

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

María Sotos Serrano

«Existen muchísimas formas de comprensión en matemáticas. En cualquier momento puedes creer que acabas de alcanzar la comprensión definitiva sobre alguna materia, de manera que nada queda por desear. Pero no, no existe la comprensión definitiva en matemáticas, siempre hay un contexto más amplio en el que cabe comprender cualquier problema, siempre hay un punto de vista más alto; y por último –parece el más bajo, pero quizás es el más alto– puedes aprender a comprenderlo desde la perspectiva del niño que está aprendiendo.»

H. Freudenthal

POR las palabras que componen, la Didáctica de las Matemáticas parece que deba ser una especie de Didáctica General, pero aplicada concretamente al campo de las matemáticas. Y buscando en su origen etimológico griego, la Didáctica no es otra cosa que «el arte de enseñar», y todas las palabras con la misma raíz tienen que ver con el término «enseñanza» (Brousseau, 1990b). Más concretamente, «la didáctica es –está en camino de ser– una ciencia y tecnología que se construye, desde la teoría y la práctica, en ambientes organizados de relación y comunicación intencional, donde se desarrollan procesos de enseñanza y aprendizaje para la formación del alumno» (Benedito, 1987: 11)⁽¹⁾.

Es cierto que, dentro de las ciencias humanas y/o sociales, todas las definiciones son insatisfactorias. La actividad de definir un concepto es similar a la de cazar a una presa, y el resultado final siempre es, o la muerte de la presa en el segundo caso, o la pérdida de significado del concepto en el primero. Pero, a pesar de esta advertencia, conviene recordar la definición aproximada

(1) La mayoría de definiciones actuales son similares a la de Benedito: «la didáctica es la disciplina que explica los procesos de enseñanza-aprendizaje para proponer su realización consecuente con las finalidades educativas (...), se entiende por procesos de enseñanza-aprendizaje, el sistema de comunicación intencional que se produce en un marco institucional y en el que se generan estrategias encaminadas a provocar el aprendizaje» (Contreras, 1990: 19-23).

de V. Benedito, pues contiene algunos elementos que interesa comentar.

En primer lugar, la didáctica se considera como ciencia y como técnica. Es decir, se produce un continuo *feedback* entre teoría, práctica y tecnología, pues teoría y práctica están directamente relacionadas, y la tecnología es la vertiente *aplicada* de la disciplina. Por tanto, los esfuerzos científicos de la didáctica buscan una directa utilidad en los ámbitos de enseñanza, pero al mismo tiempo, para poder intervenir en estos ámbitos es necesario un profundo conocimiento teórico de todas las variables que operan en ellos.

Y en segundo lugar, la didáctica se construye en ambientes organizados. Unido esto a lo que antes se señaló de que la didáctica se refiere a la enseñanza, se puede suponer que la Didáctica como disciplina está vinculada a los procesos de escolarización y a las instituciones educativas. Es cierto que en otros lugares también se enseña y se aprende, pero el lugar donde la Didáctica analiza la enseñanza resulta ser alguna institución escolar.

Si desde esta perspectiva, la Didáctica estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje, la Didáctica de las Matemáticas es la disciplina cuyo objeto de estudio son los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. «La didáctica de las matemáticas es un campo científico relativamente reciente –unos treinta años, todo lo más– cuyo objeto puede ser descrito, en primer lugar, de manera (aparentemente) ingenua, como “**el estudio de los hechos en la enseñanza de las matemáticas**”» (Chevallard, s.f.).

Cada materia a enseñar es diferente de las demás y tiene una especificidad propia, por esto, la Didáctica ha ido dando paso a toda una serie de Didácticas específicas de cada una de estas materias. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas también necesita de un estudio diferente, pues la actividad matemática es distinta de otras actividades que se producen en la escuela. Esta es la razón de la aparición de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica autónoma, que resulta una ayuda importante para el trabajo en la escuela, pero «la didáctica no puede sustituir al enseñante en el acto de enseñar» (Brousseau, 1990a: 12).

Ahora bien, una disciplina científica no se constituye per se, sino a través de una práctica científica concreta. Y por práctica científica se puede entender el «conjunto complejo de procesos determinados de producción de conocimientos, unificados por un campo conceptual común, organizados y regulados por un sistema de normas, e inscritos en un conjunto de aparatos institucionales materiales. Por “aparatos institucionales” debe entenderse las unidades de producción y de circulación de los conocimientos

científicos (centros de investigación y enseñanza)» (Castells e Ipola, 1981: 141).

Esto mismo se puede decir de otras maneras, pero he preferido huir del lenguaje más convencional de la epistemología («paradigmas», «programas de investigación», etc.), para que el lector, consciente o inconscientemente, no sitúe este discurso en una óptica determinada (Kuhn, Lakatos, Feyerebend, ...). Y además, no se trata aquí de establecer exactas definiciones de términos, sino de presentar algunas variables fundamentales para la demarcación de un nuevo dominio científico. Esto es lo que interesa del texto de Castells e Ipola.

Fundamentalmente, existen tres tipos de variables para este establecimiento de una disciplina científica: históricas, teóricas y sociológicas.

Variables **históricas** pues la práctica científica consiste en **procesos determinados de producción de conocimientos**, y estos procesos de producción se van materializando a lo largo del tiempo, con lo que la sucesión de procesos vendría a ser la historia de cada disciplina científica. Variables **teóricas** en la medida en que cada dominio científico posee un **campo conceptual** propio, común y diferente de los campos conceptuales de otras disciplinas, y que constituye el cuerpo de teoría o teorías que dominan en ese campo científico⁽²⁾. Variables **sociológicas** pues cualquier ciencia vive y se desarrolla en el seno de determinados **aparatos institucionales**, con sus correspondientes estructuras y relaciones, y que terminan por significarse como los lugares en donde la comunidad científica desarrolla su trabajo.

