

## **SOBRE EL NÚMERO DE TOPOLOGÍAS EN UN CONJUNTO FINITO**

GUSTAVO N. RUBIANO O. (\*)

---

**RESUMEN.** Se presenta la historia y los últimos resultados en la respuesta parcial a la pregunta: ¿Cuántas topologías se pueden construir sobre un conjunto finito  $X$ ? Las respuestas se presentan en términos de las relaciones entre las topologías finitas y sus correspondientes preórdenes, órdenes, grafos, digrafos, matrices de incidencia, etc.

**PALABRAS CLAVES.** Topología sobre un conjunto finito, preórdenes, órdenes, grafos, digrafos, matrices de incidencia.

**ABSTRACT.** This paper deals with recent results and a history account of the question: How many topologies can be defined on a finite set  $X$ ? The answers are given in terms of the relationships between the finite topologies sets and their corresponding preorder relations, order relations, graphs, digraphs, incidence matrices, etc.

**KEY WORDS AND PHRASES.** Topologies on a finite set, preorder relations, order relations, graphs, digraphs, incidence matrices.

**2000 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION:** 54A10

---

(\*) Gustavo N. Rubiano O. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: gnrubianoo@unal.edu.co.

1. INTRODUCCIÓN

Dado un conjunto finito  $X$  con  $n$  elementos —en este artículo, a menos que se diga otra cosa,  $X$  siempre denota un conjunto finito— notemos por  $T(n)$  el conjunto de topologías definibles sobre  $X$ . Una pregunta natural y formulada desde el inicio de la topología es: ¿cuántas topologías existen sobre  $X$ ? o ¿cuál es el cardinal  $|T(n)|$ ? La pregunta es difícil de contestar y por ello se trata de un problema abierto; más aún, para este problema de conteo no existe —a la fecha— ninguna fórmula cerrada ni recursiva que dé una solución. Tampoco existe un algoritmo eficiente de cómputo que calcule  $|T(n)|$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Topologías v.s. Preórdenes		
$n$	Número de topologías $ T(n) $	Clases de homeomorfismo
1	1	1
2	4	3
3	29	9
4	355	33
5	6.942	139
6 <sup>a</sup>	209.527	718
7 <sup>b</sup>	9.535.241	4.535
8 <sup>c</sup>	642.779.354	35.979
9 <sup>d</sup>	63.260.289.423	363.083
10 <sup>e</sup>	8.977.053.873.043	4.717.687
11 <sup>e</sup>	1816846038736192	79501654
12 <sup>f</sup>	519355571065774021	1744252509
13 <sup>f</sup>	207881393656668953041	49872339897
14 <sup>g</sup>	115617051977054267807460	1856792610995
15 <sup>h</sup>	88736269118586244492485121	89847422244493
16 <sup>i</sup>	93411113411710039565210494095	5637294117525695
17 <sup>h</sup>	134137950093337880672321868725846	?
18 <sup>i</sup>	261492535743634374805066126901117203	?

CUADRO 1. Número de topologías (preórdenes) para un conjunto de  $n$  elementos: etiquetados, sin etiquetar (clases de homeomorfismos). <sup>i</sup>Brinkmann (2005)[6] <sup>g</sup>Heitzig (2000) [21] <sup>f</sup>Erné (1990) [15] <sup>e</sup>Das (1977) [10]

Para valores pequeños de  $n$  el cálculo de  $|\mathbb{T}(n)|$  puede ser hecho a mano; por ejemplo  $|\mathbb{T}(1)| = 1$ ,  $|\mathbb{T}(2)| = 4$ ,  $|\mathbb{T}(3)| = 39$ . Pero el crecimiento de  $|\mathbb{T}(n)|$  es exponencial, de hecho es asintótico a  $2^{n^2/4}$  (ver cuadro 1). Este artículo trata de qué tan grandes estos números pueden ser y cómo son obtenidos. De hecho, existen 261492535743634374805066126901117203 posibles topologías para un conjunto con  $n = 18$  elementos, y hasta la fecha este valor de  $n$  es el mayor para el cual el número de topologías es conocido (ver [6]).

Topologías $T_0$ v.s. Órdenes parciales		
n	$T_0$ topologías $ T_0(n) $	homemomorfismos
1	1	1
2	3	2
3	19	5
4	219	16
5	4231	63
6	130023	318
7	6129859	2045
8	431723379	16999
9	44511042511	183231
10	6611065248783	2567 284
11	1396281677105899	46749 427
12	414864951055853499	1104891746
13	171850728381587059351	33823827452
14	98484324257128207032183	1338193159771
15	77567171020440688353049939	68275077901156
16	8348052978549015781384425579	4483130665195087
17	122152541250295322862941281269151	?
18	241939392597201176602897820148085023	?

Por supuesto que no estamos interesados sólo en la cantidad de elementos en  $\mathbb{T}(n)$ , en  $T_0(n)$  (las que satisfacen el axioma de separación  $T_0$ ), en  $\mathbb{T}^c(n)$  (las que son conexas) sino también en la cantidad de clases de espacios homeomorfos en cada una de estas colecciones —es como si sólo reconociéramos la cantidad de puntos y no sus nombres o etiquetas—. Entonces, la cantidad de clases de homeomorfismos disminuye drásticamente (ver cuadro 1). De hecho, cuando sólo tenemos en cuenta el número de elementos y no los nombres de los elementos, decimos que  $X$  está sin “etiquetar” o que hablamos de las clases de homeomorfismo.

Una estructura matemática se llama con frecuencia una estructura “etiquetada” si uno quiere expresar la diferencia entre la estructura en sí misma y su clase de isomorfismo, la cual es llamada entonces una estructura sin “etiquetar”.

A manera de ejemplo desglosemos el caso  $n = 3$  y veamos cómo está constituido  $T(n)$ . Son 29 topologías, pero tan solo 9 clases de espacios no homeomorfos (ver figuras 1 y 2).

A				
1	b	c	bc	ca
2	c	b	ab	bc
3	a	b	ab	bc
4	a	b	ab	ac
5	a	c	ab	ac
6	a	c	ca	cb

B			
7	b	c	bc
8	a	b	ab
9	a	c	ac

C			
10	a	ab	ac
11	b	ba	bc
12	c	ca	cb

D		
13	ac	b
14	ab	c
15	a	bc

E		
16	b	bc
17	b	ba
18	a	ab
19	a	ac
20	c	ac
21	c	cb

F	
22	ba
23	ac
24	cb

G	
25	b
25	a
27	c

$\emptyset$  y  $X = \{a, b, c\}$ .

FIGURA 1.  $T(3)$  y sus clases de homeomorfismo.

