Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XIII No. 2 (2006), pp. 79–99

OPERACIONES IMPLÍCITAS EN CUASIVARIEDADES

ARNOLD OOSTRA (*)

RESUMEN. Este artículo expositivo es un compendio de los principales resultados obtenidos en la tesis doctoral *Operaciones implícitas en variedades ecuacionales* [16] elaborada por el autor con la orientación del profesor Xavier Caicedo. En ella se plantea el problema de las operaciones implícitas en el contexto del álgebra universal, se desarrolla la teoría básica y se realizan estudios de caso en diversas clases de álgebras.

PALABRAS CLAVES. Álgebra universal, cuasivariedades, definibilidad implícita y explícita, operaciones implícitas, teorema de Beth.

ABSTRACT. This expositive paper is a summary of the doctoral dissertation *Implicit Operations in Equational Varieties* [16] prepared by the author and advised by professor Xavier Caicedo. There the problem about implicit operations is stated in a universal algebraic context, some basic theory is developed and different case studies are worked out.

KEY WORDS AND PHRASES. Universal algebra, quasivarieties, implicit and explicit definability, implicit operations, Beth's theorem.

2000 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION: 03C05, 08C15

1. El problema

1.1. **Contextos.** La dualidad entre lo implícito y lo explícito está presente en la cultura y el pensamiento de los seres humanos donde se manifiesta, por ejemplo, en los acertijos o adivinanzas que han aparecido en la mitología, la historia y la literatura desde la antigüedad. Un acertijo consiste en describir

(*) Arnold Oostra. Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima.
E-mail: oostra@telecom.com.co.

algo de manera única sin mencionarlo y entraña el problema de expresarlo en palabras, es decir, de pasar de una definición implícita a una explícita.

En la matemática, que de ninguna manera puede separarse de la cultura humana, también aflora el contraste entre lo implícito y lo explícito. Por ejemplo hay definiciones implícitas, hay definiciones explícitas y también hay objetos matemáticos que pueden definirse de ambas maneras. Otro ejemplo, quizás más claro, lo constituyen las ecuaciones y en especial las diferenciales. En los mejores casos está garantizado que un sistema de ecuaciones diferenciales con sus condiciones iniciales determina implícitamente una única función, lo cual entraña el reto de encontrar para ella una expresión explícita.

A su vez muchos problemas conceptuales de la matemática han sido analizados y modelados de una u otra manera por la lógica. Ya en los albores de la lógica moderna, al principio del siglo XX, el matemático italiano Alessandro Padoa propuso un método para asegurar que una fórmula lógica no es equivalente a ninguna expresión del lenguaje: basta exhibir en algún contexto interpretaciones diferentes de la fórmula. En otras palabras, una definición explícita implica una implícita. Una vez cristalizada la lógica de primer orden, en 1953 el lógico y filósofo holandés Evert Beth probó el recíproco del método de Padoa, resultado conocido hasta hoy como el *teorema de Beth* [2]. Aunque en la literatura este resultado se enuncia para un solo predicado, es válido para familias de relaciones como se detalla a continuación.

Sea $\Sigma(R_i)$ un conjunto de sentencias que contienen la familia $\{R_i\}_{i\in I}$ de símbolos de relación y sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden cuyos símbolos son precisamente los que aparecen en $\Sigma(R_i)$. Si $\{R'_i\}_{i\in I}$ es una familia de símbolos de relación que no aparecen en $\mathcal{L}$, cada R'_i con las mismas variables libres que R_i, entonces $\Sigma(R'_i)$ es el conjunto de sentencias obtenidas al sustituir en $\Sigma(R_i)$ todas las apariciones de R_i por R'_i. Ahora $\Sigma(R_i)$ *define implícitamente* la familia de relaciones $\{R_i\}_{i\in I}$ si se tienen las siguientes consecuencias formales.

$$\Sigma(R_i) \cup \Sigma(R'_i) \vdash \big\{\forall\vec{x}\big(R_i(\vec{x}) \leftrightarrow R'_i(\vec{x})\big)\big\}_{i\in I}$$

Por otro lado, sea $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ una familia de fórmulas de $\mathcal{L}$, cada φ_j con todas sus variables libres entre las de R_j y que no contiene ninguno de los símbolos R_i. El conjunto de sentencias $\Sigma(R_i)$ *define explícitamente* la familia de relaciones $\{R_i\}_{i\in I}$ mediante la familia de fórmulas $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ si se tienen las siguientes consecuencias formales.

$$\Sigma(R_i) \vdash \big\{\forall\vec{x}\big(\varphi_i(\vec{x}) \leftrightarrow R_i(\vec{x})\big)\big\}_{i\in I}$$

Es claro que si un conjunto de sentencias define explícitamente una familia de relaciones entonces también lo hace implícitamente. Una prueba del hecho siguiente se logra a partir del lema de interpolación de Craig, de la misma manera que se prueba el caso correspondiente a una sola relación [1].

Teorema 1 (Beth)**.** *Si un conjunto de sentencias define implícitamente una familia de relaciones entonces también la define explícitamente.*

La matemática contemporánea se caracteriza por una gran riqueza transpositiva consistente en la transferencia de conceptos y problemas entre diferentes áreas aparentemente desconectadas en el pasado. Uno de los puentes entre el álgebra y la lógica, nacido en los años 30 del siglo XX pero desarrollado e impulsado en las últimas décadas del mismo, es el *álgebra universal* o la ciencia general de las estructuras algebraicas [5].

Los objetos de estudio del álgebra universal son las clases de álgebras. Un álgebra consiste en un conjunto dotado de ciertas operaciones finitarias básicas, dadas por el tipo de álgebras. Un término es una combinación de las operaciones básicas con proyecciones, una identidad es una igualdad de términos y una cuasi-identidad es una implicación de identidades. Estos son los elementos mínimos con los que se cuenta en el contexto más general de las estructuras algebraicas. Una variedad es una clase de álgebras axiomatizada por identidades y una cuasivariedad es una axiomatizada por cuasi-identidades.

