Lecturas Matemáticas
Volumen **28** *(2007), páginas 5–37*

Contribuciones a la teoría de modelos de haces

J. Andrés Montoya
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga

Abstract. In this paper the sheaf semantics of intuitionistic logic is studied, introducing a new notion of *variable theory.* A variable theory is a continuous function which takes values in a topological space of first order theories. We characterize the class of variable theories for which there exists a sheaf model, and study the problem of extending an arbitrary continuous function to a variable theory with a sheaf model, obtaining partial results.

Key words and phrases. Sheaves, Forcing, Intuitionistic logic.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. Primary: 03C65. Secondary: 03H05.

Resumen. Se estudia la semántica de haces de la lógica intuicionista, utilizando una nueva noción de *teoría variable.* Una teoría variable es una función continua que toma valores en un espacio de teorías de primer orden. En este trabajo se caracterizan las teorías variables que tienen un modelo haz y se estudia el problema de extender una función continua a una teoría variable que tenga un modelo haz, obteniéndose agunos resultados parciales.

1. Introducción

Los haces de estructuras son objetos centrales en la matemática moderna, para convencerse de ello basta pensar en las modernas geometrías analítica y algebraica, las cuales deben parte de su espectacular desarrollo a la poderosa tecnología de haces introducida en los años 60 por la escuela francesa de Alexander Grothendieck. Los haces, en cuanto estructuras matemáticas de gran interés, merecen ser estudiados desde todas las perspectivas posibles, una de tales perspectivas es la modelo teórica. En este escrito se intenta desarrollar herramientas modelo teóricas que permitan entender mejor los haces.

El presente escrito debe ser entendido como un intento de desarrollar algunas herramientas, para clasificar mediante invariantes haces de estructuras modelos de una teoría intuiconisticamente consistente. Entendemos tal clasificación como un intento de responder a la pregunta: ¿Cuántos y cuáles haces son modelos de T? Si T es consistente esta es una pregunta sin respuesta ya que, módulo isomorfismo, la colección de modelos haces de T será en general una clase propia, por lo que se hace necesario relativizar la pregunta. En teoría de modelos clásica tampoco es posible dar una buena respuesta a la pregunta ¿Cuántas y cuáles estructuras son modelos de T? por lo que la pregunta que la teoría de clasificación se hace en este caso es: ¿Dado κ un cardinal, cuántas y cuáles estructuras sobre κ son modelos de T? El cardinal de una estructura es un invariante asociado a ella; una manera de dar una respuesta a la primera pregunta es realizar una primera pero burda clasificación de estructuras usando como únicos invariantes los cardinales. El método funciona gracias, entre otra cosas, a teoremas tipo Lowenheim-Skolem ascendente y descendente los cuales dan una respuesta precisa a la pregunta: ¿Para qué cardinales κ, la clase de modelos de T de tamaño κ, es no vacía?

Para el caso de haces estamos en una situación similar: la pregunta fundamental no tiene una buena respuesta, así que debemos usar primero una colección de invariantes sencillos como, por ejemplo, cardinales, para partir la clase propia de modelos de T en una clase propia de conjuntos, los conjuntos asociados con cada cardinal, y después pasar a clasificar dentro de cada uno de estos conjuntos. Desafortunadamente de inmediato se nos presenta un gran problema: ¿Cuál es el cardinal de un haz? En el caso de estructuras clásicas, el cardinal de la estructura puede ser identificado con el dominio de la estructura y para el caso de haces de estructura podríamos entonces pensar en usar como invariantes iniciales los haces de conjuntos sobre los que están definidos los haces de estructuras. Pero esto no es del todo una buena solución, ya que no contamos con una noción de cardinal para haces de conjuntos.

¿Dado X un espacio topológico, cuántos y cuáles haces sobre X son modelos de T? Esta es la pregunta que propongo atacar; atacarla implica dar respuesta a algunas preguntas más sencillas, en particular a la siguiente: ¿Para qué espacios topológicos la lógica de haces asociada tiene la propiedad de existencia de modelo para teorías intuicionistamente consistentes? Estos espacios serán llamados *genéricos* en lo que sigue.

El problema de caracterizar los espacios topológicos genéricos, es el problema que se ataca a lo largo del artículo. No se logra una solución completa de dicho problema, pero se tienen resultados significativos. En el texto se prueba que todo espacio metrizable sin puntos aislados es genérico; se encuentran condiciones necesarias para que un espacio topológico sea genérico, así como condiciones necesarias para que un orden sea universal; se aislan fragmentos de la lógica intuicionista para los cuales la teoría de modelos tiene un mejor comportamiento y para los cuales es posible encontrar una mayor variedad de espacios genéricos. Para probar que ciertos espacios son genéricos, partimos en general de la genericidad de espacios como el árbol binario o el árbol de sucesiones finitas de números naturales, transportando haces desde el espacio que ya sabemos genérico al espacio del que queremos probar genericidad. Esto nos obligó a introducir y estudiar técnicas para transportar haces de un espacio a otro, de manera que se preserve el forzamiento. El estudio de este tipo de técnicas es una constante en teoría de haces; el problema es conocido en la literatura como *cambio de base*. En el texto se estudian tres técnicas de cambio de base, dos de las cuales no fueron encontradas en la literatura, ellas son: Cambio de base usando encajes completos de álgebras de Heyting y cambio de base extendiendo y germinando desde un subconjunto denso.

Por el camino nos encontraremos con una nueva noción de teoría, la de *teoría variable*, la cual creemos es la noción natural de teoría en el contexto de haces de estructuras. Se logra probar un teorema de completez para teorías constantes y se plantea y ataca el problema de la genericidad para el caso de teorías variables. Para dicho problema hallamos resultados parciales mucho más modestos que los logrados para la noción estándar de teoría, en parte, porque no pudimos usar la técnica que en el caso de teorías "constantes" nos dio más resultado, es decir la técnica de cambio de base. No pudimos usarla porque no conocemos ningún espacio genérico para teorías variables (o *fuertemente genérico*, como lo llamaremos en el texto). Nos atrevemos a conjeturar que los espacios totalmente desconectados y sin puntos aislados son fuertemente genéricos. Una solución positiva a esta conjetura sería un buen punto de partida para desarrollos como los logrados en el caso de teorías "constantes".

2. Preliminares

Sean τ un vocabulario relacional de primer orden y X un espacio topológico. Un haz de $\tau-$estructuras sobre X representa en buena medida una $\tau-$estructura que evoluciona continuamente sobre el espacio topológico X.

Definición 1. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. f es un *homeomorfismo local* si, y solo si, para todo $x \in X$ existe una vecindad U_x tal que $f \restriction_{U_x} : U_x \to f'' (U_x)$ es un homeomorfismo.

Definición 2. Un *haz de conjuntos* sobre X es una tripla (E, p, X) tal que E y X son espacios topológicos y p es un homeomorfismo local de E en X llamado la proyección de E en X.

Definición 3. Dado (E, p, X) un haz de conjuntos sobre X y $x \in X$. La *fibra* E_x del haz sobre el punto x es el conjunto $p^{-1}(x)$.

Notemos que si (E, p, X) es un haz de conjuntos, se tiene que $E = \biguplus_{x \in X} E_x$.

Definición 4.

(1) Dado $p : E \to X$ una función continua y U un abierto de X. Una *selección local* para p con dominio U es una función $f : U \to E$ tal que para todo $x \in U \quad f(x) \in p^{-1}(x)$.

(2) Sean (E, p, X) un haz y U un abierto en X. Una *sección local* con dominio U es una selección local σ con dominio U que además es continua.

Teorema 1. [Teorema de existencia para haces] *Sean X un espacio topológico, E un conjunto, p una función de E en X y Σ un conjunto de selecciones locales para p, que satisfacen las siguientes propiedades*

(1) *Para todo $e \in E$ existe $f \in \Sigma$ tal que $e \in Rango\,(f)$.*

(2) *Si f y g son selecciones de Σ y x es un punto de X que está en el dominio de las dos selecciones, entonces $f(x) = g(x)$ si, y solo si, existe una vecindad U_x de x contenida en los dos dominios y tal que $f \restriction_{U_x} = g \restriction_{U_x}$.*

Entonces existe una topología χ sobre E para la cual la colección de rangos de las funciones en Σ es una base de χ y dado E con esta topología, la tripla (E, p, X) es un haz de conjuntos.

Demostración. Veamos primero que χ es una base para una topología sobre X. Primero que todo $E = \biguplus_{x \in X} f^{-1}(x)$, por hipótesis dado $a \in E$ existe $x \in X$ y $\sigma \in \Sigma$ tal que $a \in f^{-1}(x)$ y $\sigma(x) = a$, así que $E = \biguplus_{x \in X} f^{-1}(x) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} Rango\,(\sigma)$. Para que χ sea un base de una topología sobre E, sólo nos falta probar que χ es cerrado para intersecciones. Sean σ, γ elementos de Σ, por hipótesis $A = \{y : \sigma(y) = \gamma(y)\}$ es un abierto en X, $Rango\,(\sigma) \cap Rango\,(\gamma) = Rango\,(\sigma \restriction_A)$ entonces $Rango\,(\sigma) \cap Rango\,(\gamma) \in \chi$, es decir, χ es cerrado para intersecciones. Veamos ahora que $((E, \chi), f, X)$ es un haz de conjuntos sobre X, para ello es suficiente ver que si $x \in X$, existe una vecindad U_x de x tal que $f \restriction_{U_x}$ es un homeomorfismo de U_x en $f''(U_x)$. Sea $a \in E$, existen un abierto U de X, con $x \in U$, y una selección $\sigma \in \Sigma$ con dominio U y tal que $\sigma(x) = a$. Es fácil ver que $f \restriction_{Rango(\sigma)}: Rango\,(\sigma) \to U$ es un homeomorfismo y por lo tanto $Rango\,(\sigma)$ es la vecindad de a que estamos buscando. ☑

Este teorema nos será muy útil en lo que sigue, dado que si queremos construir un haz sobre X, basta tener una colección de conjuntos $(F_x)_{x \in X}$ indexados por los elementos de X y una familia de selecciones locales Σ tal que todo $\sigma \in \Sigma$ tiene dominio abierto y adicionalmente Σ satisface las dos condiciones impuestas por el teorema.

El lector interesado en más información acerca de haces puede consultar [T].

3. **El proceso de germinación**

Sea $p : E \to X$ una función y Σ un conjunto de selecciones locales para p tal que Σ tiene la propiedad 1 anterior pero no tiene la 2. En principio no podemos definir una topología sobre E cuya base sea la colección de rangos de las selecciones en Σ y que convierta a la tripla (E, p, X) en un haz de conjuntos, pero podemos intentar cambiar un poco a E para lograrlo. La manera mediante la cual vamos a cambiar a E es lo que se conoce como el proceso de germinación.

Dada $p : E \to X$ nuestra función y Σ el conjunto de selecciones. Sea x un elemento de X y sea Σ_x el subconjunto de todas las selecciones que tienen a x en su dominio. Vamos a definir una relación de equivalencia sobre Σ_x de la siguiente manera:

Dadas f y g en Σ_x se tiene que fR_xg si, y solo si, existe una vecindad U_x de x tal que $f \restriction_{U_x} = g \restriction_{U_x}$.

Sea $\widehat{E}_x$ la colección de todas las clases de equivalencia de elementos de Σ_x módulo la relación R_x. Sea entonces $\widehat{E} = \biguplus_{x \in X} \widehat{E}_x$, nuestro espacio haz y sea $\widehat{p}$ la siguiente función: Si $e \in \widehat{E}$ tenemos que $\widehat{p}(e) = x$ si, y solo si, $e \in \widehat{E}_x$.

Dada f selección en Σ definimos una selección $\widehat{f}$ Para la función $\widehat{p}$ de la siguiente manera:

- $Dom(f) = Dom(\widehat{f})$.
- Si $x \in Dom(f)$ entonces $\widehat{f}(x) = [f]_{R_x}$.

Finalmente $\Sigma^{\hat{}} = \left\{ \widehat{f} : f \in \Sigma \right\}$ es la colección de selecciones locales que necesitamos para hacer de la tripla $\left(\widehat{E}, \widehat{p}, X \right)$ un haz de conjuntos.

Basta notar que esta colección satisface las dos condiciones del teorema de existencia para haces. Trivialmente satisface la primera y satisface la segunda porque lo que esencialmente hemos hecho en el proceso de germinación, es agregar más puntos a E para lograr que dos secciones f y g de Σ que coincidian en un punto x pero no lo hacían en vecindad alguna de x, dejen de coincidir en x.

4. **Haces de estructuras**

Sea τ un vocabulario y X un espacio topológico, un **haz** de τ-estructuras sobre X es un par $(\phi, (E, p, X))^*$ tal que: para todo x en X la fibra E_x es una τ_x-estructura con $\tau_x \subset \tau$ y se satisfacen adicionalmente las siguientes condiciones:

*La definición de haz de estructuras dada en este escrito es diferente a la que se encuentra usualmente en la literatura. La diferencia estriba en que al tomar E_x como una τ_x−estructura, con $\tau_x \subset \tau$ y no como una τ−estructura, estamos permitiendo que las constantes sean interpretadas como secciones locales.

(1) $\phi : X \to P(\tau)$, es una función tal que a todo x de X le hace corresponder un subvocabulario τ_x de τ con $\tau_x = \tau \setminus C_x$, en donde C_x es un conjunto posiblemente vacío de constantes y adicionalmente para toda constante c en τ el conjunto $E(c) = \{x \in X : c \in \tau_x\}$ es abierto.
(2) Para todo $x \in X$ la fibra E_x es una τ_x-estructura.
(3) Si R es un símbolo de relación n-aria en τ y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ son secciones con dominio común, entonces $\{x \in X : E_x \vDash R(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))\}$ es un conjunto abierto en X.
(4) Si c es una constante de τ, la interpretación c^E de c es una sección con dominio el conjunto abierto $E(c)$ y definida por $c^E(x) = c^{E_x}$ para todo x en $E(c)$.
(5) Si f es un símbolo de función n-ario y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ son secciones con dominio común U. La función $f^E : U \to E$ definida por: $f^E(x) = f^{E_x}(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))$ para todo x en U, es una sección con dominio U.

