Valoración de opciones asiáticas con *Mathematica*

Domingo Israel Cruz Báez

José Manuel González Rodríguez

Departamento de Economía Aplicada.
Universidad de La Laguna.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Campus de Guajara, s/n. Universidad de La Laguna.
38071. La Laguna. Tenerife.
E-mail: dicruz@ull.es; jomagon@ull.es

RESUMEN

En este trabajo, utilizando el programa *Mathematica*, proponemos una implementación del valor de una opción asiática aritmética, que tiene una gran precisión computacional. Para ilustrar este hecho, realizamos una comparativa con otros métodos bien conocidos en la literatura financiera.

Palabras Clave: Valoración de opciones, opción asiática aritmética, *Mathematica*.

Clasificación JEL.: G12, C63.

Clasificación AMS.: 91B28, 65K05.

1. INTRODUCCIÓN

Las opciones asiáticas han sido objeto de estudio por muchos autores y presentan importantes ventajas que no ofrecen otros derivados. Una de ellas es que al estar relacionadas con la media del subyacente permiten reducir los efectos de los movimientos del precio del activo cerca de la fecha de expiración; de esta forma se evitan las posibles manipulaciones en el precio [KemmaVorst]. Otra ventaja que debemos destacar es que como instrumento de cobertura, son más económicas que las opciones europeas [Vorst].

La dificultad de determinar la distribución de la media aritmética del subyacente, ha motivado que la resolución del problema de valoración de las opciones asiáticas aritméticas sea un área de gran interés para muchos investigadores. Suponiendo que el precio del activo sigue una distribución lognormal en tiempo continuo, el problema se plantea porque la suma de variables lognormales no es una lognormal y por lo tanto no se puede dar de forma explícita la distribución y tampoco aplicar el método de Black-Scholes [BlackScholes].

Muchos autores han utilizando diversas aproximaciones al problema de valoración, entre otras, podemos destacar:

1. **Simulación Monte Carlo**. Esta aproximación es frecuentemente utilizada en la valoración de derivados. No obstante, en el caso particular de las opciones asiáticas aritméticas no es el método más conveniente como veremos a continuación. Inicialmente, Kemma y Vorst en [KemmaVorst] estudiaron este problema, pero sus resultados son relativamente lentos computacionalmente ya que necesitan un gran cantidad de simulaciones para obtener una precisión aceptable. Turnbull y Wakeman [TurnbullWakeman] y Levy [Levy] evitan esta dificultad utilizando una aproximación basada en los momentos de la lognormal, sin embargo Levy y Turnbull [LevyTurnbull] observan que las soluciones obtenidas son buenas aproximaciones solamente en un intervalo determinado.

2. **Integrales múltiples**. Yor [Yor] utiliza una aproximación diferente, expresando el valor de una opción asiática por medio de una integral triple. No obstante, esta integral presenta problemas de convergencia.

3. **Polinomios de Laguerre**. En ([Dufresne], [Dufresne01]) se emplea una aproximación que involucra a los polinomios de Laguerre. Dufresne dio una fórmula alternativa que expresa el valor de la opción Asiática como una serie de polinomios de Laguerre, donde cada coeficiente en la serie viene dado por un integral que debe ser estimada numéricamente. Esta serie fue reemplazada usando la teoría espectral por Linetsky en [Linetsky], donde se obtienen nueve decimales de precisión numérica. Nótese que la mayor precisión hasta ese momento eran seis decimales, obtenida por Vecer [Vecer].

4. **Ecuaciones en derivadas parciales**. Rogers y Shi [RogersShi] y Alziiary, Decamps y Koehl [AlziiaryDecampsKoehl] aplicaron metodos EDP para obtener soluciones analíticas aproximadas al problema de valoración. Dewynne y Wilmott ([DewynneWilmott], [DewynneWilmott2]) resolvieron numéricamente una EDP de dos variables utilizando el método de diferencias finitas. Sin embargo, como se puede ver en el trabajo de Barraquand y Prudet [BarraquandPrudet] el método de ecuaciones en diferencias finitas tiene muy poca precisión computacional. Zvan, Forsyth y Vestal [ZvanForsyth] proponen una modificación de este método usando técnicas computacionales de dinámica de fluidos. Thompson [Thompson] obtiene una cotas superiores más exactas que las de Rogers y Shi [RogersShi]. Zhang [Zhang] establece una nueva aproximación analítica utilizando una técnica de evitabilidad de singularidades. Vecer [Vecer] caracteriza el precio de la opción asiática aritmética por medio de una sencilla EDP de una variable de estado. La ventaja del método de Vecer es su rapidez computacional y su precisión (seis decimales) para todos los casos. Por el contrario, la elección de los puntos de corte puede resultar difícil.

