Lecturas Matemáticas
Volumen **26** *(2005), páginas 165–170*

Tantrices de lazos en $\mathbb{R}^3$

Óscar Andrés Montaño Carreño
Universidad del Valle, Cali, Colombia

Abstract. A loop in $\mathbb{R}^3$ is a closed regular curve σ. The normalization of the velocity vector $\tau = \dot{\sigma}/|\dot{\sigma}|$ is called the tangent indicatrix or the tantrix of σ. The tantrix is a closed curve in S^2, but not all closed curves in S^2 are the tantrix of some closed curve in $\mathbb{R}^3$. In this paper sufficient and necessary conditions for a closed curve C' in S^2 to be the tantrix of some loop in $\mathbb{R}^3$ are given.

Key words and phrases. Regular curve, tantrix, loop.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. 53A04, 53A05

Resumen. Un lazo en $\mathbb{R}^3$ es una curva cerrada regular σ. La normalización del vector velocidad $\tau = \dot{\sigma}/|\dot{\sigma}|$ se denomina tangente indicatriz o tantriz de σ. La tantriz de una curva cerrada en $\mathbb{R}^3$ es una curva cerrada en S^2, pero no siempre una curva cerrada en S^2 es la tantriz de una curva cerrada en $\mathbb{R}^3$. Se darán condiciones necesarias y suficientes para que una curva cerrada C' en S^2 sea la tantriz de un lazo en $\mathbb{R}^3$.

1. Introducción

En una charla dada en Sussex en el año 1966 H. Steinhaus conjeturó que cualquier curva regular en $\mathbb{R}^3$ debe contener al menos dos puntos en los cuales los vectores tangentes tienen la misma dirección pero sentidos opuestos. En el año 1968 B. Segre [2] publicó un contraejemplo en $\mathbb{R}^3$ y demostró que la conjetura es cierta para lazos regulares sobre elipsoides y paraboloides. Si σ es un curva cerrada regular sobre $\mathbb{R}^3$, su tantriz $\tau = \dot{\sigma}/|\dot{\sigma}|$ es una curva cerrada sobre S^2. Por lo tanto, si una curva τ sobre S^2 no contiene puntos antipodales y es la tantriz de un lazo σ, entonces la conjetura de Steinhaus no es cierta. Se hace necesario responder la pregunta: ¿Cuándo una curva cerrada sobre S^2 es la tantriz de un lazo en $\mathbb{R}^3$? Daremos respuesta a este interrogante sustituyendo en el artículo de J. R. Porter [1] argumentos intuitivos por definiciones y demostraciones precisas.

2. Preliminares

Sea σ un lazo en $\mathbb{R}^3$ parametrizado por longitud de arco s,

$$\sigma(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \ ,$$

$0 \leq s \leq \check{s}$. La tantriz τ es $\tau(s) = (\tau_1(s), \tau_2(s), \tau_3(s)) = \dot{\sigma}(s)$. Si integramos cada una de las componentes de τ se tiene

$$\int_0^{\check{s}} \tau_i(s) ds = 0. \tag{2.1}$$

Por lo tanto para cualquier vector $\nu \in S^2$

$$\int_0^{\check{s}} \nu \cdot \tau(s) ds = 0. \tag{2.2}$$

Lemma. *La condición* (2,2) *implica la siguiente condición:* (2,3) *La tantriz τ de un lazo σ en $\mathbb{R}^3$ ó es un círculo máximo de S^2 o contiene puntos en cualquier par de hemisferios en los que se divida a S^2.*

Demostración. Si $\nu \cdot \tau(t) \equiv 0$ para algún $\nu \in S^2$ entonces τ es un círculo máximo. Si $\nu \cdot \tau(t)$ no es identicamente cero para todo $\nu \in S^2$, entonces por la condición (2.2) $\nu \cdot \tau(t)$ debe cambiar de signo, y por lo tanto τ debe contener puntos a lado y lado de el plano que pasa por el origen y que tiene a ν como vector normal. ☑

Demostraremos que la condición (2.3) también es una condición suficiente para que un lazo $\tau \in S^2$ sea la tantriz de un lazo en $\mathbb{R}^3$.

Sea τ una curva cerrada sobre S^2 con $0 \leq t \leq \check{t}$. Definamos σ como

$$\sigma(t) = \int_0^t \tau(s) ds \,, \quad 0 \leq t \leq \check{t} \tag{2.4}$$

La curva σ así definida tiene como tantriz a τ, pero no necesariamente es cerrada. Si τ satisface la condición (2.3) se demostrará que existe una sucesión de curvas con tantriz τ que convergen a un lazo cerrado en $\mathbb{R}^3$.

En lo que sigue, τ es una parametrización de una curva cerrada C' sobre S^2 que satisface la condición (2.3) y con $0 \leq t \leq 1$.