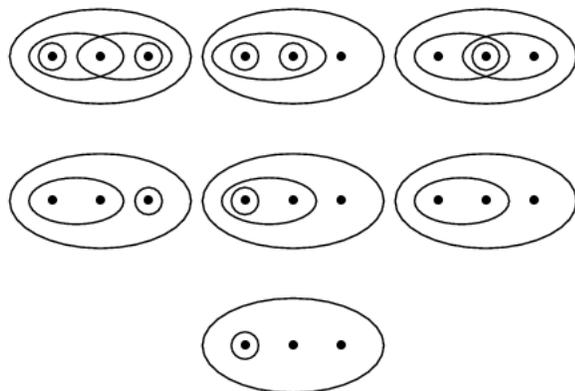


FIGURA 2. Representación de las clases de homeomorfismo en  $\mathbb{T}(3)$

Varios de los algoritmos propuestos para calcular  $|\mathbb{T}(n)|$  están en [5], [23], [8], [10]. El más rápido de ellos, hasta el año 2000 fue desarrollado por J. Heitzig y J. Reinhold [21] quienes fueron capaces de encontrar  $|\mathbb{T}(14)|$ . La rata de generación del programa de computación basado en este algoritmo era de cerca de 90.000 topologías por segundo (utilizando un computador de 1 GHz Pentium III). Este número  $|\mathbb{T}(14)|$  fue confirmado de manera independiente por N. Lygerós y P. Zimmermann [27]. Posteriormente, un nuevo algoritmo fue propuesto por G. Brinkmann y B. McKay [5] en el año 2002 el cual lista mas de 4.000.000 de topologías por segundo, y finalmente mejorado por ellos mismos en el año 2005 [6], logró calcular  $|\mathbb{T}(16)|$ .

¿Pero por qué estar interesados en calcular  $|\mathbb{T}(n)|$ ? Porque lejos de su apariencia trivial, los espacios topológicos finitos son interesantes y utilizados hoy más que nunca. Como veremos en la sección siguiente, contar topologías en  $X$  es contar preórdenes y órdenes en  $X$ , y contar estas colecciones de conjuntos ha demostrado ser en los últimos 40 años una herramienta combinatoria muy útil (aplicaciones en procesos digitales como en la topología digital, procesamiento de imágenes, espacios que resultan ser finitos como en la química teórica, genética, redes, etc.).

abiertos propios	
1	todos
2	{a}, {b}, {c}, {a,b}, {b,c}, {a,c}, {c,d}, {a,b,c}, {a,c,d}, {b,c,d}
3	{a},{b},{c},{a,b},{b,c},{a,c}, {a,b,c}, {a,b,d}
4	{a},{b}, {a,b}, {b,c}, {b,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {b,c,d}
5	{a},{b},{c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}
6	{a},{b}, {a,b}, {a,c}, {b,d}, {a,b,c}, {a,b,d}
7	{a}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}
8	{a},{b}, {a,b}, {b,d}, {a,b,c}, {a,b,d}
9	{a},{b}, {b,c}, {a,b},{a,b,c}, {b,c,d}
10	{a},{b}, {a,b}, {c,d}, {a,c,d}, {b,c,d}
11	{a},{b}, {a,b}, {a,c}, {a,b,c}
12	{a},{b}, {a,b}, {a,b,c}, {a,b,d}
13	{a}, {a,b}, {a,c}, {a,b,c}, {a,b,d}
14	{a}, {a,b}, {a,c}, {a,b,c}
15	{a},{b}, {a,b}, {a,b,c}
16	{a},{a,b}, {a,b,c}, {a,b,d}
17	{a},{b}, {a,b}, {a,c,d}
18	{a}, {b,c}, {a,b,c}, {b,c,d}
19	{a}, {c,d}, {a,b}, {a,c,d}
20	{a}, {a,b}, {a,b,c}
21	{a},{b}, {a,b}
22	{a}, {b,c}, {a,b,c}
23	{a}, {b,c}, {a,b,d}
24	{a}, {a,b}, {a,c,d}
25	{a}, {a,b}
26	{a,b}, {a,b,c}
27	{a}, {a,b,c}
28	{a}, {b,c,d}
29	{a,b}, {c,d}
30	{a},
31	{a,b,c}
32	{a,b}
33	ninguno

CUADRO 2. Clases de homeomorfismos para  $n=4$

A pesar de su utilidad, en la teoría aún existen muchos “huecos” de conocimiento por llenar; en particular, se necesitan más herramientas con las cuales estudiarlos junto con sus propiedades y por supuesto contarlos. Es hacia este último aspecto, contar, que este artículo está dirigido. Algunos de los hechos que presentamos en

este escrito son bien conocidos, mientras que otros se concluyen fácilmente de hechos conocidos. Sin embargo, es frecuentemente interesante, y algunas veces útil, hacer lo implícito explícito.

## 2. ESTRUCTURAS ORDENADAS

En esta sección mostraremos una relación fructífera entre las estructuras ordenadas y las estructuras topológicas

**2.1. Relaciones.** Sea  $X$  un conjunto con  $n$  elementos. Un subconjunto  $\mathcal{R} \subseteq X \times X$  es una **relación** binaria (o relación) en  $X$ ; el número de relaciones en  $X$  es  $2^{n^2}$ .

Una relación  $\mathcal{R}$  es **reflexiva** si  $(x, x) \in \mathcal{R}$  para cada  $x \in X$ ; el número de relaciones reflexivas en  $X$  es  $2^{n(n-1)}$ .

Una relación  $\mathcal{R}$  es **simétrica** si para todo  $x, y \in X$  la condición  $(x, y) \in \mathcal{R}$  implica  $(y, x) \in \mathcal{R}$ ; el número de relaciones simétricas en  $X$  es  $2^{n(n-1)/2}$ .

Una relación  $\mathcal{R}$  es **antisimétrica** si para todo  $x, y, z \in X$  la condición  $(x, y) \in \mathcal{R}$  y  $(y, x) \in \mathcal{R}$  implica  $x = y$ ; el número de relaciones antisimétricas en  $X$  es  $2^n \cdot 3^{n(n-1)/2}$ .

Una relación  $\mathcal{R}$  es **transitiva** si para todo  $x, y, z \in X$  la condición  $(x, y) \in \mathcal{R}$  y  $(y, z) \in \mathcal{R}$  implica  $(x, z) \in \mathcal{R}$ ; no existe una fórmula general (al menos conocida) para el número  $\mathbf{t}(n)$  de relaciones transitivas. Es sorprendente que una pregunta de conteo tan fácil de plantear resulte no resuelta. Es entonces predecible que todas aquellas definiciones de relaciones que involucren la transitividad sean problemas abiertos de conteo. A la fecha [20] sólo se conoce el número de relaciones transitivas hasta  $\mathbf{t}(14)$ .

*2.1.1. Preórdenes y órdenes.* Un **preorden**  $\mathcal{R}$  en un conjunto  $P$  es una relación reflexiva y transitiva. Notamos por  $\mathbf{Pre}(n)$  el conjunto de los preórdenes en el conjunto finito  $X$ . Si un preorden  $\mathcal{R}$  en  $P$  es además antisimétrico, lo llamamos un **orden parcial** o simplemente un **orden** en  $P$  y decimos que  $(P, \mathcal{R})$  es un **Cpo** —conjunto parcialmente ordenado—. En estos dos casos la relación  $\mathcal{R}$  se acostumbra notar como  $\preceq$  y escribimos  $x \preceq y$  si  $(x, y) \in \mathcal{R}$ . Notamos por  $\mathbf{Cpo}(n)$  el conjunto de los órdenes en el conjunto finito  $X$ .