En adelante, pocas veces daremos explícitamente la función ϕ, ya que en la mayoría de los casos su definición es obvia.

Ejemplo 1. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Sea $Spec(A)$ el espacio topológico cuyo dominio es la colección de todos los ideales primos de A. Dotamos a este conjunto de la siguiente topología: Tomamos como colección de abiertos básicos $(U_a)_{a \in A}$, con $U_a = \{j \in Spec(A) : a \notin j\}$. La topología sobre $Spec(A)$ será la generada por esta colección de subconjuntos. Este espacio topológico es conocido como el espectro primo del anillo A con la topología de Zariski.

Dado j en $Spec(A)$, sea $E_j = A/j$ el cociente de A por el ideal j y sea $E = \biguplus_{j \in Spec(A)} E_j$. E será nuestro espacio haz y $Spec(A)$ nuestro espacio base. Vamos entonces a definir la proyección $q : E \to Spec(A)$. Dado $s \in E$ existe un único j tal que $s \in E_j$. Tomamos entonces como la imagen de s bajo q a este único j en $Spec(A)$. Dado a un elemento de A, definimos una selección global $\widehat{a}$ de la siguiente manera: dado j en $Spec(A)$, $\widehat{a}(j) = [a]_j \in E_j$. La colección de selecciones globales $\Sigma = \{\widehat{a} : a \in A\}$ satisface las dos condiciones del teorema de existencia para haces.

Tenemos entonces que la tripla $(E, q, Spec(A))$ es un haz de conjuntos con Σ una colección-base de secciones para este haz, lo cual quiere decir que para todo abierto U en E existe $\Omega \subset \Sigma$ tal que U es la unión de los rangos de todas las secciones en Ω. Claramente todas las fibras E_j de este haz son anillos y es muy fácil comprobar que se satisfacen las condiciones impuestas a un haz para ser un haz de estructuras.

El ejemplo anterior es un caso particular del proceso de representación de un álgebra de tipo τ como un haz de álgebras del mismo tipo. Tales representaciones han sido particularmente exitosas y útiles en el caso de anillos. Es especialmente famosa y útil en geometría algebraica la representación de

Grothendieck de un anillo conmutativo unitario como un haz de anillos locales (para mayor información ver [M]).

Definición 5. [Forzamiento] Sean (E, p, X) un haz de $\tau-$estructuras, x un punto de X y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ una n-tupla de secciones que tienen a x en su dominio. En la definición recursiva supondremos que todas las fórmulas involucradas son τ_x-fórmulas.

(1) Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es atómica
$$E \Vdash_x \varphi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$$
si, y solo si, $E_x \vDash \varphi[\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)]$.

(2) $F \Vdash_x \neg\varphi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ si, y solo si, existe una vecindad U_x de x contenida en los dominios de las σ_i's y tal que para todo $z \in U_x$ se tiene que: $E \nVdash_z \varphi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$.

(3) $E \Vdash_x (\varphi \wedge \psi)[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ si, y solo si,
$$E \Vdash_x \varphi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \quad \text{y} \quad E \Vdash_x \psi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n].$$

(4) $E \Vdash_x (\varphi \vee \psi)[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ si, y solo si,
$$E \Vdash_x \varphi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \quad \text{o} \quad E \Vdash_x \psi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n].$$

(5) $E \Vdash_x (\varphi \Rightarrow \psi)[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ si, y solo si, existe una vecindad U_x de x contenida en los dominios de las σ_i's y tal que para todo z en U_x; $E \Vdash_z \varphi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ implica $E \Vdash_z \psi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$.

(6) $E \Vdash_x \forall v\varphi[v, \sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ si, y solo si, existe una vecindad U_x contenida en los dominios de las σ_i's tal que para todo z en U_x y toda sección ρ que tenga a z en su dominio, se tiene que: $E \Vdash_z \varphi[\rho(z), \sigma_1(z), \ldots, \sigma_n(z)]$.

(7) $E \Vdash_x \exists v\varphi[v, \sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ si, y solo si, existe una sección ρ que tiene a x en su dominio y tal que: $E \Vdash_x \varphi[\rho(x), \sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)]$.

Teorema 2. *Para todo haz de τ-estructuras E sobre X y toda τ-sentencia α el conjunto $[\alpha]_E = \{x \in X : E \Vdash_x \alpha\}$ es un abierto de X.*

Para una prueba el lector puede consultar [C3] teorema 3.1.

Dado F un haz sobre X y $U \subset X$ podemos definir de manera natural un haz $F \upharpoonright_U$ sobre U el cual es la restricción de F a U. La definición la hacemos del siguiente modo:

- Si $a \in U$; $(F \upharpoonright_U)_a = F_a$.
- Si σ es una sección cuyo dominio intersecta a U, $\sigma^* = \sigma \upharpoonright_{U \cap dom(\sigma)}$ será una sección con dominio $U \cap dom(\sigma)$ del haz $F \upharpoonright_U$.
- Elegimos como colección de secciones para el haz restricción $F \upharpoonright_U$la colección de todas las restricciones de $F-$secciones. Es fácil comprobar que el objeto así definido es un haz.

Lema 1. [Independencia de los abiertos] *Dados F un haz sobre X, U un abierto de X, $a \in U$ y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ secciones cuyo dominio esté contenido en U, entonces $F \Vdash_a \varphi[\sigma_1(a), \ldots, \sigma_n(a)]$ si, y solo si, $F \upharpoonright_U \Vdash_a \varphi[\sigma_1^*(a), \ldots, \sigma_n^*(a)]$.*

La prueba es inmediata y por ello se omite.

Ahora quisiéramos utilizar el forzamiento como una herramienta para caracterizar algunos haces. Quisiéramos distinguir haces que tengan un comportamiento estructural diferente y en últimas quisiéramos clasificar aquellos haces que sean indistinguibles mediante las sentencias que fuerzan. El forzamiento nos provee de una amplia variedad de invariantes que podrían ayudarnos a clasificar haces.

Si dado un haz E, elegimos como invariante el conjunto de sentencias

$$Th\,(E) = \{\alpha : \forall x \in X(E \Vdash_x \alpha)\}$$

quizá hacemos una elección equivocada ya que éste es un invariante débil, incapaz de distinguir haces muy diferentes. Este invariante solo nos da información sobre el comportamiento global del haz pero de ninguna manera nos da información sobre las características locales del haz. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2. Sea $X = [0,1]$*;* el espacio haz E es igual a X, $p = id$ y $\tau = \{R, c\}$, donde R es un símbolo de relación unaria y c es un símbolo de constante. Ahora vamos a montar sobre este haz dos haces de estructuras diferentes, E_1 y E_2, de la siguiente manera: en ambos haces se interpreta a c como un nombre de la única sección global σ, la cual corresponde a la identidad. La diferencia entre los dos haces estribará entonces en la interpretación de R. Sean $\{x \in X : E_1 \Vdash_x R\,(c)\} = X \setminus \{1/2, 1/3\}$ y$\{x \in X : E_2 \Vdash_x R\,(c)\} = X \setminus \{1/2\}$. Obviamente estos dos haces son estructuralmente diferentes ya que en E_2 solo existe un punto en el que $R\,(c)$ no es forzado mientras que en E_1 existen dos puntos con esta propiedad. Aún así, globalmente los dos haces son similares ya que lo único que podemos asegurar de los dos con nuestra noción global de forzamiento es que en ninguno de los dos se fuerza a $R\,(c)$.

Podemos probar que $E_1 \Vdash \alpha$ si, y solo si, $E_2 \Vdash \alpha$. Un argumento sencillo es el siguiente: existe $f : \left[0, \frac{2}{5}\right] \to [0,1]$ una función continua y abierta tal que para todo $x \in \left[0, \frac{2}{5}\right]$ se tiene que $(E_1)_x \cong (E_2)_{f(x)}$. Adicionalmente existe $g : \left[\frac{2}{5}, 1\right] \to [0,1]$ abierta y continua tal que si $x \in \left[\frac{2}{5}, 1\right]$ se tiene que $(E_1)_x \cong (E_2)_{g(x)}$. Dado esto tenemos que $E_2 \Vdash \alpha$ si, y solo si, $E_1 \Vdash \alpha$ como corolario del lema 11 que aparece más adelante.

Como lo muestra el ejemplo anterior lo que necesitamos es un invariante que nos dé información sobre el comportamiento del haz fibra a fibra, es decir, acerca de lo que pasa en el haz alrededor de cada uno de los puntos del espacio base.

5. Teorías variables

Definición 6. Dado un vocabulario τ, sea $Spec\,(\tau)$ el conjunto de todas las τ-teorías intuicionistamente consistentes T, tales que para todo par de sentencias α y β se tiene que $\alpha, \beta \in T$ si, y solo si, $\alpha \wedge \beta \in T$. A este conjunto lo dotamos de la siguiente topología: elegimos como colección de abiertos básicos la famila de subconjuntos de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in L_\tau}$, donde para cada sentencia α, $U_\alpha = \{T \in Spec(\tau) : \alpha \in T\}$. Es fácil comprobar que esta colección es una base para una topología.

Teorema 3. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in l_\tau}$ *es una base de compactos.*

Demostración. Sea α una sentencia y $\{U_{\psi_i}\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos básicos de U_α. Tenemos entonces que para toda teoría intuicionistamente consistente T si $\alpha \in T$ existe un i tal que $\psi_i \in T$, entonces $\alpha \vDash_I \vee_{i\in I}\psi_i$, donde $\vDash_I$ es la noción de consecuencia intuicionista. Del teorema de compacidad para la lógica intuicionista, existe I_0 un subconjunto finito de I tal que $\alpha \vDash_I \vee_{i\in I_0}\psi_i$. U_α es cubierto entonces por la colección finita $(U_\psi)_{\psi\in I_0}$. ☑

Corolario 1. *$Spec(\tau)$ es compacto.*

Demostración. Basta notar que $Spec(\tau)$ es igual a $U_{\forall x(x=x)}$. ☑

Teorema 4. [Continuidad del forzamiento] *Sea E un haz de τ-estructuras sobre X. La función $f_E : X \to Spec(\tau)$ definida por: $f_E(x) = \{\alpha : E \Vdash_x \alpha\}$ es continua.*

La prueba se sigue del teorema 2.

Lema 2. *Sea X un espacio topológico y $f : X \to Spec(\tau)$ una función. f es continua si, y solo si, para toda sentencia α el conjunto $\{x \in X : \alpha \in f(x)\}$ es un abierto de X.*

Definición 7.

(1) Dado X un espacio topológico una $\tau-$***teoría variable*** sobre X es una función continua de X en $Spec(\tau)$.

(2) Dados F un haz sobre X y f una teoría variable. $F \vDash f$ si, y solo si, para todo $x \in X$, $f(x) \subset f_F(x)$.

Definición 8. Dos haces de $\tau-$estructuras (E, p, X) y (F, q, X) son isomorfos $(E \cong F)$ si, y solo si, existe un homeomorfismo $f : E \to F$ tal que para todo $e \in E$, $p(e) = q(f(e))$ y adicionalmente para todo x en X, $f\restriction_{E_x}: E_x \to F_x$ es un $\tau-$isomorfismo.

Teorema 5. *Para todo par de haces F y E sobre X, si $E \cong F$ entonces $f_E = f_F$.*

La prueba se sigue del lema 11 que probaremos más adelante.

El teorema anterior nos muestra que la teoría variable de un haz es un invariante de este y es un invariante que nos da información sobre lo que sucede en cada punto. Es fácil probar que este invariante es más fuerte que el que nos brinda la noción puramente global de forzamiento discutida en las páginas inmediatamente anteriores.

Definición 9. Sea X un espacio topológico, un $\tau-$*invariante* de haces sobre X, es simplemente una colección de haces de $\tau-$estructuras sobre X cerrada para isomorfismo.

Sean τ un vocabulario, X un espacio topológico, α una sentencia, T una teoría, f una teoría variable y $Sh_\tau(X)$ la colección de todos los haces de $\tau-$estructuras sobre X. Definimos tres subclases de $Sh_\tau(X)$:

- $I_\alpha = \{F \in Sh_\tau(X) : (\forall x \in X)(F \Vdash_x \alpha)\}$.
- $I_T = \{F \in Sh_\tau(X) : (\forall x \in X)(\forall \alpha \in T)(F \Vdash_x \alpha)\}$.
- $I_f = \{F \in Sh_\tau(X) : (\forall x \in X)(\forall \alpha \in f(x))(F \Vdash_x \alpha)\}$

Las siguientes afirmaciones son inmediatas

(1) Dada α una $\tau-$sentencia, la colección I_α es un $\tau-$ invariante.
(2) Dada T una $\tau-$teoría, la colección I_T es un $\tau-$invariante.
(3) Dada f una teoría variable sobre X, I_f es un $\tau-$invariante.

Definición 10. Sean K y L colecciones de $\tau-$invariantes, $K \leq L$ si, y solo si, $K \subset L$.

Definición 11. $X(\tau) = \{I_f : f : X \to Spec(\tau)$ es una función continua$\}$.

Definición 12. $Th(\tau) = \{I_T : T$ es una teoría intuicionistamente consis− tente$\}$.