Estos tres aspectos diferentes pueden ser analizados desde distintas posiciones epistemológicas (la historia como un proceso de acumulación continua o de revoluciones científicas, las teorías como paradigmas o como programas de investigación, etc.), pero en el caso de la Didáctica de las Matemáticas, cuyo origen habría que situarlo en este siglo, utilizar algunas de estas categorías de análisis puede resultar precipitado. Conviene antes intentar establecer, de manera descriptiva, qué es lo que ha ocurrido en la historia, la teoría y la comunidad científica de la didáctica de las matemáticas.

(2) Ésta es una de las muchas acepciones que T.S. Kuhn asigna a su controvertido término de «paradigma» (1971).

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: HISTORIA Y COMUNIDAD CIENTÍFICA

«Aquellos que toman el juego como un simple juego y el trabajo con excesiva seriedad, no han comprendido mucho ni de lo uno ni de lo otro».

H. Heine

Si la historia social de la enseñanza de las matemáticas aún adolece de importantes lagunas analíticas y descriptivas (Schubring, 1991), la historia de la Didáctica de las Matemáticas no se encuentra en mejor estado. Es sintomático que, en los programas de Tercer Ciclo Universitario de Didáctica de las Matemáticas que se desarrollan en España, no figuren cursos dedicados a esta cuestión, pues si se dice que la historia de las matemáticas es un recurso importante a la hora de comprender mejor los conocimientos matemáticos (por el paralelismo que se puede establecer entre la génesis del conocimiento científico y la génesis del aprendizaje de los alumnos), la historia de la Didáctica de las Matemáticas tiene que resultar un instrumento adecuado para comprender las tendencias actuales y cómo se ha llegado a ellas. Probablemente la brevedad de esta historia tenga parte de culpa en este imperdonable olvido.

La escuela y la organización escolar, tal y como hoy las conocemos, tampoco tienen un pasado muy lejano. Es tras la consolidación de los Estados Nacionales en Europa en primer lugar, y tras el fuerte proceso de industrialización que a comienzos de siglo surgió en Norteamérica, cuando los sistemas educativos comenzaron a adquirir las características con las que hoy los conocemos (Fernández Enguita, 1990: 132-147): planificación institucional, escolarización obligatoria de cada vez mayor cantidad de población infantil, burocracia e impersonalidad, separación entre trabajo manual e intelectual, etc.

No se debe, por tanto, hablar de Didáctica de las Matemáticas más allá de estos límites. Es más, la existencia escuela no presupone la existencia de la Didáctica de las Matemáticas (aunque en ella se impartan conocimientos matemáticos), y esta última no tiene más de cuarenta años de antigüedad (Chevallard, s.f.), que es cuando se formulan explícitamente (por parte de la C.I.E.A.E.M.) las preocupaciones de la educación matemática. Todo lo inmediatamente anterior no puede ser considerado como Didáctica de las Matemáticas, sino como distintas maneras de enseñar las matemáticas, a propósito de las cuales algunos autores aportaban sus opiniones; ya que no existían las variables que permiten hablar de una nueva disciplina. Cualquier didáctica de

las matemáticas que se pretenda descubrir, con anterioridad a las fechas que aquí se manejan, no es tal, pues es ahora cuando se estaría elaborando dicha didáctica y no en el momento en que se producía la enseñanza de las matemáticas⁽³⁾.

Por tanto, buscando en la historia⁽⁴⁾, lo único que se puede encontrar es a un conjunto de personas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, y que expresan sus opiniones sobre cómo se debe enseñar. J. J. Rousseau, por sus propias concepciones filosóficas, elaboró una importante reflexión sobre la educación y sus instituciones, comenzando a plantearse que la lógica evolución del niño ha de requerir distintas formas de educación, pero el lugar dedicado a la enseñanza de las matemáticas resulta prácticamente inexistente.

Otro precedente, este ligado directamente a la enseñanza de las matemáticas, fue A. C. Clairaut (1713-1765), que publicó diversos libros de matemáticas destinados a «principiantes», y en los que siempre tenía presentes los *principios* de su forma de entender la enseñanza. Estos principios eran los siguientes (Glaeser, 1979):

1. No aburrir bajo ningún pretexto, incluso sacrificando los aspectos más arduos del concepto que estuviera tratando.
2. Exposición de las matemáticas a partir de los problemas.
3. Presentación de numerosas formas de resolver el problema.

Es decir, una serie de *recetas metodológicas* que en ningún caso se deben considerar como Didáctica de las Matemáticas de manera explícita.

Pero hay que esperar a finales del siglo XIX, para que comiencen los primeros debates pedagógicos. En estos momentos, la enseñanza se reduce a la lección magistral y, por tanto, no se tienen en cuenta los procesos de aprendizaje de los alumnos, sólo interesa debatir sobre los programas a impartir. En esta tarea destacó la figura y la obra de F. Klein (1931). Este tipo particular de pedagogía, que no tiene en cuenta a los alumnos, es la que también aparece en las posteriores aportaciones de J. Dieudonné.

-
- (3) El hecho de que Platón pusiera en boca de Sócrates un método de enseñanza determinado, no quiere decir que elaborara una teoría de Didáctica de las Matemáticas, en donde se integren los conocimientos que aportan la Matemática y las Ciencias de la Educación, ni que existiera una comunidad científica en donde estos debates tuvieran lugar, ni que realizara investigaciones experimentales sobre los efectos de dicho método; y aun en el caso de que todo esto sí hubiera tenido lugar, hoy día lo desconocemos.
- (4) La más ambiciosa incursión en la historia de la Didáctica de las Matemáticas es la realizada por G. Glaeser (1979), de donde he tomado la mayoría de los datos que se presentan a continuación.