5. **Procesos de Bessel**. Utilizando el Cálculo Estocástico y en concreto los procesos de Bessel; Geman y Yor [GermanYor] obtienen una fórmula analítica para la transformación de Laplace de la opción asiática. Al comprobar que la inversa de esta transformada no se puede obtener de forma analítica, algunos autores intentaran una aproximación diferente al problema utilizando métodos numéricos. Podemos destacar entre otros a: Geman y Eydeland [EydelandGeman], Fu, Madan y Wang [Fuetal], Craddock, Heath y Platen

[Craddocketal] y Shaw [Shaw]. Uno de los principales problemas de estos trabajos es la lentitud computacional de los métodos para volatilidades del 10%.

6. Recientemente, los autores utilizando técnicas de Ecuaciones en derivadas parciales y **Cálculo Operacional**, ofrecemos una resolución alternativa y más sencilla al problema de valoración planteado por Geman y Yor (véase [CruzBaez], [CruzBaez06]).

Geman y Yor [GemanYor] demostraron que el valor de una opción de compra asiática aritmética, en el instante t, puede ser expresado por:

$$C_{t,T}(k) = \frac{4e^{-r(T-t)}S(t)}{\sigma^2(T-t_0)}C^{(\nu)}(h,q)$$

donde S es el valor del subyacente, r es tipo de interés, σ la volatilidad del activo, k el precio de ejercicio, T la fecha de vencimiento de la opción, $\nu = \frac{2r}{\sigma^2} - 1$, $h = \frac{1}{4}\sigma^2(T-t)$, $q = \frac{\sigma^2}{4S(t)}\left(k(T-t_0) - \int_{t_0}^{t} S(u)du\right)$, $q > 0$. Y con respecto a la función $C^{(\nu)}$, su transformada de Laplace de $C^{(\nu)}$ viene dada por:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda h}C^{(\nu)}(h,q)dh = \frac{1}{\lambda\left(\lambda - 2(\nu+1)\right)} \cdot \frac{1}{\Gamma\left((\mu-\nu)/2-1\right)} \cdot \int_0^{1/2q} e^{-x}x^{(\mu-\nu)/2-2}(1-2qx)^{(\mu+\nu)/2+1}dx$$

donde Γ denota, como es usual, a la función gamma y $\mu = \sqrt{2\lambda + \nu^2}$.

Esta solución establecida por Geman y Yor se puede cambiar para que comparezca la función especial hipergeométrica concluyente ${}_1F_1$ (véase [Lebedev] para profundizar sobre este tipo de funciones). Si tenemos en cuenta la representación integral de la función hipergeométrica [Lebedev, (9.11.1), p. 266] y que $\mathrm{Re}(\lambda) > 2\nu + 2$, nos queda:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda h}C^{(\nu)}(h,q)dh = \frac{1}{\lambda\left(\lambda - 2(\nu+1)\right)} \cdot 2^{\frac{1}{2}(2-\mu+\nu)} q^{\frac{1}{2}(2-\mu+\nu)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(4+\mu+\nu)\right)}{\Gamma(1+\mu)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}(-2+\mu-\nu), 1+\mu; -\frac{1}{2q}\right)$$

Como se ha comentado anteriormente, para la valoración de las opciones asiáticas necesitamos conocer la inversa de la transformada de Laplace de la función $C^{(v)}$; pero ésta no se puede obtener de forma analítica. Por ello, inicialmente Geman-Eydeland [EydelandGeman] estimaron la inversa por medio de la transformada de Fourier rápida (FFT); en vez de utilizar la propia transformada de Laplace, que como veremos resulta más conveniente. Posteriormente, Shaw [Shaw] realiza un programa en *Mathematica* para calcular los citados valores. El programa dado en [Shaw] plantea problemas de convergencia, sobre todo para volatilidades bajas (véase [CruzBaez], [Fuetal]). Con nuestra implementación se evitan estos problemas y, en general, es más rápida computacionalmente (véase [CruzBaez]).

2. RESULTADOS NUMÉRICOS

El programa de cálculo simbólico Mathematica nos permite obtener una gran precisión para valorar las opciones asiáticas aritméticas. A continuación comparamos, a efectos de precisión, nuestra implementación con otros resultados existentes.