1.2. **Definiciones implícitas.** Las consideraciones generales sobre la definibilidad implícita pueden localizarse en el contexto del álgebra universal. Los objetos a definir son, por supuesto, operaciones y los medios para definirlos son las identidades y cuasi-identidades. Así resulta la convención siguiente, en la cual K es una clase de álgebras de tipo τ mientras ν es un conjunto de símbolos de operación disyunto con τ.

Definición 1. Un conjunto de cuasi-identidades $\mathcal{C}(\nu)$ en el vocabulario $\tau \cup \nu$ *define implícitamente* la familia de operaciones $\mathcal{N}$ en K si en cada álgebra $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ donde existe un conjunto de operaciones $\mathcal{N}^{\boldsymbol{A}} = \{\, \nabla^{\boldsymbol{A}} \;\big|\; \nabla \in \nu \,\}$ que satisface las cuasi-identidades de $\mathcal{C}(\nu)$, éste es único.

Obsérvese que no se exige que en todas las álgebras de la clase exista alguna familia de operaciones que satisfaga las identidades.

Ejemplo 1. Las identidades siguientes definen implícitamente una operación unaria I en la clase de los monoides $(M; *, 1)$.

$$x * I(x) \approx 1$$
$$I(x) * x \approx 1$$

Pues si I' también satisface estas identidades en un monoide $\boldsymbol{M}$ entonces para cada $m \in M$ se tiene lo siguiente.

$$I'(m) = I'(m) * 1 = I'(m) * (m * I(m)) = \\ (I'(m) * m) * I(m) = 1 * I(m) = I(m)$$

Es claro que esta operación existe en un monoide si y solo si éste es un grupo.

Ejemplo 2. Un retículo acotado es un conjunto ordenado R con máximo 1 y mínimo 0 en el cual cada par de elementos a, b posee extremo superior $a \vee b$ y extremo inferior $a \wedge b$. Esta estructura puede verse como un álgebra $(R; \wedge, \vee, 0, 1)$ que valida ciertas identidades. En esta clase de álgebras puede definirse implícitamente una operación unaria N mediante las identidades siguientes.

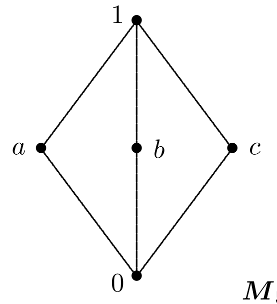
$$x \wedge N(x) \approx 0$$
$$x \wedge N(x \wedge y) \approx x \wedge N(y)$$
$$N(0) \approx 1$$

Se verifica que en un retículo $\boldsymbol{R}$ donde existe esta operación, para cada $x \in R$ se tiene la igualdad siguiente.

$$N^{\boldsymbol{R}}(x) = max\{\, r \in R \mid r \wedge x = 0 \,\}$$

Puesto que el máximo de un subconjunto ordenado (cuando existe) es único, la operación $N^{\boldsymbol{R}}$ que satisface las identidades (cuando existe) es única. De hecho, esta operación generaliza el seudocomplemento [3].

La operación N no existe en todos los retículos acotados. Se considera, por ejemplo, el retículo con cinco elementos $\boldsymbol{M}_5$ representado en el diagrama. Para el elemento a se tiene $\{\, r \in M_5 \mid r \wedge a = 0 \,\} = \{\, 0, b, c \,\}$ y este subconjunto no tiene máximo, luego no puede definirse $N^{\boldsymbol{M}_5}(a)$.



$\boldsymbol{M}_5$

En cambio, la operación N sí existe en los conjuntos ordenados acotados *lineales*, donde toma la forma siguiente.

$$N^{\boldsymbol{R}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3. Las identidades siguientes corresponden a los axiomas del cálculo proposicional modal **S5** sin regla de necesitación.

$$\Box(x \to y) \to (\Box x \to \Box y) \approx 1$$
$$\Box x \to x \approx 1$$
$$\Box\Box x \approx \Box x$$
$$\neg\Box\neg x \approx \Box\neg\Box\neg x$$

Estas identidades no definen implícitamente una operación en ninguna clase de álgebras de Heyting que contenga álgebras con más de dos elementos. La función idéntica satisface todas estas identidades y la operación δ definida como sigue también las valida en cualquier álgebra de Heyting.

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En un álgebra de Heyting con más de dos elementos δ es diferente a la función idéntica, luego allí se tienen por lo menos dos operaciones distintas que satisfacen estas identidades.

1.3. **Definiciones explícitas.** En el contexto de las álgebras con cierto tipo, las 'palabras' pueden identificarse con los términos. Esto justifica la convención siguiente.

Definición 2. Una familia de términos $\{t_\nabla\}_{\nabla\in\nu}$ en el vocabulario τ *define explícitamente* la familia de operaciones $\mathcal{N}$ si en cada álgebra $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ donde existe un conjunto de operaciones $\mathcal{N}^{\boldsymbol{A}} = \{\, \nabla^{\boldsymbol{A}} \mid \nabla \in \nu \,\}$, para cada $\nabla \in \nu$ se tiene $\nabla^{\boldsymbol{A}} = t_\nabla^{\boldsymbol{A}}$.

Aquí cabe destacar que cualquier familia explícita de operaciones es *compatible* con todas las congruencias, que son relaciones de equivalencia a su vez compatibles con las operaciones básicas del álgebra. También es claro que el universo de cualquier *subálgebra* es un subconjunto cerrado bajo toda familia explícita de operaciones.