Un elemento  $x \in P$  es un **elemento maximal (minimal)** si para cada  $z \in P$ ,  $x \preceq z$  ( $z \preceq x$ ) implica  $x = z$ . Dos elementos  $x, y$  son comparables si  $x \preceq y$  o  $y \preceq x$ , de lo contrario se dicen incomparables. Si cada par de elementos son comparables

decimos que  $(P, \leq)$  es un conjunto **totalmente ordenado**. Un subconjunto  $C \subseteq P$  es una **cadena** si cualquier par de elementos en  $C$  son comparables.

Dado  $A \subseteq P$ , decimos que  $x \in P$  es una **cota superior** para  $A$  si  $a \leq x$  para todo  $a \in A$ . Con  $A^\uparrow$ —léase el **superior** de  $A$ — denotamos el conjunto de las cotas superiores de  $A$ , y con  $A^\downarrow$  el conjunto de las cotas inferiores de  $A$ . El elemento mínimo de  $A^\uparrow$ , si existe, es el **supremo** de  $A$ , denotado por  $\bigvee A$  o  $\sup A$ . De manera dual se define el **ínfimo** de  $A$ , denotado  $\bigwedge A$  o  $\inf A$ . En el caso en que  $A = \{x, y\}$  simplemente notamos

$$x \vee y := \sup \{x, y\} \text{ y } x \wedge y := \inf \{x, y\}.$$

Si para todo par de elementos  $x, y$  existen  $x \vee y$  y  $x \wedge y$  se dice que  $(P, \leq)$  es un **retículo**.  $(P, \leq)$  es un **retículo completo** (o reticulado completo) si para todo subconjunto  $S$  de  $P$  existen  $\bigvee S = \sup S$  y  $\bigwedge S = \inf S$ . Si se quiere resaltar el papel de  $P$  se escribe  $\bigvee_P S$  y  $\bigwedge_P S$ , respectivamente. Nótese que en un retículo completo  $(P, \leq)$  se tiene la existencia de dos elementos topes por arriba y por debajo:

$$\begin{aligned} \inf \emptyset = \sup P = \text{máximo de } P = \top, \text{ para todo } x \in P, \top \leq x \leq \top, \\ \sup \emptyset = \inf P = \text{mínimo de } P = \perp, \text{ para todo } x \in P, \perp \leq x \leq \perp. \end{aligned}$$

Un subconjunto  $S \subseteq P$  es un subretículo de  $P$  si  $S$  con el orden inducido de  $P$  es un retículo.

Un subconjunto  $S \subseteq P$  se llama **conjunto inferior** (o **conjunto decreciente** o **ideal de orden**) si  $y \leq x \in S$  implica  $y \in S$  para  $x, y \in P$ . Entre los conjuntos inferiores se destacan los llamados *ideales principales*: para  $x \in P$ ,  $\downarrow x := \{y \in P : y \leq x\}$  es el *ideal principal generado por  $x$* . Dualmente, un subconjunto  $S \subseteq P$  se llama **conjunto superior** (o **conjunto creciente** o **filtro de orden**) si  $y \geq x \in S$  implica  $y \in S$  para  $x, y \in P$ . Como caso particular,  $\uparrow x := \{y \in P : y \geq x\}$  es un conjunto superior para todo  $x \in P$ , llamado también **filtro principal** generado por  $x$ .

Las familias  $\text{Pre}(X)$ ,  $\text{Cpo}(X)$  de los preórdenes y órdenes sobre un conjunto cualquiera  $X$  pueden ser ordenadas por  $\mathcal{R}_1 \leq \mathcal{R}_2$  si  $\mathcal{R}_1 \supseteq \mathcal{R}_2$  y son ejemplos de retículos, el primero completo. El *sup* de dos preórdenes es su intersección como relaciones, mientras que su *inf* es la **clausura transitiva** de su unión, es decir,  $\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$  y  $\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2 = \{(x, y) : \text{existe una sucesión finita } x = x_0, \dots, x_n = y \text{ de elementos de } X \text{ tal que } (x_{i-1}, x_i) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2, i = 1, \dots, n\}$ .

2.1.2. *Topologías.* Una colección  $\mathcal{T}$  de subconjuntos de  $X$ , e.d.  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  es una topología sobre  $X$  si contiene a  $\emptyset$ , a  $X$ , y es cerrada para uniones *arbitrarias* e intersecciones *finitas* —de hecho, como  $X$  es finito, podemos omitir en este caso los adjetivos *arbitrarias* y *finitas*—.

En 1936, Birkhoff [4] mostró que la colección  $(\text{Top}(X), \subseteq)$  de todas las topologías sobre un conjunto  $X$  cualquiera, ordenada por la relación de contención entre conjuntos, es un conjunto parcialmente ordenado. El elemento máximo es la topología *discreta*  $\mathcal{P}(X)$ , y el elemento mínimo es la topología *indiscreta*,  $\{\emptyset, X\}$ .

En realidad,  $(\text{Top}(X), \subseteq)$  es un retículo completo. En efecto, para cualquier colección  $\{\mathcal{J}_i\}_{i \in I}$  de topologías sobre  $X$ , el ínfimo  $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{J}_i$  de la colección está dado por la intersección  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{J}_i$  de las topologías, y la existencia del supremo  $\bigvee_{i \in I} \mathcal{J}_i$  está garantizada por el hecho que la intersección arbitraria de topologías es una topología. De manera constructiva,  $\bigvee_{i \in I} \mathcal{J}_i$  es la topología que tiene como subbase a la unión  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{J}_i$  de las topologías.

Se dice que una topología  $\mathcal{T}$  es una **topología de Alexandroff** o  $\mathcal{A}$ -topología o una **topología principal** si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es de nuevo un conjunto abierto. Esta definición implica que todas las topologías sobre un conjunto finito son de Alexandroff; por lo tanto, todo lo que sepamos sobre las  $\mathcal{A}$ -topologías se aplica a las topologías finitas, aunque el camino inverso es el recorrido históricamente: el estudio de las topologías finitas ha hecho que nos interese por las  $\mathcal{A}$ -topologías —los diferentes nombres corresponden a diferentes contextos donde han sido estudiadas [1], [18], [31], [37]—. Si denotamos por  $\mathcal{A}(X)$  al conjunto de las topologías principales sobre  $X$ , entonces el subretículo  $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$  de las topologías principales (*i.e.* de Alexandroff) es completo.

**2.2. Una relación fructífera.** En 1935, Alexandroff y Tucker [1], [38], observaron de manera independiente [35] la estrecha **relación entre topologías y preórdenes**.