De hecho, esta tradición, más que elaborar Didáctica de las Matemáticas, se limitaba a exponer las opiniones, más o menos fundadas, que cada autor tenía con respecto a la enseñanza de las matemáticas (H. Poincaré y R. Thom también pueden ser incluidos aquí). La inexistencia de esta Didáctica, hizo que todas las personas dedicadas a estas cuestiones, lo fueran de manera autodidacta, y esto hace que el planteamiento de nuevos métodos de enseñanza sea una tarea difícil⁽⁵⁾.

El debate que sí va a originar la Didáctica de las Matemáticas, es el que se produce a partir de los años 50, en el que se ponen en cuestión los métodos de enseñanza (tanto la de nivel elemental como la de formación de profesores), y que plantea alternativas a estos métodos. Así, aparece una corriente pedagógica (la escuela activa de C. Freinet) que repercutirá en la enseñanza de las matemáticas, produciéndose un creciente interés por la elaboración de materiales manipulativos:

- G. Cuisenaire elaboró las célebres regletas que, divulgadas y analizadas por Gattegno (1967), sirven para la enseñanza de la aritmética en edades tempranas.
- Z. P. Dienes creó un material para la iniciación a la lógica y al cálculo booleano: los bloques lógicos. Además de este material, elaboró una reflexión teórica sobre el aprendizaje de las matemáticas.
- G. y F. Papy perfeccionaron el Minicomputer de Lemaître, que permite realizar diversas representaciones de números, así como cálculos con ellos.

Además, en esa misma época comienzan a aparecer obras sobre la *enseñanza heurística*, o enseñanza a través de los problemas (Wittemberg, Puig Adam y, finalmente, Polya), según la cual ya no se trata de enseñar matemáticas a partir de respuestas sino a partir de preguntas, pues no importa tanto la transmisión de informaciones como la estructuración mental de esas informaciones.

Como se puede ver, comienza a tenerse en cuenta el proceso de aprendizaje de los alumnos y los obstáculos que en él pueden aparecer, el papel del profesor en el aula y su relación con los alumnos, la creación de nuevas estrategias de aprendizaje y la in-

(5) Hay que señalar aquí la figura de E. Blutel (inspector de educación hasta 1930), que a comienzos de siglo elaboró el método de redescubrimiento; aunque se trataba de un redescubrimiento por parte del alumno excesivamente dirigido, pero que no por ello deja de tener su mérito, máxime si se tiene en cuenta la fecha de su formulación.

tervención de los conocimientos de la psicología en el diseño de estas estrategias.

Y coincide este nacimiento de la Didáctica de las Matemáticas con la aparición de un fuerte movimiento internacional, fruto del cual surgen las primeras asociaciones y las primeras reuniones sobre la Didáctica de las Matemáticas propiamente dicha. No es una coincidencia, sino un resultado lógico, pues toda disciplina va asociada a una comunidad científica determinada; que se estructura, básicamente, gracias a las asociaciones profesionales, los encuentros periódicos, las publicaciones y las instituciones de enseñanza e investigación.

En este punto, la historia de la Didáctica de las Matemáticas pasa a ser la historia del nacimiento y desarrollo de su comunidad científica. No es este el lugar para realizar esta tarea, pero sí que conviene describir las líneas fundamentales que estructuran esta comunidad⁽⁶⁾.

Hay que remontarse al año 1871 para encontrar la primera asociación profesional de maestros de matemáticas (*Association for the Improvement of Geometrical Teaching*, fundada en Inglaterra), y que en 1894 comenzó a publicar la revista «*Mathematical Gazette*». Entre estos años y los primeros del siglo actual fueron apareciendo otras asociaciones de carácter nacional en otros países (Italia, Francia, U.S.A.).

Pero la primera fecha importante es el año 1908. Es en ese año cuando se crea la *Comission Internationale de l'enseignement Mathématique* (C.I.E.M., actualmente I.C.M.I.), y que antes de la Primera Guerra Mundial elaboró un informe sobre la práctica de la enseñanza de las matemáticas en los países miembros.

En este primer período de la C.I.E.M. ya se comenzaron a plantear muchos de los problemas de los que hoy se ocupa la Didáctica de las Matemáticas, pero va a ser después de la Segunda Guerra Mundial, en el año 1950, con la creación de la *Comission Internationale pour l'Etude et l'Amelioration de l'Enseignement des Mathematiques* (C.I.E.A.E.M.), cuando se van a originar los estudios de la didáctica de las matemáticas desde una perspectiva interdisciplinar, pues en esta Comisión se reúnen personas como

(6) Los datos que aquí se presentan, han sido extraídos del capítulo elaborado por L. Rico y M. Sierra en el libro editado por A. Gutiérrez (1991).

Aquí, solamente se hará mención de algunos aspectos referidos a las asociaciones y reuniones de carácter profesional. Ahora bien, otro medio importante de expresión y comunicación de una comunidad científica lo componen las publicaciones, periódicas o no, de la misma. En este sentido, conviene señalar que, actualmente, tanto a nivel nacional como internacional, existe toda una estructura estable de publicaciones periódicas (revista y actas de reuniones), a la vez que el número de las no periódicas se ha incrementado notablemente.

G. Choquet, J. Piaget, C. Gattegno, T. Fletcher, G. Papy, E. Castelnuovo, W. Servais, J. L. Nicolet y P. Puig Adam; y el objetivo fundamental era comprender los problemas de la enseñanza de las matemáticas para lograr mejorarla. Creo que en estos momentos se unen una serie de variables (estudio de la didáctica de las matemáticas desde un lugar intermedio entre las Matemáticas y las Ciencias de la Educación, importantes aportaciones teóricas y prácticas en este campo y consolidación de un prestigioso grupo de investigadores y divulgadores) que permiten hablar del nacimiento de la Didáctica de las Matemáticas⁽⁷⁾.