Ejemplo 4. La operación implícita I definida en la clase de los monoides (Ejemplo 1) no es explícita. Si bien puede verificarse que sí es compatible, la operación I existe en el monoide aditivo de los enteros donde el subconjunto de los enteros no negativos es una subálgebra que no es cerrada bajo I.

Ejemplo 5. La operación N definida en la clase de los retículos (Ejemplo 2) no es explícita pues no es compatible. En el retículo acotado con tres elementos $(0 < a < 1)$, la relación de equivalencia θ que identifica solamente los elementos 0 y a es una congruencia y $0\,\theta\,a$ pero no se tiene $N(0)\,\theta\,N(a)$.

Si esta operación N se considera en la subclase de las álgebras de Heyting entonces sí resulta explícita. Con precisión, en cualquier álgebra de Heyting $\boldsymbol{H}$ donde existe N se tiene lo siguiente para cada $x \in H$.

$$N^{\boldsymbol{H}}(x) = x \to 0$$

En efecto, para cada $a, b \in H$ es $a \leq N(b)$ si y solo si $a \wedge b = 0$. Pero esto se tiene si y solo si $a \wedge b \leq 0$ y, tratándose de un álgebra de Heyting, esto sucede si y solo si $a \leq b \to 0$. Además la operación N existe en todas las álgebras de Heyting.

Los ejemplos muestran que en algunas clases de álgebras existen operaciones implícitas que no son explícitas, en otras palabras, es posible definir algebraicamente operaciones *nuevas*. Esto ilustra el interrogante central planteado en este trabajo en el contexto de las cuasivariedades, si bien la mayoría de los casos particulares estudiados son variedades.

Pregunta 1. *¿En qué cuasivariedades toda familia compatible de operaciones definida implícitamente por cuasi-identidades está definida explícitamente por términos?*

Por supuesto, se pueden formular diversas variantes de este problema.

Pregunta 2. *¿En qué cuasivariedades toda familia implícita de operaciones es compatible? ¿En qué cuasivariedades toda familia implícita de operaciones es un término?*

En la investigación presente se da una respuesta a la siguiente pregunta subalterna.

Pregunta 3. *¿Bajo qué condiciones sobre la cuasivariedad y sobre las operaciones, una familia compatible implícita de operaciones está definida explícitamente por términos?*

2. Antecedentes

2.1. **El problema de los conectivos nuevos.** Cuando se establece que cierta operación implícita no es explícita, se está en presencia de una auténtica operación nueva. Esta observación ubica el problema planteado aquí en la línea de las investigaciones alrededor de los *conectivos nuevos* [15]. Una primera versión de este problema se presenta como sigue [7].

> En contraste con el caso de la lógica clásica, cuyos conectivos proposicionales fundamentales $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ forman un sistema funcionalmente completo, en la lógica intuicionista pueden darse nuevos conectivos no reducibles a los tradicionales.

El problema más general es el siguiente. ¿Existen en una lógica dada conectivos nuevos, esto es, conectivos que no son combinación de los fundamentales?

Una primera línea de trabajo sobre este problema la inició Caicedo buscando conjuntos completos de conectivos para la lógica proposicional intuicionista [7, 8]. Una segunda línea de investigación está más dirigida al álgebra universal y parte de la observación siguiente. En la lógica de los haces sobre un espacio topológico, que es una semántica para la lógica intuicionista, un conectivo puede verse como una operación en el conjunto de los abiertos del espacio. Resulta bastante natural generalizar esta idea y considerar, desde un punto de vista algebraico, operaciones nuevas en álgebras de Heyting.

Esta segunda línea se inicia con un artículo de Caicedo y Cignoli [9], limitado al contexto de las álgebras de Heyting. Los autores dan una caracterización algebraica de las operaciones compatibles en álgebras de Heyting y a continuación definen que un conjunto de identidades en el lenguaje de las álgebras de Heyting enriquecido con un símbolo f *define implícitamente* una operación f si en cada álgebra de Heyting $\boldsymbol{H}$ existe a lo más una función $f^{\boldsymbol{H}}$ que satisface las identidades. Por el teorema de Beth tal función es una fórmula de primer orden con términos en el lenguaje de las álgebras de Heyting, pero no necesariamente *es un término* como se ilustra con varios ejemplos. El siguiente es un resultado central del artículo mencionado.

Teorema 2. [9, Corollary 3.2] *Una operación compatible definida implícitamente por identidades en las álgebras de Heyting es definible explícitamente mediante un término de las álgebras de Heyting si y solo si la clase de todas las álgebras donde ella existe es cerrada bajo subálgebras.*

Este trabajo a su vez se generaliza con bastante naturalidad de las álgebras de Heyting al contexto más general de las lógicas algebrizables. La teoría de las lógicas algebrizables, que ocupa un lugar importante en el álgebra universal, es un nítido puente entre la lógica y el álgebra. Su objetivo consiste en establecer una correspondencia precisa entre lógicas a un lado y estructuras algebraicas al otro, generalizando la conocida correspondencia entre el cálculo proposicional clásico y las álgebras booleanas. Esta relación fue estudiada inicialmente por Lindenbaum y Tarski y luego fue sistematizada por Blok y Pigozzi [4].

En el trabajo [10], Caicedo realiza la generalización mencionada. Dada una lógica algebrizable $\mathcal{L}$, una extensión $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{L}$ mediante axiomas y reglas *define implícitamente* la familia $\mathcal{C}$ de conectivos nuevos si para cada $\nabla \in \mathcal{C}$ se tiene lo siguiente, donde $\mathcal{C}'$ es una copia disyunta de $\mathcal{C}$.

$$\underset{\mathcal{L}(\mathcal{C})\cup\mathcal{L}(\mathcal{C}')}{\vdash} \nabla(\mathbf{p}) \leftrightarrow \nabla'(\mathbf{p})$$

En primer lugar se tiene el siguiente hecho.

