Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XIII No. 2 (2006), pp. 111–135

ELEVADORES DE ESTRUCTURA

CARLOS JAVIER RUIZ S. (*)
JOSÉ REINALDO MONTAÑEZ P. (**)

RESUMEN. Se estudia la teoría de Elevadores de Estructura en la categoría de los espacios topológicos y su aplicación a la construcción de categorías topológicas. Posteriormente se construyen topos asociados a las categorías topológicas generadas.

PALABRAS CLAVES Categorías topológicas, elevadores de estructura, subcategorías reflexivas, topos.

ABSTRACT. The theory of Structure Elevators is studied within the category of topological spaces along with its applications to the construction of topological categories. Furthermore the topoi that improve the topological categories are constructed.

KEY WORDS AND PHRASES. Topological categories, structure elevators, reflective subcategories, topos.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo pretende dar información acerca del uso de la estructura de categoría topológica para construir movimientos fibrados, que corresponden a endofuntores en una categoría topológica y que hemos llamado Elevadores de Estructura.

La teoría de Elevadores de Estructura es motivada desde la topología. Así que las nuevas definiciones y resultados obtenidos aquí corresponden a categorías

(*) Carlos Javier Ruiz S. Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana.
(**) José Reinaldo Montañez P. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: jrmontanezp@unal.edu.co.

de espacios topológicos. El estudio de estos funtores es el centro de atención del trabajo.

La idea de elevador surge al pensar en lo que podría significar hacer crecer una estructura. Comentemos un poco esta idea. Construir un espacio óptimo a partir de un espacio topológico dado, motiva las nociones de subcategorías reflexivas y correflexivas, que expresan nociones de mejoramiento y densidad. Por ejemplo: la categoría de los espacios Compactos de Hausdorff es una subcategoría reflexiva de la categoría del los espacios completamente regulares; en este caso el proceso de optimización es precisamente la compactificación de Stone - Čech, que define un funtor adjunto a izquierda del funtor de inclusión de los Compactos de Hausdorff en los completamente regulares. Particularmente en este ejemplo, el objeto y su mejorado cambian de conjunto subyacente. Al observar la categoría de los espacios topológicos como una categoría de conjuntos con estructura pensamos en lo que significaría mejorar un espacio topológico sin cambiar el conjunto subyacente. Esta idea nos condujo a la noción de elevador en la categoría de los espacios topológicos, que se interpreta, de manera intuitiva, como un funtor que asigna a un espacio topológico otro en el mismo conjunto subyacente pero con topología más fina. De manera natural, esta definición se generalizó a categorías topológicas.

Una vez se capta la importancia de los elevadores definidos en Top, en este punto nos preguntamos si estos tienen un tipo de relación comunitaria, esto es, si puede haber una forma de englobar esa virtud dentro de una categoría. Al respecto se observó que la categoría de los elevadores idempotentes determinan una categoría de carácter topológico.

El estudio de la teoría de Elevadores de Estructura nos condujo, en primera instancia, a la creación de un método de construcción de categorías topológicas que tienen, además, un carácter algebraico; al final demostramos que la categoría topológica asociada a un elevador corresponde a las coálgebras de una co-teoría algebraica definida en Top. Las categorías de los espacios secuenciales y de los completamente regulares son algunos ejemplos que ilustran estas construcciones.

En una segunda instancia la teoría desarrollada nos llevó a establecer relaciones con la teoría de topos. En este trabajo se propone un método de construcción de topos que extienden las categorías topológicas generadas por una clase de

Elevadores de Estructura que hemos denominado Elevadores de Estructura Representables. En particular los topos construidos determinan a la subcategoría topológica generada por un Elevador de Estructura Representable como una subcategoría reflexiva de éste. El estudio de esta clase de topos nos condujo, inspirados en Johnstone [10], a la noción de topos-topológico.
Tomando como punto de partida el espacio de los números reales, con el fin de ilustrar una aplicación de la teoría desarrollada, se construyen un Elevador de Estructura, la categoría topológica correspondiente y el topos asociado. Al respecto se muestra una relación entre una categoría formada por espacios vectoriales topológicos reales y una categoría de módulos en el topos.

1. INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA CATEGÓRICA

La noción de categoría topológica. En una de sus direcciones de trabajo, la topología categórica aparece como el estudio de la generalización del funtor olvido de estructura definido de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los conjuntos, en especial de las propiedades relativas a la existencia de estructuras iniciales y finales que tiene dicho funtor.
En esta sección se presentan algunos resultados y conceptos básicos de la topología categórica que consideramos necesarios en el desarrollo del trabajo.

Definición 1.0.1. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Se dice que F es un funtor topológico y que $\mathcal{C}$ es una categoría topológica relativa a F y a $\mathcal{D}$, si se cumplen las siguientes condiciones:*

i) *F es fiel.*
ii) *F es apto para construir estructuras iniciales y finales de fuentes y sumideros unitarios.*
iii) *Para cada objeto X de $\mathcal{D}$, la fibra $Fib(X)$ tiene estructura de retículo completo.*

Esta definición es equivalente a la dada por Adámek, Herrlich y Strecker en [2], lo cual se demuestra en [3], en donde además se relaciona esta noción con la dada por Preuss en [20].
Cuando no haya lugar a confusión, nos referiremos a la categoría topológica $\mathcal{C}$, sin mencionar el funtor F y la categoría $\mathcal{D}$. En otras ocasiones diremos que $\mathcal{C}$ es una categoría topológica sobre $\mathcal{D}$ fibrada a través de F.

Siguiendo a [1] y [2], con el fin de introducirnos en el tema, aclaremos los conceptos involucrados en la noción de categoría topológica y de uso frecuente en el desarrollo del trabajo.

Para facilitar la comprensión de algunas definiciones y resultados, de las secciones 1 y 2, los objetos y morfismos de una categoría topológica los notaremos en negrilla y sus imágenes por el funtor los escribiremos sin negrilla. Por ejemplo, en la categoría de los espacios topológicos $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ simboliza una función continua y $f : X \to Y$ la función correspondiente en la categoría de los conjuntos.

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Se dice que F es fiel, si para todo par de morfismos $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ de $\mathcal{C}$ tales que $F(\mathbf{f}) = F(\mathbf{g})$, se tiene que $\mathbf{f} = \mathbf{g}$.

Sea $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ un morfismo de $\mathcal{C}$. Se dice que $\mathbf{f}$ cumple la propiedad universal inicial relativa al funtor F, si para todo objeto $\mathbf{Z}$ de $\mathcal{C}$, con $F(\mathbf{Z}) = Z$ y todo morfismo $g : Z \to X$, para el cual exista un morfismo $\mathbf{h} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Y}$ tal que $F(\mathbf{h}) = f \circ g$, existe un morfismo $\mathbf{g} : \mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ tal que $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = \mathbf{h}$ y $F(\mathbf{g}) = g$.

Se dice que un morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{D}$ es apto para construir estructuras iniciales de fuentes unitarias, si para todo objeto $\mathbf{Y}$ de $\mathcal{C}$, tal que $F(\mathbf{Y}) = Y$, existe un objeto $\mathbf{X}$ en $\mathcal{C}$, con $F(\mathbf{X}) = X$ y un morfismo $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ que cumple la propiedad universal inicial; en tal caso, se dice que $\mathbf{X}$ es la estructura inicial relativa a f y a $\mathbf{Y}$. Se dice que F es apto para construir estructuras iniciales de fuentes unitarias, si todo morfismo de $\mathcal{D}$ es apto para construir estructuras iniciales.

De manera dual, se tienen las definiciones de morfismo con propiedad universal final y estructura final.

Como se puede observar, estas definiciones generalizan las nociones de topología inicial y final. Veremos enseguida que estas definiciones pueden ser extendidas a un contexto más general.

Sean $\mathcal{C}$ una categoría topológica, I un conjunto de índices y X un objeto de $\mathcal{D}$. Una fuente relativa a F está formada por una familia de morfismos $\{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{D}$, junto con una familia de objetos $\{\mathbf{Y}_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{C}$, tales que $F(\mathbf{Y}_i) = Y_i$ para cada $i \in I$. Una fuente la notaremos $\{f_i : X \to \mathbf{Y}_i\}_{i \in I}$. Una estructura inicial para una fuente $\{f_i : X \to \mathbf{Y}_i\}_{i \in I}$, es un objeto $\mathbf{X}$ en $\mathcal{C}$, tal que:

i) Para cada $i \in I$, existe un morfismo $\mathbf{f}_i : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}_i$, tal que $F(\mathbf{f}_i) = f_i$.