Lema 3. *Para todo vocabulario τ, $Th(\tau) \subset X(\tau)$.*

Demostración. Dada T una teoría intuicionistamente consistente, sea f_T la función constante T, es decir para todo x en X, $f_T(x) = T$. Ahora notemos simplemente que f_T por ser constante es continua y que $I_T = I_{f_T}$. ☑

Si X es un espacio topológico con por lo menos dos abiertos no vacíos y disyuntos, probar que la contenencia del lema 3 es estricta es tan fácil como probar el lema anterior, piense simplemente en el ejemplo 2, los haces E_1 y E_2 de este ejemplo tienen la misma teoría pero tienen diferentes teorías variables. Este ejemplo no es específico del espacio $[0, 1]$, pues podría haberse construido sobre cualquier espacio topológico con por lo menos dos puntos cerrados.

La teoría variable de un haz de estructuras es de aquellos invariantes que estamos buscando, es decir, invariantes con algún grado de información local que les permita superar a los invariantes proporcionados por el forzamiento global de Kripke.

Una característica de los invariantes linguísticos poderosos, es que si dos estructuras satisfacen la misma colección de invariantes, esto se ve reflejado en un nivel puramente algebraico. Es lo que pasa con los invariantes provistos por la lógica de primer orden cuando se aplican a estructuras puramente relacionales. Si dos de estas estructuras satisfacen la misma colección de este tipo de invariantes (es decir, si son elementalmente equivalentes) entonces son finitamente isomorfas como queda establecido por el teorema de FRAISSÉ. Adicionalmente como lo establece el teorema de KEISLER & SHELAH tendrán ultrapotencias isomorfas.

Si las teorías variables realmente son invariantes poderosos entonces deberíamos poder probar un teorema tipo Fraissé o un teorema tipo Keisler-Shelah. En el presente escrito no se hace, pero en la literatura es posible encontrar un resultado muy cercano, CAICEDO y SETTE en [CS] presentan una lógica infinitaria para haces capaz de codificar información local. Para esta lógica ellos logran probar un teorema tipo Fraissé. Esta lógica de CAICEDO y SETTE es en esencia una lógica infinitaria de teorías variables, no incluyo en el presente escrito una exposición de este resultado, ni intento un teorema similar en nuestro contexto siguiendo la prueba de estos dos autores, porque estoy interesado en lógicas finitarias para haces, y el carácter infinitario de la lógica de CAICEDO y SETTE es esencial en la prueba. Aún así creemos, basado en este resultado que algo similar debe poderse hallar para nuestra lógica de teorías variables.

6. El espacio Spec($\boldsymbol{\tau}$)

Dado un un espacio topológico X, el conjunto de las funciones continuas de X en $Spec\,(\tau)$, que hemos notado $X\,(\tau)$, se puede ordenar de una manera natural así: dados f y g dos elementos de $X\,(\tau)$ diremos que f es menor o igual que g (en símbolos $f \leq g$) si, y solo si, para todo $x \in X$ se tiene que $f\,(x) \subset g\,(x)$.

Lema 4. *Si $(f_i)_{i \in I}$ es una cadena de funciones continuas de X en $Spec\,(\tau)$ entonces $\bigcup_{i \in I} f_i$ es continua.*

Demostración. $\bigcup_{i \in I} f_i : X \to Spec\,(\tau)$ es continua si, y solo si, para toda sentencia α se tiene que el conjunto $\left\{ x : \alpha \in \left(\bigcup_{i \in I} f_i \right)(x) \right\}$ es abierto. Pero

$$\left\{ x : \alpha \in \left(\bigcup_{i \in I} f_i \right)(x) \right\} = \bigcup_{i \in I} \left\{ x : \alpha \in f_i\,(x) \right\}$$

y este último conjunto es abierto pues por hipótesis, para todo $i \in I$ se tiene que $\{x : \alpha \in f_i\,(x)\}$ es abierto. ☑

Lema 5. *Para todo τ y para toda $g \in X\,(\tau)$ existe h elemento de $X\,(\tau)$ tal que $g \leq h$ y h es maximal en el orden anteriormente definido.*

La prueba del lema anterior es un típico argumento de aquellos que usan el lema de Zorn y por ello se omite.

Definición 13. Una teoría variable $f \in X(\tau)$ es *cerrada para deducción* si, y solo si, para todo $x \in X$ y para toda $\tau-$ fórmula $\alpha : f(x) \vdash_I \alpha$ si, y solo si, $\alpha \in f(x)$.

Dada una función f de X en la colección de las $\tau-$teorías intuicionistamente consistentes (que denotaremos $T(\tau)$) diremos que f es semicontinua si, y solo si, para toda sentencia α el conjunto $\{x : \alpha \in f(x)\}$ es abierto.

Dada una función semicontinua $f : X \to T(\tau)$ su clausura deductiva es la función $\langle f \rangle : X \to T(\tau)$ definida por $\langle f \rangle(x) = \{\alpha : f(x) \vdash \alpha\}$.

Lema 6. *Si f es semicontinua entonces para todo $x \in X$ se tiene que $\langle f \rangle(x) \in$ Spec (τ).*

La prueba es inmediata de las definiciones y por ello se omite.

Lema 7. *Si f es semicontinua entonces $\langle f \rangle$ es continua.*

Demostración.. Sean α una sentencia y $x \in X$ tales que $\alpha \in \langle f \rangle(x)$, existe entonces un conjunto finito de sentencias $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in f(x)$ tales que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \alpha$. Como f es semicontinua existe una vecindad abierta U de x tal que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in f(y)$ para todo $y \in U$ y entonces $\alpha \in \langle f \rangle(y)$ para todo $y \in U$, por lo que $\langle f \rangle$ es continua. ☑

El lema anterior nos permitirá, en lo que sigue, no preocuparnos por la condición impuesta a los elementos de *Spec* (τ) de que sean cerrados para las reglas de introducción y eliminación de la conjunción. En adelante, cuando pensemos en una función continua de X en *Spec* (τ) realmente estaremos pensando en una función semicontinua $f : X \to T(\tau)$ la cual, gracias a los lemas anteriores, podemos identificar con la función continua $\langle f \rangle : X \to \mathit{Spec}(\tau)$.

Lema 8. *Dada $f \in X(\tau)$ si f es maximal entonces f es cerrada para deducción.*

Demostración.. Suponga que f es maximal pero no es cerrada para deducción. Existen entonces $x \in X$ y fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha$ tales que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in f(x)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_I \alpha$ y $\alpha \notin f(x)$. Como f es continua existe una vecindad U_x de x tal que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in f(y)$ para todo $y \in U_x$. Sea g la siguiente función:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad z \notin U_x \\ f(z) \cup \{\alpha\} & \text{si} \quad z \in U_x \end{cases}$$

entonces g es una función continua de X en *Spec* (τ) y claramente $f \lneqq g$. ☑

Lema 9. [Henkinización] *Sea f un elemento de $X(\tau)$. Existen un vocabulario $\chi \supset \tau$ y una función $g \in X(\chi)$ tales que: $\mathit{card}(\chi) = \mathit{card}(\tau) \cdot \omega$, f como elemento de $X(\chi)$ es menor o igual que g, y g tiene la siguiente propiedad que llamaremos propiedad de Henkin: para todo $x \in X$ y para toda χ-sentencia de la forma $\exists v \psi(v)$. Existe una constante $c \in \chi$ tal que si $\exists v \psi(v) \in g(x)$, entonces $\psi(c) \in g(x)$.*

Veamos un esquema de la prueba. Primero construimos un vocabulario $\tau_1 \supset \tau$ y una τ_1-función continua f_1 tal que: $f \subset f_1$ y para toda τ-sentencia $\exists v\psi(v)$ y todo $x \in X$, si $\exists v\psi(v) \in f(x)$ existe entonces una constante c en τ_1 tal que $\psi(c) \in f_1(x)$. De esta manera podemos construir una sucesión de vocabularios $(\tau_n)_{n\in\omega}$ y una sucesión de teorías variables $(f_n)_{n\in\omega}$ tal que:

(1) $f_0 = f$ y para todo $n : f_n \subset f_{n+1}$.
(2) f_n es una τ_n- teoría variable.
(3) $card(\tau_n) = card(\tau) \cdot \omega$.
(4) f_{n+1} tiene la *propiedad de Henkin relativa* a f_n. Es decir: para toda τ_n-sentencia $\exists v\psi(v)$ y todo $x \in X$, si $\exists v\psi(v) \in f_n(x)$ existe entonces una constante c en τ_{n+1} tal que $\psi(c) \in f_{n+1}(x)$.

Para terminar tomamos $\chi = \bigcup_{n\in\omega} \tau_n$ y $g = \bigcup_{n\in\omega} f_n$. Como la unión de una cadena de teorías variables es una teoría variable entonces g es una χ-teoría variable. $card(\chi) = card(\tau)\cdot\omega$ y finalmente g tiene la propiedad de Henkin. El único punto del esquema que requiere aclaración es la construcción de la función f_{n+1} a partir de f_n. Sea $(\psi_i)_{i\in\varkappa}$ con $\varkappa = card(\tau_n) \cdot \omega$ una enumeración de las τ_n sentencias. Definimos una sucesión de funciones $\left(f_n^i\right)_{i\in\varkappa}$ de la siguiente manera:

(1) $f_n^0 = f_n$.
(2) $\tau_{n+1} = \tau_n \cup \{c_j : j \in \varkappa\}$. Donde para todo j en $\varkappa$, c_j es una constante que no pertenece a τ_n.
(3) Supongamos definida f_n^j. Definimos entonces f_n^{j+1} de la siguiente manera: dada ψ_i la i-ésima sentencia de la enumeración, si ψ_i tiene la forma $\exists v\psi(v)$, entonces

$$f_n^{j+1}(x) = \begin{cases} f_n^{j+1}(x) = f_n^j(x) \cup \{\psi_i(c_i)\} & \text{si } \psi_i \in f_n^j(x) \\ f_n^{j+1}(x) = f_n^j(x) & \text{si } \psi_i \notin f_n^j(x) \end{cases}$$

Tomamos $f_{n+1} = \bigcup_{j\in\varkappa} f_n^j$. Se tiene entonces que: $card(\tau_{n+1}) = card(\tau_n)\cdot\omega$ y g es una τ_{n+1}-teoría variable con la propiedad de Henkin.

Teorema 6. *Dada f una τ-teoría variable, existe un vocabulario $\chi \supset \tau$ y g una χ teoría variable tal que:*

(1) $card(\chi) = card(\tau) \cdot \omega$
(2) *$f \subset g$ y g es maximal en $X(\chi)$*
(3) *g tiene la propiedad de Henkin.*

El teorema anterior puede considerarse un corolario de los dos lemas anteriores los cuales, dada una función f con vocabulario de f $(voc(f))$ igual a τ, nos permiten garantizar la existencia de:

(1) Una función h_1 con $voc(h_1) = \tau$, h_1 maximal y $f \leq h_1$.
(2) Una función h_2, con: $voc(h_2) = \chi$, $card(\chi) = card(\tau) \cdot \omega$ y h_2 con la propiedad de Henkin.

Para construir la función g que el teorema asegura que existe, basta construir una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\omega}$ tal que:

(1) $f_0 = f$.
(2) $f_{2n} \subset f_{2n+1}$, $voc(f_{2n+1}) = voc(f_{2n})$ y f_{2n+1} es una extensión maximal de f_{2n}.
(3) $f_{2n+1} \subset f_{2n+2}$, $card(voc(f_{2n+2})) = card(voc(f_{2n+1})) \cdot \omega$ y f_{2n+2} tiene la propiedad de Henkin.

Para terminar, simplemente tomamos $g = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ y comprobamos que g es de Henkin, g es maximal y $voc(g) = \bigcup_{n\in\omega} voc(f_n)$.

Definición 14. Una teoría variable f sobre X es *genérica* si, y solo si,:

(1) Para todo sentencia de la forma $\alpha \Rightarrow \beta$ y para todo $x \in X$ se tiene que $\alpha \Rightarrow \beta \notin f(x)$ si, y solo si, para toda vecindad U de x existe un $y \in U$ tal que $\alpha \in f(y)$ y $\beta \notin f(y)$.
(2) Para toda sentencia α y para todo abierto U si para todo $x \in U$ se tiene que $\alpha \notin f(x)$ entonces para todo $x \in U$ tenemos que $\urcorner\alpha \in f(x)$.

Definición 15. Una teoría variable f sobre X es *universal en su vocabulario* (o simplemente universal) si, y solo si, para toda fórmula $\alpha(v, c_1, \ldots, c_n)$ se tiene que $\forall v\alpha(v, c_1, \ldots, c_n) \in f(x)$ si, y solo si, existe una vecindad U de x tal que para todo $y \in U$ y toda constante c en el vocabulario de $f(y)$ se tiene que $\alpha(c, c_1, \ldots, c_n) \in f(y)$.

Definición 16. Una teoría variable es *prima* si, y solo si, para todo $x \in X$ la teoría $f(x)$ es prima.

Teorema 7. *Sean τ un vocabulario y F un haz de $\tau-$estructuras sobre X tal que para cada sección local σ del haz F existe una constante $c \in \tau$ para la cual $E(c) = dom(\sigma)$ y $c^{F_x}(x) = \sigma(x)$ para todo $x \in dom(\sigma)$. Se tiene entonces que la teoría variable f_F determinada por F tiene las siguientes características:*

(1) *Es prima*
(2) *Es genérica*
(3) *Es universal.*

La prueba es fácil.