Teorema 3. [10, Theorem 1] *Una extensión $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ de una lógica algebrizable $\mathcal{L}$ que define implícitamente la familia de conectivos $\mathcal{C}$ es algebrizable mediante los mismos sistemas que $\mathcal{L}$.*

La cuasivariedad correspondiente al sistema deductivo extendido consiste en las álgebras con operaciones añadidas que satisfacen las cuasi-identidades correspondientes a las reglas adicionales. Estas operaciones no necesariamente existen en todas las álgebras pero están determinadas de manera única donde existen. Un conectivo ∇ definido implícitamente por una extensión $\mathcal{L}(\nabla)$ de $\mathcal{L}$ *está definido explícitamente* por un término θ de $\mathcal{L}$ si se satisfacen las siguientes condiciones equivalentes.

$$\models_{\mathsf{Q}(\mathcal{L}(\nabla))} \theta(\boldsymbol{p}) \approx \nabla(\boldsymbol{p}) \qquad\qquad \vdash_{\mathcal{L}(\nabla)} \theta(\boldsymbol{p}) \leftrightarrow \nabla(\boldsymbol{p})$$

Claramente esto implica que el conectivo ∇ es compatible. Más aún, Caicedo generaliza el teorema citado arriba.

Teorema 4. [10, Theorem 6] *Sea $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ una extensión esencialmente axiomática de una lógica algebrizable $\mathcal{L}$ que define implícitamente la familia de conectivos $\mathcal{C}$. Todos los conectivos $\nabla \in \mathcal{C}$ están definidos explícitamente por términos de $\mathcal{L}$ si y solo si la clase de todas las álgebras de Q donde existen es cerrada bajo subálgebras.*

Resulta evidente que el problema planteado en las secciones precedentes de este artículo encuentra una motivación fuerte en estas investigaciones, de hecho varios conceptos y resultados son generalización directa de los presentados en esos dos artículos.

2.2. **La propuesta de Németi.** Si se hace una lectura del teorema de Beth *proposicional* en las álgebras booleanas, vistas como semántica algebraica del cálculo proposicional clásico, se obtiene la siguiente propuesta de investigación inspirada en una observación de Németi [12].

Sea $\mathcal{L}$ una lógica algebrizable por una cuasivariedad de álgebras Q. Un conjunto Σ de términos en el conjunto de variables proposicionales $P \cup R$ *define implícitamente* el conjunto R si para cada copia Σ' obtenida de Σ cambiando R por el conjunto $R' = \{\, r' \mid r \in R \,\}$ disyunto con P y R, para cada $r \in R$

valen las siguientes condiciones equivalentes.

$$\{\,\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)\,\}_{\varphi \in \Sigma \cup \Sigma'} \models_{\mathsf{Q}} r \approx r' \qquad\qquad \Sigma \cup \Sigma' \vdash_{\mathcal{L}} r \leftrightarrow r'$$

Por otro lado, Σ *define explícitamente* a R si para cada $r \in R$ existe φ_r que valida las siguientes condiciones equivalentes.

$$\{\,\delta(\sigma) \approx \epsilon(\sigma)\,\}_{\sigma \in \Sigma} \models_{\mathsf{Q}} \varphi_r \approx r \qquad\qquad \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_r \leftrightarrow r$$

Finalmente, la lógica algebrizable $\mathcal{L}$ tiene la *propiedad de la definibilidad de Beth* si para cada Σ, P y R, si Σ define implícitamente a R entonces lo define explícitamente.

El contraste del enfoque de Németi con la perspectiva de Caicedo [10] es sutil y reside en que en esta última se añaden axiomas a la lógica que, como es bien sabido, no son solo ciertas fórmulas sino esquemas cuyas letras pueden sustituirse por fórmulas arbitrarias. En la versión algebraica de esa perspectiva, adoptada en [16], también se refleja esa diferencia con el enfoque de Németi pues en vez de tomar como premisas ciertos términos, se escogen identidades que son la clausura universal de la igualdad de dos términos. Por supuesto, esta diferencia se refleja en los resultados.

2.3. **Completitud funcional en álgebra universal.** El planteamiento puramente algebraico del problema de la definibilidad implícita establece una conexión evidente con las investigaciones alrededor de la completez funcional, que también constituyen un capítulo bastante desarrollado del álgebra universal [13].

En esta teoría, por ejemplo, un álgebra es *primal* si toda operación con al menos un argumento es un término y es *primal en congruencias* si toda operación compatible es un término. Como caso particular importante puede citarse que el álgebra booleana con dos elementos es primal. Estas definiciones se extienden de manera natural a las clases de álgebras.

Es bien claro que en una clase de álgebras primal toda familia implícita de operaciones es explícita, y que en una clase primal en congruencias toda familia implícita compatible de operaciones es explícita. No puede pensarse en las implicaciones recíprocas porque para la primalidad se requieren todas las operaciones, no solo las definibles implícitamente por cuasi-identidades. Esta diferencia también se refleja con claridad en los resultados obtenidos con los dos enfoques.

3. Resultados

3.1. **Teoría.** Uno de los primeros resultados fuertes del álgebra universal establece que una clase de álgebras está axiomatizada por identidades si y solo si es cerrada bajo isomorfismos, imágenes homomorfas o cocientes, productos y subálgebras [5]. Ese hecho fundamental marca la importancia de estas cuatro construcciones.

Respecto a las familias de operaciones definidas implícitamente por cuasi-identidades, se tiene lo siguiente.

- Conmutan con isomorfismos
- Son estables bajo productos reducidos (y, por tanto, bajo productos y bajo ultraproductos)

Acerca de los cocientes, puede decirse algo pero con fuertes restricciones.

- Una familia definida implícitamente por *identidades* conmuta con cocientes si y solo si es *compatible*

Finalmente, como se observó en los ejemplos, las subálgebras en general no son cerradas bajo operaciones implícitas.

