe lograr que el alumno vincule conceptos e ideas pertinentes al expresar sus respuestas, mientras que el alumno necesita adquirir soltura en el manejo de conceptos abstractos, lo cual alcanza con la práctica oral y escrita de la discusión filosófica.

La evaluación del curso se hizo con presentaciones orales hechas por los alumnos y con exámenes donde se les pedía que redactaran ensayos sobre tópicos específicos. A continuación, presentamos cinco ejemplos representativos del trabajo efectuado por los alumnos (se respetó la redacción original):

Estudiante 1

En mi ensayo yo quiero analizar la siguiente paradoja: las esferas perfectas no se pueden tocar entre ellas.

Explicación de la paradoja: Esto se debe a que la circunferencia de una esfera es un círculo, el cual está hecho de puntos que no tienen área. Por tanto, dos esferas perfectas no se pueden tocar una a otra, ya que no podríamos poner en contacto un punto con otro punto debido a que carecen de área.

Yo argumento que los círculos no están en realidad hechos de puntos. Un punto es sólo una noción geométrica, no una parte constituyente de algo. Por tanto, una esfera podría ser descrita como una colección de puntos; sin embargo, es claro que no puede ser tal colección porque entonces la esfera no tendría área, al ser la suma de un infinito número de puntos sin área. Una explicación para salir de esta paradoja sería decir que una esfera real no es perfecta y tendrá a nivel molecular irregularidades. Esta solución no me agrada, pues deja a un lado la perfección del mundo de la matemática. Creo que el problema tiene que ver con las paradojas de Zenón. No deja de sorprenderme que en la matemática también haya paradojas.

Otra solución, que creo es la correcta, consiste en argumentar que si hay dos círculos, uno de radio R1 y otro de radio R2, entonces diremos que los círculos se tocan cuando sus centros se encuentran exactamente a una distancia R1 + R2. De este modo, el hecho de que dos círculos se toquen quiere decir que los dos círculos comparten un punto común. Ya no es necesario pensar que dos puntos de diferentes círculos se están tocando porque ahora sólo hay un punto común a ambos.

Estudiante 2

Yo quisiera explorar la idea de que la realidad última del universo es matemática. Sin embargo, creo que deberíamos decir que la realidad es descrita por la matemática, y no que la realidad es matemática. Algunas de las ciencias más exitosas como la astronomía, la física y la química son matemáticas. Pero, ¿qué cosa describe la matemática? En la primaria se nos enseñó que la base de la matemática son los conjuntos, pero yo creo que esto no es lo que describe la matemática; por ejemplo, las leyes de Newton no describen conjuntos. Aunque no sé lo suficiente, no creo que la mecánica cuántica o la relatividad tampoco describan conjuntos. Yo pienso que la base de la matemática son las relaciones; por ejemplo, las de espacio y tiempo, las de causalidad o las de similitud o diferencia. El problema de las relaciones es que no tienen color u otras cualidades, son cosas abstractas, mientras que los conjuntos sí pueden ser reales, como el de los números naturales.

Estudiante 3

A mí me intrigó la pregunta ¿hay límites a la racionalidad y la ciencia?, debido a que en una clase de física se nos explicó la imposibilidad de modelar algunos sistemas que contienen retroalimentación porque son no lineales y, por lo general, quedan descritos por la teoría del caos. Esto me dejó muy preocupada, pues parece implicar que un experimento puede dar una gran variedad de resultados. Yo me pregunto si ello representa un punto final y natural de la ciencia.

Por otra parte, esto más bien parece mostrar que hay límites al conocimiento humano y no somos omniscientes, en lugar de que hay "límites a la ciencia", en el sentido de límites externos a lo que puede ser descrito con la aplicación del método científico. Me parece que en este problema hay dos tipos de límites epistemológicos: los que nacen debido a razones matemáticas, como la teoría de caos, y los que son una barrera externa que restringe el progreso de la ciencia. Yo creo que no hay pruebas de que los límites de la ciencia sean de esta última forma.

Estudiante 4

Con el empleo de un monitor de video de color (por ejemplo, de 1000x1000 pixeles) se puede fácilmente generar todas las imágenes posibles, haciendo uso de un programa de computadora que sistemáticamente vaya modificando todas las combinaciones posibles para cada pixel en cada iteración. En las imágenes generadas será posible encontrar todas las que se podrían tomar con una cámara digital, así como todas las páginas de todos los libros imaginables escritos en todos los idiomas posibles y todas las imágenes aleatorias posibles, incluyendo las fractales. Si el programa de computadora funciona un tiempo suficientemente largo (podría ser muy largo) eventualmente las imágenes se repetirán.