II) Para cada objeto $\mathbf{Z}$ de C, con $F(\mathbf{Z}) = Z$ y cada morfismo $h : Z \to X$, si para cada $i \in I$, existe un morfismo $\mathbf{k}_i : \mathbf{Z} \to \mathbf{Y}_i$ con $F(\mathbf{k}_i) = f_i \circ h$, entonces existe un morfismo $\mathbf{h} : \mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ con $F(\mathbf{h}) = h$

De manera dual se definen sumidero y estructura final para un sumidero.
Sea X un objeto de $\mathcal{D}$. Notemos con $Fib(X)$ la colección de los objetos $\mathbf{X}$ de $\mathcal{C}$, tales que $F(\mathbf{X}) = X$. En $Fib(X)$ se define la relación "$\leq$" así: Dados $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ en $Fib(X)$, se dice que $\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{X}_2$, si y solamente si, existe un morfismo $\mathbf{f} : \mathbf{X}_2 \to \mathbf{X}_1$ tal que $F(\mathbf{f}) = 1_X$. A la pareja $(Fib(X), \leq)$ se le llama la fibra de X y algunas veces se notará simplemente $Fib(X)$.

Observación 1.0.1. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Para cada objeto X de $\mathcal{D}$ la relación "$\leq$" definida en $Fib(X)$ es reflexiva y transitiva. Para que $(Fib(X), \leq)$ sea una clase ordenada se requiere que F sea fuertemente fiel, es decir, que para todo isomorfismo $\mathbf{f}$ tal que $F(\mathbf{f}) = 1_X$, $\mathbf{f}$ sea una identidad de $\mathcal{C}$.*

Las siguientes proposiciones se obtienen a partir de la Definición 1.0.1

Proposición 1.0.1. *En una categoría topológica $\mathcal{C}$ toda fuente tiene estructura inicial y todo sumidero tiene estructura final.*

Demostración. En efecto, sea $\{f_i : X \to \mathbf{Y}_i\}_{i \in I}$ una fuente. Sea $\mathbf{X}_i$ la estructura inicial para f_i. Entonces el supremo de la familia $\{\mathbf{X}_i\}_{i \in I}$ corresponde a la estructura inicial para la fuente dada. De manera dual, se prueba que todo sumidero tiene estructura final. □

Proposición 1.0.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría topológica fibrada sobre una categoría $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{D}$ es completa (cocompleta), entonces $\mathcal{C}$ es completa (cocompleta).*

Demostración. Los límites y colímites en $\mathcal{C}$ se construyen en $\mathcal{D}$ y haciendo uso de estructuras iniciales y finales se trasladan a $\mathcal{C}$. □

Proposición 1.0.3. *Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor topológico. Entonces F admite adjunto a izquierda y a derecha.*

Demostración. Para cada objeto X de $\mathcal{D}$ notemos con $\mathbf{X}_M$ el máximo en su fibra y con $\mathbf{X}$ la estructura inicial para la fuente $\{f : X \to \mathbf{Y}_M\}$ determinada por un morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{D}$ y el objeto $\mathbf{Y}_M$; en tal caso puesto que $\mathbf{X} \leq \mathbf{X}_M$, existe un morfismo $\mathbf{h} : \mathbf{X}_M \to \mathbf{X}$ tal que $F(\mathbf{h}) = 1_X$. El adjunto izquierda de F es el funtor $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ definido por $D(X) = \mathbf{X}_M$ y $D(f) = \mathbf{f} \circ \mathbf{h}$.

El adjunto a derecha a F es el funtor G que asigna a cada objeto de $\mathcal{D}$ el mínimo en su fibra. En morfismos, G se define de manera dual al adjunto a izquierda, haciendo uso de estructuras finales y del orden en la fibra.
En cada caso la adjunción es fácil de establecer. $\square$

Corolario 1.0.1. *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor topológico, entonces F preserva límites y colímites.*

Ejemplos 1.0.1.

1) La categoría Top de los espacios topológicos y funciones continuas es una categoría topológica fibrada a través del funtor de olvido de estructura, que notamos O_e, sobre la categoría de los conjuntos. Este es el ejemplo que motiva la definición de categoría topológica.

   Si $f : X \to Y$ es una función y α es una topología sobre Y, la topología inicial sobre X relativa a f y α está dada por $\{f^{-1}(A) \mid A \in \alpha\}$. Si $g : X \to Y$ es una función y β es una topología sobre X, la topología final sobre Y corresponde a $\{B \mid g^{-1}(B) \in \beta\}$.

   Si X es un conjunto y $\{\mathbf{Y}_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, la topología inicial para una fuente $\{f_i : X \to \mathbf{Y}_i\}_{i\in I}$ tiene como subbase la familia de abiertos $\{f_i^{-1}(A) \mid A$ es abierto en $\mathbf{Y}_i\}_{i\in I}$.

   Si Y es un conjunto y $\{\mathbf{X}_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, la topología final para un sumidero $\{f_i : \mathbf{X}_i \to Y\}_{i\in I}$ corresponde a la intersección de la familia $\{A \mid f_i^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbf{X}_i,\ A \subseteq Y\}_{i\in I}$.
2) Las categorías de los espacios Uniformes, Pretopológicos y Pseudotopológicos son categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos [2].

2. ELEVADORES DE ESTRUCTURA

La teoría de Elevadores de Estructura es motivada desde la topología. En esta sección nos restringiremos a trabajar una clase importante de Elevadores de Estructura en la categoría de los espacios topológicos Top a los que denominaremos idempotentes y mostraremos que sus puntos fijos dan origen a categorías topológicas que resultan subcategorías correflexivas de Top.

2.1. La Noción de Elevador de Estructura.

Definición 2.1.1. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor topológico y sea $E : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funtor. Diremos que E es un Elevador de Estructura si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $F \circ E = F$.
2. $\mathbf{X} \leq E(\mathbf{X})$ *para todo objeto* $\mathbf{X}$ *de* $\mathcal{C}$.

La condición (*1*) implica que E es fiel y que $E(\mathbf{X}) \in Fib(X)$ para todo objeto $\mathbf{X}$ de $\mathcal{C}$.
Análogamente se dice que un funtor $C : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un Coelevador de Estructura si $F \circ C = F$ y para todo objeto $\mathbf{X}$ de $\mathcal{C}$ se tiene que $C(\mathbf{X}) \leq \mathbf{X}$.
En adelante, nos referiremos a los funtores Elevadores (Coelevadores) de Estructura simplemente como elevadores (coelevadores).
Nota: Es de anotar que a pesar de la sencillez de la noción de Elevador de Estructura, no la hemos encontrado referenciada de manera explícita en la literatura. Hemos tratado de relacionarla con otras nociones, entre otras, con la noción de operador de clausura [4] y al respecto hemos encontrado que son independientes una de la otra.

2.2. Elevadores idempotentes en la categoría de los espacios topológicos y subcategorías generadas. Un funtor E definido en Top se dice idempotente si para toda función continua $\mathbf{f}$, $E^2(\mathbf{f}) = E(\mathbf{f})$. Nótese que en este caso para todo espacio topológico $\mathbf{X}$ $E^2(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X})$. Además los puntos fijos de E coinciden con la imagen de E. La subcategoría plena de Top formada por los puntos fijos de E se notará $E(Top)$.
Como se verá más adelante los puntos fijos de elevadores y coelevadores idempotentes generan categorías topológicas. Sin embargo el siguiente teorema que se constituye en uno de los resultados centrales usa funtores con menos propiedades.

Teorema 2.2.1. *Sea $E : Top \to Top$ un funtor idempotente tal que $O_e \circ E = O_e$. Entonces, la categoría $E(Top)$ es una categoría topológica.*

Demostración. Consideremos el funtor $O_e : E(Top) \to Conj$, restricción del funtor $O_e : Top \to Top$.