En cuanto a las familias de operaciones implícitas que están definidas explícitamente por términos, los resultados son mucho mejores.

- Conmutan con isomorfismos
- Son estables bajo productos reducidos
- Conmutan con cocientes (si están definidas por identidades)
- Toda subálgebra es cerrada

Estos hechos tienen la siguiente consecuencia inmediata.

Teorema 5. *En una cuasivariedad* Q*, sea* $\mathcal{N}$ *una familia de operaciones definida implícitamente por un conjunto de cuasi-identidades* $\mathcal{C}(\nu)$ *y sea* $\mathsf{G} \subseteq \mathsf{Q}$ *alguna clase de álgebras tales que* $\mathsf{Q} = ISP_R(\mathsf{G})$*. Si la familia* $\mathcal{N}$ *existe en todas las álgebras de* G *y está definida explícitamente en ellas por una misma familia de términos* $\{t_\nabla\}_{\nabla \in \nu}$*, entonces* $\mathcal{N}$ *existe en todas las álgebras de* Q *y está definida explícitamente por la familia* $\{t_\nabla\}_{\nabla \in \nu}$*.*

Con algo más de trabajo puede probarse una generalización de los resultados obtenidos en álgebras de Heyting y en álgebras correspondientes a lógicas algebrizables. En el enunciado siguiente, para mostrar que (c) implica (a) se sigue el mismo argumento que en [10, Theorem 6] empleando las álgebras libres y el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski [1].

Teorema 6. *En una cuasivariedad* Q*, para una familia de operaciones* $\mathcal{N}$ *definida implícitamente por identidades las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) $\mathcal{N}$ *está definida explícitamente por términos*
b) $\mathcal{N}$ *es* Q*-compatible y la clase de álgebras de* Q *donde existe es cerrada bajo subálgebras*
c) $\mathcal{N}$ *es* Q*-compatible y la clase de álgebras donde existe es una subcuasivariedad de* Q

Este resultado inspira la búsqueda de subálgebras cerradas bajo las operaciones implícitas. Entre los hallazgos hechos al respecto pueden destacarse los siguientes.

- Los puntos fijos de un automorfismo constituyen una subálgebra cerrada bajo cualquier familia de operaciones definida implícitamente por cuasi-identidades
- Los puntos fijos de un endomorfismo sobreyectivo constituyen una subálgebra cerrada bajo cualquier familia compatible de operaciones definida implícitamente por identidades

3.2. **Estudios de caso.**

3.2.1. *Álgebras booleanas y álgebras de Heyting.* En la variedad de las álgebras de Heyting existe una multitud de operaciones implícitas que no son explícitas y, en contraste, en la subvariedad de las álgebras booleanas no puede definirse ninguna. La prueba del siguiente resultado emplea la teoría de las álgebras booleanas sin átomos, que es completa y tiene eliminación total de cuantificadores.

Teorema 7. *En la variedad de las álgebras booleanas, toda familia de operaciones definida implícitamente por cuasi-identidades está definida explícitamente por términos.*

En el contexto más amplio de las álgebras de Heyting, si una familia implícita de operaciones es compatible y existe en un álgebra no trivial entonces también existe en la de dos elementos. Pero esta es un álgebra booleana que además genera toda la subvariedad de estas álgebras, lo cual permite concluir los hechos siguientes.

Teorema 8. *En la variedad de las álgebras de Heyting, sea $\mathcal{N}$ una familia compatible de operaciones definidas implícitamente por identidades y supóngase que $\mathcal{N}$ existe en algún álgebra no trivial.*

(1) *La familia $\mathcal{N}$ existe en todas las álgebras booleanas y está definida explícitamente por términos en esa subvariedad*
(2) *La familia $\neg\neg\mathcal{N} = \{ \neg\neg\nabla \}_{\nabla\in\nu}$ está definida explícitamente por términos en la variedad de las álgebras de Heyting*

Lo que sigue es el estudio algebraico de algunos ejemplos de operaciones implícitas en álgebras de Heyting, consideradas antes por otros autores en contextos diferentes [7, 9, 10].

En un álgebra de Heyting, un elemento es *denso* si tiene la forma $a \vee \neg a$ y, en general, es x-denso si tiene la forma $a \vee (a \to x)$. El mínimo elemento x-denso, denotado (si existe) como $S(x)$, puede caracterizarse mediante las identidades siguientes. Como el mínimo de un subconjunto (cuando existe) es único, estas identidades definen una operación implícita unaria S en la variedad de las álgebras de Heyting.

$$(S(x) \to x) \to S(x) \approx 1$$
$$S(x) \to (y \vee (y \to x)) \approx 1$$

La operación S es compatible y no está definida por ningún término en álgebras de Heyting.

Las siguientes familias de operaciones, que en las álgebras adecuadas se derivan de la operación S, son todas ejemplos de familias implícitas compatibles que no son explícitas.

- La operación constante d_1

$$\neg d_1 \approx 0$$
$$d_1 \to (x \vee \neg x) \approx 1$$

En las álgebras donde existe S es $d_1 = S(0)$

- La familia de constantes $\{d_1, d_2\}$

$$\neg d_1 \approx 0$$
$$(d_2 \to d_1) \to d_2 \approx 1$$
$$d_1 \to (x \vee \neg x) \approx 1$$
$$d_2 \to (x \vee (x \to d_1)) \approx 1$$

En las álgebras donde existe S es $d_1 = S(0)$, $d_2 = SS(0)$

- La operación γ con un argumento

$$\neg\gamma(0) \approx 0$$
$$\gamma(0) \to (x \vee \neg x) \approx 1$$
$$\gamma(x) \approx x \vee \gamma(0)$$

En las álgebras donde existe S es $\gamma(x) = x \vee S(0)$

- La operación G con un argumento

$$x \to G(x) \approx 1$$
$$G(x) \to \neg\neg x \approx 1$$
$$G(x) \to (y \vee (y \to x)) \approx 1$$
$$(G(x) \to x) \to (\neg\neg x \to x) \approx 1$$

En las álgebras donde existe S es $G(x) = S(x) \wedge \neg\neg x$ y en las álgebras donde existen G y d_1 es $S(x) = d_1 \vee G(x)$

3.2.2. *Módulos.* En la variedad completa de los módulos el resultado sobre la definibilidad explícita de operaciones implícitas es positivo, pero está sujeto a condiciones que se pueden eliminar en subvariedades adecuadas.