Efectivamente, el trabajo desarrollado por estos autores fue muy numeroso, y todavía hoy permanece su influencia. Así, tras el Coloquio de Royaumont en 1959, se produce la **primera gran reforma** curricular en la enseñanza de las matemáticas promovida por estudiosos de la educación matemática, y que dio lugar al modelo de enseñanza estructuralista, más conocido como «Matemáticas Modernas» (Sierra, 1990b). En este movimiento reformador se encontraban la mayoría de los integrantes de la C.I.E.A.E.M.

Habrá que esperar, tras el renacimiento experimentado por el I.C.M.I. en los años 50, otro **nuevo cambio de enfoque** de magnitud similar. En el Congreso Internacional de Exeter (1972)⁽⁸⁾, el segundo que se celebraba desde la separación del I.C.M.I. de la *International Mathematical Union*, comenzaron las críticas a las «matemáticas modernas» en la escuela; y ya en el Tercer Congreso (celebrado en Karlsruhe en 1976) se abandona definitivamente el modelo que estuvo utilizándose durante más de dos décadas.

También en el marco de nuestro país, tiene lugar un movimiento de grupos y Asociaciones de educación matemática. Los primeros momentos de este movimiento hay que situarse en los años anteriores a la Guerra Civil; los temas educativos cobraron bastante importancia (por una clara influencia de los ideales krausistas) y aparecieron numerosos centros dedicados a la educación⁽⁹⁾. Pero al igual que a nivel internacional el Coloquio de Royaumont y el Tercer Congreso del I.C.M.I. suponen dos hitos

(7) No es éste el momento de entrar en discusiones sobre si se puede considerar una ciencia o no. Además, situándonos en la posición de «anarquismo epistemológico» defendida por P. K. Feyerabend (1974), el problema de la demarcación científica es un problema menor, sin sentido, pues todo vale como fuente de conocimiento.

(8) En estos momentos, ya era presidente del I.C.M.I. Hans Freudenthal.

(9) Como ejemplo, baste citar el Instituto-Escuela de Madrid, la Escuela Superior del Magisterio, la Asociación de Profesores Numerarios de Escuelas Normales, etc. Curiosamente, los planes de estudio de Matemáticas en las Escuelas Normales contemplaban aspectos que hoy en día se pretenden presentar como novedades para la reforma universitaria en vías de realización (Sierra, 1990a).

significativos, también en España se pueden señalar dos momentos claves para la educación matemática.

El primero es la **década de los años 50**, pues en estos años se desarrolla el trabajo de P. Puig Adam (1900-1960), cuya importancia es comúnmente aceptada: primero porque fue el artífice de que España se conectara al movimiento internacional de educación matemática, segundo porque contribuyó, y de manera sobresaliente, con una serie de publicaciones que, en su día, planteaban cuestiones que actualmente se buscan afanosamente entre la literatura extranjera, tercero por la importancia que le concedió a los materiales didácticos, terreno en el que también aportó novedades, y cuarto porque aglutinó a su alrededor los inicios de lo que hoy conocemos como asociaciones de profesores de matemáticas; como se puede ver, su muerte resulta irreparable por tener lugar en una de las épocas cruciales del movimiento internacional de educación matemática, y tan sólo sirvió para que la «matemática moderna» entrara en este país sin la más mínima oposición racional.

El segundo momento al que me he referido es la **década de los años 80**. En esta época reciente, las asociaciones de profesores de matemáticas toman las riendas de la educación matemática, que hasta entonces habían permanecido en manos de la Administración Pública, y se inicia un auge importante de las reuniones periódicas del área: Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (1981)⁽¹⁰⁾ y Congresos Internacionales sobre Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas (1985). A un nivel más local, y aunque existen sociedades de profesores en casi toda España, destaca la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas «Thales», por la celebración bianual de las Jornadas de Educación Matemática (1983). Y todo esto se espera que desemboque en la celebración del Octavo Congreso del I.C.M.I., en 1996, en Sevilla.

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: LA TEORÍA

«Para un espíritu científico cualquier conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no ha habido pregunta no puede haber conocimiento científico. Nada se da. Todo se construye.»

G. Bachelard

Debido a la corta edad de la Didáctica de las Matemáticas, el componente teórico de la disciplina aún no está suficientemente

(10) Los años corresponden con la celebración del primer congreso.

consolidado, no es posible hablar de paradigmas dominantes en Teoría de la Didáctica de las Matemáticas. Esto sirve para constatar que, en el momento presente, la demarcación científica de la Didáctica de las Matemáticas puede ser un punto muy controvertido, en el que existen opiniones para todos los gustos, pero creo que todos estarán de acuerdo en que actualmente vive un importante momento de creación, algo que puede ser el acto mismo de constitución científica de la disciplina.

De hecho, algunas corrientes actuales de investigación en educación matemática han dado lugar a diversas «escuelas», aunque no todas tienen una voluntad clara y manifiesta para intentar crear marcos teóricos globales desde los que poder abordar cualquier problema de la educación matemática⁽¹¹⁾.

Entre las que sí tienen esta voluntad, se pueden destacar dos puntos de vista diferentes sobre el análisis de las matemáticas desde la óptica de la didáctica: la **fenomenología didáctica de las matemáticas** y la **teoría de la transposición didáctica**⁽¹²⁾.

Dentro del primer caso se encuentran las escuelas mexicana y holandesa, esta última alrededor del OW&OC⁽¹³⁾ y de la figura de H. Freudenthal, y, para ellos, el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas son los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. No tratan en primer lugar de elaborar una teoría para después aplicarla, sino que buscan a nivel práctico lo que sucede con esos procesos en el aula, de ahí las siguientes palabras: «No: investigación *de* educación. Sino: investigación *en* educación» (Freudenthal, 1981: 150).