I) Estructuras iniciales de fuentes unitarias en $E(Top)$. Sea $\mathbf{Y}$ un objeto en $E(Top)$ y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces, en la categoría Top

existen un espacio topológico $\mathbf{X}$ y una función $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ tal que $\mathbf{X}$ es la estructura inicial para la fuente $\{f : X \to \mathbf{Y}\}$. Entonces, se determina la función continua $E(\mathbf{f}) : E(\mathbf{X}) \to \mathbf{Y}$ y $O_e(E(\mathbf{f})) = O_e(\mathbf{f}) = f$. Veamos que $E(\mathbf{X})$ es la estructura inicial para $\{f : X \to \mathbf{Y}\}$ en $E(Top)$. Sea $\mathbf{Z}$ un objeto en $E(Top)$ y sea $g : Z \to X$ una función. Sea $h = f \circ g$ y supongamos que $\mathbf{h} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Y}$ es una función continua en $E(Top)$ tal que $O_e(\mathbf{h}) = h$. Entonces $\mathbf{h}$ es una función continua en Top y puesto que $\mathbf{X}$ es la estructura inicial para $\{f : X \to \mathbf{Y}\}$ en Top, existe una función continua $\mathbf{g} : \mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ en Top tal que $O_e(\mathbf{g}) = g$, de lo cual se sigue que $E(\mathbf{g}) : \mathbf{Z} \to E(\mathbf{X})$ es una función continua en $E(Top)$ tal que $O_e(E(\mathbf{g})) = g$.

II) Estructuras finales de sumideros unitarios en $E(Top)$. Sea $\mathbf{X}$ un objeto en $E(Top)$ y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces, en la categoría Top existen un espacio topológico $\mathbf{Y}$ y una función continua $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ tal que $\mathbf{Y}$ es la estructura final para el sumidero $\{f : \mathbf{X} \to Y\}$. Entonces, se determina la función continua $E(\mathbf{f}) : \mathbf{X} \to E(\mathbf{Y})$ y $O_e(E(\mathbf{f})) = O_e(\mathbf{f}) = f$. Veamos que $E(\mathbf{Y})$ es la estructura final para $\{f : \mathbf{X} \to Y\}$ en $E(Top)$. Sea $\mathbf{Z}$ un objeto en $E(Top)$ y sea $g : Y \to Z$ una función. Sea $h = g \circ f$, supongamos que $\mathbf{h} : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$ es una función continua en $E(Top)$ tal que $O_e(\mathbf{h}) = h$. Entonces, $\mathbf{h}$ es una función continua en Top y puesto que $\mathbf{Y}$ es la estructura final para $\{f : \mathbf{X} \to Y\}$ en Top, existe una función continua $\mathbf{g} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ en Top tal que $O_e(\mathbf{g}) = g$, de lo cual se sigue que $E(\mathbf{g}) : E(\mathbf{Y}) \to \mathbf{Z}$ es una función continua en $E(Top)$ tal que $O_e(E(\mathbf{g})) = g$.

III) Las fibras en $E(Top)$ tienen estructura de retículo completo. En efecto, sea I un conjunto no vacío, sea X un conjunto y sea $(\mathbf{X}_i)_{i\in I}$ una familia de objetos en la fibra de X en $E(Top)$. Sea $\mathbf{X}$ el supremo de la familia $(\mathbf{X}_i)_{i\in I}$ en Top. Veamos que $E(\mathbf{X})$ es el supremo de dicha familia en $E(Top)$. En la categoría Top, $\mathbf{X}_i \leq \mathbf{X}$ para todo $i \in I$, lo cual implica que existe una familia de funciones continuas, en este caso identidades, $\{\mathbf{f}_i : \mathbf{X} \to \mathbf{X}_i\}_{i\in I}$ tal que para cada $i \in I$ $O_e(\mathbf{f}_i) = 1_X$, siendo 1_X la identidad de X. Entonces en $E(Top)$ se determina la familia de identidades $\{E(\mathbf{f}_i) : E(\mathbf{X}) \to \mathbf{X}_i\}_{i\in I}$ tal que para cada $i \in I$ $O_e(E(\mathbf{f}_i)) = 1_X$ y por lo tanto $\mathbf{X}_i \leq E(\mathbf{X})$ para todo $i \in I$. Ahora, supongamos que en $E(Top)$, en la fibra de $\mathbf{X}$, existe un objeto $\mathbf{X}'$ tal que $\mathbf{X}_i \leq \mathbf{X}'$ para todo $i \in I$. Entonces en la categoría Top, por definición de supremo $\mathbf{X} \leq \mathbf{X}'$, lo cual significa que existe una función continua, nuevamente una identidad, $\mathbf{f} : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}$ tal que $O_e(\mathbf{f}) = 1_X$. Por lo tanto $E(\mathbf{f}) : \mathbf{X}' \to E(\mathbf{X})$ verifica $O_e(E(\mathbf{f})) = 1_X$, de donde $E(\mathbf{X}) \leq \mathbf{X}'$. Por lo tanto $E(\mathbf{X})$ es el supremo de la familia $(\mathbf{X}_i)_{i\in I}$ en $E(Top)$.

Análogamente se construyen los ínfimos en $E(Top)$. □

Corolario 2.2.1. *Sea E un elevador idempotente en Top. Entonces:*

1) $E(Top)$ es una categoría topológica.

2) $E(Top)$ es completa y cocompleta.

3) $E(Top)$ es una subcategoría correflexiva de Top.

4) Si $\mathbf{X} \in E(Top)$ y $\mathbf{Y} \in Top$, entonces $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{Top} \cong [\mathbf{X}, E(\mathbf{Y})]_{E(Top)}$

5) $E : Top \to E(Top)$ preserva límites.

6) Si $\mathbf{A}$ es un subespacio de $\mathbf{X}$ en Top, entonces $E(\mathbf{A})$ es un subespacio de $E(\mathbf{X})$ en $E(Top)$.

7) Si $\mathbf{B}$ es un espacio cociente de $\mathbf{X}$ en Top y $\mathbf{X} \in E(Top)$, entonces $\mathbf{B} \in E(Top)$

Proposición 2.2.1. *Si E_1 y E_2 son elevadores idempotentes en Top que generan la misma categoría topológica, entonces $E_1 = E_2$.*

Demostración. Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico, entonces la función identidad $i_{\mathbf{X}} : E_1(\mathbf{X}) \to \mathbf{X}$ es continua. Puesto que $E_1(\mathbf{X}) \in E_2(Top)$, al aplicar E_2 a esta función se obtiene la función continua $i_{\mathbf{X}} : E_1(\mathbf{X}) \to E_2(\mathbf{X})$. En forma similar se demuestra que la identidad $i_{\mathbf{X}} : E_2(\mathbf{X}) \to E_1(\mathbf{X})$ es continua. Por lo tanto $E_1(\mathbf{X}) = E_2(\mathbf{X})$. Además, para toda función continua $\mathbf{f}$, se tiene que $E_1(\mathbf{f}) = E_2(\mathbf{f}) = f$. □

Corolario 2.2.2.

i) *Si E es un elevador idempotente en Top diferente de la identidad, entonces $E(Top) \neq Top$.*

ii) *El único elevador idempotente y sobreyectivo en Top es la identidad.*

De manera dual se obtienen los resultados para coelevadores definidos en Top.

2.3. Elevadores generados por espacios topológicos. Haciendo uso de estructuras finales los espacios topológicos definen elevadores, como se ilustra a continuación.

Sean $\mathbf{W}$ y $\mathbf{X}$ espacios topológicos. En la colección de funciones continuas de $\mathbf{W}$ en $\mathbf{X}$ al olvidar la topología de $\mathbf{X}$ se obtiene el sumidero que notamos

$S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})} = \{f : \mathbf{W} \to X \mid \mathbf{f} \in [\mathbf{W}, \mathbf{X}]_{Top}\}$. La estructura final para $S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}$ la notaremos $F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$.