Teorema 8. *Dada f una $\tau-$teoría variable prima, genérica y universal sobre X, existe un haz F^f de τ-estructuras tal que para toda τ-sentencia α y para todo $x \in X$: $\alpha \in f(x)$ si, y solo si, $F \Vdash_x \alpha$.*

La prueba del teorema anterior es una típica prueba de completez al estilo Henkin. Simplemente construimos el haz F^f codificado por f y comprobamos que $F^f \vDash f$. Sea pues X el espacio base. Dado $x \in X$ tomamos como fibra sobre x la colección $\{c \in voc(f) : c \in voc(f(x))\}$ módulo la relación de equivalencia $\sim_x$ donde dadas c y d constantes en $voc(f(x))$ se tiene que: $c \sim_x d$ si, y solo si, $c = d \in f(x)$. A este cociente lo llamaremos F^f_x.

El espacio haz F^f es igual a $\biguplus_{x\in X} F^f_x$. La proyección es la obvia y tomamos como conjunto de selecciones básicas la colección $\Sigma = \{\widehat{c} : c \in voc\,(f)\}$, donde dada una constante c, $\widehat{c}$ es la siguiente selección:

(1) $dom\,(\widehat{c}) = sop_f\,(c) = \{x \in X : c \in voc\,(f\,(x))\}$.
(2) Si $x \in voc\,(f\,(x))$ entonces $\widehat{c}\,(x) = [c]_{\sim_x}$.

Σ satisface el teorema de existencia para haces por lo que podemos afirmar que existe un espacio haz con espacio base X, y una colección de secciones básicas Σ. Este haz será nuestro haz F^f. Debemos ahora definir la $\tau-$estructura.

(1) Si c es una constante la interpretación de c es la sección $\widehat{c}$.
(2) Si R es una relación n-aria, x es un elemento de X y $c_1, \ldots, c_n$ son constantes tales que $x \in sop_f\,(c_i)$. Si $i \leq n$ entonces

$$F^f \Vdash_x R\,(\widehat{c}_1\,(x)\,, \ldots, \widehat{c}_n\,(x))$$

si, y solo si, $R\,(c_1, \ldots, c_n) \in f\,(x)$.
(3) Si f es un símbolo de función n-aria, x es un elemento de X y c_1, …, c_n, c son constantes que tienen a x en su soporte. Entonces

$$F^f \Vdash_x f\,(\widehat{c}_1\,(x)\,, \ldots, \widehat{c}_n\,(x)) = \widehat{c}\,(x)$$

si, y solo si, la sentencia $f\,(c_1, \ldots, c_n) = c$ pertenece a $f\,(x)$.

De esta manera hemos construido un haz de τ-estructuras F^f y podemos comprobar fácilmente que $F^f \vDash f$. La prueba de esto último es por inducción en fórmulas.

(1) El caso atómico es por construcción.
(2) La conjunción es fácil y por ello se omite.
(3) $\alpha \vee \beta \in f\,(x)$ si, y sólo si, $\alpha \in f\,(x)$ o $\beta \in f\,(x)$ si, y sólo si, por la hipótesis de inducción, $F^f \Vdash_x \alpha$ o $F^f \Vdash_x \beta$ si, y sólo si, $F^f \Vdash_x \alpha \vee \beta$.
(4) $\alpha \Rightarrow \beta \notin f\,(x)$ si, y sólo si, para toda vecindad U de x existe un $y \in U$ tal que $\alpha \in f\,(y)$ y $\beta \notin f\,(y)$ si, y sólo si, por hipótesis de inducción, para toda vecindad U de x existe un $y \in U$ tal que $F^f \Vdash_y \alpha$ y $F^f \nVdash_y \beta$ si, y sólo si, $F^f \nVdash_x \alpha \Rightarrow \beta$.
(5) La negación es similar y por ello se omite.
(6) $F^f \Vdash_x \exists v\alpha(v, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$ si, y sólo si, existe $\widehat{\sigma} \in F^f_x$ tal que $F^f \Vdash_x \alpha[\widehat{\sigma}, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$ si, y sólo si, existe $\sigma \in voc\,(f\,(x))$ tal que $\alpha(\sigma, c_1, \ldots, c_n) \in f\,(x)$ si, y sólo si, $\exists v\alpha(v, c_1, \ldots, c_n) \in f\,(x)$.
(7) Suponga primero que $\forall v\ \alpha(v, c_1, \ldots, c_n) \in f\,(x)$ y que $F^f \nVdash_x \forall v\alpha(v, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n)$; se tiene entonces que para toda vecindad U de x existe $y \in U$ y $\sigma \in voc\,(f\,(y))$ tal que $F^f \nVdash_y \alpha[\widehat{\sigma}, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$ lo cual implica que para toda vecindad U de x existe un $y \in U$ tal que $\forall v\alpha$ $(v, c_1, \ldots, c_n) \notin f\,(y)$. Pero esto es imposible porque f es continua. Veamos ahora la otra dirección. Suponga que $F^f \Vdash_x \forall v\alpha(v, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$. Existe entonces una vecindad U de x tal que para todo $y \in U$ y toda constante $\sigma \in voc\,(f\,(y))$ $F^f \Vdash_x \alpha[\sigma, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$, por lo que existe una

vecindad U de x tal que para todo $y \in U$ y toda constante σ en el vocabulario de $f(y)$, $\alpha(\sigma, c_1, \ldots, c_n) \in f(y)$, lo cual implica por la universalidad de f que $\forall v\alpha(v, c_1, \ldots, c_n) \in f(x)$.

Corolario 2. *$f : X \to Spec(\tau)$ tiene un modelo si, y solo si, existe un vocabulario $\tau' \supset \tau$ y una teoría variable $f' : X \to Spec(\tau')$ tal que $f \leq f'$, f' es prima, genérica y universal.*

Dada una teoría variable f, podemos garantizar que existe una extensión maximal, Henkin, y cerrada para deducción, pero como veremos en la próxima sección no siempre podemos garantizar la existencia de una extensión que adicionalmente tenga la propiedad de la disyunción. En general siempre que admitamos la disyunción como un conectivo no podremos garantizar que todas las teorías variables tengan modelo, ¿Qué pasa si no incluimos la $\vee$ como un conectivo? ¿Podríamos tener para suficientes espacios topológicos un teorema de completez que asegure la existencia de un modelo haz para toda teoría variable sobre estos espacios?

7. Completez

Los tres teoremas anteriores y el último corolario muestran como las propiedades y construcciones que son útiles en teoría de modelos de la lógica clásica no necesariamente son las apropiadas en teoría de modelos de haces. Notemos que mientras en teoría de modelos de primer orden es suficiente garantizar que una teoría T tenga una extensión Henkin y maximal para garantizar que tenga un modelo, en el contexto de haces esto no es suficiente. Podemos garantizar que una teoría variable tenga extensiones Henkin y maximales, pero todas estas extensiones no garantizan la existencia de un modelo para la teoría original, ya que ellas no son aún capaces de codificar la construcción de un modelo haz de sí mismas, a diferencia de lo que ocurre en el contexto de primer orden.

Definición 17. $f : X \to Spec(\tau)$ es *enumerable* si, y solo si, $|\tau| \leq \omega$.

Definición 18.

(1) Un espacio topológico X es *genérico* si, y solo si, para toda teoría T consistente y enumerable existe un haz F sobre X tal que $F \Vdash T$.

(2) Un espacio topológico es *fuertemente genérico* si, y solo si, para toda $f : X \to Spec(\tau)$ continua y enumerable existe F un haz sobre X tal que $F \models f$.

Lema 10.

(1) *Si X es genérico entonces es no atómico.*

(2) *Si X es genérico es perfecto, es decir, X no tiene puntos aislados.*

(3) *Si X es fuertemente genérico es genérico.*

Demostración.

(1) Es fácil comprobar, que si para un espacio topológico X existe un haz F tal que $F \Vdash \neg\forall x \forall y\, (\neg\,(x=y) \vee \neg\neg\,(x=y))$ entonces X es no atómico.
(2) Se sigue de 1 fácilmente.
(3) Se tiene inmediatamente de las definiciones. ☑

Uno de los problemas que definitivamente quisiera atacar en este escrito es el de caracterizar la clase de los espacios genéricos o en su defecto, encontrar condiciones naturales que garanticen que un espacio dado es genérico. Caracterizar la clase de espacios genéricos implica caracterizar de paso la clase de órdenes universales [M1] gracias a la siguiente proposición.

Proposición 1. [Principio de dualidad] *Un orden* $(\Sigma, \leq)$ *es universal si, y solo si, el espacio* $(\Sigma, \Omega_{\leq})$ *es genérico.*

Para la prueba y más información véase [C3] lema 4.1.

Caracterizar espacios genéricos u órdenes universales no es fácil, la experiencia nos muestra que la estructura del espacio base, así como la estructura del haz de conjuntos determinan la clase de sentencias que se pueden forzar. Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 3.
(1) La sentencia $\neg\forall x P\,(x) \wedge \forall x \neg\neg P\,(x)$ es forzable sobre un orden Σ si, y solo si, para todo $x \in \Sigma$ existe $y \in \Sigma$ tal que $x \lneqq y$.
(2) Como se vio en el lema 10, $\neg\forall x \forall y\, (\neg\neg\,(x=y) \vee \neg\,(x=y))$ solo puede ser forzada sobre espacios topológicos no atómicos.
(3) Un caso muy interesante es el siguiente. Diremos que un prehaz F sobre Σ es de universos constantes si, y solo si, para todo par $a, b \in \Sigma$ si $a \leq b$ entonces F_{ab} es sobreyectiva. Sea τ el vocabulario $\{P, Q, R, c\}$ donde P, Q y R son relaciones unarias y c es una constante, si F es un prehaz de $\tau-$estructuras de universos constantes sobre $(\mathbb{R}, \leq)$, se tiene que

$$F \Vdash (\forall x\, (P\,(x) \Rightarrow \exists x Q\,(x))) \Rightarrow (\exists x\, (P\,(x) \Rightarrow R\,(c)) \vee \exists x\, (R\,(c) \Rightarrow Q\,(x)))\ .$$

Existe en cambio un prehaz G de $\tau-$estructuras de universos constantes sobre $(\mathbb{Q}, \leq)$ tal que

$$G \nVdash (\forall x\, (P\,(x) \Rightarrow \exists x Q\,(x))) \Rightarrow (\exists x\, (P\,(x) \Rightarrow R\,(c)) \vee \exists x\, (R\,(c) \Rightarrow Q\,(x)))$$

Este ejemplo es interesante ya que muestra que la lógica intuicionista y la noción de forzamiento intuicionista, son capaces de distinguir el orden denso completo $(\mathbb{R}, \leq)$ y el orden denso no completo $(\mathbb{Q}, \leq)$, siendo un hecho conocido que la lógica clásica es incapaz de hacer esta distinción.
(4) Un haz F sobre un espacio X es pleno si, y solo si, toda $F-$sección σ extiende a una sección global. Dado X un espacio localmente conexo

y F un haz pleno sobre X,

$$F \Vdash \forall x\,(P\,(x) \vee \neg P\,(x)) \Rightarrow (\neg\neg\exists x P\,(x) \Rightarrow \exists x P\,(x))$$

En cambio si Y es un espacio no localmente conexo, existe un haz pleno G sobre Y tal que $G \nVdash \forall x\,(P\,(x) \vee \neg P\,(x)) \Rightarrow (\neg\neg\exists x P\,(x) \Rightarrow \exists x P\,(x))$. La sentencia $\forall x\,(P\,(x) \vee \neg P\,(x)) \Rightarrow (\neg\neg\exists x P\,(x) \Rightarrow \exists x P\,(x))$ es conocida como el principio de Markov, el cual ocupa un lugar prominente en los desarrollos de la escuela constructivista rusa (para más información sobre la escuela constructivista rusa, el lector puede consultar [VT]).

La verificación de las afirmaciones consignadas en el ejemplo anterior, es un ejercicio interesante para el lector, ejercicio que enseña mucho acerca de la noción de forzamiento, la noción de haz y la interacción entre la topología y la lógica.

En la literatura no se ha planteado el problema de caracterización de espacios genéricos y órdenes universales, sin embargo, es posible encontrar trabajos encaminados a resolver un problema similar y en cierto sentido complementario.

Definición 19. Sea X un espacio topológico

(1) $Val\,(X) = \{\alpha : \text{todo haz } F \text{ sobre } X \text{ fuerza } \alpha\}$
(2) $For\,(X) = \{\alpha : \text{existe un haz } F \text{ sobre } X \text{ que fuerza } \alpha\}$

Definición 20.
(1) Un espacio topológico X es *$c-$genérico* si, y solo si, $Val\,(X) = \{\alpha : \vdash \alpha\}$
(2) Un espacio topológico X es *débilmente genérico* si, y solo si, $For\,(X) = \{\alpha : \alpha \text{ es intuicionistamente consistente}\}$.

Existen trabajos encaminados a caracterizar los espacios $c-$genéricos, su importancia consiste en que para ellos se tiene inmediatamente de la definición el siguiente teorema de completez.

Teorema 9. *Si X es $c-$genérico y α es una sentencia, $\alpha \in Val\,(X)$ si, y solo si, α es una tautología intuicionista.*

Podemos concebir entonces un espacio $c-$genérico como un espacio en el que la noción de validez es gobernada completamente por la lógica intuicionista. Naturalmente existen espacios que no son $c-$genéricos. Por ejemplo, sea X un espacio discreto, $Val\,(X) = \{\alpha : \vdash_c \alpha\}$, lo cual implica que la lógica que lo gobierna es clásica.

Todo esto nos permite pensar en jerarquizar los espacios de acuerdo con la lógica que los gobierna, en el extremo inferior ubicamos a los espacios gobernados por la lógica clásica como por ejemplo los discretos, mientras que en el extremo superior aparecen los $c-$genéricos. ¿Cuáles son los espacios $c-$genéricos? ¿Qué espacios son gobernados por lógicas intermedias? En [MO] Moerdijk prueba que los espacios métricos perfectos son $c-$genéricos. Ya Tarski en [Ta] había probado que los espacios métricos separables son $c-$genéricos si restringimos esta noción al caso puramente proposicional.