Salvo que se indique lo contrario, $\boldsymbol{R}$ es un anillo arbitrario. Para cualquier $\boldsymbol{R}$-módulo $\boldsymbol{M}$ la función $(x, y) \mapsto (x + y, y)$ es un automorfismo de $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$, hecho que arroja el siguiente resultado.

Teorema 9. *En la variedad de los $\boldsymbol{R}$-módulos, sea $\mathcal{N}$ una familia de operaciones definida implícitamente por un conjunto de cuasi-identidades $\mathcal{C}(\nu)$. Para cualquier $\boldsymbol{R}$-módulo $\boldsymbol{M}$ donde existe $\mathcal{N}$ todas las funciones $\nabla^{\boldsymbol{M}}$ con $\nabla \in \nu$ son homomorfismos de grupos abelianos.*

Este resultado puede mejorarse cuando el anillo $\boldsymbol{R}$ es conmutativo, caso en el cual cada $\nabla^{\boldsymbol{M}}$ resulta lineal.

Aun en el caso de un anillo arbitrario $\boldsymbol{R}$, el Teorema 9 entraña la clausura de cualquier submódulo bajo una familia implícita compatible. Porque si $x_1, \ldots, x_n$ son elementos de un submódulo $\boldsymbol{S}$ de un módulo donde existe la familia entonces $x_i \,\theta\, 0$ para la congruencia θ asociada a $\boldsymbol{S}$, de donde resulta $\nabla(x_1, \ldots, x_n)\,\theta \nabla(0, \ldots, 0)$ para cada integrante ∇ de la familia por ser esta compatible. Ahora por el Teorema 9 se sigue $\nabla(0, \ldots, 0) = 0$, así que $\nabla(x_1, \ldots, x_n)\,\theta 0$, es decir, $\nabla(x_1, \ldots, x_n) \in S$.

Afirmación 1. *En la variedad de los $\boldsymbol{R}$-módulos, sea $\mathcal{N}$ una familia de operaciones definida implícitamente por un conjunto de cuasi-identidades. Si la familia es compatible entonces en cada $\boldsymbol{R}$-módulo donde existe, todos los submódulos son cerrados bajo $\mathcal{N}$.*

De esta Afirmación 1 junto con los resultados enunciados en 3.1 se obtiene de inmediato lo siguiente.

Teorema 10. *En la variedad de los $\boldsymbol{R}$-módulos, toda familia compatible de operaciones definida implícitamente por identidades está definida explícitamente por términos.*

En particular este resultado vale para:

- Grupos abelianos
- Grupos booleanos
- Espacios vectoriales sobre un campo

En el último caso, el resultado puede mejorarse pues también vale para operaciones definidas por cuasi-identidades. En efecto, una familia compatible de operaciones existente en un espacio vectorial no trivial se restringe a cualquier subespacio de dimensión 1, que es isomorfo al campo. Siendo lineal, la familia se expresa mediante términos en el campo y esta definición explícita se extiende a todos los espacios vectoriales sobre el campo.

Teorema 11. *En la variedad de los espacios vectoriales sobre un campo, toda familia compatible de operaciones definida implícitamente por cuasi-identidades está definida explícitamente por términos.*

En lo que resta de este apartado 3.2.2, el anillo considerado es un dominio de integridad y se denota $\boldsymbol{D}$.

Dado $\rho \in D - \{0\}$, las identidades siguientes definen implícitamente una operación unaria D_ρ en la variedad de los $\boldsymbol{D}$-módulos.

$$\rho \cdot D_\rho(x) \approx x$$
$$D_\rho(\rho \cdot x) \approx x$$

Pues si en un $\boldsymbol{D}$-módulo también existe una operación E que valida estas identidades entonces se tiene lo siguiente para cada vector a.

$$E(a) = E\left(\rho \cdot D_\rho(a)\right) = D_\rho(a)$$

Esta familia de operaciones no es compatible, como se observa de inmediato en el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$.

Los $\boldsymbol{D}$-módulos *con operadores de división* son aquellos en los cuales existe la familia implícita $\{D_\rho\}$. La clase de todos los módulos con operadores de división es exactamente la variedad de los espacios vectoriales sobre el campo de cocientes de $\boldsymbol{D}$.

Para cualquier $\boldsymbol{D}$-módulo $\boldsymbol{M}$ el módulo de fracciones respecto al conjunto multiplicativo $D - \{0\}$, denotado $\boldsymbol{M}_0$, es el 'reflejo divisible' de $\boldsymbol{M}$ en el siguiente sentido.

- $\boldsymbol{M}_0$ es un $\boldsymbol{D}$-módulo con operadores de división
- Existe un homomorfismo $\varphi : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}_0$
- Para cualquier homomorfismo $\psi : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ en un $\boldsymbol{D}$-módulo con operadores de división $\boldsymbol{N}$ existe un único homomorfismo $\overline{\psi} : \boldsymbol{M}_0 \to \boldsymbol{N}$ tal que $\overline{\psi}\varphi = \psi$.

Por tanto, para cada operación lineal f en $\boldsymbol{M}$ existe una única operación lineal f_0 en $\boldsymbol{M}_0$ que satisface la igualdad siguiente para todo $x_i \in M$.

$$f_0\left(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)\right) = \varphi\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$$

Ahora una verificación técnica directa prueba el resultado siguiente.

