Relime Vol. 1, Núm. 1, marzo1998 pp.40-55

Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?

Michèle Artigue

RESUMEN

Las investigaciones didácticas se han visto promovidas por las persistentes dificultades que los estudiantes tienen al introducirse en el campo conceptual del Análisis y el ambiente general de insatisfacción generado por los cursos de Cálculo. Después de sintetizar los principales resultados obtenidos, se analizan las medidas adoptadas en Francia, en la enseñanza bachillerato, para superar estas dificultades, a lo largo del siglo XX, y se investiga lo que se puede aprender de tal evolución histórica del currículo para la enseñanza actual.

ABSTRACT

Didactic research has been favored through the persisting difficulties that students have when they are introduced to the conceptual field of analysis, and the general atmosphere of dissatisfaction caused by calculus courses. After synthesizing the main results that have been obtained, we analyze the measures that have been taken in France during the 20th century, for high school teaching, for the purpose of overcoming these difficulties. Also, we investigate what can be learned from such a historical evolution of curriculum for current teaching.

RÉSUMÉ

Les recherches en didactiques ont été bénéficiaires des résistantes difficultés que pressentent les étudiants en s'introduisant dans le champ conceptuel de l'analyse et l'ambiante générale d'insatisfaction provoqué par les cours de calcul. Après avoir synthétise les principaux résultats obtenus, les activités développé en France s'analysent dans les cours du lycée, pour affronter ces difficultés, au long du XXe siècle, et on recherche ce qui peut s'apprendre dans tel évolution historique du curriculum pour l'apprentissage actuel.

I. Introducción

No es fácil para los estudiantes adentrarse en el campo conceptual del Análisis elemental. Las investigaciones didácticas desarrolladas en esta área, desde hace más de 15 años, lo demuestran con claridad (Tall, 1991, Artigue & Ervynck, 1992, Farfán, 1993). Además, permiten comprender mejor la naturaleza de las dificultades y obstáculos encontrados por los estudiantes, así como las razones del fracaso de las estrategias de enseñanza usuales, tanto las que reducen el Análisis a un cálculo algebraico algoritmizado como las aproximaciones teóricas y formales que se desarrollaron en el contexto de la reforma de las matemáticas modernas.

Por todas partes en el mundo se definen nuevos programas, nuevos currículos que tratan de encontrar una forma de introducirse en este campo conceptual que sea, al mismo tiempo, rica en significación y accesible. De hecho, las aproximaciones intuitivas basadas en el uso de tecnologías informáticas, calculadoras y computadoras parecen ser las más generalmente privilegiadas. ¿Cuáles son sus posibilidades y límites? ¿Qué se puede aprender de la experiencia de países donde aproximaciones semejantes se iniciaron hace ya unos años? En esta investigación se pretende profundizar la reflexión sobre tal asunto.

Primero se tratará de sintetizar los principales resultados que se pueden obtener de las investigaciones didácticas. No se pretende ser exhaustivo; esta síntesis sólo refleja una visión personal de “el estado del arte”, en lo que se refiere a los procesos de aprendizaje en este campo. Luego, se analizará las prácticas de enseñanza y su evolución, en particular las de la enseñanza bachillerato francesa, que ilustran bien las tendencias generales. Finalmente, a la luz de este estudio de caso, se examinarán las posibilidades y los límites de las aproximaciones intuitivas que hoy día se vuelven mayoritarias.

II. Las dificultades de los estudiantes con el campo conceptual del Análisis

Las investigaciones didácticas desarrolladas han mostrado la existencia de dificultades fuertes y persistentes. Éstas tienen orígenes diversos, pero se implican y refuerzan mutuamente, constituyendo redes complejas. Sin embargo, para facilitar la síntesis se agruparán según unas pocas categorías que no se pueden considerar independientes. Estas categorías son las siguientes:

• Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos de este campo conceptual: los números reales, las funciones y las sucesiones, objetos que están siempre en fase de construcción cuando se empieza la enseñanza del Análisis.
• Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de límite, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.
• Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

II.1. Dificultades ligadas a los objetos básicos del campo

No se puede considerar que los objetos básicos del Análisis son objetos nuevos para los alumnos que empiezan a estudiar esta materia. En Francia, por ejemplo, los números irracionales, las funciones lineales y afines se introducen en los grados 8º y 9º y, en el grado 10º, la noción de función se vuelve una noción central del programa de matemática. Sin embargo, no se puede considerar que estos objetos son ya objetos estables; al contrario, el Análisis va a desempeñar un papel esencial en su maduración y conceptualización.

Números reales

Diferentes investigaciones muestran claramente que las concepciones de los números reales que desarrollan los estudiantes no son apropiadas para el aprendizaje del Análisis (Robinet, 1986). Sus criterios de distinción entre los diferentes conjuntos de números quedan flojos y muy dependientes de las representaciones semióticas elegidas (Munyazikwiye, 1995). Además de esto, el uso creciente y poco controlado por la enseñanza de las calculadoras tiende a reforzar la asimilación: número real es igual a un número decimal e incluso a un número decimal con menos de 10 decimales.