Un espacio $c-$genérico y débilmente genérico es un espacio plenamente intuicionista ya que las dos caras de la moneda, lo válido y lo forzable, están determinadas por la lógica intuicionista.

En este escrito nos interesa el problema de la genericidad, porque la primera pregunta que se debe responder cuando se intenta clasificar los modelos haces de una teoría T sobre un espacio X, es si ésta clase de modelos es vacía o no. Si el espacio X es genérico la respuesta es inmediata. La clase de modelos haces sobre X de T es vacía si, y solo si, T es inconsistente. Es decir, si X es genérico podemos pensar en basar una teoría de modelos de haces sobre X en una noción de consistencia (intuicionista) ajustada a X y en una forma de completez para X (existencia de modelo).

Más interesante aún, pero más difícil, parece ser la noción de genericidad fuerte, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2. *Si X es T_2 y fuertemente genérico entonces es totalmente desconectado.*

Demostración. Si X es fuertemente genérico, no tiene puntos aislados y por lo tanto es infinito. Sean $x,\, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como X es T_2 existen vecindades U_x y U_y de x y de y, respectivamente, tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Sea $\tau = \{R, c\}$ donde R es un símbolo de relación unaria y c es un símbolo de constante. Consideremos ahora la siguiente teoría variable

$$f(z) = \begin{cases} \{R(c) \vee \neg R(c)\} & \text{si} \quad z \notin U_x \cup U_y \\ \{R(c) \vee \neg R(c)\,,\, R(c)\} & \text{si} \quad z \in U_x \\ \{R(c) \vee \neg R(c)\,,\, \neg R(c)\} & \text{si} \quad x \in U_y \end{cases}$$

Claramente f es continua y si existe F que fuerza f entonces

$$X = \{z : F \Vdash_z R(c)\} \cup \{z : F \Vdash_z \neg R(c)\}\ ,$$

por lo que existen abiertos $U,\, V \subset X$ tales que $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$. ☑

Si queremos genericidad fuerte debemos entonces desechar la hipótesis de conexidad. Pero, desafortunadamente, los espacios no conexos son modelo-teóricamente difíciles ya que si A y B son dos abiertos disyuntos que cubren a X, entonces dada T una teoría, F_1 un haz sobre A que fuerza T y F_2 un haz sobre B que fuerza T podemos construir enonces un haz (F_1, F_2) sobre X que fuerce T y tal que $(F_1, F_2) \restriction_A \cong F_1$ y $(F_1, F_2) \restriction_B \cong F_2$. Ésto último significa que si $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$ podemos identificar la colección de haces sobre X que fuerzan T con el producto cartesiano de los haces sobre A modelos de T y los haces sobre B modelos de T. Es decir, si quisiéramos hacer clasificación de los haces sobre X modelos de T deberíamos hacerla componente conexa a componente conexa.

7.1. **Completez y funciones abiertas.** Sean $f : X \to Y$ una función abierta, continua y sobreyectiva. Dado un haz F sobre Y podemos usar f para transportar F y construir un haz F^* sobre X que fuerce las mismas sentencias que F. El haz F^* lo construimos de la siguiente manera:

(1) Dado $x \in X$ y $y \in Y$ tal que $f(x) = y$ tomamos como fibra F_x^* sobre x la estructura F_y.
(2) Dada una F-sección σ, con dominio $U \subset Y$, definimos una sección $\widehat{\sigma}$ con dominio $f^{-1}(U)$ de la siguiente manera: dados $x \in f^{-1}(U)$ y $y \in U$ tales que $f(x) = y$ se tiene que $\widehat{\sigma}(x) = \sigma(y)$.

La colección de secciones $\{\widehat{\sigma} : \sigma \text{ es una } F\text{-sección}\}$ satisface las condiciones del teorema de existencia para haces, así que tenemos un haz F^* sobre X al que llamaremos el *pullback* de F *por vía de* f.

Lema 11. $F^* \Vdash_x \alpha[\widehat{\sigma}_1, \ldots, \widehat{\sigma}_n]$ *si, y solo si,* $F \Vdash_{f(x)} \alpha[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$.

Demostración.. La prueba es por inducción sobre fórmulas.

(1) Para las atómicas es por construcción
(2) La conjunción y la disyunción son fáciles
(3) Si $F \Vdash_{f(x)} \neg\alpha[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$ existe una vecindad $U_{f(x)}$ de $f(x)$ tal que para todo $y \in U_{f(x)}$ se tiene que $F \nVdash_y \alpha[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$, y entonces para todo $z \in f^{-1}(U_{f(x)})$ se tiene que $F^* \nVdash_z \alpha[\widehat{\sigma_1} \ldots \widehat{\sigma_n}]$, y como $f^{-1}(U_{f(x)})$ es una vecindad abierta de x, tenemos que $F^* \Vdash_x \neg\alpha[\widehat{\sigma_1} \ldots \widehat{\sigma_n}]$.

    Supongamos ahora que $F^* \Vdash_x \neg\alpha[\widehat{\sigma}_1 \ldots \widehat{\sigma}_n]$; por definición existe U_x, vecindad abierta de x, tal que para todo $z \in U_x$ se tiene que $F^* \nVdash_z \alpha[\widehat{\sigma_1} \ldots \widehat{\sigma_n}]$. Como f es abierta, $f''(U_x)$ es una vecindad abierta de $f(x)$ y entonces, por hipótesis de inducción, para todo $y \in f''(U_x)$ se tiene que $F \nVdash_y \alpha[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$, por lo que $F \Vdash_{f(x)} \neg\alpha[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$.
(4) Si $F^* \Vdash_x \alpha \Rightarrow \beta[\widehat{\sigma}_1 \ldots \widehat{\sigma}_n]$ existe U_x vecindad abierta de x tal que para todo $z \in U_x$ se tiene que si $F^* \Vdash_z \alpha[\widehat{\sigma_1} \ldots \widehat{\sigma_n}]$ entonces $F^* \Vdash_z \beta[\widehat{\sigma}_1 \ldots \widehat{\sigma}_n]$. Como f es abierta, $f''(U_x)$ es una vecindad abierta de $f(x)$ y entonces, por hipótesis de inducción para todo $y \in f''(U_x)$ si $F \Vdash_y \alpha[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$ entonces $F \Vdash_y \beta[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$, por lo que $F \Vdash_x \alpha \Rightarrow \beta[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$. Supongamos ahora que $F \Vdash_{f(x)} \alpha \Rightarrow \beta[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$; por definición existe $U_{f(x)}$ vecindad de $f(x)$ tal que si $y \in U_{f(x)}$ y si $F \Vdash_y \alpha[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$ entonces $F \Vdash_y \beta[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$. Por hipótesis de inducción si $z \in f^{-1}(U_{f(x)})$ y $F^* \Vdash_z \alpha[\widehat{\sigma_1} \ldots \widehat{\sigma_n}]$ entonces $F^* \Vdash_z \beta[\widehat{\sigma_1} \ldots \widehat{\sigma_n}]$, es decir, existe V_x vecindad de x tal que para todo $z \in V_x$ si $F^* \Vdash_z \alpha[\widehat{\sigma_1} \ldots \widehat{\sigma_n}]$ entonces $F^* \Vdash_z \beta[\widehat{\sigma}_1 \ldots \widehat{\sigma}_n]$; y por lo tanto $F^* \Vdash_x \alpha \Rightarrow \beta[\widehat{\sigma}_1 \ldots \widehat{\sigma}_n]$.
(5) Suponga que $F^* \Vdash_x \forall v\alpha[v, \widehat{\sigma_1} \ldots \widehat{\sigma_n}]$, existe una vecindad abierta U_x de x tal que si $z \in U_x$ y $\widehat{\rho}$ es una sección que tiene a z en su dominio entonces $F^* \Vdash_z \alpha[\widehat{\rho}, \widehat{\sigma_1} \ldots \widehat{\sigma_n}]$. Por la hipótesis de inducción tenemos que si $y \in f''(U_x)$ y ρ es una sección que tiene a y en su dominio,

entonces $F \Vdash_y \alpha[\rho, \sigma_1 \ldots \sigma_n]$. Como $f''(U_x)$ es abierto, existe una vecindad abierta U de $f(x)$ (con $U = f''(U_x)$) tal que si $w \in U$ y ρ es una sección que tiene a w en su dominio entonces $F \Vdash_w \alpha[\rho, \sigma_1 \ldots \sigma_n]$ por lo que $F \Vdash_{f(x)} \forall v\alpha[v, \sigma_1 \ldots \sigma_n]$. La otra dirección es similar y se deja como ejercicio así como el caso del cuantificador existencial. ☑

En adelante, siempre que exista una función abierta, continua y sobreyectiva $f : X \to Y$, diremos que X es *proyectable* en Y.

Corolario 3.
(1) *Si X es proyectable en Y y dada una teoría T, si existe un haz F sobre Y que fuerza T, entonces existe un haz G sobre X que fuerza T.*
(2) *Si X es proyectable en Y y Y es genérico entonces X es genérico.*

Lema 12. $2^{\prec\omega}$ *como espacio topológico es genérico.*

El lema se sigue de la universalidad de $2^{\prec\omega}$ y del principio de dualidad.

Corolario 4. *Si X es proyectable en $2^{\prec\omega}$ entonces X es genérico.*

Desafortunadamente, como veremos a continuación, la condición de ser proyectable en $2^{\prec\omega}$ es muy restrictiva.

Definición 21. Dado X un espacio topológico, $\mathbf{\Omega}(\mathbf{X})$ es la colección de abiertos de X.

Definición 22. Dado X un espacio topológico. Un *árbol de abiertos* sobre X es una función $f : 2^{\prec\omega} \to \Omega(X)$ tal que:

(1) f(∅)=X
(2) Si $\eta \sqsubseteq \varepsilon$ entonces $f(\eta) \supseteq f(\varepsilon)$
(3) Para todo $\eta \in 2^{\prec\omega}$ se tiene que $f(\eta) \neq \emptyset$
(4) Para todo $\eta \in 2^{\prec\omega}$, $f(\eta\hat{\ }1) \cap f(\eta\hat{\ }0) = \emptyset$

Lema 13. *Si X es proyectable en $2^{\prec\omega}$ entonces X no es de Baire.*

Demostración. Dada $g : X \to 2^{\prec\omega}$ abierta, continua y sobrectiva, podemos definir, usando g, un árbol de abiertos sobre X al que denotaremos f. Definimos f mediante la ecuación $f(\eta) = g^{-1}([\eta]_{2^{\prec\omega}})$. Por ser g continua, abierta y sobreyectiva, f satisface las cuatro condiciones de la definición. Claramente para todo $\eta \in 2^{\prec\omega}$, $f(\eta\hat{\ }1) \cap f(\eta\hat{\ }0) = \emptyset$. Como g es abierta, $f(\eta\hat{\ }1) \cup f(\eta\hat{\ }0)$ es denso en $f(\eta)$, así que podemos probar por inducción que para todo $n \in \omega$ el conjunto $\{x : x \in f(\eta) \text{ y } \mathit{longitud}(\eta) = n\}$ es denso en X. Adicionalmente tenemos que

$$\bigcap_{n\in\omega} \{x : x \in f(\eta) \text{ y } \mathit{longitud}(\eta) = n\} = \bigcup_{h\in 2^{\omega}} \left(\bigcap_{\eta \sqsubset h} f(\eta) \right) = \emptyset\,.$$

Esto último implica que existe una colección enumerable $(C_n)_{n\in\omega}$ de abiertos densos en X tal que $\bigcap_{n\in\omega} C_n = \emptyset$. Donde

$$C_n = \{x : x \in f(\eta) \text{ para algún } \eta \text{ de longitud } n\} = \bigcup_{\substack{\eta\in 2^{\prec\omega},\\ \text{longitud}(\eta)=n}} g^{-1}([\eta]) \ . \quad \boxtimes$$

Lema 14. *Si X es un espacio totalmente desconectado, sin puntos aislados y enumerable, entonces X es proyectable en $2^{\prec\omega}$.*

Demostración. La idea de la prueba es construir una cadena enumerable $f_0 \subset f_1 \subset \cdots$ de funciones parciales de dominio finito tal que para todo $i \in \omega$, f_i es una función parcial de X en $2^{\prec\omega}$ y tal que la unión de la cadena es la función continua y abierta que estamos buscando.

Sea $\{a_0, a_1, \ldots\}$ una enumeración de X. Adicionalmente, dado $n \in \mathbb{N}$, $(U_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de vecindades de a_n tal que $U_0^n = X$.

(1) $f_0 = \{(a_0, \emptyset)\}$

(2) Supongo construida $f_i \vdots X \to 2^{\prec\omega}$ de tal manera que $\{a_0, \ldots, a_{i-1}\} \subset \{a_{i_0}, \ldots, a_{i_m}\} = dom(f_i)$ y hemos escogido abiertos $U_{i_0}, \ldots, U_{i_m}$ tales que $a_{i_j} \in U_{i_j}$, además $\bigcup_{i\leq m} U_{i_j} = X$, y finalmente $U_{i_j} \cap U_{i_k} = \emptyset$ siempre que $j \neq k$.

(3) Construimos f_{i+1} a partir de f_i.