Si se aplica esta idea al universo entero, el universo debe repetirse. El semestre pasado vimos que Nietzsche le llamó a esto el eterno retorno. Yo creo que la idea del eterno retorno está equivocada. Mi prueba se basa en considerar un universo formado por dos engranes: uno que da vueltas a la velocidad $2x$ y otro que da vueltas a la velocidad $3x$. En este caso las posiciones iniciales, sean las que sean, nunca se repetirán, pues no existe un múltiplo de 2 que sea divisible por 3, o viceversa.

Estudiante 5

A mí me pareció muy interesante la discusión sobre realismo y anti-realismo en la ciencia. Yo siempre creí que las teorías científicas eran una copia del mundo (realismo científico); sin embargo, cuando asistí a una conferencia sobre la teoría de cuerdas me pareció que todos esos modelos matemáticos tienen como propósito describir lo que observamos en el mundo, aunque no necesariamente la realidad sea como el modelo supone. Parece que cuando se habla de teorías muy simples, como poleas y palancas, es muy fácil caer en el realismo científico, pero entre más complicada es la teoría, como la de cuerdas, resulta cada vez más difícil ser realista.

Aunque los realistas usan el argumento de no milagros para concluir que el realismo es verdadero, a mí no me lo parece. No creo que el realismo se pueda probar experimentalmente o lógicamente. Sin embargo, quedarme sin el realismo científico me hace sentir que algo me falta. Es como ser huérfano… sería lo mismo que quedarme sin Dios. Creo que Santo Tomás de Aquino, mejor que cualquier otro teólogo, dijo que la prueba de la existencia de Dios se basa en la revelación sobrenatural y la fe, no en la experiencia o en la lógica. Yo me pregunto si no ocurre algo similar con el realismo científico.

El análisis comparativo de la experiencia, a partir de la calidad y profundidad de las exposiciones y trabajos hechos por alumnos de grupos que han llevado o no este curso de filosofía de la matemática, muestra de modo objetivo e indudable el beneficio para su madurez intelectual. Sabemos que, a pesar de la posible ingenuidad de sus planteamientos, lo más importante para la madurez filosófica –y académica– de un alumno es su capacidad para plantear preguntas y buscar respuestas por sí mismo. Creemos que esto definitivamente se logró con el curso. Los ejemplos anteriores exponen planteamientos de bastante complejidad científica y filosófica que normalmente no son abordados por alumnos de nivel medio superior, y fueron fuente de la más estimulante y provechosa discusión en clase.

8. CONCLUSIONES

La filosofía de la matemática es un área riquísima que se ubica en la intersección de la matemática, la ciencia y la filosofía. Durante el curso, los alumnos mostraron gran interés por los temas expuestos, lo cual se evidenció en la profundidad y pertinencia de sus cuestionamientos, las discusiones en clase y la calidad de los trabajos que entregaron.

A diferencia de un curso exclusivo y especializado de filosofía, física o matemática, la filosofía de la matemática obliga de modo natural a la interdisciplinariedad académica en el alumno, lo cual tiene suma relevancia, pues la realidad futura académica universitaria o laboral que enfrentará el alumno le exigirá una actitud interdisciplinaria.

La razón por la que la matemática es aplicable al mundo real, o que el mundo real se puede describir a partir del lenguaje de la matemática, no tiene una respuesta general; más bien queda aceptado como un hecho del mundo. El argumento de indispensabilidad de Quine-Putnam es normalmente aceptado por la mayoría de los científicos; a partir de este realismo en ontología muchos científicos aceptan y trabajan con entes y términos matemáticos. Como aquí se ha expuesto, la teoría electromagnética ofrece un claro ejemplo de teoría matemática que describe nuestras observaciones del mundo con alta precisión. Es una teoría científica que, como toda teoría empírica, requiere de una permanente corroboración experimental pues a priori no siempre resulta posible contestar a preguntas como las siguientes: ¿Todo lo que matemáticamente puede describir la teoría existe en el mundo real?, o ¿todo lo que existe en el mundo real puede ser descrito por la teoría? Esto confirma que toda teoría científica necesita permanecer vinculada con el mundo real.