Si  $\leq$  es un preorden en  $X$ , entonces la AT-topología  $\mathcal{T}(\leq)$  (Alexandroff-Tucker) sobre  $X$  es la topología generada por la colección

$$\uparrow x := \{y \in X : y \geq x\}$$

de los filtros principales,  $x \in X$ . Por lo tanto,  $A \subseteq X$  es abierto si  $A$  es un conjunto superior, e.d.,  $A = \bigcup_{x \in A} \uparrow x$ .

De manera inversa, si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico, tenemos un preorden  $\preceq_{\mathcal{T}}$  (**preorden de especialización**) definido por

$$x \preceq_{\mathcal{T}} y \Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}} \Leftrightarrow y \in V_x \text{ para toda vecindad } V_x \text{ de } x \Leftrightarrow \overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}.$$

En un sentido general —sin condiciones sobre la topología ni el cardinal de  $X$ — tenemos cierta relación inversa:  $\preceq_{\mathcal{T}(\preceq)} = \preceq$ . Pero en el caso en que las topologías sean principales o de Alexandroff, estas relaciones son inversas la una de la otra pues tenemos además que  $\mathcal{T}(\preceq_{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}$  (ver [13]). Más aún, el retículo  $(\mathcal{A}(X), \subseteq)$  de las topologías principales sobre  $X$  es anti-isomorfo al retículo  $(\text{Pre}(X), \subseteq)$  de los preórdenes en  $X$  (ver [31]). En particular, esto se tiene si  $X$  es un conjunto finito.

2.2.1. *Las topologías son preórdenes.* Estas relaciones, nos permiten “ver” o “contar” a las topologías finitas como si fueran preórdenes. La interpretación gráfica es la siguiente.

Dada la topología  $\mathcal{T}$  sobre  $X$ , al preorden  $\preceq_{\mathcal{T}}$  le asociamos un **grafo dirigido** o **digrafo** (un digrafo es un par  $(V, A)$  donde  $V$  es el conjunto de vértices y  $A \subseteq V \times V$  es el conjunto de las aristas) cuyos nodos o vértices son los elementos de  $X$  con aristas dirigidas o flechas de  $a$  hacia  $b$  si  $a \preceq b$ , es decir, si cada conjunto abierto que contiene a  $a$  también contiene a  $b$ . Ver la Figura 3 como ejemplo.

Por supuesto, dado el grafo correspondiente a  $\preceq_{\mathcal{T}}$  podemos visualizar la topología: Un conjunto de nodos  $U$  es abierto si cada flecha que tiene punto inicial en un elemento de  $U$  tiene su punto terminal también en  $U$ , e.d., las flechas no salen de  $U$ .

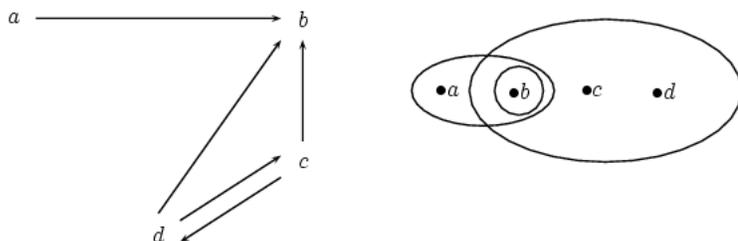


FIGURA 3. Grafo asociado a  $\mathcal{T} = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X, \emptyset\}$  (cada nodo debería tener un bucle pero lo suprimimos por comodidad)

2.2.2. *Las topologías  $T_0$  son órdenes.* Recordemos que un espacio topológico es  $T_0$  si dados dos puntos cualesquiera existe una vecindad de alguno de ellos que no contiene

al otro punto (los otros axiomas de separación no son relevantes en el caso finito pues conducen a la topología discreta). Las mismas relaciones  $\preceq_{\mathcal{T}}$  y  $\mathcal{T}(\preceq_{\mathcal{T}})$  permiten ver a los órdenes **Cpo** como espacios topológicos  $T_0$  ya que la relación antisimétrica permite la existencia de una vecindad de uno de los puntos que no contiene al otro, y de manera inversa, al tener un espacio topológico finito  $T_0$  la relación  $\preceq_{\mathcal{T}}$  es antisimétrica, [32].

Si  $(X, \leq)$  es un **Cpo**, asociamos en este caso un digrafo especial (no existe doble flecha entre nodos) llamado su **diagrama de Hasse**, el cual notamos  $\mathcal{H}(X) = (X, A)$  y cuyos vértices son los elementos de  $X$  y las aristas  $A$  son los pares ordenados  $(a, b)$  tales que  $a < b$  y no existe  $c \in X$  con  $a < c < b$ , decimos en este caso que  $b$  **cubre** a  $a$  y notamos  $a \dashv b$ . Como cada espacio topológico finito  $(X, \mathcal{T})$  tiene asociado el conjunto ordenado  $(X, \preceq_{\mathcal{T}})$ , llamamos diagrama de Hasse del espacio al diagrama del orden correspondiente.

Usualmente,  $\mathcal{H}(X)$  se dibuja en el plano de tal manera que, si  $a \dashv b$  entonces el punto que representa a  $b$  está arriba del punto que representa a  $a$ ; así que, no hay necesidad de flechas (aristas dirigidas) en el dibujo, ya que la dirección de la arista es implícita.

**2.1. Ejemplo.** Para  $X = \{a, b, c, d\}$  considere la topología

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{b\}, \{c\}, \{d, c\}, \{b, c, d\}, \{b, c\}\}. \quad (1)$$

Como  $\overline{\{a\}} = \{a\}$ ,  $\overline{\{b\}} = \{b, a\}$ ,  $\overline{\{c\}} = \{c, a, d\}$ ,  $\overline{\{d\}} = \{d\}$ , el orden inducido es entonces  $\preceq_{\mathcal{T}} = \{(a, b), (a, c), (d, c)\}$  —omitimos los puntos en la diagonal— y así  $\mathcal{H}(X)$  es como en el diagrama (a) de la Figura 4.

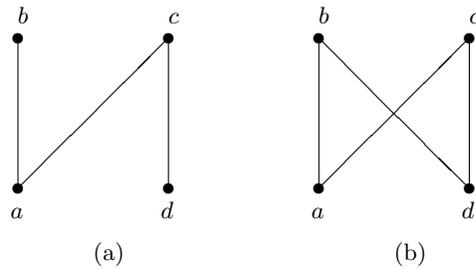


FIGURA 4. Diagramas de Hasse.

De manera dual, supongamos que en  $X = \{a, b, c, d\}$  primero nos es dado el orden parcial  $a \leq b$ ,  $a \leq c$  y  $d \leq c$  como en el diagrama (a); entonces, los filtros principales

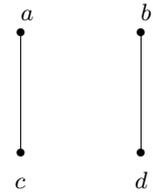
son  $\uparrow a = \{a, b, c\}$ ,  $\uparrow d = \{d, c\}$   $\uparrow b = \{b\}$   $\uparrow c = \{c\}$  con lo que la topología es como en (1).