El equipo de trabajo utilizado es un Pentium 4 Centrino 1,8 GHz.

La implementación que proponemos es la siguiente:

1. Inicialmente debemos definir los parámetros y las funciones que comparecen en la fórmula de valoración:

```
γ[T_, t_, σ_] = σ^2 (T - t) / 4;
ν[r_, q_, σ_] = 2 (r - q) / σ^2 - 1;
x[S_, K_, σ_, T_, t_, t0_] = σ^2 / (4 S) (K (T - t0) - (t - t0) S);
μ[ν_, λ_] = √(ν^2 + 2 λ);
U[λ_, μ_, ν_, x_] :=
  1/Gamma[1 + μ]
   (2^(1/2 (2-μ+ν)) x^(1/2 (2-μ+ν)) Gamma[1/2 (4 + μ + ν)]
     Hypergeometric1F1[1/2 (-2 + μ - ν), 1 + μ, -1/(2 x)]) / (λ (-2 + λ - 2 ν));
```

2. Una vez hecho esto, podemos obtener el valor de la call asiática:

```
AriAsianPriceCall[S_, K_, r_, q_, σ_, T_, t_, t0_, ξ_] :=
 Module[{τ = γ[T, t, σ], n = ν[r, q, σ], a = x[S, K, σ, T, t, t0]},
  Re[ 4 S/(σ^2 (T - t0)) e^(-r (T-t)) 1/(2 Pi I) NIntegrate[Exp[λ τ] U[λ, μ[n, λ], n, a],
     {λ, 100 - ξ I, 100 - 2 I, 100 + 2 I, 100 + ξ I}]]]
```

En esta implementación el camino de integración complejo tiene un papel muy importante, ya que sirve para evitar las singularidades de la integral. En nuestro caso, el camino elegido funciona a la perfección con los ejemplos analizados.

Los casos son los siguientes:

Tabla 1

Caso	S	K	R	q	σ	T	t	T0
1.	1.9	2	0.05	0	0.50	1	0	0
2.	2	2	0.05	0	0.50	1	0	0
3.	2.1	2	0.05	0	0.50	1	0	0
4.	2	2	0.05	0	0.50	2	0	0
5.	2	2	0.18	0	0.30	1	0	0
6.	2	2	0.0125	0	0.25	2	0	0
7.	2	2	0.02	0	0.10	1	0	0

Por otra parte, en la implementación, el parámetro ξ que trunca la integral compleja nos permitirá obtener una mayor precisión. Como ejemplo, podemos tomar en el **Caso 1**, $\xi = 500$, $\xi = 1.000$ y $\xi = 10.000$:

```
Timing[AriAsianPriceCall[1.9, 2, 0.05, 0, 0.50, 1, 0, 0, 500]]

{0.235 Second, 0.193192}

Timing[AriAsianPriceCall[1.9, 2, 0.05, 0, 0.50, 1, 0, 0, 1000]]

{0.297 Second, 0.193174}

Timing[AriAsianPriceCall[1.9, 2, 0.05, 0, 0.50, 1, 0, 0, 10000]]

{0.343 Second, 0.193174}
```

Vemos como los dos últimos coinciden con seis decimales. Como información adicional, en este trabajo para volatilidades entre el 50% y el 25% utilizaremos $\xi = 10.000$. Para el caso de la volatilidad del 10%, empleamos $\xi = 50.000$

A continuación procedemos con la comparativa.

Primero comparamos con el conocido método de Monte Carlo con 10.000 simulaciones (véase, por ejemplo, [Dufresne]) y las cotas superiores (TUB) e inferiores (TLB) de Thompson [Thompson].

Tabla 2

Caso	CB	MC	TLB	TUB
1.	0.1931737902135318	0.1933 (0.00084)	0.193060	0.193799
2.	0.24641569050723056	0.2465 (0.00095)	0.246298	0.247054
3.	0.3062203652326239	0.3064 (0.00106)	0.306094	0.306904
4.	0.35009521895946244	0.3503 (0.00146)	0.349779	0.352556
5.	0.2183875465891274	0.2185 (0.00059)	0.218366	0.218473
6.	0.172268741019462	0.1725 (0.00063)	0.172226	0.172451
7.	0.05598604250811071	0.05602 (0.00017)	0.055985	0.055989

Como podemos ver el método de Monte Carlo no es adecuado, en estos casos, para valorar opciones asiáticas aritméticas.