Lema 2.3.1. *Sean* $\mathbf{W}$ *y* $\mathbf{X}$ *espacios topológicos. Entonces*

$$[\mathbf{W}, \mathbf{X}]_{Top} \cong [\mathbf{W}, F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}]_{Top}$$

Teorema 2.3.1. *Sea* $\mathbf{W}$ *un espacio topológico. La aplicación* $E_{\mathbf{W}} : Top \to Top$ *definida por* $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) := F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$ *y* $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{f}) := \mathbf{f}$ *define a* $E_{\mathbf{W}}$ *como un elevador idempotente en* Top.

Demostración. Por el lema anterior, para cada espacio topológico $\mathbf{X}$ la función identidad $\mathbf{i_X} : E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) \to \mathbf{X}$ es continua, de donde $\mathbf{X} \leq E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$.
Sea $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ una función continua. Sea $\mathbf{g} : \mathbf{W} \to E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$ una función continua. Entonces $\mathbf{g} : \mathbf{W} \to \mathbf{X}$ es continua, de donde $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbf{W} \to \mathbf{Y}$ es continua. Sea $h = f \circ g$. Por el lema anterior $\mathbf{h} : \mathbf{W} \to E_{\mathbf{W}}(\mathbf{Y})$ es continua. Por lo tanto $\mathbf{f} : E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) \to E_{\mathbf{W}}(\mathbf{Y})$ es continua.
Como consecuencia del lema anterior, para cada espacio topológico $\mathbf{X}$, $[\mathbf{W}, E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})]_{Top} \cong [\mathbf{W}, \mathbf{X}]_{Top}$. Entonces, al aplicar $E_{\mathbf{W}}$ a $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$ se consideran las funciones continuas de $\mathbf{W}$ en $\mathbf{X}$. Las topologías finales para $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$ y $\mathbf{X}$, con los sumideros así determinados, coinciden. Por lo tanto $E^2_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) = E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$. De este hecho, por la definición de la aplicación $E_{\mathbf{W}}$ en las funciones continuas se sigue que $E^2_{\mathbf{W}}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$.
Finalmente $O_e \circ E_{\mathbf{W}} = O_e$, lo cual completa la demostración. □

Corolario 2.3.1. *Sea* $\mathbf{W}$ *un espacio topológico, entonces:*

1) $E_{\mathbf{W}}(Top)$ *es una categoría topológica.*
2) $E_{\mathbf{W}}(Top)$ *es completa y cocompleta.*
3) $E_{\mathbf{W}}(Top)$ *es una subcategoría correflexiva de* Top.
4) Si $\mathbf{X} \in E_W(Top)$ *y* $\mathbf{Y} \in Top$, *entonces* $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{Top} \cong [\mathbf{X}, E_{\mathbf{W}}(\mathbf{Y})]_{E_{\mathbf{W}}(Top)}$
5) $E_{\mathbf{W}} : Top \to E_W(Top)$ *preserva límites.*
6) $\mathbf{W}$ *pertenece a la categoría* $E_{\mathbf{W}}(Top)$.
7) Si $\mathbf{A}$ *es un subespacio de* $\mathbf{X}$ *en* Top, *entonces* $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{A})$ *es un subespacio de* $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$ *en* $E_{\mathbf{W}}(Top)$.
8) Si $\mathbf{B}$ *es un espacio cociente de* $\mathbf{X}$ *en* Top *y* $\mathbf{X} \in E_{\mathbf{W}}(Top)$, *entonces* $\mathbf{B} \in E_{\mathbf{W}}(Top)$.

Definición 2.3.1. *Se dice que un elevador E es representable si es isomorfo a un elevador de la forma $E_{\mathbf{W}}$ para algún espacio topológico $\mathbf{W}$.*

Observación 2.3.1. *En general si $\{\mathbf{W}_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, se determina un elevador idempotente $E_{(\mathbf{W}_i)}$, el cual se define asociando a cada espacio topológico $\mathbf{X}$ la estructura final para el sumidero $\{f : \mathbf{W}_i \to X \mid \mathbf{f} \in [\mathbf{W}_i, \mathbf{X}]_{Top}\}_{i\in I}$; en funciones continuas el funtor se define por $E_{(\mathbf{W}_i)}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$.*

La siguiente proposición se sigue de la definición de elevador y de coproducto.

Proposición 2.3.1. *Si $\{\mathbf{W}_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos y $\amalg \mathbf{W}_i$ es su coproducto, entonces $E_{(\mathbf{W}_i)_{i\in I}} = E_{(\amalg \mathbf{W}_i)}$.*

Observación 2.3.2. *De manera dual, haciendo uso de estructuras iniciales, un espacio topológico $\mathbf{W}$ determina un coelevador idempotente, que notamos $C_{\mathbf{W}}$; obteniéndose resultados duales a los expuestos en la teoría de los elevadores representables.*

La prueba de la siguiente proposición se sigue directamente de la definición de elevador y coelevador.

Proposición 2.3.2. *Sea $\mathbf{W}$ un espacio topológico. Existe una adjunción entre las categorías $C_{\mathbf{W}}(Top)$ y $E_{\mathbf{W}}(Top)$, más exactamente*

$$C_{\mathbf{W}} : E_{\mathbf{W}}(Top) \to C_{\mathbf{W}}(Top)$$

es adjunto a izquierda de

$$E_{\mathbf{W}} : C_{\mathbf{W}}(Top) \to E_{\mathbf{W}}(Top)$$

Ejemplos 2.3.1.

1) Se dice que un espacio X es secuencial, si cada subconjunto secuencialmente abierto de X es abierto. Un subconjunto $A \subseteq X$ es secuencialmente abierto si cada sucesión en X que converge a un punto de A está eventualmente en A, en otras palabras, por fuera de A sólo hay un número finito de términos de la sucesión.

   Consideremos $\mathbb{N}_\infty = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ como subespacio del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con su topología usual.

   La categoría $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ corresponde a los espacios secuenciales.

2) Un espacio topológico es un k-espacio si tiene la topología final generada por el sumidero que determinan las inclusiones de sus subespacios compactos.

   Sea $\mathcal{C}$ la clase de los espacios compactos. En forma similar a la construcción sugerida en la Observación 2.3.1, $\mathcal{C}$ determina un elevador. La categoría de los k-espacios corresponde a los puntos fijos del elevador determinado por $\mathcal{C}$.

   Esta construcción muestra que es posible generar un elevador haciendo uso de una clase de espacios topológicos, evitando la limitante de la cardinalidad impuesta en la Observación 2.3.1. Nótese que en este caso no es aplicable la Proposición 2.3.1 a la clase $\mathcal{C}$.

3) Sea $\mathbf{I} = [0, 1]$ con su topología usual. Se dice que un espacio topológico $\mathbf{X}$ es completamente regular, si y sólo si, para todo $\mathbf{A}$ subconjunto cerrado de $\mathbf{X}$ y para todo $x \in \mathbf{X}$ con $x \notin \mathbf{A}$, existe una función continua $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{I}$ tal que $\mathbf{f}(x) = 0$ y $\mathbf{f}(\mathbf{A}) = 1$.

   Se sabe que un espacio topológico $\mathbf{X}$ es completamente regular, si y sólo si, tiene la topología inicial inducida por la familia de funciones continuas y acotadas de valor real, ver por ejemplo [22].

   La categoría $C_{\mathbf{I}}(Top)$ corresponde a los espacios completamente regulares.

4) Consideremos el espacio de Sierpinski $\mathbf{S} = (\{0, 1\}, \tau)$ donde $\tau = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$. La categoría $C_{\mathbf{S}}(Top)$ es isomorfa a Top. Por lo tanto el funtor identidad de Top es representable.

5) Sea $D : Top \to Top$ el elevador que asigna a cada espacio topológico $\mathbf{X}$ el espacio discreto sobre el conjunto X. D es representable por todo espacio discreto. Los puntos fijos de D son los espacios discretos. Al considerar el conjunto $\{0, 1\}$ con la topología discreta, el producto $\Pi\{0, 1\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la categoría Top es el espacio de Cantor que no es discreto y al aplicar D al espacio de Cantor se obtiene un espacio discreto. Este ejemplo hace ver que los productos en $D(Top)$ no coinciden con los de Top, de lo cual se sigue que en general un elevador no preserva productos.

6) El funtor que asigna a cada espacio topológico el espacio con topología grosera en su fibra es un coelevador con infinitos representantes.

7) Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales con su topología usual. En el subespacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales de $\mathbb{R}$, los conexos corresponden a los

conjuntos unitarios. Puesto que $\mathbb{R}$ es conexo, las únicas funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$ son las constantes, lo cual implica que $E_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$ es un espacio discreto. Entonces, nótese que $\mathbb{R} \in E_{\mathbb{R}}(Top)$ y $\mathbb{Q} \notin E_{\mathbb{R}}(Top)$. Este es un ejemplo de una categoría topológica generada por un elevador que no es cerrada para la formación de subespacios.

2.4. La categoría de los elevadores idempotentes de Top. En este apartado se define la categoría de los elevadores idempotentes de Top y se muestra que ésta se comporta como una categoría topológica.
Un endomorfismo del funtor olvido $O_e : Top \longrightarrow Conj$ es un funtor $\mathcal{F} : Top \to Top$ tal que $O_e \circ \mathcal{F} = O_e$

$$\begin{tikzcd}
Top \arrow[rr, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "O_e"'] & & Top \arrow[dl, "O_e"] \\
& Conj &
\end{tikzcd}$$

La categoría de los elevadores idempotentes de Top que notaremos $\mathcal{EL}(Top)$, tiene por objetos a las parejas (Top, E), donde E es un elevador idempotente. A la pareja (Top, E) la llamaremos un $\mathcal{EL}-$*espacio*. Un morfismo $\mathcal{F} : (Top, E_1) \to (Top, E_2)$ es un endomorfismo de O_e que verifica $\mathcal{F}(E_1(\mathbf{X})) \leq E_2(\mathcal{F}(\mathbf{X}))$, en otras palabras, la función identidad $i_{\mathbf{X}} : E_2(\mathcal{F}(\mathbf{X})) \to \mathcal{F}(E_1(\mathbf{X}))$ es continua. En tal caso a $\mathcal{F}$ lo llamaremos un funtor continuo. Para cada $\mathcal{EL} - espacio$ (Top, E) la identidad es un funtor continuo y la composición de funtores continuos es un funtor continuo.
Nota: La noción de funtor continuo es motivada por la caracterización de una función continua a través de la adherencia, esto es $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es continua, si y sólo si, para todo subconjunto A de $\mathbf{X}$, $\mathbf{f}(\overline{A}) \subseteq \overline{\mathbf{f}(A)}$.
El siguiente lema permite demostrar que la colección de los elevadores idempotentes tiene una estructura natural de retículo completo.

Lema 2.4.1. *Sea $E : Top \to Top$ un elevador idempotente. Entonces para todo par de espacios topológicos $\mathbf{X}$ y $\mathbf{X}'$ tales que $\mathbf{X} \leq \mathbf{X}' \leq E(\mathbf{X})$, se tiene que $E(\mathbf{X}') = E(\mathbf{X})$.*

La colección $\mathcal{E}$ de elevadores de estructura idempotentes es una clase ordenada por la relación:

$$E_1 \leq E_2, \text{ si y sólo si, para todo espacio topológico } \mathbf{X},\ E_1(\mathbf{X}) \leq E_2(\mathbf{X})$$

Los elevadores mínimo y máximo corresponden respectivamente a los funtores identidad I y discreto D.

Dada una colección de elevadores idempotentes $(E_i)_{i\in I}$, el ínfimo corresponde al elevador E, definido por $E(\mathbf{X}) = \bigwedge E_i(\mathbf{X})$ y $E(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$, donde $\bigwedge E_i(\mathbf{X})$ designa al ínfimo de la familia $(E_i(\mathbf{X}))_{i\in I}$ en $Fib(X)$. En efecto, puesto que $\mathbf{X} \leq E_i(\mathbf{X})$ para todo $i \in I$, se tiene que $\mathbf{X} \leq \bigwedge E_i(\mathbf{X})$; de donde $\mathbf{X} \leq E(\mathbf{X})$. Para probar que E es idempotente obsérvese que $\bigwedge E_i(\mathbf{X}) \leq E_i(\mathbf{X})$ para todo $i \in I$, por lo tanto $\mathbf{X} \leq \bigwedge E_i(\mathbf{X})$. Entonces, puesto que para todo $i \in I$, E_i es idempotente, haciendo uso del lema anterior se tiene que $E_i(\mathbf{X}) = E_i(\bigwedge E_i(\mathbf{X}))$ de lo cual se sigue que E es idempotente y $E \leq E_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto E es el ínfimo de la familia dada.

De la existencia de mínimo, máximo y extremos inferiores en $(\mathcal{E}, \leq)$ se sigue la existencia de extremos superiores. Por lo tanto $(\mathcal{E}, \leq)$ es un retículo completo.

Si $\mathcal{F} : Top \to (Top, E)$ es un endofuntor de O_e, el funtor identidad I_{Top} hace de $\mathcal{F} : (Top\,, I_{Top}) \to (Top, E)$ un funtor continuo. Por lo tanto la colección de los elevadores $\mathcal{E}_E$ que hacen de $\mathcal{F}$ un funtor continuo es no vacía. Si E' es el ínfimo de $\mathcal{E}_E$, entonces $\mathcal{F} : (Top, E') \to (Top, E)$ es continuo.

De forma dual, si $\mathcal{F} : (Top, E) \to Top$ es un endofuntor de O_e, el funtor discreto D hace de $\mathcal{F} : (Top\,, E) \to (Top, D)$ un funtor continuo. Por lo tanto la colección de los elevadores $\mathcal{E}_E$ que hacen de $\mathcal{F}$ un funtor continuo es no vacía. Sea E' el supremo de $\mathcal{E}_E$. Entonces $\mathcal{F} : (Top, E) \to (Top, E')$ es continuo.

3. TOPOS TOPOLÓGICOS

Usando elementos de la topología categórica desarrollaremos una teoría que permite construir topos que extienden categorías topológicas generadas por elevadores representables. El estudio de estos topos motiva la noción de Topos-Topológico.

La teoría desarrollada ha permitido, a través de colímites de cierto tipo de funtores, una descripción de los objetos de las categorías topológicas generadas por elevadores representables, lo que revela el carácter algebraico de estas categorías. Además, hemos demostrado que estas categorías corresponden a las coálgebras de co-teorías algebraicas.

3.1. Topos de M-Conjuntos. Dado un monoide $(M, \circ, e)$ llamaremos *$m-$conjunto* a un conjunto X dotado con una acción a derecha de M notada $x \circ f$ que verifica las siguientes condiciones:

$$i)\ x \circ e = x, \quad ii)\ x \circ (f \circ g) = (x \circ f) \circ g$$

para todos $x \in X$ y $f, g \in M$.

Una *$m-$aplicación*[1] entre *$m-$conjuntos* X y Y es una función $H : X \to Y$ que conserva la acción, lo cual significa que verifica

$$H(x \circ f) = H(x) \circ f$$

La categoría determinada de esta manera, notada $M - Sets$, es equivalente al topos de prehaces $Sets^M$, por lo tanto $M - Sets$ es un topos de Grothendieck, lo cual implica que es un modelo de la teoría de conjuntos en el cual se interpreta la lógica intuicionista [8].

3.2. Categorías topológicas y topos.

3.2.1. El topos $\mathcal{E}_{\mathbf{W}}(\mathbf{Top})$ asociado a un espacio topológico $\mathbf{W}$. Sea W un espacio topológico y M_W el monoide de los endomorfismos de W con la operación de composición, $M_W = ([W, W]_{Top}, \circ)$.

El topos de m-conjuntos asociado a M_W lo notaremos $\mathcal{E}_W(Top)$.

Veamos una conexión entre la categoría de los espacios topológicos Top y el topos $\mathcal{E}_W(Top)$.

Cada espacio topológico X se interpreta en $\mathcal{E}_W(Top)$ como el m-conjunto $[W, X]_{Top}$ con la acción definida por composición:

$$\begin{aligned} [W, X]_{Top} \times M_W &\longrightarrow [W, X]_{Top} \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

[1] En la literatura es conocido como aplicación equivariante, este término que consideramos apropiado lo hemos tomado de [7].