Ahora, supongamos que nos es dado un diagrama como en la Figura (b), con lo que el orden parcial es  $a \leq b$ ,  $a \leq c$ ,  $d \leq b$  y  $d \leq c$ . De aquí obtenemos  $\overline{\{a\}} = \{a\}$ ,  $\overline{\{b\}} = \{b, a, d\}$ ,  $\overline{\{c\}} = \{c, a, d\}$ ,  $\overline{\{d\}} = \{d\}$ ; así, la topología  $\mathcal{T}(\leq)$  es

$$\mathcal{T}(\leq) = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{b\}, \{c\}, \{b, d, c\}, \{b, c\}\}. \tag{2}$$

Si quisiéramos regresar del diagrama de Hasse al grafo dirigido, insertamos una flecha (sobre cada arista) que apunte hacia arriba y luego invocamos la transitividad para añadir las flechas extras.

**2.2. Ejemplo.** Para  $X = \{a, b, c, d\}$  considere la topología  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$ . Como  $\overline{\{a\}} = \{a, c\}$ ,  $\overline{\{b\}} = \{b, d\}$ ,  $\overline{\{c\}} = \{c\}$ ,  $\overline{\{d\}} = \{d\}$ , tenemos el siguiente diagrama de Hasse.



Esto por supuesto sugiere una fuerte conexión entre la conexi-  
dad de la topología y la conexidad del diagrama.

De hecho, a partir de la Figura 5 podemos deducir que el número de topologías conexas  $T_0$  (clases de homeomorfismo) para un conjunto con cuatro elementos es 10. Para una información más detallada ver el cuadro 3.

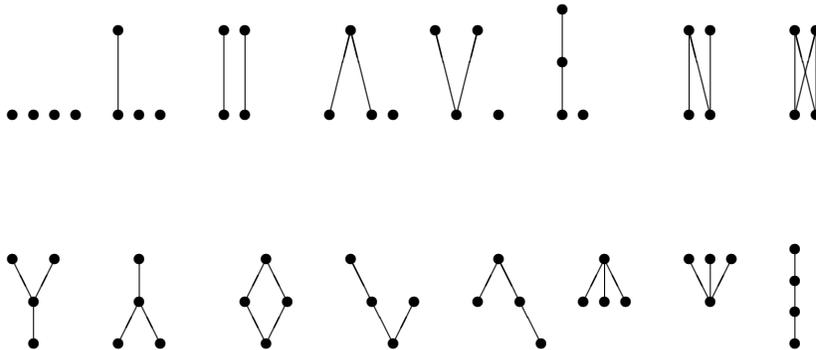


FIGURA 5. Diagramas de Hasse para las 16 clases de homeomorfismos de topologías  $T_0$  para un conjunto con 4 elementos.

La siguiente proposición muestra que es posible interactuar en información entre una topología  $T_0$  y su diagrama de Hasse.

**2.3. Proposición.** *Sea  $X$  un espacio topológico  $T_0$ .*

1.  $\{x\}$  es abierto si y solo si  $x$  es un elemento maximal en  $\leq_{\mathcal{T}}$ .
2. Si existe el elemento máximo  $a$  en  $X$ , entonces  $\{a\}$  es denso en  $X$ .
3.  $\{x\}$  es cerrado si y solo si  $x$  es un elemento minimal en  $\leq_{\mathcal{T}}$ .
4. Si existe el elemento mínimo  $b$  en  $X$ , entonces  $b$  pertenece a todo cerrado en  $X$ .
5. La colección  $A$  de los elementos maximales es un conjunto abierto y es el menor de los conjuntos densos (está contenido en todo otro subconjunto denso).
6. Los ideales en el preorden corresponden exactamente a los conjuntos abiertos en la topología, de suerte que el número de ideales corresponde al número de conjuntos abiertos.
7.  $\overset{\circ}{A} = \{x \in A : \uparrow x \subseteq A\} = \bigcup \{\uparrow x : \uparrow x \subseteq A\}$ .
8.  $\overline{A} = \bigcup \{\downarrow x : x \in A\}$ .
9. Haciendo conteo elemental sobre las posibles aristas en un diagrama obtenemos cotas para  $|T_0(X)|$ ,

$$2^{n^2} \leq |T_0(X)| \leq 3^{n(n-1)/2}. \quad (3)$$

*Demostración.* La cota superior es inmediata; en efecto, existen  $n(n-1)/2$  pares de nodos en el grafo asociado y, como para cada par existen 3 elecciones para su arista, dos dadas por la dirección y una tercera si no la colocamos, obtenemos el número  $3^{n(n-1)/2}$ .

Para la cota inferior en el número de topologías  $T_0$  tenemos dos casos:  $2^{(n+1)(n-1)/4}$  si  $n$  es impar, y  $2^{n^2/4}$  si  $n$  es par. En el caso par por ejemplo, escogemos  $n/2$  elementos como posibles elementos maximales y,  $n/2$  elementos como posibles elementos minimales, así que tenemos  $2^{n^2/4}$  posibles elecciones si queremos elegir aristas que conecten elementos maximales con minimales.

□

10. Una cota para el número  $|\mathbf{Top}(X)|$  de topologías —no necesariamente  $T_0$ — en un conjunto  $X$  con  $n$  elementos, es  $2^{n(n-1)}$ .

*Demostración.* (**Vía filtros**). Como cada filtro en un conjunto finito es principal, es decir, es generado por un subconjunto de  $X$ , tenemos que el número de filtros es  $2^n - 1$ . Dada una topología  $\mathcal{T}$  sobre  $X$ , la familia  $\mathcal{V}(x)$  de las vecindades en el punto  $x \in X$  es un filtro en  $X$ , tenemos entonces  $2^n - 1$  posibles elecciones para cada  $x$ ; por lo tanto,  $2^{n(n-1)}$  es una cota superior para  $|\mathbf{Top}(X)|$ . De paso, hemos mostrado que en un conjunto finito cada punto

tiene una vecindad minimal, de hecho, todo el espacio posee un sistema fundamental de vecindades minimales (esto es característico de toda topología de Alexandroff, así no sea necesariamente finita).  $\square$

2.2.3. *¿Por qué contar las relaciones de equivalencia?* Una primera razón es la siguiente. Las relaciones de equivalencia son preórdenes y por lo tanto espacios topológicos, pero ¿a qué clase de espacios corresponden? Si  $\mathcal{E}(X)$  es el conjunto de todas las relaciones de equivalencia sobre  $X$ , entonces  $(\mathcal{E}(X), \subseteq)$  es un retículo completo. Definimos las **topologías booleanas** o  $\mathcal{R}$ -topologías [12], como aquéllas que tienen como base una partición de  $X$ . Entonces, el conjunto ordenado  $(\mathcal{B}(X), \subseteq)$  de las topologías booleanas sobre  $X$  es anti-isomorfo al retículo  $(\mathcal{R}(X), \subseteq)$  de las relaciones de equivalencia sobre  $X$ . Por lo tanto, contar las relaciones de equivalencia es contar las topologías booleanas.