Afirmación 2. *Sean ν un conjunto de símbolos funcionales y $F = \{f_\nabla\}_{\nabla \in \nu}$ una familia de operaciones lineales en el $\boldsymbol{D}$-módulo sin torsión $\boldsymbol{M}$, cada f_∇ con el mismo número de argumentos que ∇. La familia de operaciones $F_0 = \{\,(f_\nabla)_0\,\}_{\nabla \in \nu}$ satisface en el módulo de fracciones $\boldsymbol{M}_0$ todas las identidades y* *las cuasi-identidades en el vocabulario* $\nu \cup \{+, -, 0, \cdot_\alpha\}_{\alpha \in D}$ *satisfechas por* F *en* $\boldsymbol{M}$.

La siguiente es una consecuencia inmediata de este hecho.

Afirmación 3. *Sea* $\mathcal{N}$ *una familia de operaciones definida implícitamente en la variedad de los módulos sobre* $\boldsymbol{D}$. *Si* $\mathcal{N}$ *existe en un* $\boldsymbol{D}$*-módulo sin torsión* $\boldsymbol{M}$ *entonces también existe en el módulo de fracciones* $\boldsymbol{M}_0$.

Como el módulo $\boldsymbol{M}$ no es de torsión, el módulo de fracciones $\boldsymbol{M}_0$ no es trivial. Si además el dominio $\boldsymbol{D}$ es infinito entonces su campo de cocientes también lo es y $\boldsymbol{M}_0$ resulta ser un espacio vectorial infinito. Puesto que la teoría de tales espacios es completa, la existencia de una familia implícita $\mathcal{N}$ en el módulo $\boldsymbol{M}_0$ implica su existencia en todos los espacios no triviales. Más aún, como en ese caso la familia existe y es lineal en el campo, su expresión mediante términos allí se extiende a todos los módulos con operadores de división.

Teorema 12. *En la variedad de los* $\boldsymbol{D}$*-módulos sobre un dominio de integridad* infinito $\boldsymbol{D}$, *sea* $\mathcal{N}$ *una familia de operaciones definida implícitamente por cuasi-identidades y supóngase que* $\mathcal{N}$ *existe en algún* $\boldsymbol{D}$*-módulo sin torsión.*

(1) *La familia* $\mathcal{N}$ *existe en todos los* $\boldsymbol{D}$*-módulos con operadores de división.*
(2) *Si en la subvariedad de los* $\boldsymbol{D}$*-módulos con operadores de división se incluyen estos operadores en el tipo de las álgebras entonces allí la familia* $\mathcal{N}$ *está definida explícitamente por términos.*

Como un campo infinito puede verse como el campo de cocientes de un dominio infinito, el resultado anterior se especializa en el siguiente.

Teorema 13. *En la variedad de los espacios vectoriales sobre un campo infinito, toda familia de operaciones definida implícitamente por cuasi-identidades está definida explícitamente por términos.*

En particular, en la variedad de los grupos abelianos divisibles sin torsión toda familia de operaciones definida implícitamente es explícita.

3.2.3. *Grupos.* De la variedad de los grupos abelianos es natural pasar a la de los grupos arbitrarios, pero allí la no-conmutatividad resulta ser un obstáculo formidable para garantizar la definibilidad explícita de las operaciones implícitas.

En la búsqueda de subgrupos cerrados bajo familias de operaciones implícitas primero se encuentran los puntos fijos de los automorfismos internos $x \mapsto gxg^{-1}$ y sus intersecciones.

Afirmación 4. *En la variedad de los grupos, sea $\mathcal{N}$ una familia de operaciones definida implícitamente por cuasi-identidades y sea $\boldsymbol{G}$ un grupo donde ella existe.*

(1) *Para cada elemento $g \in G$ el centralizador de g, definido como $C_g = \{\, x \in G \mid gx = xg \,\}$, es un subgrupo de $\boldsymbol{G}$ cerrado bajo $\mathcal{N}^{\boldsymbol{G}}$*
(2) *Para cada subconjunto $A \subseteq G$ el centralizador de A, definido como $C_A = \{\, x \in G \mid ax = xa$ para cada $a \in A \,\}$, es un subgrupo de $\boldsymbol{G}$ cerrado bajo $\mathcal{N}^{\boldsymbol{G}}$*
(3) *El centro $Z(\boldsymbol{G})$ del grupo $\boldsymbol{G}$ es un subgrupo cerrado bajo $\mathcal{N}^{\boldsymbol{G}}$*

La función biyectiva definida en el grupo producto $\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G}$ como $(x, y) \mapsto (xy, y)$ no es, en general, un automorfismo (a menos que el grupo $\boldsymbol{G}$ sea abeliano) pero sí lo es siempre en el producto $\boldsymbol{G} \times Z(\boldsymbol{G})$. Dada una familia implícita que existe en $\boldsymbol{G}$, por la Afirmación 4 también existe en $\boldsymbol{G} \times Z(\boldsymbol{G})$ luego allí conmuta con este automorfismo. Lo cual arroja el hecho siguiente.

Afirmación 5. *En la variedad de los grupos, sea $\mathcal{N}$ una familia de operaciones definida implícitamente por un conjunto de cuasi-identidades $\mathcal{C}(\nu)$ y sea $\boldsymbol{G}$ un grupo donde ella existe. Para cada $\nabla \in \nu$ se tiene lo siguiente.*

$$\nabla^{\boldsymbol{G}}(e, e, \ldots, e) = e$$

Ahora siguiendo el mismo argumento que en la variedad de los módulos se obtiene el resultado siguiente.