El curso de filosofía de la matemática fue muy importante, tanto desde el punto de vista de la filosofía como desde el de la ciencia y la matemática. Desde el punto de vista de la filosofía, le permite al alumno discutir problemas de ciencia y matemática; asimismo, repercute de manera positiva en su formación, pues le permite apreciar con claridad que la filosofía es una disciplina que permite esclarecer con objetividad algunos problemas. Desde el punto de vista de la matemática, el curso hace que el estudiante aprecie en todo su valor el conocimiento matemático y su aplicación a la descripción científica del mundo.

AGRADECIMIENTOS

A la Mtra. Tatsiana Belahlauka, Subdirectora del Instituto Euro-Americano de la ciudad de Guanajuato, a sus asistentes y a los alumnos de esa institución por su colaboración. Se agradece además al Dr. Xavier Gómez Mont del CIMAT y al CONACYT que contribuyó a través del convenio 290520. Finalmente agradecemos a los revisores por sus observaciones y sugerencias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aboites, V. (2004). Filosofía de la matemática. *Colmena Universitaria* 33, 67-92.

Anglin, W. S. (1994). *Mathematics: a concise history and philosophy*. USA, New York: Springer.

Austin, J.L. (1975), *How to do Things with Words*. USA, Cambridge: Harvard University Press

Benacerraf, P. (1965). What numbers could not be. *Philosophical Review 74*, 47-58.

Benacerraf, P. (1973). Mathematical truth. *Journal of Philosophy 70*, 661-679.

Berkeley, G. (1999). *Principles of Human Knowledge*. Oxford World Classics.

Bradley, F.H. (1922). *The Principles of Logic*. UK, Oxford: Oxford University Press.

Brouwer, L. E. J. (1912). *Intuitionisme et formalisme*. Holland, Groningen: Noordhoff.

Born, M. & Wolf, E. (1993). *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. USA, New York: Pergamon Press.

Burges, J. & Rosen G. (1997). *A subject with no object: strategies for nominalistic interpretation of mathematics*. USA, New York: Oxford University Press.

Cartwright, N. (1999). *The dappled world. A study of the boundaries of science*. UK, Cambridge: Cambridge University Press.

Chihara, C. (1990). *Constructibility and mathematical existence*. USA, New York: Oxford University Press.

Descartes, R. (1993). *Méditations Metaphysiques*. Paris: Flammarion.

Dummet, M. (1983). The philosophical basis of intuitionistic logic. In P. Benacerraf & H. Putnam (Eds.), *Philosophy of Mathematics* (pp. 97-129). USA, New York: Cambridge University Press.

Durnin J. & Miceli, J :J. (1987). Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett. 58* (15), 1499-1501.

Ellis, B. (1999). What science aims to do. In D. Papineau (Ed.), *The Philosophy of Science* (pp. 166-193). UK, Oxford: Oxford University Press.

Eves, H. (1990). *Fundamental concepts of mathematics*. USA, New York: Dover Publications Inc.

Feynman, R. (1992). *The Character of a Physical Law*. Penguin Books

Field, H. (1980). *Science without numbers*. USA, New Jersey, Princeton: Princeton University Press.

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Deutschland: Halle [traducción al inglés: Bauer-Mengelberg, S. (1967). In J. Van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. USA, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press].

Frege, G. (1884). *Die grundlagen der aritmetik*. Breslau: Koebner. [traducción al inglés: Austin, J. (1960). *The foundations of aritmetic*. USA, New York: Harper].

Frege, G. (1892, 1903). *Die Grundgesetze der Arithmetik* (Vo1. I, 1892; Vol. II, 1903). Deutschland, Jena: Verlag Hermann Pohle [traducción al inglés: Furth, M. (1964). *The basic laws of arithmetic*. USA, California: University of California Press].

George, A. & Velleman, D. J. (2002). *Philosophies of mathematics*. USA, Malden, Massachusetts: Blackwell Publishers.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Montatshefte für Mathematik und Physicsk 37*. 173-198. [trad. al inglés: Van Heijenoort, J. (Ed.), *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. USA, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press].

Gödel, K. (1965). On undecidable propositions of formal mathematical systems. In M. Davis (Ed.), *The Undecidable: basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions*. USA, New York: Raven Press.

Haack, S. (1978). *Philosophy of logics*. USA, New York: Cambridge University Press.

