CONJUNTOS DIRIGIDOS SIN ELEMENTOS MAXIMALES. NUEVA VERSIÓN DEL AXIOMA IV DE KURATOWSKI

Joaquín Santisteban Martínez

María Elisa Amo Saus

María Emilia García Pérez

Juan Fco. Ortega Dato

Joaquín Santisteban Martínez es Dr. en Ciencias Matemáticas. María Elisa Amo Saus, María Emilia García Pérez y Juan Ortega Dato son Ldos. en Ciencias Matemáticas. Todos están en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete.

RESUMEN

Siguiendo la línea sobre cualquier tratado de topología, en cuanto al tratamiento de los axiomas de Kuratowski, no puede sernos ajena, la permanente dificultad para su desarrollo, surgida en primer lugar, por la utilización de conjuntos dirigidos con posibles elementos maximales; en segundo lugar, y en parte por la primera causa apuntada, lo complicado que resulta el tratamiento del axioma IV (Teorema del Límite Iterado), pues, siempre se observa como la existencia de la red que el Teorema asegura, se logra mediante la obtención de la misma, cuestión nada elemental.

Nosotros probaremos, mediante la utilización de esta subclase de conjuntos, cómo es posible demostrar su existencia sin tener por qué construirla, además de comprobar, cómo es posible la extensión del Teorema del Límite Iterado a cualquier espacio topológico, sin previamente nombrar siquiera la verificación de los tres restantes, cuestión que parece antinatural, pues simplemente parecería lógico, el cumplimiento estratificado de los mismos enumerados en su orden natural.

SUMMARY

When Kuratowski's axioms are sstudied, a great difficulty in its development appears, due to the utilization of gioded sets with posible maximum ele-

ments and the obtaining of a mesh in the Repeated Limit Theorem is very complicated.

It will be shown, using guided sets without maximum elements, how it's possible to prove the existence of such mesh without having to construct it. Moreover, it will be shown that The Repeated Limit Theroem can be spread out any topologic space without testing the other three ones, in spite of looking unnatural.

1. INTRODUCCIÓN

Aparte de admitir el conocimiento conceptual de conjunto dirigido, red y convergencia de la misma, nos será útil recabar algunos conceptos para su posterior utilización.

Definición 1

Diremos que la red $(x_i)_I$, definida en un espacio topológico X_τ, está contenida frecuentemente en un entorno U de X_τ, si para todo índice «i», existe otro «i'» que lo supera en el orden ($i \leqslant i'$), y el correspondiente término de la red está en el entorno ($x_{i'} \in U$).

Definición 2

Se dirá que una red $(x_i)_I$, definida sobre un espacio topológico X_τ, está contenida eventualmente en un entorno U de x_τ, si existe un índice «i», tal que para cualquier otro que lo supere en el orden «i'» ($i \leqslant i'$), su término correspondiente está contenido en el entorno U. ($x_{i'} \in U$).

Otras consideraciones

Siempre es factible, sin pérdida de generalidad, en cuanto al comportamiento de redes se refiere, la consideración de conjuntos dirigidos sin elementos maximales (propiedad de prolongación), ya que, por una parte, la extensión de un conjunto dirigido con elementos maximales, a otro que no los posea no es difícil, y se logra como sigue:

Sea $(I, \leqslant)$ dirigido superiormente, con un elemento maximal i^*, por tanto el máximo de I. Podemos extender I, a $I' = I \cup \mathbb{N}$ definiendo el nuevo orden $(\leqslant')$ como sigue:

$$\forall\, i_1, i_2 \in I, \quad i_1 \leqslant' i_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} i_1 \leqslant i_2 & \text{si} \quad i_1, i_2 \in I \\ i_1 \in I \wedge i_2 \in \mathbb{N} & \\ i_1 \leqslant i_2, & \text{si} \quad i_1, i_2 \in \mathbb{N} \quad (\text{en } \mathbb{N}) \end{cases}$$