Suponiendo que C' no es un círculo máximo, dado cualquier círculo máximo ζ sobre S^2 la condición (2.3) implica que C' tiene puntos en los dos hemisferios $H_1(\zeta)$ y $H_2(\zeta)$ con borde común ζ. Existe por lo tanto una distancia angular máxima de puntos de $C' \cap H_1(\zeta)$ a ζ y una distancia angular máxima de puntos de $C' \cap H_2(\zeta)$ a ζ. Sea $m(\zeta)$ el mínimo para las dos distancias. Llamaremos δ al mínimo de los $m(\zeta)$ tomado sobre todos los círculos máximos ζ de S^2. Formalmente:

Definición 2.1. La mínima desviación angular está definida por $\delta =: \pi/2 - \phi$, donde

$$\cos\phi = \min_{\nu \in S^2} \max_{0 \le t \le 1} \tau(t) \cdot \nu. \tag{2.5}$$

Observación. Si $\delta = 0$ entonces τ es un círculo máximo.

Definición 2.2. Sea $\sigma(t) = \int_0^t \tau(s)ds,\ 0 \le t \le 1$. La desviación $\rho_{\sigma,\tau}$ está definida por

$$\rho_{\sigma,\tau} = |\sigma(1)|\,.$$

Observación. Si $\rho_{\sigma,\tau} = 0$ entonces la curva es cerrada.

3. Resultados previos

Lema. *Sea C' la gráfica de una curva cerrada sobre S^2 que satisface la condición* (2,3). *Sea P el conjunto de todas las parametrizaciones τ de esta curva con $0 \le t \le 1$. Si $G = \inf_P \rho_{\sigma,\tau}$, entonces $G = 0$.*

Observación. Puesto que σ tiene longitud uno, entonces $\rho_{\sigma,\tau} \in [0,1]$.

Demostración. Sea $G > 0$. Para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar τ_0 tal que $\rho_{\sigma_0,\tau_0} - G < \varepsilon$. Por definición σ_0 es una curva en $\mathbb{R}^3$ con longitud 1. Sea t_1 tal que el ángulo θ_1 entre $\dot\sigma(t_1) = \tau(t_1)$ y $\nu := -\sigma_0(1)$ verifique la desigualdad $0 \le \theta_1 \le \pi/2 - \delta$ (por (2.5) siempre existe t_1).

Para cada $a_1 \in [0,1]$ consideremos la parametrización:

$$\sigma_{1,a_1}(t) = (1-a_1)\sigma_0\left(\frac{t}{1-a_1}\right), \quad \text{si} \quad 0 \le t \le t_1(1-a_1)\,;$$

$$\sigma_{1,a_1}(t) = (1-a_1)\sigma_0(t_1) + a_1\dot{\sigma_0}(t_1)\left(\frac{t - t_1(1-a_1)}{a_1}\right),$$
$$\text{si} \quad t_1(1-a_1) \le t \le t_1(1-a_1) + a_1\,;$$

$$\sigma_{1,a_1}(t) = a_1\dot\sigma_0(t_1) + (1-a_1)\sigma_0\left(\frac{t-a_1}{1-a_1}\right), \text{ si } t_1(1-a_1) + a_1 \le t \le 1\,.$$

Directamente se puede verificar que la tantriz de σ_{1,a_1} es C' para todo $a_1 \in [0,1]$. Se escojerá a_1 de tal manera que $\rho_{\sigma_{1,a_1},\tau_1} < \rho_{\sigma_0,\tau_0}$. Llamaremos a esta parametrización σ_1. Puesto que $\sigma_1(1) = (1-a_1)\sigma_0(1) + a_1\tau_0(t_1)$, de la ley del coseno:

$$\rho^2_{\sigma_1,\tau_1} = [\rho_{\sigma_0,\tau_0}(1-a_1)]^2 + a_1^2 - 2\rho_{\sigma_0,\tau_0}(1-a_1)a_1\cos\theta_1\,, \tag{3.1}$$

el valor mínimo se obtiene en:

$$a_1 = \frac{\rho^2_{\sigma_0,\tau_0} + \rho_{\sigma_0,\tau_0}\cos\theta_1}{\rho^2_{\sigma_0,\tau_0} + 2\rho_{\sigma_0,\tau_0}\cos\theta_1 + 1}\;; \tag{3.2}$$

remplazando en (3.1)

$$\rho^2_{\sigma_1,\tau_1} = \frac{\rho^2_{\sigma_0,\tau_0}(1-\cos^2\theta_1)}{\rho^2_{\sigma_0,\tau_0} + 2\rho_{\sigma_0,\tau_0}\cos\theta_1 + 1} \tag{3.3}$$

la relación anterior implica $\dfrac{\rho^2_{\sigma_1,\tau_1}}{\rho^2_{\sigma_0,\tau_0}} < 1$; por lo tanto, si escojemos

$$\varepsilon < \frac{G(1-\cos\delta)}{\cos\delta}\,,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\rho^2_{\sigma_1,\tau_1} - G^2 &< \frac{\rho^2_{\sigma_0,\tau_0}\cos^2\delta}{\rho^2_{\sigma_0,\tau_0} + 2\rho_{\sigma_0,\tau_0}\cos\theta_1 + 1} - G^2\\
&< \frac{\rho^2_{\sigma_0,\tau_0}\cos^2\delta}{\rho^2_{\sigma_0,\tau_0} + 2\rho_{\sigma_0,\tau_0}\sin\delta + 1} - G^2\\
&< \frac{\rho^2_{\sigma_0,\tau_0}\cos^2\delta(1-\varepsilon^2/(1-\cos\delta)^2) - 2G^2\rho_{\sigma_0,\tau_0}\sin\delta - 1}{\rho^2_{\sigma_0,\tau_0} + 2\rho_{\sigma_0,\tau_0}\sin\delta + 1} < 0
\end{aligned}$$

y la suposición $G > 0$ no es cierta. ☑

Así como de σ_0 construimos σ_1, de σ_1 podemos construir σ_2 y, recurrentemente, es posible construir una sucesión $\{\sigma_i\}$ de lazos en R^3 con tantriz C'.