Para esto, utilizan la distinción fenomenológica entre «objeto de pensamiento» (nooumenon) y «fenómeno» (phainomenon). Así, «la fenomenología de un concepto matemático, una estructura matemática o una idea matemática significa, en mi terminología, describir este *nooumenon* en su relación con los *phainomena* para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los *phainomena* para cuya organización fue creado, y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos *phainomena*

(11) Un caso aparte lo constituye el trabajo de algunos autores alemanes que, liderados por Steiner, realizan un compendio del estado en que se encuentra la Teoría de la Educación Matemática, para detectar lo que aún falta para constituir un auténtico paradigma. Realmente, en esta actividad no hay construcción de dicha teoría, sino una reflexión sobre ella, es decir, se trata de lo que se puede denominar «metateoría» de la educación matemática.

(12) Junto a estas «escuelas» con esta intención globalizadora, también se han elaborado modelos más concretos, como la teoría de imágenes de los conceptos de Vinner, el modelo de los Van Hiele, etc.

(13) Hace poco tiempo, esta institución ha pasado a denominarse «Instituto Freudenthal».

como medio de organización, y de qué poder nos dota sobre esos *phainomena*. Si en esta relación entre *nooumenon* y *phainomenon* subrayo el elemento didáctico, esto es, si presto atención a cómo es adquirida tal relación en un proceso de enseñanza-aprendizaje, hablo de la fenomenología *didáctica* de ese *nooumenon*» (Freudenthal, 1983: 28-29).

Desde esta perspectiva, la enseñanza clásica de las matemáticas ha consistido en un proceso de enseñanza-aprendizaje inicial de los objetos de pensamiento (*nooumenon*), para después llegar a los fenómenos, esto es, primero los conceptos y después las aplicaciones. Frente a esta manera de afrontar la educación matemática, «lo que una fenomenología didáctica puede hacer es preparar el enfoque contrario: empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización» (Freudenthal, 1983: 32).

Hay, por tanto, una relación entre los fenómenos (del mundo real) y los conceptos (del mundo de las matemáticas); pero para poder adquirir los conceptos matemáticos a través de los fenómenos, es necesario un paso intermedio y propio de las instituciones escolares: la **constitución de objetos mentales**⁽¹⁴⁾. En estos objetos mentales se recogen todos los significados de todos los fenómenos que están en relación con los conceptos implicados, y, de este modo, se puede llegar hasta los conceptos matemáticos. Así, el objeto inicial de la enseñanza es, según Freudenthal, la constitución de los objetos mentales; y hasta los cursos superiores no sería necesario llegar a los conceptos, pues estos sólo son necesarios en el mundo de las matemáticas.

Es evidente que, vistas así las cosas, más que una profunda elaboración teórica, el papel de la Didáctica de las Matemáticas consiste en, primero elaborar estrategias para constituir los objetos mentales de los conceptos matemáticos, y segundo establecer criterios que puedan determinar si un objeto ha sido constituido mentalmente o no por parte del alumno.

De todas maneras, los marcos teóricos siempre son necesarios para poder enmarcar los resultados de la investigación, en el caso anterior este marco no es otro que el de la fenomenología (como el mismo Freudenthal reconoce), por lo que no es tan atrevido intentar crear un marco teórico propio de la Didáctica de las Matemáticas que sirva para explicar los análisis que se realicen. Sin duda, uno de los intentos actuales para realizar esta tarea es

(14) Lo que Freudenthal llama *objetos mentales* es lo que Fichsbein denomina *intuiciones* y Piaget *representaciones*.

el que llevan a cabo una serie de autores franceses que, desde algunos Institutos de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (I.R.E.M.), han intentado establecer un aparato teórico en donde la Didáctica de las Matemáticas se pueda desarrollar como disciplina científica. Más que por los logros conseguidos, hay que destacarlo por ser la única tentativa de esta magnitud.

Los dos conceptos centrales de esta teoría son los de *sistema didáctico* y *situación didáctica*, a los que habrá que añadir otros que faciliten el análisis de los primeros.

Por **sistema didáctico** (Vergnaud, 1985), se entiende el conjunto de elementos que intervienen en la enseñanza de las matemáticas: en primer lugar los *alumnos*, el *profesor* y las *matemáticas*; pero también la *noosfera*, en donde están las demás variables contextuales y, por tanto, donde se producen los conflictos e intercambios entre el sistema didáctico y su entorno.

Ahora bien, el análisis de cada uno de estos elementos se realiza de dos modos diferentes pero interrelacionados, análisis de cada elemento por separado y análisis de las relaciones que se establecen entre estos elementos.

1. **Sub-sistema de las matemáticas:** «*Todo proyecto social de enseñanza y aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y la designación de contenidos de saberes como contenidos a enseñar*» (Chevallard, 1985: 39); es decir, hay una diferencia entre las matemáticas como saber y las matemáticas que se enseñan en la escuela, pues «un contenido de saber, al ser designado como saber a enseñar sufre, desde entonces, un conjunto de transformaciones adaptativas que lo vuelven apto para formar parte de los *objetivos de enseñanza*. El “trabajo” que hace de un objeto de saber a enseñar un objeto de enseñanza, es llamado la *transposición didáctica*» (Chevallard, 1985: 39).

Por tanto, la **transposición didáctica** es el proceso más importante que se desarrolla en este primer sub-sistema⁽¹⁵⁾, y debe ser uno de los centros de atención de la investigación en Didáctica de las Matemáticas. «El paso de un contenido preciso de saber a una versión didáctica de este objeto de saber puede ser llamado más exactamente “transposición didáctica *stricto sensu*”. Pero el *estudio científico* del proceso de transposición didáctica (que es una dimensión fundamental de la *didáctica de las matemáticas*)

(15) En este punto, Vergnaud introduce otra noción importante: el **campo conceptual**, que es «un conjunto de problemas o de situaciones-problema cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos de solución estrechamente relacionados» (1981: 217).

supone tener en cuenta la transposición didáctica *sensu lato*, representada por el esquema

→ objeto de saber → objeto a enseñar →
→ objeto de enseñanza»

(Chevallard, 1985: 39).