CASO 1: $a_i \in dom(f_i)$. Dado $j \leq m$, escojamos $a_{j_1}, a_{j_0} \in \left(U_i^{i_j} \cap U_{i_j}\right) \smallsetminus dom(f_i)$.

$$f_{i+1} = f_i \cup \left(\bigcup_{i\leq m} \left\{\left(a_{j_1}, f_i\left(a_{i_j}\right) \hat{}1\right), \left(a_{j_0}, f_i\left(a_{i_j}\right) \hat{}0\right)\right\}\right)$$

y a cada abierto U_{i_j} lo partimos en tres abiertos disyuntos $U_{i_j}^0$, $U_{i_j}^1$, $U_{i_j}^2$ tales que $\left(U_{i_j}^0 \cup U_{i_j}^1 \cup U_{i_j}^2\right) = U_{i_j}$, $a_{j_0} \in U_{i_j}^0$, $a_{j_1} \in U_{i_j}^1$ y $a_j \in U_{i_j}^2$. Finalmente guardamos la partición $\left(U_{i_j}^k\right)_{i\leq m,\ k\leq 2}$.

CASO 2: $a_i \notin dom(f_i)$. En este caso existe un único $j_n \leq m$ tal que $a_i \in U_{i_{j_n}}$. Escojamos a_{j_0}, a_{j_1} para todo $j \leq m$ de tal manera que $a_{j_1}, a_{j_0} \in \left(U_i^{i_j} \cap U_{i_j}\right) \setminus (dom(f_i) \cup \{a_i\})$. Definimos

$$f_{i+1} = f_i \cup \left(\bigcup_{i\leq m} \left\{\left(a_{j_1}, f_i\left(a_{i_j}\right) \hat{}1\right), \left(a_{j_0}, f_i\left(a_{i_j}\right) \hat{}0\right)\right\}\right) \cup \{(a_i, f_i(a_{j_n}))\} \ .$$

A cada abierto U_{i_j} con $j \neq j_n$ lo partimos en tres abiertos disyuntos $U^0_{i_j}$, $U^1_{i_j}$, $U^2_{i_j}$ tales que

$$\left(U^0_{i_j} \cup U^1_{i_j} \cup U^2_{i_j}\right) = U_{i_j} ,$$

$a_{j_0} \in U^0_{i_j}$, $a_{j_1} \in U^1_{i_j}$ y $a_j \in U^2_{i_j}$. A $U_{i_{j_n}}$ lo partimos en cuatro abiertos disyuntos $U^0_{i_{j_n}}$, $U^1_{i_{j_n}}$, $U^2_{i_{j_n}}$, $U^*_{i_{j_n}}$, de tal manera que

$$\left(U^0_{i_{j_n}} \cup U^1_{i_{j_n}} \cup U^2_{i_{j_n}} \cup U^*_{i_{j_n}}\right) = U_{i_{j_n}} ,$$

$a_{j_{n0}} \in U^0_{i_{j_n}}$, $a_{j_{n1}} \in U^1_{i_{j_n}}$, $a_{j_n} \in U^2_{i_{j_n}}$ y $a_i \in U^*_{i_{j_n}}$. Finalmente guardamos la partición $\left(U^k_{i_j}\right)_{i \leq m,\ k \leq 2} \cup \left\{U^*_{i_{j_n}}\right\}$.

(4) Construida la cadena $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$, hacemos $f = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} f_i$.

Para terminar la prueba es suficiente comprobar que f satisface cada una de las cuatro afirmaciones listadas a continuación:

- $dom\,(f) = X$
- f es continua
- f es abierta
- $Rango\,(f) = 2^{\prec\omega}$

El primer ítem es inmediato y el cuarto se sigue del tercero dado que $f\,(a_0) = \emptyset$. Veamos que f es continua. Dado $a \in X$ existe i tal que $a = a_{i_j}$ y $a_{i_j} \in \{a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}\} = dom\,(f_i)$. Al construir f_i construimos también una partición $U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}$ y tenemos que

$$f''\left(\left(U_{i_j} \backslash dom\,(f_i)\right) \cup \left\{a_{i_j}\right\}\right) \subset [f\,(a))_{2^{\prec\omega}} ,$$

por lo tanto f es continua. Ahora veamos que f es abierta. Para ello es suficiente verificar que para todo $a \in X$ y para toda vecindad U de a existen $a^1, a^0 \in U$ tales que $f\left(a^1\right) = f\,(a)\,\hat{}\,1$ y $f\left(a^0\right) = f\,(a)\,\hat{}\,0$. Dado $a \in X$ existe $i \in \omega$ tal que $a \in dom\,(f_j)$ para todo $j \geq i$. Si en la numeración del espacio X, se tiene que $a = a_n$, existe $N \geq i$ tal que $U \supseteq U^n_N$. Como $a \in dom\,(f_N)$, al construir f_{N+1} se escogieron puntos a^0, $a^1 \in U^n_N$ tales que $f_{N+1}\left(a^1\right) = \widehat{f}_N\,(a)\,1$ y $f_{N+1}\left(a^0\right) = \widehat{f}_N\,(a)\,0$. ☑

Corolario 5. *Todo espacio métrico, sin puntos aislados y enumerable es genérico.*

En adelante $T \vdash_c \alpha$ denotará que la teoría T deduce clásicamente la fórmula α y $T \vdash \alpha$ seguirá denotando que la teoría T deduce intuicionistamente la fórmula α.

El siguiente teorema es un resultado bastante curioso.

Teorema 10. *Sea X un espacio de Baire y F un haz de τ-estructuras sobre X con $|\tau| \leq \omega$. Existe $x \in X$ tal que $\{\alpha : F \Vdash_x \alpha\}$ es una τ-teoría completa.*

Demostración. Sea $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ una enumeración de las τ-sentencias. Definimos una función $f : 2^{\prec\omega} \to \Omega(X)$ de la siguiente manera:

(1) $f(\emptyset) = X$
(2) Supongamos definida f hasta el nivel n, es decir, para todo $\varepsilon \in 2^{\prec\omega}$ tal que $longitud(\varepsilon) \leq n$, $f(\varepsilon)$ ya ha sido definida y adicionalmente supongamos que si $longitud(\varepsilon) \leq n-1$ entonces $f(\widehat{\varepsilon}) \cup f(\widehat{\varepsilon}0)$ es denso en $f(\varepsilon)$.
(3) Dado ε tal que $longitud(\varepsilon) = n$, tomemos

$$f(\varepsilon\hat{\ }0) = \{x \in f(\varepsilon) : F \Vdash_x \alpha_{n+1}\}$$

y

$$f(\varepsilon\hat{\ }1) = \{x \in f(\varepsilon) : F \Vdash_x \neg\alpha_{n+1}\} \ .$$

De esta manera tenemos una función $f : 2^{\prec\omega} \to \Omega(X)$ tal que:
- $f(\emptyset) = X$
- Si $\varepsilon \sqsupseteq \eta$ entonces $f(\varepsilon) \subseteq f(\eta)$
- Para todo ε, $f(\varepsilon\hat{\ }1) \cup f(\varepsilon\hat{\ }0)$ es denso en $f(\varepsilon)$.

Podemos entonces probar que

$$C_n = \bigcup_{\substack{\varepsilon \in 2^{\prec\omega}, \\ longitud(\varepsilon) = n}} f(\varepsilon)$$

es un abierto denso en X. Como X es de Baire , $\bigcap_{n\in\omega} C_n \neq \emptyset$ pero

$$\bigcap_{n\in\omega} C_n = \bigcup_{h \in 2^{\omega}} \left(\bigcap_{\varepsilon \sqsubset h} f(\varepsilon) \right)$$

por lo que existen $x \in X$ y $h \in 2^{\omega}$ tales que $x \in f(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \sqsubset h$ y entonces para todo $i \in \omega$, $x \in \{u : F \Vdash_u \alpha_i\}$ o $x \in \{u : F \Vdash_u \neg\alpha_i\}$ y en conclusión, $\{\alpha : F \Vdash_x \alpha\}$ es una teoría completa. ☑

7.2. **Completez y álgebras de Heyting.** Las álgebras de Heyting son estructuras algebraicas cercanas a las álgebras de Boole y estrechamente ligadas a la lógica intuicionista. Dado X un espacio topológico, la colección $\Omega(X)$ de abiertos de X tiene una estructura natural de álgebra de Heyting completa $\left(\Omega(X), 0_{\Omega(X)}, 1_{\Omega(X)}, \wedge, \vee, ^{c_H}\right)$ determinada por:

- $0_{\Omega(X)} = \emptyset$
- $1_{\Omega(X)} = X$
- $a \wedge b = a \cap b$
- $\bigvee_{i\in I} a_i = \bigcup_{i \in I} a_i$
- $(a)^{c_H} = int(a^c)$

El lector interesado en más información acerca de álgebras de Heyting y álgebras de Heyting completas puede consultar [B].

Dado F un haz de $\tau-$estructuras sobre X, podemos definir una valuación veritativa $\|\|_F : \mathcal{L}(\tau) \rightarrow \Omega(X)$, la cual asigna a toda sentencia α su "extensión veritativa" $\|\|_F$, lo que no es otra cosa que el conjunto $\{x : F \Vdash_x \alpha\}$. La definición de la valución $\| \ \|_F$ podemos hacerla recursivamente en términos de los operadores lógicos básicos:

(1) Si σ y γ son $F-$secciones $\|\sigma = \gamma\|_F = \{x : F_x \vDash \sigma(x) = \gamma(x)\}$
(2) Si $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ son $F-$secciones y α es una fórmula atómica

$$\|\alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]\|_F = \{x : F_x \vDash \alpha[\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)]\} \ .$$

(3) $\|\alpha \wedge \beta\|_F = \|\alpha\|_F \cap \|\beta\|_F$
(4) $\|\alpha \vee \beta\|_F = \|\alpha\|_F \cup \|\beta\|_F$
(5) $\|\neg\alpha\|_F = int((\|\alpha\|_F)^c)$
(6) $\|\alpha \Rightarrow \beta\|_F = int((\|\alpha\|_F)^c) \cup \|\beta\|_F$
(7) $\|\exists v\alpha(v)\|_F = \bigcup\limits_{\substack{\sigma \text{ es} \\ F-\text{sección}}} \|\alpha[\sigma]\|_F$
(8) $\|\forall v\alpha(v)\|_F = int\left(\bigcap\limits_{\substack{\sigma \text{ es} \\ F-\text{sección}}} (int(dom(\sigma)^c) \cup \|\alpha[\sigma]\|_F)\right)$

Lema 15. *$F \Vdash_x \varphi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ si y sólo si $x \in \|\varphi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]\|_F$.*

La prueba es una fácil inducción en fórmulas, el lector interesado en consultar la prueba o en más información acerca de la valuación puede consultar [FO, págs. 365 a 371].

Dados X y Y espacios topológicos, un *encaje completo* del álgebra de Heyting $\Omega(Y)$ en el álgebra de Heyting $\Omega(X)$ es una función $f : \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$ tal que:

(1) $f(\emptyset) = \emptyset$
(2) $f(Y) = X$
(3) $f\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i \in I} f(A_i)$
(4) $f\left(int\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)\right) = int\left(\bigcap\limits_{i \in I} f(A_i)\right)$
(5) $f(int(A^c)) = int(f(A)^c)$

Dados los espacios topológicos X y Y, un encaje completo $f : \Omega(Y) \rightarrow \Omega(X)$ y un haz F de $\tau-$estructuras sobre Y, podemos usar f para transportar F y construir un haz $\widetilde{F}$ sobre X. La construcción la hacemos de la siguiente manera:

(1) Si $x \in X$, el universo de $\widetilde{F_x}$ es el conjunto

$$\{\sigma : \sigma \text{ es una } F-\text{sección y } x \in f(dom\sigma)\} / \backsim_x ,$$

donde $\sigma \backsim_x \gamma$ si, y solo si, $x \in f(\{y : \sigma(y) = \gamma(y)\})$.

(2) A $\widetilde{F_x}$ lo dotamos de $\tau-$estructura de la siguiente manera. Dados $[\sigma_1]_x, \ldots, [\sigma_n]_x \in \widetilde{F}_x$ y $\alpha(v_1, \ldots, v_n)$ atómica: $\widetilde{F}_x \vDash \alpha[[\sigma_1]_x, \ldots, [\sigma_n]_x]$ si, y solo si, $x \in f(\{y : F_y \vDash \alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]\})$.

(3) Definidas las fibras sólo nos queda definir las secciones. Dada una $F-$sección σ con dominio U, definimos una $\widetilde{F}-$sección $\widetilde{\sigma}$ con dominio $f(U)$ de la siguiente manera: si $x \in f(U)$, $\widetilde{\sigma}(x) = [\sigma]_x$.

La colección de secciones $\Sigma = \{\widetilde{\sigma} : \sigma \text{ es una } F - \text{sección}\}$ satisface las condiciones del teorema de existencia para haces, por lo que hemos efectivamente construido un haz sobre X.

Teorema 11. *$\widetilde{F} \Vdash_x \alpha[\widetilde{\sigma_1}, \ldots, \widetilde{\sigma_n}]$ si, y solo si, $x \in f(\|\alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]\|_F)$.*

Demostración.. La prueba es por inducción fórmulas:

(1) Para las atómicas es por construcción.

(2) $\widetilde{F} \Vdash_x \alpha \wedge \beta$ si, y solo si, $\widetilde{F} \Vdash_x \alpha$ y $\widetilde{F} \Vdash_x \beta$ si y sólo si $x \in f(\|\alpha\|_F)$ y $x \in f(\|\beta\|_F)$ si, y solo si, $x \in f(\|\alpha\|_F) \cap f(\|\beta\|_F)$ si, y solo si, $x \in f(\|\alpha \wedge \beta\|_F)$.

(3) $\widetilde{F} \Vdash_x \alpha \vee \beta$ si, y solo si, $\widetilde{F} \Vdash_x \alpha$ o $\widetilde{F} \Vdash_x \beta$ si y sólo si $x \in f(\|\alpha\|_F)$ o $x \in f(\|\beta\|_F)$ si, y solo si, $x \in f(\|\alpha\|_F) \cup f(\|\beta\|_F)$ si, y solo si, $x \in f(\|\alpha \vee \beta\|_F)$.