A su vez, cada función continua $f : X \to Y$, da lugar, por composición a la m-aplicación:

$$\bar{f} : [W,X]_{Top} \longrightarrow [W,Y]_{Top}$$
$$\bar{f}(h) := f \circ h$$

Para cada espacio topológico X, dada la identidad i_X, se verifica $\bar{i}_X = i_{[W,X]_{Top}}$, siendo esta última la m-aplicación identidad de $[W,X]_{Top}$ en $\mathcal{E}_W(Top)$. Para todo par de funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ se tiene que $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$. Por lo tanto se ha determinado un funtor

$$\Sigma_W : Top \longrightarrow \mathcal{E}_W(Top)$$

definido por

$$\Sigma_W(X) := [W,X]_{Top}, \qquad \Sigma_W(f) := \bar{f}$$

3.2.2. Una adjunción entre la categoría topológica $\mathbf{E_W}(\mathbf{Top})$ *y el topos* $\mathcal{E}_{\mathbf{W}}(\mathbf{Top})$.

Teorema 3.2.1. *Sea W un espacio topológico. Consideremos el funtor*

$$\Sigma_W : E_W(Top) \longrightarrow \mathcal{E}_W(Top)$$

restricción del anterior. Entonces:

I) Σ_W *es fiel y pleno.*
II) Σ_W *tiene adjunto a izquierda, el que notaremos:*

$$l_W : \mathcal{E}_W(Top) \longrightarrow E_W(Top)$$

Demostración.

I) Veamos que Σ_W es fiel. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Si $\bar{f} = \bar{g}$, entonces para cada $x \in X$, la función constante $h_x : W \to X$ de valor x, verifica la igualdad $\bar{f}(h_x) = \bar{g}(h_x)$, de donde $f(x) = g(x)$. Por lo tanto $f = g$.

Ahora veamos que Σ_W es pleno. Sean X y Y espacios topológicos y $\bar{\alpha} : [W,X]_{Top} \to [W,Y]_{Top}$ una m-aplicación. El objetivo es demostrar que $\bar{\alpha}$ es la imagen por Σ_W de una función continua de X en Y.

Para cada elemento $w \in W$ notemos con $t_w : W \to W$ la función constante de valor w y para cada $x \in X$ notemos con $f_x : W \to X$ la función constante de valor x.

Los elementos constantes del m-conjunto $[W, X]_{Top}$ corresponden a las funciones constantes. Puesto que $\bar{\alpha}$ es una m-aplicación $\bar{\alpha}$ preserva elementos constantes. Entonces se determina la función

$$\alpha : X \longrightarrow Y$$

definida por

$$\alpha(x) := (\bar{\alpha}(f_x))(w)$$

Veamos que $\bar{\alpha}(h) = \alpha \circ h$.

Sea $w \in W$. Entonces:

$$\begin{aligned}(\alpha \circ h)(w) &= \alpha(h(w)) \\ &= \bar{\alpha}(f_{h(w)})(w) \\ &= \bar{\alpha}(h \circ t_w)(w) \\ &= (\bar{\alpha}(h) \circ t_w)(w) \\ &= \bar{\alpha}(h)(w)\end{aligned}$$

Ahora, puesto que $X \in E_W(Top)$ y para toda $f \in [W, X]_{Top}$, $\alpha(f) \in [W, Y]_{Top}$ por definición de estructura final, se tiene que α es continua. Por lo tanto $\Sigma_W(\alpha) = \bar{\alpha}$; de donde Σ_W es pleno.

II) Es consecuencia del teorema 2 pag 41 dado en [14]. □

El teorema anterior permite identificar a $E_W(Top)$ como una subcategoría reflexiva de $\mathcal{E}_W(Top)$, hecho que se enuncia formalmente a continuación.

Teorema 3.2.2. *Sea W un espacio topológico, $E_W(Top)$ es una subcategoría reflexiva de $\mathcal{E}_W(Top)$.*

Definición 3.2.1. *Sea W un espacio topológico. Un $W - funtor$ es un funtor de una categoría pequeña en la categoría Top y de valor constante W.*

De los teoremas anteriores se deduce que para todo espacio topológico $X \in E_W(Top)$, $l_W([W, X]_{Top}) \cong X$ y puesto que $[W, X]_{Top}$ es colímite de prehaces representables se sigue que X es colímite de W-funtores. Más aún, de este hecho se deriva el siguiente resultado.

Teorema 3.2.3. *Sea W un espacio topológico. La categoría $E_W(Top)$ corresponde a los colímites de $W - funtores$ definidos en Top.*

De manera dual, dado un espacio topológico T, la categoría $C_T(Top)$ corresponde a los límites de T-funtores definidos en Top.

Observación 3.2.1. *La caracterización anterior sugiere un carácter algebraico de una subcategoría de Top generada por un elevador representable y además establece un resultado análogo al de la teoría de los topos de Grothendieck, en donde los objetos son colímites de prehaces representables.*

El siguiente resultado establece condiciones necesarias y suficientes para que dos categorías determinadas por elevadores representables sean iguales.

Teorema 3.2.4. *Sean W y Z espacios topológicos. Entonces $E_W(Top) = E_Z(Top)$, si y solamente si, $Z \in E_W(Top)$ y $W \in E_Z(Top)$.*

Demostración. Si $E_W(Top) = E_Z(Top)$ es claro que $Z \in E_W(Top)$ y $W \in E_Z(Top)$.
Ahora supongamos que $Z \in E_W(Top)$ y $W \in E_Z(Top)$. Entonces, por el Teorema 3.2.3, puesto que $E_Z(Top)$ es cerrada para colímites $E_Z(Top) \subset E_W(Top)$. De la misma forma $E_W(Top) \subset E_Z(Top)$. Por lo tanto $E_Z(Top) = E_W(Top)$. □

Ejemplos 3.2.1.

1) Recordemos que $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ es la categoría de los espacios secuenciales. Notemos con $\mathbf{C}$ el espacio de Cantor. Veamos que $E_{\mathbf{C}}(Top) = E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$.

   Notemos con $MetK$ a la subcategoría plena de Top formada por los espacios métricos compactos. Puesto que $E_{\mathbf{C}}(Top)$ es cerrada para la formación de cocientes y todo espacio métrico compacto es un cociente del espacio de Cantor, se tiene que $MetK$ es una subcategoría de $E_{\mathbf{C}}(Top)$. En particular $\mathbb{N}_\infty \in E_{\mathbf{C}}(Top)$. Ahora, puesto que el espacio de Cantor es métrico, es secuencial, por lo tanto $\mathbf{C} \in E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$. Entonces, haciendo uso del Teorema 3.2.4 se tiene que $E_C(Top) = E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$

   El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es secuencial, luego $\mathbb{R} \in E_{\mathbf{C}}(Top)$, de donde $\mathbb{R}$ es un colímite de $\mathbf{C}$-funtores, esto es $\mathbb{R}$ se recupera a través del espacio de Cantor. Más aún, todo espacio métrico es colímite de $\mathbb{N}_\infty$-funtores y también colímite de $\mathbf{C}$-funtores.

Entonces, la igualdad $E_{\mathbf{C}}(Top) = E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ insinúa a $\mathbf{C}$ y a $\mathbb{N}_\infty$ como espacios generadores de la mayoría de los espacios topológicos útiles para el trabajo de la topología y el análisis.

2) Sea X un conjunto de cardinal mayor que 1. El monoide de endomorfismos $M_{(X,D)}$ del espacio discreto (X, D) es isomorfo al monoide de endomorfismos $M_{(X,G)}$ del espacio grosero (X, G). Por lo tanto estos monoides generan topos isomorfos, así que, $\mathcal{E}_{(X,D)}(Top) \cong \mathcal{E}_{(X,G)}(Top)$. Nótese que (X, D) no es isomorfo a (X, G), $(X, D) \in E_{(X,G)}(Top)$ y $(X, G) \notin E_{(X,D)}(Top)$, de donde $E_{(X,D)}(Top) \neq E_{(X,G)}(Top)$. Este ejemplo muestra espacios topológicos distintos que producen el mismo topos y categorías topológicas distintas.
3) En la categoría $C_I(Top)$, cada espacio completamente regular resulta como límite de $I - funtores$.