Si $\rho_i := \rho_{\sigma_i,\tau_i}$, de la relación (3.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_1^2}{\rho_0^2} &= \frac{1-\cos^2(\theta_1)}{\varrho_0^2 + 2\rho_0\cos\theta_1 + 1} < \frac{\cos^2\delta}{\varrho_0^2 + 2\rho_0 sen\delta + 1}\\
&= \frac{\cos^2\delta}{(\rho_0 + sen\delta)^2 + (1 - sen^2(\delta))} < \cos^2\delta\,.
\end{aligned}$$

De aquí que:

$$\left(\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i}\right)^2 < \cos^2\delta\,, \tag{3.4}$$

y

$$\left(\frac{\rho_{i+1}}{\rho_0}\right)^2 < (\cos^2\delta)^{i+1}\,, \tag{3.5}$$

También puesto que

$$\begin{aligned} &a_1 < \rho_0^2 + \rho_0 \quad \text{y} \\ &a_2 < \rho_1^2 + \rho_1 < \rho_0^2\cos^2\delta + \rho_0\cos\delta\,, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \rho_{\sigma_0,\tau_0}^2 \sum_{i=0}^{\infty}(\cos^2\delta)^i + \rho_{\sigma_0,\tau_0}\sum_{i=0}^{\infty}(\cos^2\delta)^{i/2} = \rho_{\sigma_0,\tau_0}^2\frac{1}{\sin^2\delta} + \frac{\rho_{\sigma_0,\tau_0}}{1-\cos\delta}\,. \tag{3.6}$$

4. Teorema Principal

Teorema. *Si C' es una curva cerrada sobre S^2 que satisface la condición* (2,3), *entonces existe un lazo σ en $\mathbb{R}^3$ con tantriz C'.*

Este teorema queda demostrado si encontramos una parametrización $\sigma \in P$ tal que $\rho_{\sigma,\tau} = 0$.

Demostración. Puesto que la serie dada en (3.5) es convergente y todas las σ_i tienen la misma tantriz. Podemos empezar a iterar desde un σ_0 tal que

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} a_i < 1/2\,.$$

Tenemos entonces una sucesión equicontinua de funciones $\{\sigma_i\}$. Aplicando el teorema de Arzelà–Ascoli concluimos que existe una subsucesión la cual converge uniformemente a una parametrización σ. Necesariamente $\rho_{\sigma,\tau} = 0$. Entonces en el caso general existe una menor parametrización de C' tal que $\rho_{\sigma,\tau} = 0$. En el caso especial en el cual C' vive enteramente sobre un círculo máximo ζ, el procedimiento sigue siendo válido puesto que $\sigma_i(1) - \sigma_i(0)$ siempre es un punto de ζ y existen puntos sobre C' que satisfacen las condiciones dadas y que permiten construir σ_{i+1}. ☑

5. Contraejemplo de J. R. Porter a la conjetura de Steinhaus

Consideremos S^2 con el sistema usual de coordenadas $\{\phi, \theta\}$ y definamos C' por la ecuación

$$\phi = \cos 3\theta + 2\,.$$

C' no posee puntos antipodales. En efecto, si (ϕ_1, θ_1) y (ϕ_2, θ_2) fueran antipodales, entonces $\phi_1 + \phi_2 = \pi$ y $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$. La ecuación dada no permite que esto ocurra. Por otro lado si usamos la proyección estereográfica observamos que la curva se mantiene entre una circunferencia dentro del ecuador y otra por fuera del ecuador. Cualquier círculo máximo o es una recta por el origen o contiene dos puntos del ecuador y debe tener puntos fuera del ecuador y dentro del ecuador. El anterior razonamiento implica que la curva dada contiene puntos a lado y lado de cualquier círculo máximo. Se satisface entonces la condición (2.3). Existe por lo tanto un lazo σ en $\mathbb{R}^3$ con tantriz C'. Concluimos que σ contradice la conjetura de Steinhaus.

Bibliografía

[1] J. R. Porter. *A note on regular closed curves in R^3*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **18** (1970), 209-212.

[2] B. Segre. *Global differential properties of closed twisted curves*. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **38** (1968), 256-263.

(Recibido en septiembre de 2005. Aceptado para publicación en diciembre de 2005)

Óscar Andrés Montaño Carreño
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Cali, Colombia.
e-mail: oscaramo@univalle.edu.co