A continuación vamos a comparar con el programa de Shaw:

Tabla 3

Caso	CB	SH
1.	0.1931737902135318	0.193174
2.	0.24641569050723056	0.246416
3.	0.3062203652326239	0.306220
4.	0.35009521895946244	0.350095
5.	0.2183875465891274	0.218388
6.	0.172268741019462	0.172269
7.	0.055986041545485005	0.055986

Nuestro método coincide con los 6 decimales de precisión de Shaw.

Ahora, vamos a observar otro método de ecuaciones en derivadas parciales, el método de Vecer [Vecer]:

Inicialmente tomamos los puntos de corte en $x \in [-1.0, 1.5]$

Tabla 4

Caso	**CB**	**Decimal Precision**	**VEC Cutoff points** $x \in [-1.0, 1.5]$	**Decimal Precision**
1.	0.193174	6	0.192264	2
2.	0.246416	6	0.245858	2
3.	0.306220	6	0.305884	2
4.	0.350095	6	0.34999	1
5.	0.218388	6	0.218122	3
6.	0.172269	6	0.172267	5
7.	0.055986	6	0.0562473	2

Vemos como en este caso el método de Vecer no es muy preciso. Por lo que aumentamos los puntos de corte hasta $x \in [-3.0, 3.5]$. En este caso obtenemos:

Tabla 5

Case	**CB**	**Decimal Precision**	**VEC Cutoff points** $x \in [-3.0, 3.5]$	**Decimal Precision**
1.	0.193174	6	0.1931717	5
2.	0.246416	6	0.246419	5
3.	0.306220	6	0.306235	4
4.	0.350095	6	0.35009	5
5.	0.218388	6	0.218264	3
6.	0.172269	6	0.171984	2
7.	0.055986	6	0.0573879	2

Si otra vez incrementamos los puntos de corte a $x \in [-10.0, 10.5]$ los resultados son:

Tabla 6

Caso	**CB**	**Decimal Precision**	**VEC Cutoff points** $x \in [-10.0, 10.5]$	**Decimal Precision**
1.	0.193174	6	0.193226	3
2.	0.246416	6	0.246479	4
3.	0.306220	6	0.306287	4
4.	0.350095	6	0.350089	4
5.	0.218388	6	0.218348	4
6.	0.172269	6	0.172198	3
7.	0.055986	6	0.0534705	2

En definitva el método de Vecer es menos preciso que el nuestro, en todos los casos analizados.

Nótese que la precisión de 6 decimales de la implementacion de Vecer depende de los puntos de corte en la frontera de la ecuación en derivadas parciales y además en nuestro caso, aunque aumentemos el tamaño del intervalo de los puntos de corte no se obtienen mejoras significativas.

Todo esto se resume en la siguiente afirmación del profesor Vecer en http://www.stat.columbia.edu/~vecer/AsianOption.nb

“It is your responsibility to find the optimal cutoff points and WorkingPrecision depending on your current version which works best for your parameters”

Por ultimo, vamos a comparar con el método de Linetsky [Linetsky], que alcanza la mayor precisión (9 decimales):

Tabla 7

Case	CB	LI
1.	0.1931737902135318	0.193173790
2.	0.24641569050723056	0.2464156905
3.	0.3062203652326239	0.306220365
4.	0.35009521895946244	0.350095219
5.	0.2183875465891274	0.2183875466
6.	0.172268741019462	0.1722687410
7.	0.055986041545485005	0.0559860415

Podemos ver que si redondeamos a 9 decimales, nuestros resultados coinciden con los de Linetsky.

CONCLUSIÓN

En este trabajo hemos conseguido una implementación del valor de una opción asiática, utilizando el programa *Mathematica*, que tiene una gran precisión computacional si la comparamos con otros métodos bien conocidos. En todos los casos igualamos y mejoramos estos métodos. Es decir, nuestro programa se presenta como una alternativa novedosa a los ya existentes.

BIBLIOGRAFÍA

[AlziiaryDecampsKoehl] B. Alziiary, J. Decamps, and P. Koehl. A P.D.E. approach to Asian options: analytical and numerical evidence. Journal of Banking & Finance, 21, 613-640, 1997.

[BarraquandPrudet] J. Barraquand and T. Prudet. Pricing of American path-dependent contingent Claims. Mathematical Finance, 6, 17-51, 1996.

[BlackScholes] Black, F. and Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81 (1973), 637-654.