De otra parte, y como segunda razón, a cada preorden en  $X$  podemos asociar una partición  $L$  de  $X$  junto con un orden parcial sobre  $L$ . Dado un preorden  $(X, \preceq)$  es posible que tengamos simetría  $x \preceq y$  y  $y \preceq x$  sobre ciertos pares de elementos  $x, y \in X$ . Entonces, el núcleo simétrico  $\equiv$  de  $\preceq$ , definido como  $x \equiv y$  si y solo si  $x \preceq y$  y  $y \preceq x$  claramente es una relación de equivalencia sobre  $X$ . De hecho,  $\preceq$  puede ser utilizada para definir la relación  $\sqsubseteq$  sobre el conjunto cociente  $X/\equiv$  de las clases de equivalencia como

$$[x] \sqsubseteq [y] \text{ si y solo si } x \preceq y. \tag{4}$$

Claramente, la relación  $\sqsubseteq$  es un orden parcial sobre  $X/\equiv$ .

De manera inversa, dada una relación de equivalencia  $\equiv$  sobre  $X$  (una partición de  $X$ ) junto con un orden parcial  $\sqsubseteq$  entre las clases, la condición (4) define un preorden sobre  $X$ .

Si  $\mathcal{P}(L)$  denota el conjunto de los órdenes parciales para un conjunto  $L$  y  $S(X, k)$  el conjunto de particiones de  $X$  en  $k$  bloques (subconjuntos disyuntos no vacíos)  $L_1, \dots, L_k$  tenemos la siguiente relación,

$$|\text{Pre}(X)| = \sum_k \sum_{L \in S(X, k)} |\mathcal{P}(L)| = \sum_k |\text{Cpo}(k)| |S(X, k)|. \tag{5}$$

Los números de Stirling de segunda clase  $S(n, k)$  (introducidos por James Stirling en el siglo XVIII) cuentan el número de relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto de  $n$  elementos que tienen  $k$  clases de equivalencia. Notados por Donald

Knuth como  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  tienen la siguiente fórmula explícita,

$$S(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Por ejemplo, el conjunto  $\{1, 2, 3\}$  puede ser particionado en tres subconjuntos de una única manera:  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ ; en dos subconjuntos de tres maneras:  $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ ,  $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ , y  $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ ; y en un subconjunto de una sola manera:  $\{\{1, 2, 3\}\}$ . Así que,  $S(3, 1) = 1$ ,  $S(3, 2) = 3$ ,  $S(3, 3) = 1$ .

Utilizando los números de Stirling de segunda clase se obtiene una fórmula que relaciona el número de preórdenes con el número de órdenes [33],

$$|\text{Pre}(n)| = \sum_k S(n, k) |\text{Cpo}(n)|. \quad (6)$$

Erné mostró en [14] que

$$\frac{|\text{Pre}(n)|}{|\text{Cpo}(n)|} \rightarrow 1, \text{ para } n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Finalmente tenemos la siguiente fórmula para el número de relaciones transitivas  $\mathbf{t}(n)$  [33],

$$\mathbf{t}(n) = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{s=0}^k \binom{n}{s} \left\{ \begin{matrix} n-s \\ k-s \end{matrix} \right\} \right) |\text{Cpo}(k)|.$$

Razón entre el número de topologías $T_0$ y las topologías conexas			
$n$	topologías $T_0$ $ T_0(n) $	conexas $ T_0^c(n) $	razón $ T_0^c(n)/T_0(n) $
1	1	1	1
2	2	1	.5
3	5	3	.6
4	16	10	.625
5	63	44	.698
6	318	238	.748
7	2045	1650	.807
8	16999	14512	.854
9	183231	163341	.891
10	2567284	2360719	.920
11	46749427	43944974	.940
12	1104891746	1055019099	.955
13	33823827452	32664984238	.966
14	1338193159771	1303143553205	.974
15	68275077901156	66900392672168	.979
16	4483130665195087	4413439778321689	.984

CUADRO 3. La conjetura  $\lim_{n \rightarrow \infty} |T_0^c(n)/T_0(n)| = 1$

**2.3. Diagrama de Hasse para cada topología.** Como cada topología finita  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  es un conjunto parcialmente ordenado por la inclusión, de hecho un retículo completo, entonces el número  $|T(n)|$  de topologías sobre  $X$  es exactamente el número de subretículos de  $\mathcal{P}(X)$  que contienen a  $X$  y  $\emptyset$ .

Es posible entonces construir para cada topología su respectivo diagrama de Hasse relacionando en este caso no los puntos sino los conjuntos abiertos. La Figura 2.3 muestra lo elaborado de estas clasificaciones aún en el caso elemental de  $n = 5$ .

En este sentido, al tener diagramas sobre los conjuntos abiertos, se permite otra aproximación para determinar  $|T(n)|$ ; en efecto, si  $T(n; k)$  es el conjunto de topologías sobre  $X$  que tienen  $k$  conjuntos abiertos (o, lo que es igual, el número de preórdenes en  $X$  teniendo  $k$  ideales),  $2 \leq k \leq 2^n$ , entonces

$$|T(n)| = \sum_{k \geq 2} |T(n; k)|.$$

Las siguientes igualdades son obvias

$$T(n; 2) = T(n; 2^n) = 1,$$

$$T(n; 3) = 2^n - 2.$$

Para  $k \geq 4$  el cálculo de  $T(n; k)$  se complica como era de esperarse (ver [3]).

A manera de ejemplo revisemos el caso  $k = 4$ . Para  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, A, B\} \in T(n; 4)$ , tenemos que  $\mathcal{T}$  es una cadena o tiene la forma  $A \cap B = \emptyset$  o  $A \cup B = X$  (ver la Figura 6).

De acuerdo con la Figura 7, las topologías en  $T(5; 4)$  son 8 y van de  $\tau_6$  a  $\tau_{13}$ . Una revisión cuidadosa muestra todos los otros casos  $T(5; k)$ .