El estudio de los topos hasta ahora construidos motiva la siguiente definición.

Definición 3.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría topológica. Se dice que $\mathcal{E}$ es un topos $\mathcal{C}$-topológico si $\mathcal{E}$ contiene una subcategoría reflexiva equivalente a $\mathcal{C}$. En tal caso al par $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ lo llamaremos un Tandem Topológico.*

Ejemplos 3.2.2.

1) Todo topos $\mathcal{E}$ es $\mathcal{E} - topológico$. Para esto, basta considerar en la definición, $\mathcal{C}$ como $\mathcal{E}$ y $\mathcal{C}$ como categoría topológica fibrada sobre $\mathcal{C}$ a través del funtor identidad.
2) Sea W un espacio topológico y M un submonoide de M_W. Si M contiene las funciones constantes entonces $(E_W(Top), M - Sets)$ es un tandem. La prueba de este hecho es análoga a la dada en el Teorema 3.2.1.

3.3. El carácter algebraico de las subcategorías de Top generadas por elevadores idempotentes. En una categoría, una teoría algebraica $\mathcal{T}$ en forma monoide refleja la noción de monoide. Por su parte, la noción de álgebra asociada a $\mathcal{T}$ captura los conceptos clásicos de álgebra considerados en álgebra universal. Como veremos enseguida, la categoría topológica asociada a un coelevador (elevador) corresponde a las álgebras (coálgebras) de una teoría (co-teoría) algebraica.
Las definiciones 3.3.1 y 3.3.2 son tomadas de [16].

Definición 3.3.1. *Una teoría algebraica $\mathcal{T}$ en forma monoide en una categoría $\mathcal{C}$ es un tripla (T, η, μ) donde T es un endofuntor de $\mathcal{C}$, η es una transformación natural del funtor identidad de $\mathcal{C}$ en T y μ es una transformación natural de $T \circ T$ en T, tales que para cada objeto X de $\mathcal{C}$ se verifican las siguientes condiciones:*

I) $\mu_X \circ \eta_{T(X)} = id_{T(X)}$.
II) $\mu_X \circ T(\mu_X) = id_{T(X)}$.
III) $\mu_X \circ \mu_{T(X)} = \mu_X \circ T(\mu_X)$.

$id_{T(X)}$ corresponde a la identidad de $T(X)$.

Definición 3.3.2. *Sea $\mathcal{T} = (T, \eta, \mu)$ una teoría algebraica en una categoría $\mathcal{C}$. Una $\mathcal{T}-$álgebra es una pareja (X, δ) donde X es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\delta : T(X) \to X$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ llamado la función estructural de (X, δ) que verifica los siguientes axiomas:*

I) $\delta \circ \eta_X = id_X$.
II) $\delta \circ T(\delta) = \delta \circ \mu_X$.

Si (X, δ) y (Y, θ) son $\mathcal{T}$-álgebras, un $\mathcal{T}$-homomorfismo de (X, δ) a (Y, θ) es un morfismo $f : X \to Y$ tal que $\theta \circ T(f) = f \circ \delta$.
Puesto que T es un funtor, $id_X : (X, \delta) \to (X, \delta)$ es un $\mathcal{T}$-homomorfismo y la composición de $\mathcal{T}$-homomorfismos es $\mathcal{T}$-homomorfismo. Por lo tanto se determina la categoría de las $\mathcal{T}$-álgebras y $\mathcal{T}$-homomorfismos notada $\mathcal{C}^{\mathcal{T}}$.
De manera dual se define la categoría de las coálgebras $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ a partir de la noción dual de teoría algebraica.

Proposición 3.3.1. *Sea $C : Top \to Top$ un coelevador idempotente. La categoría $C(Top)$ corresponde a las álgebras de una teoría algebraica.*

Demostración. La familia de identidades $\{i_X : X \to C(X)\}_{X \in Top}$ define una transformación natural η del funtor identidad de Top en el funtor C, siendo $\eta_X = i_X$. Puesto que C es idempotente, la familia de identidades $\{i_X : (C \circ C)(X) \to C(X)\}_{X \in Top}$ define una transformación natural μ de $C \circ C$ en C donde $\mu_X = i_X$.
Es fácil ver que la tripla (Top, η, μ) define una teoría algebraica en Top y que la categoría de las álgebras asociada corresponde a la categoría topológica $C(Top)$. □

De manera dual la categoría topológica determinada por un elevador corresponde a la categoría de las coálgebras de una co-teoría algebraica.

Observación 3.3.1. *El Teorema 3.2.3, la Observación 3.2.1 y la Proposición 3.3.1 evidencian el carácter algebraico de las subcategorías de Top generadas por elevadores y coelevadores representables.*

3.4. El topos $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$(Top) asociado al espacio usual de los números reales. El topos $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)$ contiene como subcategoría reflexiva a la categoría topológica $E_{\mathbb{R}}(Top)$. El objeto de los números reales en $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)$ que notaremos $R_{\mathcal{E}}$ corresponde al anillo usual de los números reales con la acción trivial.
Con el trabajo desarrollado en el topos $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)$ deseamos ilustrar cómo construcciones de carácter algebraico en un topos topológico, extienden construcciones del mismo tipo en categorías topológicas.

Inclusión de los espacios vectoriales topológicos sobre $\mathbb{R}$ en el topos $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)$. En esta sección EVT es la categoría de los espacios vectoriales topológicos y transformaciones lineales continuas sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$.
Las siguientes definiciones toman como base [9] en donde se desarrolla una teoría completa de estructuras algebraicas en un topos.
Un $R_{\mathcal{E}}-$ *módulo* V en $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)$ es un $\mathbb{R}-$ *módulo* en el sentido habitual de tal manera que las operaciones de adición $(+)$ y multiplicación por escalar $(\cdot)$ son $m-$ *aplicaciones*, esto es, para todos $v, w \in V$, y para todos $r, r_1 \in \mathbb{R}$ $(v+w)\circ r = v\circ r + w\circ r$ y $(v\cdot r)\circ r_1 = (v\circ r_1)\cdot r$.
Un $R_{\mathcal{E}}-$ *homomorfismo* entre dos $R_{\mathcal{E}}-$ *módulos* V y W es una $m-$ *aplicación* $f : V \to W$ que es $\mathbb{R}-$ *homomorfismo* de $\mathbb{R}-$ *módulos*.
La categoría de los $R_{\mathcal{E}}-$ *módulos* la notaremos $Mod_{R_{\mathcal{E}}}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top))$.
Veamos la manera de interpretar los espacios vectoriales topológicos como $R_{\mathcal{E}}-$ *módulos* en el topos $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)$.
El funtor

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbb{R}} : Top &\longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top) \\ V &\longmapsto [\mathbb{R}, V]_{Top} \end{aligned}$$

permite interpretar un espacio vectorial topológico como un $R_{\mathcal{E}}-$módulo en $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathbb{R}} : EVT &\longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)\\ V &\longrightarrow [\mathbb{R}, V]_{Top}\end{aligned}$$

En efecto, en el conjunto $[\mathbb{R}, V]_{Top}$ se define la operación de adición:

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v).$$

Debido a la propiedad universal del producto en Top y a que $(V, +)$ es un grupo topológico, la operación anterior resulta bien definida, esto es $f+g$ es continua por ser la compuesta de funciones continuas, $f+g = (+) \circ \langle f, g\rangle$. Ahora como V es un grupo abeliano se sigue que $([\mathbb{R}, V], +)$ es un grupo abeliano en $Sets$.
La acción por composición del monoide $M_{\mathbb{R}}$ sobre $[\mathbb{R}, V]_{Top}$ hace de $([\mathbb{R}, V]_{Top}, +)$ un grupo abeliano en $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)$, para lo cual basta demostrar que la operación de adición es una m-aplicación. En efecto, para todas $f, g \in [\mathbb{R}, V]_{Top}$ y $h \in [\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ se tiene que $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.
Finalmente $[\mathbb{R}, V]_{Top}$ se convierte en $R_{\mathcal{E}}$-módulo en $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)$ definiendo para cada $f \in [\mathbb{R}, V]_{Top}$ y cada $r \in \mathbb{R}$ la multiplicación así:

$$(f \cdot r)(x) := f(x)r,$$

función que resulta m-aplicación. En efecto, teniendo en cuenta que $R_{\mathcal{E}}$ tiene la acción trivial sólo se debe verificar que para todos $f \in [\mathbb{R}, V]_{Top}$, $r \in \mathbb{R}$ y $g \in [\mathbb{R}, V]_{Top}$, se tiene que $(f \circ h) \cdot r = (f \cdot r) \circ h$, hecho que resulta evidente.
Ahora, si $\alpha : V \to W$ es una transformación lineal y continua, entonces la función

$$\bar{\alpha} : [\mathbb{R}, V]_{Top} \to [\mathbb{R}, W]_{Top}$$

definida por

$$\bar{\alpha}(f) = \alpha \circ f$$

es una m-aplicación y además un $R_{\mathcal{E}}$-homomorfismo en la categoría $Mod_{R_{\mathcal{E}}}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top))$. En efecto, $\bar{\alpha}(f \cdot r) = \alpha \circ (f \cdot r) = (\alpha \circ f) \cdot r = \bar{\alpha}(f) \cdot r$ y $\bar{\alpha}(f+g) = \bar{\alpha}(f) + \bar{\alpha}(g)$ como consecuencia de la linealidad de α.