2. **Sub-sistema del alumno:** Aquí, estos autores retoman la teoría de la equilibración de Piaget, pues las fases del aprendizaje que señalan, recuerdan claramente las de equilibrio-conflicto-desequilibrio y reorganización del famoso psicólogo. No es de extrañar, por tanto, que Brousseau hable de *salto informacional*, que ha de provocar una inadecuación entre el saber antiguo y el nuevo conocimiento que se pretende enseñar⁽¹⁶⁾. Este fenómeno funciona de la siguiente manera: las situaciones deben presentar problemas nuevos, lo suficientemente distintos de aquellos con los que se ha construido el saber anterior, de tal forma que las antiguas estrategias de resolución resulten ineficaces, esto conducirá, o bien a una adaptación del saber antiguo, o bien a una reorganización de los conocimientos.

También referido a los alumnos, y aquí es donde mejor se advierte la influencia de algunos conceptos del Racionalismo Aplicado de G. Bachelard⁽¹⁷⁾, hay que analizar las *concepciones* que tienen, distinguiéndose entre concepciones espontáneas, iniciales y resultantes. Dentro de este conjunto de concepciones, es donde se sitúan algunos obstáculos para el aprendizaje de las matemáticas.

3. **Sub-sistema del profesor:** Lógicamente, el papel que juega el profesor en este sistema es otro objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas. En este aspecto, el profesor está para organizar las interacciones entre los alumnos y las matemáticas, esto es, para favorecer el que aprendan a aprender, poniéndoles en contacto directo con la fuente del saber matemático: la realidad y la lectura matemática de la misma, o, en otros términos, facilitar el trabajo de matematización de la realidad de los alumnos.

Además, y entrando ya en el terreno del análisis de las interacciones entre los elementos del sistema, el funcionamiento de la clase y las relaciones entre alumnos y profesor están determinadas por el **contrato didáctico**, constituido por un conjunto de re-

(16) En otros autores, un fenómeno similar es denominado *conflicto cognitivo*.

(17) De este autor, han tomado algunos aspectos de los conceptos de ruptura y obstáculo epistemológicos, así como la idea de vigilancia epistemológica para el desarrollo de la ciencia, que, en este caso, aparece como la actitud permanentemente vigilante del profesor en la elaboración y desarrollo de las situaciones didácticas.

glas (implícitas o explícitas) que rigen estas relaciones. «El contrato didáctico es la regla del juego y la estrategia de la situación didáctica» (Brousseau, 1986: 50). El estudio de los efectos que este contrato puede generar en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ha llevado a una pequeña catalogación de éstos⁽¹⁸⁾.

Pero más allá de las relaciones alumnos-profesor, todos los elementos del sistema didáctico presentado se encuentran interrelacionados. Y a este conjunto de relaciones establecidas entre alumnos, profesor y el medio que les rodea con la intención de que los alumnos adquieran un determinado saber establecido, se le denomina **situaciones didácticas**. El trabajo en la escuela debe consistir en presentar a los alumnos una serie secuenciada de situaciones: situaciones de acción, de formulación, de validación y de institucionalización; más concretamente, a los tres primeros tipos de situaciones se les llama *situaciones a-didácticas*, mientras que la última situación, en la que sí existe una intención explícita de enseñar un determinado saber, sería una *situación didáctica*, pues «un saber es un conocimiento institucionalizado» (Brousseau, 1986: 97).

Desde esta perspectiva, se distingue claramente entre enseñanza (actividad propia del profesor y que consiste en el traspaso de una situación a-didáctica a otra didáctica) y aprendizaje (actividad propia del alumno). «En la didáctica moderna, la enseñanza es el traspaso al alumno de una situación a-didáctica, correcta; el aprendizaje es una adaptación a esta situación» (Brousseau, 1986: 51). En otras palabras, el profesor tiene que ser capaz de recontextualizar los saberes matemáticos para presentarlos a los alumnos, mientras que estos últimos habrán de descontextualizarlos nuevamente para constituir su conocimiento en saber matemático.

En definitiva, las tareas a las que la Didáctica de las Matemáticas ha de dedicarse son dos: por un lado, debe generar estrategias que permitan crear situaciones didácticas adecuadas para la enseñanza de cada campo conceptual de las matemáticas, y por otro, también ha de intentar elaborar conocimientos teóricos de Didáctica de las Matemáticas, que será lo que contribuya a su consolidación como disciplina científica (Brousseau, 1991). Aunque no hay que olvidar que «una de las funciones de la didáctica podría ser (...) contribuir a poner un freno, por fin, a un proceso que consiste en transformar el saber en algoritmos utilizables por

(18) Los efectos del contrato didáctico a que me refiero son: el efecto Topaze, el efecto Jourdain, el deslizamiento metocognitivo, el uso abusivo de la analogía y el envejecimiento de la enseñanza, y se exponen en Brousseau (1986) (1989) y (1990b).

los robots o por humanos sub-empleados y en disminuir la parte de reflexión noble en todas las actividades humanas para devolvérsela a algunos.

Para sacrificar al dios de la supuesta eficacia, la enseñanza presta su concurso hoy a la reducción algorítmica y a la desmatematización. Espero profundamente que la didáctica podrá combatir esta desposesión y esta deshumanización» (Brousseau, 1990a: 12).