Hale, B. (1987). *Abstract objetcts*. UK, London: Basil Blackwell.
Hellman, G. (1989). *Mathematics without numbers*. USA, New York: Oxford University Press.
Heyting, A. (1953). *Intuitionism: An introduction*. Holland, Amsterdam: North-Holland.
Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Deutschland: Leipzig. [trad. al inglés: Townsend, E. J. (1959). *Foundations of Geometry*. USA, Illinois: Open Court Publishing Company].
Hilbert, D. (1935). *Gesammelte Abhandlungen*. Deutschland, Berlin: Springer.
Hume, D. (1993), *An Enquiry Concerning Human Understanding* in Beauchamp, T. (Ed). Hackett
James, W. (2003), *The Will to Believe and other Essays*. USA, New York: Dover Publications
Kant, I. (2005). *Crítica de la razón pura*. Madrid, España: Taurus.
Kitcher, P. (1993). *The advancement of science*. USA, New York: Oxford University Press.
Körner, A. S. (1960). *The philosophy of mathematics*. UK, London: Hutchinson University Library.
Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1981). *Electrodynamics of continuous media*. USA, New York: Pergamon Press.
Laudan, L. (1996). *Beyond positivism and relativism*. USA, Boulder, Colorado: Westview Press.
Locke, J. (1997). *An Essay Concerning Human Understanding*. Penguin Classics
Maddy, P. (1990). *Realism in mathematics*. USA, New York: Oxford University Press.
Maiman, T. H., Hoskins, R.H., D´Haenens, I.J., Asawa, C.K. & Evtuhov, V. (1961). Stimulated optical emission in fluorescent solids. II. Spectroscopy and stiumulated emission in ruby. *Phys. Rev. 123* (4), 1151-1157.
Matrix (1999). Dir. Andy y Larry Wachowsky, Warner Bros
Mill, J. S. (1973). *A system of logic, racionative and inductive*. UK, London: Routledge and Keagan Paul.
Peirce, C.S. (1998). How to make our ideas clear. In *The Essential Writings*. Prometheus Books UK
Platón (2002). Thethetus. En *Diálogos* (Vol. V). Madrid, España: Gredos.
Psillos, S. (2000). The present state of the scientific realism debate. *The British Journal for the Philosophy of Science 51*, 705-728.
Putnam, H. (1990). *Realism with a human face*. USA, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
Putnam, H. (1983). Mathematics without foundations. In P. Benacerraf & H. Putnam (Eds.), *Philosophy of Mathematics*. USA, New York: Cambridge University Press.
Putnam, H. (1971). *Philosophy of logic*. USA, New York: Harper and Row.
Quine, W. V. O. (1941). *The philosophy of Alfred North Whitehead*. USA, New York: Tudor Publishing.
Quine, W. V. O. (1951). Two dogmas of empiricism. *The Philosophical Review 60*, 20-43. [compilado en *From a logical point of view*. USA, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press].
Quine, W. V. O. (1981). *Theories and things*. USA, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
Ramsey, F.P. (1990). *Philosophical Papers*. Cambridge University Press
Rescher, N. (2003). *Epistemogoly; An Introduction to the Theory of Knowledge*. State University of New York Press
Resnik, M. (1997). *Mathematics as a science of patterns*. USA, New York: Oxford University Press.
Russell, B. (1912). *The Problems of Philosophy*. London: Ed. Williams and Norgate
Rota, G. C. (1997). Ten lessons i wish i had been taught. *Notices of the AMS 44* (1), 22-25.
Shapiro, S. (1997). *Philosophy of mathematics: structure and ontology*. USA, New York: Oxford University Press.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics*. USA, New York: Oxford University Press.
Suppe, F. (1989). *The semantic conception of theories and scientific realism*. USA, Chicago, Illinois: University of Illinois Press.
Suppe, F. (1989). *The Semantic conception of Theories and Scientific Realism*. USA, Chicago: Chicago University of Illinois Press
Tarski, A. (1994). *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. UK, Oxford: Oxford University Press
Van Fraassen, B. (1980). *The scientific image*. USA, New York, Oxford: Clarendon Press.
Wittgenstein, L. (2001). *Tractatus*. Routledge. Classics

Autores

Vicente Aboites. Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato, Gto., México; abortes@yahoo.co.uk

Gilberto Aboites. Universidad Autónoma de Coahuila, México; g_aboites@yahoo.com.mx