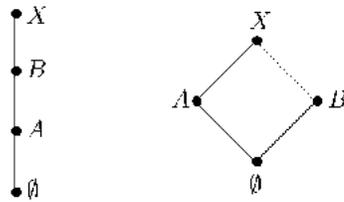
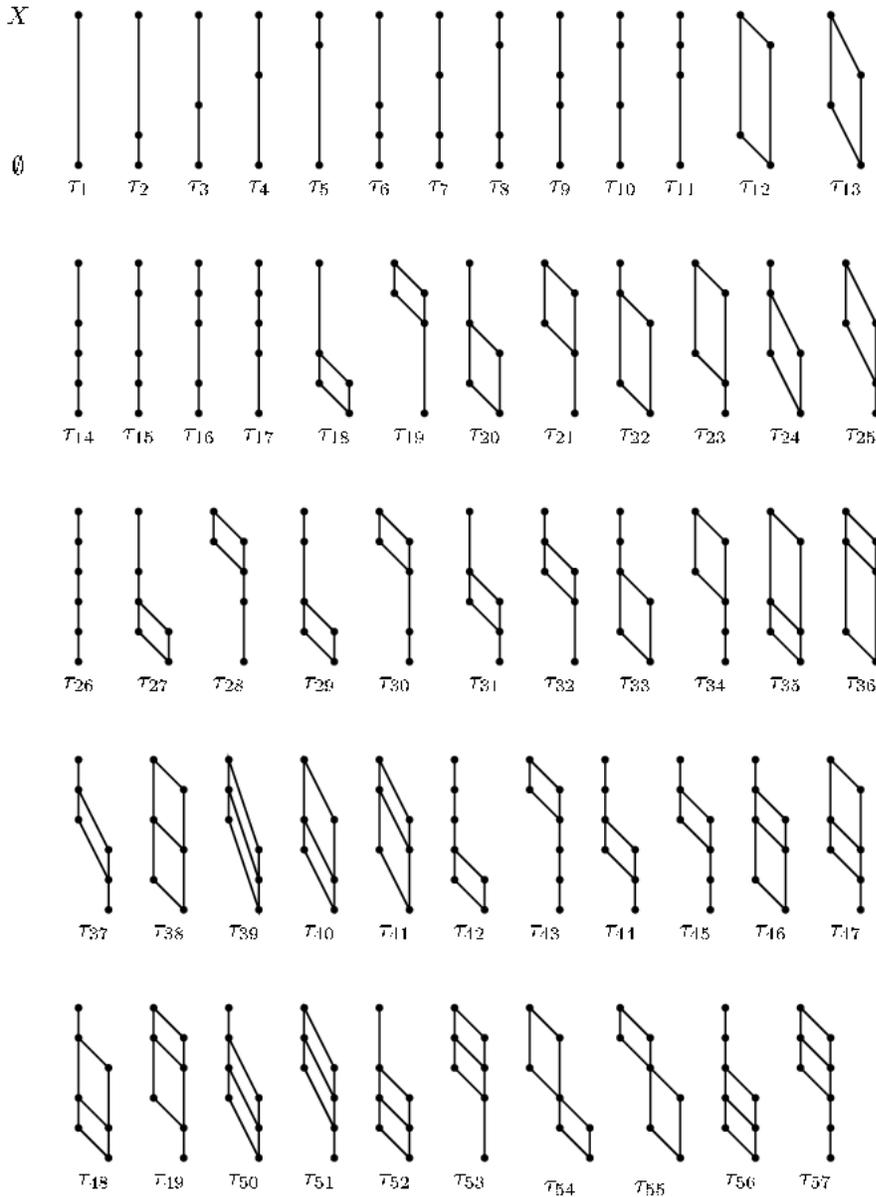
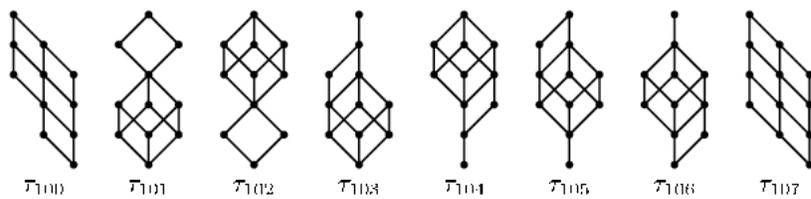
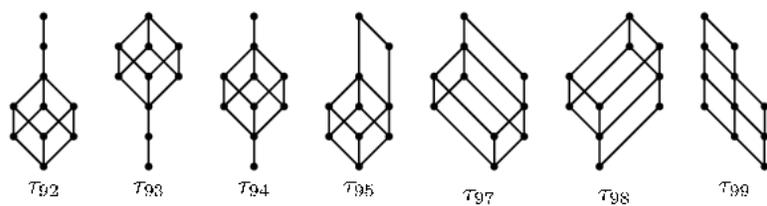
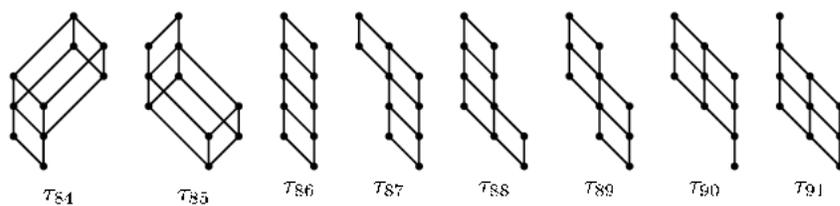
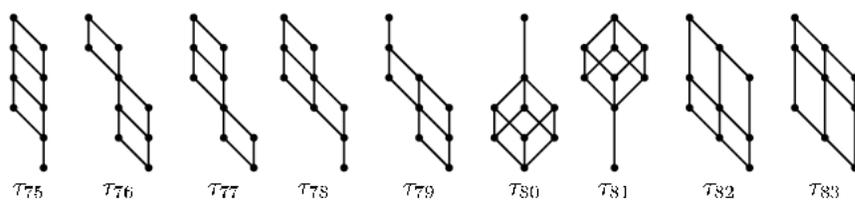
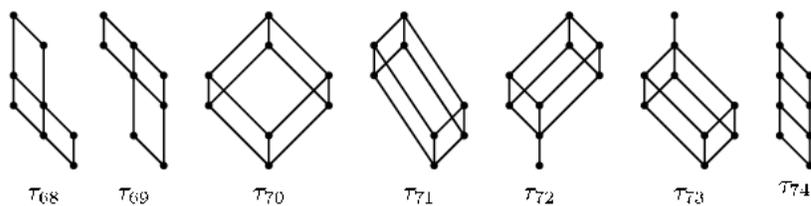
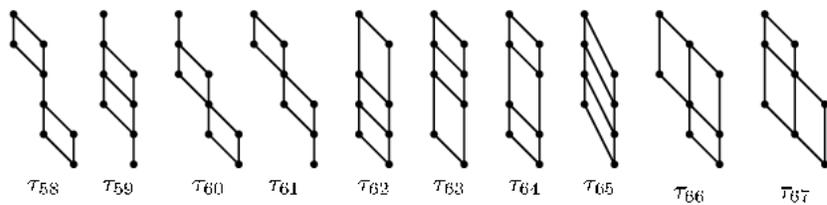


FIGURA 6.  $\mathcal{T} \in T(n; 4)$

FIGURA 7. Los diagramas de Hasse para las 139 clases de homeomorfismos de topologías en un conjunto con cinco elementos  $X = \{a, b, c, d, e\}$ .  $\tau_2 = \{\{a\}\}$ ,  $\tau_3 = \{\{a, b\}\}$ ,  $\tau_8 = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ ,  $\tau_{12} = \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$ , etc.