Definición 3.4.1. *Un espacio vectorial topológico V se dice $\mathbb{R}-$final si V es un objeto de la categoría $E_{\mathbb{R}}(Top)$.*

La subcategoría plena de EVT formada por los espacios $\mathbb{R}$–*finales* la notaremos $EVT(\mathbb{R})$.
Puesto que $(E_{\mathbb{R}}(Top), \mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top))$ es un tandem, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.4.1. *El funtor*

$$\Sigma_{\mathbb{R}} : EVT(\mathbb{R}) \to Mod_{R_{\mathcal{E}}}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top))$$

es fiel y pleno.

Demostración.

I) Veamos que $\Sigma_{\mathbb{R}}$ es fiel. Sean $\alpha, \beta : V \to W$ transformaciones lineales continuas. Supongamos que $\Sigma_{\mathbb{R}}(\alpha) = \Sigma_{\mathbb{R}}(\beta)$. Entonces para toda $f \in [\mathbb{R}, V]_{Top}$ $\bar{\alpha}(f) = \bar{\beta}(f)$, lo cual implica que $\alpha \circ f = \beta \circ f$. Sea $v \in V$, entonces v determina una función constante de $\mathbb{R}$ en V de valor v, por lo tanto $\alpha(v) = \beta(v)$, de donde $\alpha = \beta$.

II) Veamos ahora que $\Sigma_{\mathbb{R}}$ es pleno. Sea V y W espacios vectoriales $\mathbb{R}$-finales y sea $\bar{\alpha} : [\mathbb{R}, V]_{Top} \to [\mathbb{R}, W]_{Top}$ un $R_{\mathcal{E}}$-homomorfismo. Entonces $\bar{\alpha}$ es una m-aplicación en $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)$, luego existe una función continua $\alpha : V \to W$ tal que $\bar{\alpha}(f) = \alpha \circ f$ para toda $f \in [\mathbb{R}, V]_{Top}$. Veamos que α es lineal. Sean $u, v \in V$, entonces se determinan funciones continuas $f_u, f_v : \mathbb{R} \to V$ de valores constantes u y v respectivamente. Por lo tanto,

$$\bar{\alpha}(f_u + f_v) = \bar{\alpha}(f_u) + \bar{\alpha}(f_v),$$

de donde

$$\alpha \circ (f_u + f_v) = \alpha \circ f_u + \alpha \circ f_v.$$

En particular para un valor arbitrario x de $\mathbb{R}$, se tiene que:

$$\alpha \circ (f_u + f_v)(x) = (\alpha \circ f_u)(x) + (\alpha \circ f_v)(x).$$

Por lo tanto

$$\alpha(u + v) = \alpha(u) + \alpha(v).$$

Para completar la prueba de la linealidad de α, sean $v \in V$ y $r \in R$. Entonces, se determina una función constante de valor v, $f_v : \mathbb{R} \to V$ y puesto que $\bar{\alpha}$ es $R_{\mathcal{E}}$-homomorfismo,

$$\bar{\alpha}(f_v \cdot r) = \bar{\alpha}(f_v) \cdot r,$$

luego

$$\alpha \circ (f_v \cdot r) = \alpha(f_v) \cdot r.$$

En particular para un elemento x de $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(\alpha \circ (f_v \cdot r))(x) &= ((\alpha \circ f_v) \cdot r)(x) \\ &= \alpha(f_v(x) \cdot r) \\ &= (\alpha \circ f_v)(x) \cdot r \\ &= \alpha(vr) \\ &= \alpha(v)r.\end{aligned}$$

□

La proposición anterior determina a $EVT(\mathbb{R})$ como una categoría isomorfa a una subcategoría plena de $Mod_{R_{\mathcal{E}}}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top))$. De este modo, consideramos que la categoría de los $R_{\mathcal{E}}-$módulos en el topos $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top)$ es una buena extensión de la categoría de los espacios vectoriales reales cuya topología está en la categoría topológica $E_{\mathbb{R}}(Top)$.
Considerando el isomorfismo de arriba, anotamos formalmente la siguiente proposición.

Proposición 3.4.2. *$EVT(\mathbb{R})$ es una subcategoría plena de $Mod_{R_{\mathcal{E}}}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(Top))$.*

Referencias

[1] J. Adámek , *Theory of Mathematical Structures.* D. Reidel Publishing Company. Boston, Lancaster. 1983.

[2] J. Adámek., Herrlich H., Strecker G., *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1990.

[3] V. Ardila, J. Montañez, C. Ruiz, *Nociones equivalentes de Categorías Topológicas*, Boletín de Matemáticas. Nueva serie, Volumen VII, Número 1, Junio de 2000.

[4] G. Castellini, *Categorical Closure Operators*, Birkhäuser, 2003.

[5] D. Dikrajan, W. Tholem, *Categorical Structure of Closure Operators, with Applications to Topology, Algebra and Discrete Mathematics*, Kluwer Academic Publischer, 1995.

[6] L. Español, L. Lamban, *On bornologies, locales and toposes of M-Sets*, J. Pure Appl. Algebra 176,(2002) 113-125.

[7] L. Español, C. Minguez, *Cortaduras para l^{∞}*. Publicación de Margarita Matemática, Universidad de la Rioja, España, 2001, 375-390.

[8] R. Goldblat, *Topoi: The Categorical Analisis of Logic*, North Holland, Amsterdam, 1979.

[9] P.T. Johnstone, *Topos theory*, Academic Press, London 1977.

[10] P.T Johnstone, *On a topological Topos*, Proc. London Math. Soc (3) 38 (1979), 237-271.

[11] P.T. Johnstone, *Sketches of an Elephant*, A Topos Theory , Vol 1, 2, Oxford Science, Publications, 2002.

[12] F.W. Lawvere, *Taking categories serioulsy*, Revista Colombiana de Matemáticas 20 (1986), 147-178.

[13] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York,1998.

[14] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A first introduction to topos Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[15] M. Mehdi Ebrahimi, M. Mahmoudi, *The category M-Sets*, Italian J. of Pure Appl. Math, 9 (2001) 123-132.

[16] E. Manes, *Algebraic Theories*, Springer, Verlag, New York, 1976.

[17] R. Montañez, *Fibraciones categóricas*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1994.

[18] A. Oostra, *Subcategorías generadas mediante estructuras iniciales*, Lecturas Matemáticas, 16 (1995), 63-72.

[19] A. Oostra, *The Uniformizable Spaces Are Generated by the Real Numbers*, Ann. New York Acad. Sc. 767 (1995), 165-167.

[20] G. Preuss, *Theory of Topological Structures*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht. 1988.

[21] B. R. Tennison, *Sheaf Theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series 20, Cambridge University Press, 1975.

[22] S. Willard, *General Topology*, Adisson Wesley Publishing Company. 1970.

[23] O. Wyler, *Lecture notes on topoi and quasitopoi*, Singapure, World Scientific, 1991.

Recibido: Agosto de 2006. Aceptado para publicación: Noviembre de 2006