(4) $\widetilde{F} \Vdash_x \neg\alpha$ si, y sólo si, $x \in int\left(\left\{y : \widetilde{F} \Vdash_y \alpha\right\}^c\right)$ si, y sólo si, $x \in int\left(f(\|\alpha\|_F)^c\right)$ ya que por hipótesis de inducción $\|\alpha\|_{\widetilde{F}} = f(\|\alpha\|_F)$ si, y sólo si, $x \in f(\|\neg\alpha\|_F)$.

(5) La implicación es similar y por ello se omite.

(6) $\widetilde{F} \Vdash_x \exists v\alpha(v)$ si y sólo si existe $\widetilde{\sigma}$ tal que $F \Vdash_x \alpha[\widetilde{\sigma}]$ si, y solo si, existe $\widetilde{\sigma}$ tal que $x \in \|\alpha[\widetilde{\sigma}]\|_{\widetilde{F}}$ si sólo si $x \in \bigcup_{\widetilde{\sigma} \text{ es } \widetilde{F}-\text{sección}} \|\alpha[\widetilde{\sigma}]\|_{\widetilde{F}}$ si, y solo si,

$$x \in f\left(\bigcup_{\substack{\sigma \text{ es} \\ F-\text{sección}}} \|\alpha[\sigma]\|_F\right)$$

si, y solo si, $x \in f(\|\exists v\alpha(v)\|_F)$.

(7) El cuantificador universal es similar y por ello se omite. ☑

Corolario 6.

(1) *$\widetilde{F} \Vdash_x \alpha[\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_n]$ si, y slo si, $x \in f(\{y : F \Vdash_y \alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]\})$.*

(2) *Si $F \Vdash T$ entonces $\widetilde{F} \Vdash T$.*

(3) *Si existe un encaje completo de $\Omega(Y)$ en $\Omega(X)$ y Y es genérico entonces X es genérico.*

(4) *Si existe un encaje completo de $\Omega(2^{\prec\omega})$ en $\Omega(X)$ se tiene que X es genérico.*

Teorema 12. *Si X es un espacio metrizable sin puntos aislados existe un encaje completo de $\Omega(2^{\prec\omega})$ en $\Omega(X)$.*

Para la prueba el lector puede consultar [MO].

Corolario 7. *Si X es un espacio metrizable sin puntos aislados, X es genérico.*

7.3. **Completez y fragmentos.** Sea $A \subset \{\exists, \forall, \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow\}$. Una $A-$*fórmula* es una fórmula construida usando solo los operadores lógicos en A. Una $A-$*teoría* es una teoría que solo contiene A-fórmulas. Un espacio topológico X es $A-$*genérico* si, y sólo si, toda $A-$*teoría* tiene un modelo haz sobre X. Sea F un haz de τ-estructuras sobre X y sea Y un espacio topológico tal que X es un subconjunto denso de Y. Dado U un abierto no vacío de Y definimos una τ-estructura $F(U)$ de la siguiente manera:[†]

(1) El universo de $F(U)$ es el conjunto de F-secciones con dominio $U \cap X$.
(2) Si $\alpha(x_1 \ldots x_n)$ es atómica y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in F(U)$ tenemos que $F(U) \vDash \alpha[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$ si, y solo si, para todo $a \in U \cap X$ se tiene que
$$F_a \vDash \alpha[\sigma_1(a), \ldots, \sigma_n(a)] .$$

Si suponemos que el haz F tiene secciones globales y que las fibras son no vacías, la definición anterior no tiene problemas. Ahora dado $y \in Y$ y $\mathcal{V}(y)$ un sistema fundamental de vecindades para y, podemos pensar en construir una estructura sobre y usando la colección $(F(U))_{U\in\mathcal{V}(y)}$, para ello definimos $\lim\limits_{U\in\mathcal{V}(y)}(F(U))$ de la siguiente manera:

- El universo de $\lim\limits_{U\in\mathcal{V}(y)}(F(U))$ es $\biguplus\limits_{U\in\mathcal{V}(y)} F(U)/\sim_y$ donde $\sigma \sim_y \rho$ si, y solo si, $\sigma \in F(U)$, $\rho \in F(V)$, existe $W \in \mathcal{V}(y)$ tal que $(U \cap V) \supset W$ y $\sigma\restriction_{W\cap X} = \rho\restriction_{W\cap X}$.
- Dada $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula atómica y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ elementos del universo de $\lim\limits_{U\in\mathcal{V}(y)}(F(U))$, tenemos que $\lim\limits_{U\in\mathcal{V}(y)}(F(U)) \vDash \alpha[\sigma_1 \ldots \sigma_n]$ si, y solo si, existe una vecindad W de y tal que $(W \cap X) \subset dom(\sigma_1)$, …, $dom(\sigma_n)$ y $F(W) \vDash \alpha[\sigma_1\restriction_W, \ldots, \sigma_n\restriction_W]$. Hecho todo esto pasamos a definir un haz $\widetilde{F}$ sobre Y de la siguiente manera:
  (1) Si $a \in X$, $\widetilde{F}_a = F_a$.
  (2) Si $a \in Y \backslash X$, $\widetilde{F}_a = \lim\limits_{U\in\mathcal{V}(a)}(F(U))$.
  (3) Dada σ una F-sección con dominio $U \cap X$, definimos una $\widetilde{F}$-sección $\widetilde{\sigma}$ con dominio U tal que si $a \in U \cap X$ entonces $\widetilde{\sigma}(a) = \sigma(a)$, y si $a \in U \backslash X$ entonces $\widetilde{\sigma}(a) = [\sigma]_a$.

El objeto así construido es un haz de τ-estructuras sobre X. Para ello basta notar que satisface las condiciones del teorema de existencia para haces. Nótese que el haz $\widetilde{F}$ lo hemos construido usando el proceso de germinación.

[†]Esta estructura también se denomina estructura de secciones con dominio U.

Sea $D = \{\forall, \wedge, \urcorner, \Rightarrow\}$.

Lema 16. *Para toda D-fórmula* $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$, $\widetilde{F} \Vdash_x \alpha[\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_n]$ *si, y solo si, existe una vecindad* U *de* x *tal que para todo* $a \in U \cap X$, *se tiene que* $F \Vdash_a \alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$.

Demostración. La prueba es por inducción sobre fórmulas.

- Para atómicas es por construcción
- La conjunción es fácil y por ello se omite.
- Suponga que $\widetilde{F} \Vdash_x \urcorner\alpha[\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_n]$ y que para toda U_x vecindad de x existe $a \in U_x \cap X$ tal que $F \Vdash_a \alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ y existe entonces una vecindad W de a con $W \subset U_x \cap X$ tal que si $b \in W$ entonces $F \Vdash_b \alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$, existe entonces $y \in U_x$ y una vecindad V_y de y tal que $V_y \cap X \subset W$, por lo que $\widetilde{F} \Vdash_y \alpha[\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_n]$ y $\widetilde{F} \nVdash_x \urcorner\alpha[\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_n]$.

  Suponga ahora que existe U_x vecindad de x, tal que para todo $a \in U_x \cap X$ se tiene que $F \Vdash_a \urcorner\alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$; se tiene entonces que para todo $a \in U_x \cap X$, $F \nVdash_a \alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$, y entonces para todo $y \in U_x$ se tiene que $\widetilde{F} \nVdash_y \alpha[\widetilde{\sigma_1}, \ldots, \widetilde{\sigma_n}]$, por lo que $\widetilde{F} \Vdash_x \urcorner\alpha[\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_n]$.
- Suponga que $\widetilde{F} \Vdash_x \alpha \Rightarrow \beta[\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_n]$, entonces existe U_x una vecindad de x tal que si $y \in U_x$ y $\widetilde{F} \Vdash_y \alpha[\widetilde{\sigma_1}, \ldots, \widetilde{\sigma_n}]$, $\widetilde{F} \Vdash_y \beta[\widetilde{\sigma_1}, \ldots, \widetilde{\sigma_n}]$ y por lo tanto para todo $a \in U_x \cap X$ se tiene que si $F \Vdash_a \alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$. Luego $F \Vdash_a \beta[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$, por lo que existe una vecindad U_x de x tal que para todo $a \in U_x \cap X$, $F \Vdash_a \alpha \Rightarrow \beta[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$.

  Suponga ahora que existe una vecindad U_x de x tal que si $a \in U_x \cap X$ entonces $F \Vdash_a \alpha \Rightarrow \beta[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$, se sigue que para todo $y \in U_x$ si $\widetilde{F} \Vdash_y \alpha[\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_n]$ entonces $\widetilde{F} \Vdash_y \beta[\widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_n]$, por lo que $\widetilde{F} \Vdash_x \alpha \Rightarrow \beta[\widetilde{\sigma_1}, \ldots, \widetilde{\sigma_n}]$.
- $\widetilde{F} \Vdash_x \forall v\alpha[v, \widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_n]$ si, y solo si, existe una vecindad U_x de x tal que para todo $y \in U_x$ y todo $\widetilde{\sigma}$ con y en su dominio, $\widetilde{F} \Vdash_y \alpha[\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}_1, \ldots, \widetilde{\sigma}_n]$; si, y solo si, para todo $a \in U_x \cap X$ y todo σ que tiene a a en su dominio, $F \Vdash_a \alpha[\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ si, y solo si, para todo $a \in U_x \cap X$ se tiene que $F \Vdash_a \forall v\alpha[v, \sigma_1, \ldots, \sigma_n]$. ☑

Corolario 8.

(1) *Si para todo* $x \in X$, $F \Vdash_x T$ *y* T *es una D-teoría, entonces para todo* $y \in Y$, $\widetilde{F} \Vdash_y T$.
(2) *Si* X *es fuertemente D-genérico entonces* Y *es fuertemente D-genérico.*

Nota 1. Veamos que la construcción no funciona para la disyunción y el existencial. Sea $\tau = \{R, c\}$ con R un símbolo de relación unaria y c un símbolo de constante, sea F el haz de $\tau-$estructuras sobre Q definido por:

- El espacio haz subyacente es la tripla $(\mathbb{Q}, \sqsupset, \mathbb{Q})$
- c es el nombre de la única sección global del haz $(\mathbb{Q}, \sqsupset, \mathbb{Q})$
- Dado $x \in Q$, $F \Vdash_x R(c)$ si, y solo si, $x < \sqrt{2}$.

Al extender F a un haz $\widetilde{F}$ sobre R, se tiene que F debería forzar en $\sqrt{2}$ la sentencia $R(c) \vee \neg R(c)$ ya que para todo $a \in Q$, $F \Vdash_a R(c) \vee \neg R(c)$. Es imposible que $\widetilde{F} \Vdash_{\sqrt{2}} R(c) \vee \neg R(c)$, ya que por el teorema anterior $\widetilde{F} \nVdash_{\sqrt{2}} R(c)$ y $\widetilde{F} \nVdash_{\sqrt{2}} \neg R(c)$. Es posible construir un ejemplo similar para verificar que tampoco podemos extender de manera adecuada el forzamiento del cuantificador existencial de un haz F sobre X a su extensión $\widetilde{F}$ sobre Y.

En el contexto clásico toda fórmula es lógicamente equivalente a una D-fórmula y por lo tanto toda teoría es lógicamente equivalente a una D-teoría. Obviamente esto no es cierto en el contexto intuicionista, pero dada cualquier teoría T existe una "D-versión" T^D la cual es clásicamente equivalente a T.

Adicionalmente existe una manera canónica de sumergir la lógica clásica y la lógica intuicionista en la D-lógica intuicionista. Esta manera es una traducción conocida como traducción de Gödel.

Definición 23. Dado τ un vocabulario la *traducción de Gödel* es una función $g : L(\tau) \to L(\tau)$ definida recursivamente de la siguiente manera:

(1) Si α es atómica $g(\alpha) = \neg\neg\alpha$
(2) $g(\alpha \wedge \beta) = g(\alpha) \wedge g(\beta)$
(3) $g(\alpha \Rightarrow \beta) = g(\alpha) \Rightarrow g(\beta)$
(4) $g(\neg\alpha) = \neg g(\alpha)$
(5) $g(\forall x\alpha) = \forall x g(\alpha)$
(6) $g(\alpha \vee \beta) = \neg(\neg g(\alpha) \wedge \neg g(\beta))$
(7) $g(\exists x\alpha) = \neg\forall x(\neg g(\alpha))$

Definición 24. Una fórmula α es *estable* si, y solo si, $\vdash g(\alpha) \Longleftrightarrow \alpha$

Proposición 3.
(1) *$\alpha \in Rango(g)$ si, y solo si, α es una D-fórmula en la que todos los átomos están o negados o doble negados.*
(2) *α es estable si, y solo si, α es equivalente a una D-fórmula en la que todos los átomos están negados o doble negados.*

La prueba es fácil y por ello se omite.

Proposición 4. *Dada T una teoría y α una fórmula $g(T) \vdash g(\alpha)$ si, y solo si, $T \vdash_c \alpha$.*

Para una prueba de la proposición el lector puede consultar [VD] teorema 5.2.8.

Dada T una teoría, si toda $\alpha \in T$ es estable tenemos que

$$g(T) = \{g(\alpha) : \alpha \in T\} = T$$

y, por lo tanto, por el lema anterior $T \vdash \alpha$ si, y solo si, $T \vdash_c \alpha$.