Del mismo modo que Freudenthal oponía a la forma clásica de educación matemática la fenomenología didáctica como método de enseñanza, en la escuela francesa también se critica la enseñanza programada («pedagogía del paso a paso» y «pedagogía sin sentido») y se plantea como alternativa la clase como comunidad científica (Bouvier, 1981).

Está claro que con esto no se agota la producción de la Didáctica de las Matemáticas. Sólo se trataba de presentar las teorías globales que actualmente son más utilizadas. Pero además de éstas, hay todo un caudal de investigaciones sobre todos los campos de que se ocupa esta disciplina. En principio, todas estas investigaciones se pueden agrupar en cuatro grandes apartados⁽¹⁹⁾:

1. Estudio de proyectos, que tratan de constituir modelos didácticos, diseños curriculares, proyectos docentes y teorías de la enseñanza.
2. Estudio de técnicas de enseñanza, es decir, métodos, materiales y recursos didácticos, tecnología y educación matemática, etc.
3. Estudios de los conceptos matemáticos, apareciendo aquí los aspectos epistemológicos y cognitivos, las teorías del aprendizaje y la estructuración de los contenidos de enseñanza.
4. Estudios de las variables socioculturales y psicológicas que afectan al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Pero aparte de esta tipología, lo suficientemente amplia por cierto para que en ella quepan todo tipo de enfoques, resulta conveniente, de cara a las direcciones futuras que pueden tomar los estudios de Didáctica de las Matemáticas, señalar cuáles son los problemas más importantes por abordar o, emulando a Hil-

(19) Estas líneas de investigación fueron señaladas por G. Brousseau en la conferencia de clausura del «III Congreso Internacional sobre la Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas» (Santiago de Compostela, septiembre, 1989).

bert, cuáles son los problemas cuyo estudio supondrá importantes avances en el desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas.

Esto que, evidentemente, ha de resultar pretencioso (en parte porque los problemas de las ciencias humanas no son estrictamente similares a los problemas de las matemáticas), ya ha sido intentado en varias ocasiones, y aquí me limitaré a recoger alguno de estos frutos de la pasada década.

El primer intento importante fue realizado por Freudenthal, quien en su artículo «*Major problems of mathematics education*» (1981) reunió los problemas que, desde su punto de vista, se le presentan a la enseñanza de las matemáticas, siendo el primero y más importante el hecho de que, en la educación matemática, todos los problemas están relacionados entre sí. Simplemente enumeramos estos problemas:

- ¿Por qué se puede (o no) superar el aprendizaje de la aritmética?, es decir, ¿cuáles son las maneras de diagnosticar y tratar las dificultades de aprendizaje en cada tema concreto?
- ¿Cómo aprenden los niños?, es decir, la necesidad de aprender a observar los procesos de aprendizaje.
- ¿Cómo utilizar progresivamente la simplificación y formalización en la enseñanza referida a las matemáticas?
- ¿Cómo mantener abiertas las vías de la intuición («insight») durante el proceso de formación de los alumnos?
- ¿Cómo estimular la reflexión de los alumnos sobre sus propias actividades físicas, mentales y matemáticas?
- ¿Cómo desarrollar una actitud matemática?
- ¿Cómo está estructurado el aprendizaje matemático según niveles? y ¿cómo se puede utilizar esta estructura en la enseñanza?
- ¿Cómo crear contextos adecuados para enseñar matemáticas?
- ¿Se puede enseñar geometría haciendo que el alumno reflexione sobre sus intuiciones espaciales?
- ¿Cómo pueden usarse las calculadoras y los ordenadores para estimular y aumentar la comprensión matemática?
- ¿Cómo diseñar el desarrollo de la educación como una estrategia para el cambio?
- ¿Dónde encontrar el modo de influir en la educación?, ¿en los libros de textos o en la formación de profesores?
- De todas las investigaciones que se producen, ¿cómo rescatar las significativas de entre todas las irrelevantes?

Efectivamente, aunque las respuestas no son fáciles y cada autor las responderá desde distintas perspectivas⁽²⁰⁾, la investigación de estas cuestiones forman el núcleo de la Didáctica de las Matemáticas.

También en España hay ejemplos de formulaciones de las escuelas fundamentales de la educación matemática, entre las que se encuentra las del actual presidente del I.C.M.I. (Guzmán, 1987), y que, también de manera breve, son las siguientes:

- ¿Qué objetivos básicos debemos pretender con nuestra educación?
- ¿Conocemos las profundas diferencias que existen entre los mecanismos intelectuales y personales de nuestros alumnos?
- ¿Cuáles son las razones profundas del fracaso escolar?
- ¿Cuál es la mejor forma de acercamiento a un tema matemático determinado?
- ¿Cómo detectar y cómo transmitir las imágenes y las actitudes mentales adecuadas y útiles para cada materia o tema?
- ¿Cuál es el lugar adecuado de la geometría en la enseñanza?
- ¿Cuál es el lugar adecuado de la informática?
- ¿Cómo armonizar y equilibrar los intereses en la enseñanza de todas las fuerzas sociales?

De esta manera se puede seguir enumerando «cuestiones fundamentales», pues, aunque todas engloben las mismas cuestiones, cada autor las formula en función de su óptica particular sobre la enseñanza de las matemáticas. Pero, siguiendo la recomendación de K. Marx en sus célebres *Once tesis sobre Feuerbach*, más interesante que lo que cada autor opine es lo que todos y cada uno de ellos hacen. Algo de esto se ha visto cuando se hablaba de las actuales aportaciones teóricas en Didáctica de las Matemáticas, pero, volviendo al caso español, en 1986, con ocasión del Primer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas, se realizó una encuesta entre los asistentes sobre «cuáles eran en esos momento las líneas de investigación en la didáctica de las ciencias y de las matemáticas que se consideraban prioritarias» (Caballer, Carrascosa y Puig, 1986:

(20) Aquí hay que señalar también la encuesta organizada por D. Wheeler, en la que se preguntaba a diversos investigadores (Bishop, Fischbein, Kilpatrick y Behr entre otros), cuáles serían los problemas fundamentales, cuya solución representaría una contribución sustancial a la educación matemática, y cuyos resultados fueron publicándose a lo largo del año 1984 en la revista *For the Learning of Mathematics*.