[Craddocketal] Craddock, M.; Heath, D.; Platen, E. Numerical inversion of Laplace transforms: A survey of techniques with applications to derivatives pricing. J. Computational Finance 4(1) 57--81, 2000.

[CruzBaez] Cruz-Báez, D.I.; González-Rodríguez, J.M. Valoración de opciones Asiáticas aritméticas por medio de la transformación de Laplace y Mathematica. XX Congreso Asepelt - España, Tenerife, 2006.

[CruzBaez06] Cruz-Báez, D.I. and González-Rodríguez, A different approach for pricing Asian options, Appl. Math. Lett. (2007), doi:10.1016/j.aml.2007.03.016.

[DewynneWilmott] J. N. Dewynne and P. Wilmott, A note on average rate options with discrete sampling. SIAM Journal of Applied Mathematics, 55 (1), 267-276, 1995.

[DewynneWilmott2] J. N. Dewynne and P. Wilmott. Asian options as linear complementarity problems. Advances in Futures and Options Research, 8, 145-173, 1995.

[Dufresne] Dufresne, D. Laguerre series for Asian and other options, Math. Finance, 10 (2000), pp. 407-428.

[Dufresne01] D. Dufresne.The integral of geometric Brownian motion. Adv. Appl. Probab. 33 (2001), 223--241.

[Erdelyietal] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F. and Tricomi. F. G.: Tables of Integral Transforms. Vol. I. McGraw-Hill, New Yor, 1954.

[EydelandGeman] Eydeland, A.; Geman, H. Domino effect, Risk 8, 65--67, 1995.

[Fuetal] Fu, M.C.; Madan, D.B., Wang, T. Pricing continuous Asian options: a comparison of Monte Carlo and Laplace inversion methods, J. Comp. Fin. 2 (1998), 49-74.

[GemanYor] Geman, H. and Yor, M. Bessel processes, Asian options, and perpetuities, Math. Finance, 3 (1993), pp. 349--375.

[Hull] Hull, J. C.: Options, Futures and Other Derivatives 6th Edition. Prentice Hall, 2006.

[KemmaVorst] Kemna, A. and Vorst, A. A pricing method for options based on average asset Values. Journal of Banking and Finance, 14,113-129, 1990.

[Lebedev] Lebedev, N. N. Special Functions and their Applications. Dover, New Yor, 1972.

[Levy] E. Levy. Pricing European average rate currency options, Journal of International Money and Finance, 11, 474-491, 1992.

[LevyTurnbull] E. Levy and S. Turnbull. Average intelligence, RISK, 5, (February), 53-59, (1992).

[Linetsky] Linetsky, V. Spectral Expansions for Asian (Average Price) Options, Operations Research Vol. 52, No. 6, 2004, pp. 856--867.

[Merton] Merton, R. C.: Theory of rational option pricing, Bell J. Econom. Management Sci. 4 (1973), 141-183.

[RogersShi] L. Rogers and Z. Shi. The value of an Asian option. Journal of Applied Probability, 32, 1077-108, 1995.

[Shaw] Shaw, W. Modelling Financial Derivatives with Mathematica, Cambridge University Press, 1998.

[Thompson] Thompson, G. W. P. Fast narrow bounds on the value of Asian options. Working Paper, Centre for Financial Research, Judge Institute of Management Science, University of Cambridge, 2000.

[TurnbullWakeman] S. M. Turnbull and L. Wakeman. A quick algorithm for pricing European average options, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 26 (3), 377-389, 1991.

[Vecer] J. Vecer. A new PDE approach for pricing arithmetic average Asian options. J. Computational Finance 4(4) 105--113, 2001.

[Vorst] Vorst, T. Averaging options, in I. Nelken, editor, The Handbook of Exotic Options, Irwin, Homewood, IL, 175-199, 1996.

[Wilmott] Wilmott, P. Paul Wilmott on Quantitative Finance, John Wiley & Sons, 2000.

[Yor] M. Yor, On some exponential functionals of Brownian motion, Adv. Appl. Probab., 24 (1992), pp. 509--531.

[Zhang] Zhang, J. E. A semi-analytical method for pricing and hedging continuously sampled arithmetic average rate options. Journal of Computational Finance, 5, 59--79, 2001.

[ZvanForsyth] Zvan, R.; Forsyth, P. and Vetzal, K. Robust numerical methods for PDE models of Asian options. Journal of Computational Finance, 1(2), 39-78, 1998.