Corolario 9. *Dados X y Y espacios topológicos tales que X es denso en Y, y dados F un haz sobre X y $\widetilde{F}$ su extensión sobre Y, si T es una teoría tal que $g(T) = T$ se tiene que $F \Vdash T$ si, y solo si, $\widetilde{F} \Vdash T$.*

Dado un haz F sobre X, URIBE en [U] construye un espacio booleano $\widetilde{X}$ y un haz $\widetilde{F}$ sobre $\widetilde{X}$ tal que para toda sentencia α, $F \Vdash g(\alpha)$ si y sólo si $\widetilde{F} \Vdash g(\alpha)$. Esta construcción es análoga a nuestra construcción de la extensión a Y de un haz F sobre un espacio denso de Y. A URIBE esta construcción le sirve para extender al contexto de los espacios T_2 sin puntos aislados, un teorema de Macintyre (véase [M]) referente a haces de anillos sobre espacios booleanos.

Ahora, teniendo en cuenta que podemos sumergir la lógica clásica en el D-fragmento de la lógica intuicionista y considerando que las D-fórmulas se portan bien, podemos restringir nuestra atención a las D-fórmulas o incluso ser más radicales y restringirnos a considerar D_0-fórmulas con $D_0 = \{\forall, \wedge, \urcorner\}$.

Definición 25.

(1) Un haz F es **regular** si, y solo si, para todo $x \in X$ y para toda fórmula $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in voc(f(x))$. $F \nVdash_x \alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ si y sólo si para toda vecindad U de x, existe $y \in U$ tal que $F \Vdash_y \urcorner\alpha[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$.

(2) F es $D(D_0)$***-regular*** si lo anterior se tiene cuando nos restringimos a $D(D_0)$-fórmulas.

(3) F es **atómico-regular** si lo anterior se tiene cuando nos restringimos a fórmulas atómicas.

Proposición 5. *Si F es $A-$regular entonces para toda A-fórmula α se tiene que si $F \Vdash_x \urcorner\urcorner\alpha$ entonces $F \Vdash_x \alpha$.*

Demostración. Suponga que $F \nVdash_x \alpha$. Por la regularidad de α tenemos que para toda vecindad U de x existe $y \in U$ tal que $F \Vdash_y \urcorner\alpha$, por lo que en ninguna vecindad de x se fuerza densamente α y entonces $F \nVdash_x \urcorner\urcorner\alpha$. ☑

Lema 17. *Si F es atómico-regular es D-regular.*

Demostración.. Asumiendo que F es atómico-regular probaremos que es D-regular. La prueba es por inducción sobre D-fórmulas:

(1) El caso atómico es por hipótesis.

(2) Supongamos que $F \nVdash_x \alpha \wedge \beta$ entonces $F \nVdash_x \alpha$ o $F \nVdash_x \beta$ y para toda vecindad U de x existe $y \in U$ tal que $F \Vdash_y \urcorner\alpha$ o $F \Vdash_y \urcorner\beta$, y entonces para toda vecindad U de x existe $y \in U$ tal que $F \Vdash_y \urcorner(\alpha \wedge \beta)$. Supongamos ahora que para toda vecindad U de x existe $y \in U$ tal que $F \Vdash_y \urcorner(\alpha \wedge \beta)$, tenemos entonces que para toda vecindad U de x existe $y \in U$ tal que $F \nVdash_y \alpha \wedge \beta$ y por lo tanto $F \nVdash_x \alpha \wedge \beta$.

(3) Si $F \nVdash_x \urcorner\alpha$ entonces para toda vecindad U de x existe $y \in U$ tal que $F \Vdash_y \alpha$, por tanto para toda vecindad U de x existe $y \in U$ tal que $F \Vdash_y \urcorner\urcorner\alpha$. Asumamos ahora que para toda vecindad U de x existe y

tal que $F \Vdash_y \neg\neg\alpha$, se tiene entonces que para toda vecindad W de y, en particular U, existe $z \in W$ tal que $F \Vdash_z \alpha$ y entonces para toda vecindad U de x existe $z \in U$ tal que $F \Vdash_z \alpha$ por lo que $F \nVdash_x \neg\alpha$.

(4) La implicación es similar y por ello se omite.

(5) Si $F \nVdash_x \forall v\alpha\,(v, \sigma_1 \ldots \sigma_n]$ entonces para toda vecindad U de x existe $y \in U$ y existe σ tal que $F \nVdash_y \alpha\,[\sigma, \sigma_1 \ldots \sigma_n]$ y entonces para toda vecindad W de y, en particular para U, existe $z \in W$ tal que $F \Vdash_z \neg\alpha\,[\sigma, \sigma_1 \ldots \sigma_n]$ y entonces para toda vecindad U de x, existe $z \in U$ tal que $F \Vdash_z \neg\forall v\alpha\,(v, \sigma_1 \ldots \sigma_n]$. La otra dirección es fácil y por ello se omite. ☑

Definición 26. Una D_0-*teoría variable* sobre X es una función continua $f : X \to Spec\,(\tau)$ tal que para todo $x \in X$ se tiene que $f\,(x)$ es una D_0-teoría.

Definición 27.

(1) Una D_0-teoría variable $f : X \to Spec\,(\tau)$ es **regular** si, y solo si, para todo $x \in X$ y toda α tal que $voc\,(\alpha) \subset voc\,(f\,(x))$ se tiene que $\alpha \notin f\,(x)$ si, y solo si, para toda vecindad U de x existe y tal que $\neg\alpha \in f\,(y)$.

(2) Una D_0-teoría variable $f : X \to Spec\,(\tau)$ es **saturada** si, y solo si,
- Si para todo $x \in U$, $\alpha \notin f\,(x)$ y U es abierto, entonces, $\neg\alpha \in f\,(x)$ para todo $x \in U$.
- Si $\forall v\alpha \notin f\,(x)$ entonces para toda vecindad U de x existe $y \in U$ y existe una constante c tal que $\neg\alpha\,(c) \in f\,(y)$.

Teorema 13. *Si $f : X \to Spec\,(\tau)$ es una D_0-teoría variable regular y saturada entonces F tiene un modelo haz D-regular sobre X.*

Demostración. Dada f construimos F^f el haz codificado por f como en la prueba del teorema 8. ☑

Hecho 1. *Dada α atómica o atómica negada, $F^f \Vdash_x \alpha\,[\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$ si, y solo si, $\alpha\,(c_1, \ldots, c_n) \in f\,(x)$.*

La afirmación anterior es cierta por la construcción del haz F^f.

Hecho 2. *F^f es atómico regular.*

$F^f \nVdash_x \alpha\,[\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$ si, y sólo si, $\alpha\,(c_1, \ldots, c_n) \notin f\,(x)$ si, y sólo si, para toda vecindad U de x existe $y \in U$ tal que $\neg\alpha\,(c_1, \ldots, c_n) \in f\,(y)$; y entonces para toda vecindad U de x existe $y \in U$ tal que $F^f \Vdash_y \neg\alpha\,[\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$.

De la afirmación anterior tenemos que el haz F^f es D-regular.

Hecho 3. *Dada $\alpha\,(x_1, \ldots, x_n)$ una D_0-fórmula, $F^f \Vdash_x \alpha\,[\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$ si, y solo si, $\alpha\,(c_1, \ldots, c_n) \in f\,(x)$.*

La prueba de esta última afirmación es por inducción sobre el rango cuantificacional de las D_0-fórmulas:

(1) El caso atómico se tiene.

(2) La conjunción es fácil.

(3) $F^f \Vdash_x \neg\alpha\,[\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$ si, y sólo si, existe U tal que para todo $y \in U$ se tenga que $F^f \nVdash_y \alpha\,[\widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$ si, y sólo si, para todo $y \in U$ se tiene que $\alpha\,(c_1, \ldots, c_n) \notin f\,(y)$ si, y sólo si, existe una vecindad U de x tal que $\alpha\,(c_1, \ldots, c_n) \notin f\,(y)$ para todo $y \in U$ si, y sólo si, $\neg\alpha\,(c_1, \ldots, c_n) \in f\,(x)$.

(4) $F^f \nVdash_x \forall w\alpha\,(w, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$ si, y solo si, para toda vecindad U de x existe $y \in U$ y existe $\widehat{c}$ tales que $F^f \Vdash_y \neg\alpha\,[\widehat{c}, \widehat{c}_1, \ldots, \widehat{c}_n]$ si y sólo si, por hipótesis de inducción, para toda vecindad U de x existe $y \in U$ y existe c constante tales que $\neg\alpha\,(c, c_1, \ldots, c_n) \in f\,(y)$ si, y solo si, $\forall w\alpha\,(w, c_1, \ldots, c_n) \notin f\,(x)$. ☑

Concluimos proponiendo un problema y haciendo unos algunos comentarios.

Conjetura 1. *Pruebe que todo espacio métrico enumerable y perfecto es fuertemente D_0-genérico.*

Notemos que si la conjetura propuesta tiene una solución positiva, entonces todo espacio métrico separable es D_0-genérico y estaríamos entonces frente a la posibilidad de desarrollar una buena teoría de modelos de D_0-teorías variables en el contexto natural de los espacios métricos separables.

En este trabajo se prueban dos teoremas de completez para teorías variables que tengan cierto tipo de extensiones, mas no fue posible encontrar condiciones naturales que garanticen la existencia de estas extensiones. Si la conjetura fuera cierta, tendríamos un teorema de completez pleno para la clase de D_0-teorías variables sobre espacios métricos separables.

Un teorema de completez pleno para las teorías variables es el teorema de completez que se requiere para basar en él una sólida teoría de modelos de haces y en consecuencia una sólida teoría de modelos para una lógica temporal de estructuras relacionales.

Agradecimientos. Agradecemos a XAVIER CAICEDO por su orientación en nuestra tesis de maestría, buena parte de la cual aparece en este trabajo.

Bibliografía

[B] BALBES, R. *Dwinger Ph.(1974) Distributive Lattices.* University of Missouri Press: Columbia (Missouri).

[C1] CAICEDO, X. 1988, *Introducción a los topos de Grothendieck.* Apuntes matemáticos No. 8, Universidad de los Andes, Bogotá.

[C3] CAICEDO, X. 1995, *Lógica de los haces de estructuras.* Rev. Acad. Col. de Ciencias **74** (19), 69–84.

[CS] CAICEDO, X. & A. SETTE. 1993, *Equivalencia elemental entre feixes.* Proc. of the IX Latinamerican Symposium on Mathematical Logic. Notas de lógica matemática **38**, 129-141.

[CH] COHEN, P. J. 1966, *Set Theory and the Continuum hipothesis.* Benjamin Cumings: Reading (Massachusetts).

[CM] COMER, S. 1972, *Elementary properties of Structures of sections*. Notices Amer. Math. Soc. **19**, 4–26.

[ELL] ELLERMAN, D. P. 1974, *Sheaves of structures and generalized products*. Ann. of Math. Logic **7**, 163–195.

[F] FITTING, M. C. 1978, *Intuitionistic logic model theory and forcing*. Studies in Logic. North Holland: Amsterdam.

[FO] FOURMAN, M. P. & D. SCOTT. 1979, *Sheaves and logic*. In *Applications of Sheaves* (ed. M. P. FOURMAN). LNM 753: 230–301. Springer Verlag: Berlin.

[G] GABBAY, D. 1976, *Semantical investigations in Heyting's Intuitionistic Logic*. Reidel: Dordrecht.

[GR] GRAY, J. W. *Fragment of the history of sheaf theory*. LNM 753 (1979). Springer Verlag: Berlin.

[H] HODGES W. 1997, *A shorter Model theory*. Cambridge University Press: Cambridge.

[KC] KEISLER, J. & CH. CHANG. 1973, *Model theory*. North Holland: Amsterdam.

[L] LAWVERE F. W. 1975, *Continuosly variable sets: Algebraic Geometry = Geometric Logic*. In Proceed. Logic Colloqium, Bristol, 1973, 135–153. North Holland: Amsterdam.

[M] MACINTYRE, A. 1973, *Model completeness for sheaves of structures*. Fund. Math. **81**, 73–89.

[MC] MAC LANE, S. & I. MOERDIJK. 1992, *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer Verlag: New York.

[MA] MANSFIELD, R. 1977, *Sheaves and normal submodels*. Journal of Symbolic Logic **42** (2), 241–250.

[MO] MOERDIJK, I. 1982, *Some topological spaces wich are universal for intuitionistic predicate Logic*. Ind. Math. **44** (2), 227–235.

[M1] MONTOYA, A. 2003, *Una contribución a la teoría de modelos de Kripke para el intuicionismo*. Boletín de Matemáticas, Nueva Serie **10** (2003), 92–109.

[M2] MONTOYA, A. 2003, *Teoría de modelos de objetos topológicos*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

[R] REYES, G. 1978, *Théorie des modèles et faisceaux*. Adv. in Math. **30**, 156–170.

[Ta] TARSKI A. *Der Aussagenkalkül und die topologie*. Fun. Math. **31**, 103–134.

[T] TENNISON, B. 1974, *Sheaf Theory*. London Math. Soc. Lect. Notes 20. Cambridge University Press: Cambridge.

[U] URIBE, B. 1998, *Propiedades de primer orden de las estructuras de secciones globales*. Tesis de pregrado. Universidad de los Andes, Bogotá.

[VD] VAN DALEN, D. 1983, *Logic and structure*, 3rd. ed. Springer Verlag: Berlín.

[VT] VAN DALEN, D. & A. TROELSTRA . 1988, *Constructivism in mathematics. An introduction* (2 volúmenes). North Holland: Amsterdam.

[V] VILLAVECES, A. 1991, *Modelos fibrados y modelos haces para la teoría de conjuntos*. Tesis de magister, Universidad de los Andes, Bogotá.

(Recibido en octubre de 2004. Aceptado para publicación en noviembre de 2006)

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
BUCARAMANGA, COLOMBIA
e-mail: `juamonto@uis.edu.co`