Es fácil ver que $(I', \leqslant')$ carece de maximales. De otra parte, en cuanto a la convergencia de redes concierne, inclusive se enriquece, pues si tenemos una red $\varphi\colon I \to X_\tau$, X_τ espacio topológico; i^* maximal de I, ésta convergerá trivialmente hacia $\varphi(i^*) = x_0 \in X$. Si extendemos $\varphi\colon I' \to X$, haciendo $\varphi(n) = \varphi(i^*)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tenemos la misma red definida sobre un conjunto I' sin elementos maximales. Y, teniendo además en cuenta, que la condición clásica de eventualidad:

$$\forall\, U \in N(x), \quad \exists\, i_u \in I\colon i_u \leqslant i \Longrightarrow \varphi(i) \in U$$

se reemplazaría por la siguiente:

$$\forall\, U \in N(x), \quad \exists\, i_u \in I \,/\, i_u < i \Longrightarrow \varphi(i) \in U$$

podríamos verificar (como se expuso en el artículo: «INDUCCIÓN DE TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS DIRIGIDOS Y SU REPERCUSIÓN EN LA CONVERGENCIA DE UNA RED», publicado en el número 6 de «ENSAYOS»), que considerada la misma red sobre un conjunto dirigido sin elementos maximales, la convergencia de la misma se traduciría en una cuestión de continuidad entre espacios topológicos, de forma similar a la convergencia de sucesiones, donde el conjunto dirigido era $\mathbb{N}$.

Veamos ahora cómo construir el conjunto dirigido adecuado para la definición de la red cuya existencia se trata de probar:

Sea I dirigido sin elementos maximales y supongamos que para cada $i \in I$, se define un conjunto Ji dirigido y sin elementos maximales. Consideremos ahora, el conjunto B definido por:

$$B = \{\beta = (i, j) \,/\, i \in I, j \in Ji\}$$

el cual puede ordenarse lexicográficamente como sigue:

$$(i, j) \leqslant (i', j') \Longleftrightarrow (i < i') \vee (j \leqslant j' \quad \text{si} \quad i = i').$$

Sin dificultad se prueba que B es un conjunto dirigido sin elementos maximales; y así puede definirse una red $(x_\beta)_B$ con valores en X, siendo $x_\beta = x_j^i$ y así, enunciamos:

2. TEOREMA DEL LÍMITE ITERADO

Sea I dirigido, Ji un conjunto dirigido para cada $i \in I$, y consideremos la aplicación en que al par (i, j), con $i \in I$, $j \in Ji$, se le asigna el elemento $x_j^i \in X$. Supongamos además que las redes $(x_j^i)_{Ji}$, con i fijo converjan hacia un límite $x_i \in X$, $(x_j^i)_{Ji} \to x_i$, $\forall\, i \in I$ y que la red de límites $(x_i)_I$ sea convergente hacia un punto $x \in X$, $(x_i)_I \to x$. En estas condiciones, existe una red cofinal de la $(x_\beta)_B$, convergente hacia x. Para demostrarlos basta ver que la red $(x_\beta)_B$ está frecuentemente en cada entorno $G \in B(x)$. Se trata pues de ver, que dado un $G \in B$, y para cualquier $(i, j) \in B$, $\exists\, (i', j')$: $(i, j) \leqslant (i', j') \wedge x_{j'}^{i'} \in G$. Ahora bien, como $(x_i)_I$ converge hacia x, existe un $i_G \in I$: $i_G < i \Longrightarrow x_i \in G$. Por otro lado, la red $(x_j^i)_{Ji}$ converge a x_i en X. Dado que G es abierto, será entorno de x_i, y en consecuencia, puede determinarse un $j' \in Ji'$: $x_{j'}^{i'} \in G$. Más entonces, como $i < i'$, se verifica $(i, j) \leqslant (i', j')$. Esto completa la demostración. Como puede apreciarse, el teorema del límite iterado se prueba, de este modo, de una forma más elegante y concisa que la que figura en J. Kelley (Topología General). No obstante, no se da información relativa a la forma de construir la subred cofinal.

BIBLIOGRAFÍA

KELLEY, J. (1962): *Topología general.* Eudeba.

KÖTHE, G. (1969): *Topological Vector Spaces I.* Heidelberg-New York.

MASSEY, W. S. (1987): *Algebraic topology: an introduction.* Springer-Verlag-New York.

WILLARD, S. (1970): *General Topology.* Addison-Wesley.