**2.4. Topología vs matrices.** Finalmente, y aunque no la desarrollamos en este artículo, pero si la mencionamos, se tiene una importante relación entre las topologías y las matrices.

Se asocia a cada topología en  $T(n)$  una matriz  $M = (m_{ij})$  de tamaño  $n \times n$  con  $m_{ij}$  igual a 0 ó 1.  $m_{ij} = 1$  si  $i = j$  o si el nodo  $i$  se conecta con el nodo  $j$ . Esta asociación es biyectiva. Contar este tipo de matrices resulta ser aparentemente un problema más fácil de resolver utilizando técnicas computacionales.  $M$  es llamada la matriz de vecindad para el grafo asociado a la topología.

Así que, para topologías  $T_0$ , los elementos minimales son estos  $x_i \in X$  tales que la  $i$ -columna en  $M$  tiene 0 en todas sus entradas excepto en  $m_{ii}$  (tiene el mínimo número posible de unos en su columna). Los elementos maximales corresponden de manera dual a las filas.

#### REFERENCIAS

- [1] ALEXANDROFF, P.S. *Diskrete Räume*, *Mathematiceski Sbornik (N.S.)* 2(1937), 501-518.
- [2] BAYONCO, R. & LYGEROS, N. & SERENI, J. *New Progress In Enumeration Of Mixed Models*, *Applied Mathematics E-Notes*, 5(2005), 60-65.
- [3] BENOUMHANI, M., *The Number of Topologies on a Finite Set*, *Journal of Integer Sequences*, Vol. 9 (2006).
- [4] BIRKHOFF, G., *On the combination of topologies*, *Fund. Math*, **22** (1936), 156-166.
- [5] BRINKMANN, G. & MCKAY, B.D., *Posets up to 16 points*, *Order* **19** (2002) no. 2, 147-179.
- [6] BRINKMANN, G. & MCKAY, B.D. *Counting unlabelled topologies and transitive relations*, *J. Integer Sequences*, 8 (2005).
- [7] BROWN, J. I. & WATSON, S. *The number of complements of a topology on  $n$  points is at least  $2^n$  (except for some special cases)*, *Discr. Math.*, 154 (1996), 27-39.
- [8] CULBERSON, J.C. & G.J.E. RAWLINS. *New results from an algorithm for counting posets*. *Order*, 7(4):361-374, 1991.
- [9] CHAUNIER C. & LYGEROS N. *The number of orders with thirteen elements*. *Order*, **9** (1992), 203-204.
- [10] DAS, S.K. *A machine representation of finite  $T_0$  topologies*. *J. ACM*, 24:676-692, 1977.
- [11] DAVEY, B. A. & PRIESTLEY, H. A. *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1990.
- [12] DAVIS, A. *Indexed systems of neighborhoods for general topologicas spaces*, *Amer. Math. Monthly*, **68** (1961), 886-893.
- [13] DE CASTRO, R. & RUBIANO, G. *Una revisión del completamiento de Dedekind-McNeille*, *Miscelánea matemática, SMM*, **37** (2003), 65-76.

- [14] ERNÉ, M.. On the cardinalities of finite topologies and the number of antichains in partially ordered sets. *Discrete Mathematics* 35 (1981), 119-133.
- [15] ERNÉ, M. & STEGE, K. *Counting finite posets and topologies*. *Order*, **8** (1991), 247-265.
- [16] EL-ZAHAR, M.H. *Enumeration of ordered sets*. In J. Rival, editor, *Algorithms and Order*, pages 327-352. Kluwer, Dordrecht, 1987.
- [17] EVANS, J. W. & HARARY, F. & LYNN, M. S. *On the computer enumeration of finite topologies*, *Commun. ACM*, 10 (1967), 295-297, 313.
- [18] FRÖHLICH, O., *Das Halbordnungssystem der topologischen Räume auf einer Menge*, *Math. Ann.* **156** (1964), 79-95.
- [19] FINCH, S., *Transitive relations, topologies and partial orders*, <http://algo.inria.fr/csolve/posets.pdf> (2003), 1-8.
- [20] GÖTZ, P. *Counting transitive relations*, *Jour. of Integer seq.* **7** (2004), 1-11.
- [21] J. HEITZIG AND J. REINHOLD. *The number of unlabeled orders on fourteen elements*. *Order*, 17:333-341, 2000.
- [22] D.J. KLEITMAN & B.L. ROTHSCHILD. *Asymptotic enumeration of partial orders on a finite set*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 205:205-220, 1975.
- [23] KLEITMAN, D. & ROTHSCHILD, B. *The number of finite topologies*. *Proc. AMS.* 25 (1970), 276-282.
- [24] KLASKA, J. *Transitivity and partial order*. *Math. Bohemica*, 122, 1, (1997), 75-82.
- [25] KREMSKI, R. *Graphs and matrices in the study of finite spaces*. *Missouri Journal of Mathematical Sciences.* **12**, 2 (1999), 96-121.
- [26] KRISHNAMURTHY, V. *On the number of topologies on a finite set*. *Amer. Math. Monthly*, 73, No. 2 (1966), 154-157.
- [27] N. LYGEROS & P. ZIMMERMANN. *Computation of  $p(14)$ ; the number of posets with 14 elements: 1.338.193.159.771*. <http://www.desargues.univ-lyon1.fr/home/lygeros/poset.html>.
- [28] HARTMANIS, J., *On the lattice of topologies*, *Can. J. Math.* **10** (1958), 547-553.
- [29] HRBACEK, K. & JECH, T., *Introduction to Set Theory*, Third Edition, Marcel Dekker, 1999.
- [30] MAY, J.P. *Finite topological spaces*. Notes for REU (2003).
- [31] LORRAIN, H. *Notes on topological spaces with minimum neighborhoods*, *Amer. Math. Monthly*, **76** (1969), 616-627.
- [32] ORE, O. *Some studies in closure relations*, *Duke Math. Journal*, **10** (1943), 761-785.
- [33] PFEIFFER, G. *Counting Transitive Relations*, **JIS** *Journal of Integer Sequences*, Vol. 7 (2004), Article 04.3.2. Versión electrónica: <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>
- [34] STEINER, A. K., *The lattice of topologies: structure and complementation*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **122** (1966), 379-398. <http://www.math.nthu.edu.tw/jamen/>
- [35] STEPRÁNS, J. & WATSON S., *Mutually complementary families of  $T_1$  topologies, equivalence relations and partial orders*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**, 7, (1995), 2237-2249.
- [36] STONG, R., *Finite topological spaces*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **123**, (1966), 325-340.

- [37] THRON, W. & ANDIMA, S., *Order induced topological properties*, Pacific Journal of Math., **75** no. 2 (1978), 297–318.
- [38] TUCKER, A. W., *Cell spaces*, Ann. of Math., **37** (1936), 92–100.
- [39] WILLARD, S., *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.

RECIBIDO: Septiembre de 2006. ACEPTADO PARA PUBLICACIÓN: Noviembre de 2006