INDUCCIÓN DE TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS DIRIGIDOS Y SU REPERCUSIÓN EN LA CONVERGENCIA DE UNA RED

Joaquín Santisteban Martínez

Joaquín Santisteban Martínez.
Dr. en C. Matemáticas.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales (Albacete).

0. RESUMEN

PUEDE apreciarse la existencia de un notorio vacío en general, entre los tratamientos topológicos de sucesiones y redes, en base a que, como se sabe, una red representa la generalización de sucesiones sobre conjuntos parcialmente ordenados, pudiéndose tratar una sucesión convergente en términos de continuidad, sin más que considerar la topología del orden lineal sobre [N compactificado] con la adjunción del infinito (Alexandroff), no ocurriendo lo mismo con las redes debido en principio, a la peculiaridad de sus dominios. Nosotros verificaremos que, es posible topologizar cualquier conjunto dirigido, destruyendo en cierto modo, el carácter unilateral o de exclusividad con el que se ha venido contemplando a este tipo de conjuntos, circunstancia que ha derivado en un paralelismo de trato en cuanto a redes y sucesiones concierne. Llegamos así a identificar la convergencia de una red con la continuidad de la función red en un punto (mediante oportunas extensiones que denominamos de Alexandroff).

1. INTRODUCCIÓN

Antes de adentrarnos en el tema, recordemos y puntualicemos algunos conceptos que serán utilizados.

Def. 1. Diremos que un conjunto I es DIRIGIDO, si está dotado de un orden ($\leq$) parcial y filtrante (superiormente).

Def. 2. Llamaremos RED a toda aplicación: $\varphi: I \rightarrow M$, en donde M representa un conjunto cualquiera. El caso que realmente nos interesa es aquel en que el conjunto de llegada sea un espacio topológico X.

Def. 3. Siendo X topológico, se dirá que φ es convergente en $x \in X$, cuando las imágenes $\varphi(i)$ $i \in I$, se encuentran eventualmente en cada entorno de x.

Si $i^* \in I$ es un elemento maximal, es fácil ver que la condición de filtro lo convierte en máximo del conjunto I, con lo que la red converge trivialmente hacia $\varphi(i^*)$, cualquiera que sea la topología de X. Por otro lado, resulta también más sencillo demostrar que la condición necesaria y suficiente para que I carezca de elementos maximales, es que se verifique la siguiente propiedad de infinitud:

$$\forall\, i \in I, \exists\, i' \in I : i < i'$$

la cual, a su vez, permite reemplazar la condición clásica de eventualidad:

$$\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{N}(x), \exists\, i_{\mathcal{U}} \in I : i_{\mathcal{U}} \leq i \implies \varphi(i) \in \mathcal{U}$$

por la siguiente:

$$\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{N}(x), \exists\, i_{\mathcal{U}} \in I : i_{\mathcal{U}} < i \implies \varphi(i) \in \mathcal{U}$$

Veamos, en el siguiente apartado, como es factible la construcción de conjuntos dirigidos sin elementos maximales a partir de uno que los posea.

2. PROPIEDAD DE PROLONGACIÓN

Sea I un conjunto dirigido con elemento máximo i* y consideremos la reunión $I' = I \cup \mathbb{N}$ donde $\mathbb{N} = 1, 2, 3....$ El nuevo conjunto puede ser ordenado del modo que sigue: si dos elementos i_1, i_2 de I no son comparables en la ordenación ($\leq$) de I, tampoco lo serán en la ordenación ($\leq'$) de I'. Si $i_1, i_2, \in I$, con $i_1 \leq i_2$, diremos que $i_1 \leq' i_2$. Si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y si n_1 es menor o igual que n_2, pondremos $n_1 \leq' n_2$. Por último, si $i \in I$ y si $n \in \mathbb{N}$, haremos: $i < n$. (Ello entraña que no puede darse nunca el caso $n \leq i$). Queda así definido un orden filtrante en I'. Ahora bien, i* deja de ser maximal en la ordenación ($\leq'$); y por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ se tiene $n <' n + 1$, y si $i \in I$, cualquier $n \in \mathbb{N}$, tiene la propiedad: $i < n$. Consecuentemente, *I' carece de elementos maximales.*

Obsérvese que la extensión de I a I' cabe hacerla incluso, cuando I no posea elementos maximales; si bien este caso, no tiene interés alguno, ya que lo que se pretende es pasar de un conjunto I que no posea la propiedad de infinitud a uno I' que sí la posea.

Veamos a continuación, la posibilidad de considerar conjuntos de este tipo para tratar la convergencia de una red.

Proposición 1. Cuando I tiene elemento máximo, dada la red $\varphi: I \to X$, puede extenderse a una nueva red $\varphi': I' \to X$, convergente hacia el mismo límite $\varphi(i^*)$ de la primera. En efecto, basta poner: $\varphi'(i) = \varphi(i)$ cuando $i \in I$ y hacer $\varphi'(1) = \varphi'(2) = ... = \varphi(i^*)$, en los $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, si i^* es elemento maximal de I, ya se ha visto que la red $\varphi:I \to X$ converge hacia $\varphi(i^*) \in X$. Entonces, si $x \in X$ fuese otro límite de φ, el punto $\varphi(i^*)$ estaría en todo entorno de x, y si X es de Hausdorff, resulta necesariamente que $x = \varphi(i^*)$.

Veamos por último, utilizando todo lo anterior, como conseguir nuestro objetivo.

3. IDENTIFICACIÓN DEL CONCEPTO DE RED CONVERGENTE CON EL DE CONTINUIDAD, EN EL SENTIDO TOPOLÓGICO

Sea I un conjunto dirigido sin elementos maximales. Consideremos la familia Vi de subconjuntos I, definidos por: $V = \{i' \in I / i \leq i'\}$. En virtud de la restricción impuesta, es claro que no existe ningún $i^* \in I$ que esté a la vez en todos los Vi. Sin embargo, dado un elemento «a» no perteneciente a I, podemos construir el conjunto: $I^* = I \cup \{a\}$. Ahora bien, los Vi se encuentran también en I^*. Además, la familia: $G = \{Vi ; \{a\}\}\ i \in I$ constituyen una base de abiertos de una topología sobre I^*, que designaremos por τ^*, y una familia fundamental de entornos abiertos del punto $a \in I^*$ para dicha topología τ^*, está formada por los conjuntos: $\{Vi \cup \{a\}\}\ i \in I$.

El punto $a \in I^*$ pertenece a todos los $Vi \cup \{a\}$.

Sentado esto, sea $\varphi:I \to >X\tau$ una red con valores en un espacio $X\tau$ provisto de una topología τ, y supongamos que φ converja hacia un punto $x_o \in X\tau$. Podemos extender $\varphi:I \to X\tau$ a $\varphi:I^* \to X\tau$, haciendo: $\varphi(a) = x_o$. Y en estas condiciones, es fácil probar que φ converge hacia x_o sí, y sólo si, la función $\varphi:I^* \to X\tau$ es continua en el punto $a \in I^*$, cuando se dota a dicho conjunto de la topología τ^*. Es decir, la convergenica de la red se traduce en una cuestión de continuidad entre dos espacios topológicos. Por otra parte, el hecho de que los $\{Vi\} \subset I$ consituyan entornos reducidos de $a \in I^*$ para la topología τ^*, da sentido a la expresión «$i \in I$ tiende hacia a» $(i \to a)$, del mismo modo que tratándose de [N ponemos $(n \to \infty)$.

BIBLIOGRAFÍA

KELLEY, John: «Topología General». Eudeba.