Teorema 14. *En la variedad de los grupos, sea $\mathcal{N}$ una familia compatible de operaciones definida implícitamente por cuasi-identidades y sea $\boldsymbol{G}$ un grupo donde ella existe. Todo subgrupo normal de $\boldsymbol{G}$ es cerrado bajo $\mathcal{N}$, más aún, la familia de subgrupos de $\boldsymbol{G}$ cerrados bajo $\mathcal{N}$ es cerrada bajo subgrupos normales.*

Se observa que un subgrupo $\boldsymbol{A}$ de un grupo cualquiera es abeliano si y solo si está contenido en su centralizador, esto es $A \subseteq C_A$, y en este caso además $\boldsymbol{A}$ es un subgrupo normal de C_A. Como C_A es cerrado bajo toda familia compatible, el Teorema 14 entraña la clausura de otra familia importante de subgrupos.

Afirmación 6. *En la variedad de los grupos, sea $\mathcal{N}$ una familia compatible de operaciones definida implícitamente por cuasi-identidades y sea $\boldsymbol{G}$ un grupo donde ella existe. Todo subgrupo abeliano de $\boldsymbol{G}$ es cerrado bajo $\mathcal{N}^{\boldsymbol{G}}$, en particular todo subgrupo cíclico de $\boldsymbol{G}$ es cerrado bajo $\mathcal{N}^{\boldsymbol{G}}$.*

Si ∇ es una operación implícita con un solo argumento y $\boldsymbol{S}$ es cualquier subgrupo de un grupo donde ella existe, para cada $g \in S$ por la Afirmación 6 se tiene $\nabla(g) \in \langle g \rangle$. Pero $\langle g \rangle \subseteq S$ luego este subgrupo es cerrado bajo ∇.

Teorema 15. *En la variedad de los grupos, toda familia compatible de operaciones con un solo argumento definida implícitamente por identidades está definida explícitamente por términos.*

Síntesis. Los resultados obtenidos en esta sección pueden resumirse como sigue.

- Variedades en las cuales toda familia implícita definida por cuasi-identidades es explícita: **álgebras booleanas**, **espacios vectoriales sobre un campo infinito**
- Variedades en las cuales toda familia implícita *compatible* definida por cuasi-identidades es explícita: **espacios vectoriales sobre un campo arbitrario**, **grupos booleanos**
- Variedades en las cuales toda familia implícita compatible definida por *identidades* es explícita: **módulos sobre un anillo arbitrario**, **grupos abelianos**
- Variedades en las cuales toda familia implícita compatible *con un solo argumento* definida por identidades es explícita: **grupos**
- Variedades en las cuales existen operaciones implícitas compatibles definidas por identidades que *no* son explícitas: **álgebras de Heyting**

3.3. **Problemas abiertos.** En una perspectiva puramente algebraica, queda el problema de estudiar las operaciones implícitas en muchos otros contextos particulares como, por ejemplo, los l-grupos y las MV-álgebras. En el largo plazo estos estudios de caso deberían conducir a establecer condiciones suficientes y necesarias sobre una cuasivariedad para que en ella todas las operaciones implícitas sean explícitas.

En la perspectiva lógica de esta investigación también se sugieren problemas interesantes. En la lógica de los módulos, por ejemplo, al añadir la familia de los operadores de división resulta una lógica que carece de extensiones axiomáticas implícitas. ¿Hay extensiones diferentes de la lógica de los módulos con esta misma propiedad, o esa es la máxima? En general, ¿para cualquier lógica existe una extensión máxima o *clausura* para la definibilidad axiomática implícita?

Finalmente, se espera que un transvase del problema al contexto de la teoría de categorías arroje nuevas luces sobre el mismo.

Bibliografía

[1] John L. Bell and Alan B. Slomson, *Models and Ultraproducts: an introduction*. Second revised printing. North-Holland, Amsterdam, 1971.

[2] Evert W. Beth, *On Padoa's method in the theory of definition*. Indagationes Math. **15** (1953) 330–339.

[3] Garrett Birkhoff, *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence (Rhode Island), 1940.

[4] Willem J. Blok and Don Pigozzi, *Algebraizable Logics*. Memoirs of the American Mathematical Society 396. AMS, Providence (Rhode Island), 1989.

[5] Stanley N. Burris and Hantamantagouda P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 78. Springer-Verlag, New York, 1981.

[6] Xavier Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad*. Una Empresa Docente, Bogotá, 1990.

[7] Xavier Caicedo, *Investigaciones acerca de los conectivos intuicionistas*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **XIX** (1995) 705–716.

[8] Xavier Caicedo, *Conectivos intuicionistas sobre espacios topológicos*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **XXI** (1997) 521–534.

[9] Xavier Caicedo and Roberto Cignoli, *An algebraic approach to intuitionistic connectives*. The Journal of Symbolic Logic **66** (2001) 1620–1636.

[10] Xavier Caicedo, *Implicit connectives of algebraizable logics*. Studia Logica **78** (2004) 155–170.

[11] George Grätzer, *On Boolean functions (Notes on lattice theory II)*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **7** (1962) 693–697.

[12] Eva Hoogland, *Algebraic characterizations of various Beth definability properties*. Preprint. ILLC Prepublications, Amsterdam, 1999.

[13] Kalle Kaarli and Alden F. Pixley, *Polynomial Completeness in Algebraic Systems*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

[14] Saunders MacLane and Garrett Birkhoff, *Algebra*. Macmillan, Toronto, 1967.

[15] Arnold Oostra, *Una mirada al problema de los conectivos nuevos*. Boletín de Matemáticas - Nueva Serie **12** (2005) 81–97.

[16] Arnold Oostra, *Operaciones implícitas en variedades ecuacionales*. Tesis doctoral. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2006.

[17] Helena Rasiowa, *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. North-Holland, Amsterdam, 1974.

Recibido: Septiembre de 2006. Aceptado para publicación: Noviembre de 2006