136), y en donde queda de manifiesto que se siguen las recomendaciones de diversos organismos internacionales, pues de las 34 líneas prioritarias referidas a las matemáticas, las cinco más votadas fueron éstas:

- Resolución de problemas: estudios sobre el proceso, enseñanza de técnicas y enseñanza de las matemáticas a través de ellos.
- Métodos de enseñanza de las matemáticas.
- Diseño de materiales para la enseñanza en todos los niveles.
- Procesos de aprendizaje, adquisición de conceptos, técnicas, etc.
- Geometría.

En este punto, el gran problema consiste en que las investigaciones que se produzcan tengan efectos en el sistema de enseñanza, es decir, que los investigadores de la educación matemática intervengan en la toma de decisiones de los diseños educativos, de tal manera que la investigación guíe la enseñanza. «La investigación ha seguido las necesidades de la práctica escolar, más bien que servir de guía para la misma. Las investigaciones recientes sugieren la necesidad de un cambio en este estado de cosas. En la última década, las investigaciones se han ido desplazando desde el currículum y el alumno, al maestro. En cierto modo, esto es una reacción a los problemas de la primera gran ola de desarrollo curricular. Pero es también una respuesta a los problemas que surgen al generalizar la investigación. De acuerdo con esto, las teorías curriculares aisladas y las teorías del aprendizaje, han sido cada vez puestas más en duda, apareciendo en cambio teorías más complicadas de enseñanza-aprendizaje, las cuales se refieren al maestro y a las interacciones entre alumno, maestro y currículum» (Baurfeld, 1979: 227)⁽²¹⁾.

BIBLIOGRAFÍA

- BAURSFELD, H. (1979: «Investigaciones relacionadas con el proceso del aprendizaje de la matemática», *UNESCO (1979)*, 227-244.
- BENEDITO, V. (1987): *Introducción a la didáctica. Fundamentación teórica y diseño curricular*. Barcanova, Barcelona.

(21) En este mismo artículo, se presenta un listado de estas nuevas tendencias, agrupándolas en dos bloques: nuevas tendencias con respecto a los métodos de investigación utilizados, y nuevas tendencias con respecto a los aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje analizados.

- BOUVIER, A. (1981): *La mystification mathématique*. Hermann, París.
- BROUSSEAU, G. (1986): «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, 2, 33-115.
- (1989): «Utilidad e interés de la Didáctica para un profesor (1ª parte)», *SUMA*, 4, 5-12.
- (1990a): «Utilidad e interés de la Didáctica para un profesor (2ª parte)», *SUMA*, 5, 5-12.
- (1990b): «¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Primera parte)», *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 8, 259-267.
- (1991): «¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda parte)», *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 9, 10-21.
- CABALLER, M. J.; CARRASCOSA, J. y PUIG, L. (1986): «Establecimiento de las líneas de investigación prioritarias en la didáctica de las ciencias y las matemáticas», *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 4, 136-144.
- CASTELLS, M. e IPOLA, E. de (1981): *Metodología y epistemología de las ciencias sociales*. Ayuso, Madrid.
- CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- (s.f.): «La enseñanza de la geometría en la secundaria», I.R.E.M. d'Aix Marseille (traducción de F. Villarroya).
- CONTRERAS, J. (1990): *Enseñanza, Currículum y Profesorado*. Akal, Madrid.
- FERNÁNDEZ ENGUITA, M. (1990): *La cara oculta de la escuela*. Siglo XXI, Madrid.
- FEYERABEND, P. K. (1974): *Contra el método*. Ariel, Barcelona.
- FREUDENTHAL, H. (1981): «Major problems of mathematics education», *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, 2, 133-150.
- (1983): *Didactical Phenomenology of mathematical structures*. D. Riedel, Dordrecht.
- GATTEGNO, C. (1967): *Aritmética con números en color* (9 vols.). Cuisenaire de España, Madrid.
- GLAESER, G. (1979): *Racines historiques de la Didactique des Mathématiques*. I.R.E.M., Strasbourg.
- GUTIÉRREZ, A. (ed.) (1991): *Área de Conocimiento. Didáctica de la Matemática*. Síntesis, Madrid.
- GUZMÁN, M. de (1987): «Cuestiones fundamentales sobre la enseñanza de la Matemática», *Thales*, 8, 13-26.
- KLEIN, F. (1931): *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (2 vols.). Biblioteca Matemática, Madrid.
- KUHN, T. S. (1971): *La estructura de las revoluciones científicas*. F.C.E., México.
- M.E.C. (1985): *Simposio: La enseñanza de la matemática a debate*. M.E.C., Madrid.
- SCHUBRING, G. (1991): «Categorías teóricas para la investigación en la historia social de la enseñanza de la matemática y algunos modelos característicos», *Epsilon*, 19, 100-104.
- SIERRA, M. (1990a): «Análisis de los planes de estudio de Matemáticas en las Escuelas Normales (1900-1990)» (en prensa).

- (1990b): «El Coloquio de Royaumont (1959)», *Epsilon*, 16, 31-34.
- UNESCO (1979): *Nuevas tendencias en la enseñanza de las matemáticas* (vol. IV). UNESCO, París.
- VERGNAUD, G. (1981): «Quelques orientations théoriques et methodologiques des recherches françaises en didactique des Mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2, 2, 215-232.
- (1985): «Didáctica y adquisición de la noción de volumen», *M.E.C. (1985)*, 161-173.