Cuando se empieza la enseñanza del Análisis, los números reales son objetos algebraicos. Los estudiantes saben bien que su orden es denso, pero, según el contexto, pueden conciliar esta propiedad con la existencia de números precedente y sucesor de un real dado: por ejemplo, 0.999... se percibe a menudo como el predecesor de 1 y varias encuestas han mostrado que más del 40% de los estudiantes que ingresan a la universidad en Francia consideran que, si dos números A y B satisfacen la condición: $\forall\, n>0\ |A-B|<1/n$, no son necesariamente iguales, sino solamente muy próximos, infinitamente próximos, de cierta manera sucesores. La asociación entre los números reales y la recta real carece también de coherencia. Aun cuando *a priori* los estudiantes declaran aceptar el principio de una correspondencia biyectiva entre R y la recta, no están convencidos, por ejemplo, que tal o cual número preciso se puede colocar en la recta (Castela, 1996).

Funciones

En lo que se refiere a las funciones, hay una situación aún más compleja y parece difícil resumir en unas frases los resultados, tan numerosos y diversos, de las investigaciones didácticas. Este trabajo se limitará a presentar sólo las grandes categorías de dificultades identificadas en las investigaciones, categorías que, una vez más, no se pueden considerar independientes.

Dificultades ligadas a la identificación de lo que es realmente una función y al reconocimiento de que las sucesiones son también funciones

Parece bien establecido que los criterios utilizados por los estudiantes para comprobar el carácter funcional de un objeto matemático no corresponden necesariamente a la definición formal de la noción de función, aun cuando ellos pueden citar correctamente esta definición formal (Vinner & Dreyfus, 1989). Estos criterios dependen más de los ejemplos que más frecuentemente encuentran los estudiantes y que adquieren el estatuto de prototipos y de asociaciones tales como la asociación función/fórmula o la asociación función/curva. De aquí el hecho de que el mismo objeto matemático se puede considerar como función o no, según la forma de su representación semiótica: así, la función f:: $x \rightarrow f(x)$=2, definida de esta manera, no se reconocerá como función porque la expresión algebraica dada no depende de x, pero si se introduce por la vía de su representación gráfica, será reconocida como tal porque estará representada por una recta. Tales fenómenos han conducido a algunos investigadores a diferenciar, por una parte, lo que llaman la "definición del concepto" y, por otra, lo que llaman la "imagen del concepto" (Tall & Vinner, 1981).

Dificultades para sobrepasar una concepción puramente de tipo proceso de la noción de función y llegar a ser capaz de relacionar con flexibilidad sus dimensiones de proceso y de objeto para desarrollar una concepción procedimental (Tall & Thomas, 1991)

En efecto, las investigaciones muestran el salto cualitativo que existe entre dos niveles de conceptualización de la noción de función: el nivel de proceso y el nivel de objeto (Sfard, 1992), (Dubinsky, 1991, Dubinsky & Harel, 1992). Se puede relacionar este salto con las dificultades encontradas por los principiantes cuando tienen que considerar como iguales funciones definidas por procesos equivalentes pero diferentes, o cuando tienen que trabajar no con funciones particulares sino con funciones definidas por una propiedad general cualquiera. El trabajo en Análisis se vuelve muy difícil si los estudiantes sólo pueden apoyarse en una concepción de tipo proceso. Este trabajo, en efecto, necesita considerar a las funciones como objetos que se pueden incluir en procesos más complejos (como por ejemplo: integración y diferenciación), y también considerar no sólo objetos particulares sino clases de funciones, definidas por propiedades específicas: funciones continuas, *C1*, Riemann integrable, entre otros.

Dificultades para relacionar los diferentes registros semióticos (Duval, 1995) que permiten representar y trabajar con funciones

Estas dificultades han sido muy investigadas (Romberg, Carpenter, Fennema, 1994), tanto las que resultan de los procesos de traducción de un registro semiótico a otro, especialmente las dificultades de traducción del registro gráfico al registro algebraico (Schoenfeld, Smith, Arcavi, 1990, Dagher, 1996), como las dificultades ligadas al uso simultáneo de informaciones que se refieren a nociones diferentes dentro de un mismo registro, como, por ejemplo, en el registro gráfico la función y su derivada o sus primitivas. Además, las investigaciones han explicado muy bien cómo, en este dominio, las prácticas de enseñanza usuales tienden a reforzar las dificultades por su manera de manejar las representaciones gráficas y el estatuto dado al razonamiento gráfico.

Dificultades para trascender los modos de pensamiento numérico y algebraico

Esta categoría de dificultades aparece menos en la literatura didáctica, quizás porque a nuestros estudiantes se les da raramente la responsabilidad de los modos de pensamiento que deben utilizar o elegir. Sin embargo, es una dificultad esencial. Desde Euler por lo menos y su famoso libro *Introductio in analysis infinitorum*, el Análisis es un campo matemático organizado en torno a la noción de función, a los procesos de variación, al pensamiento funcional. Las investigaciones actuales en Francia (Pihoué, 1996) tienden a mostrar que, cuando ingresan al grado 11º, los estudiantes, que han oído de funciones durante tres años por lo menos, no perciben realmente cuál es el interés o la economía del pensamiento funcional. Para la mayoría, la modelación funcional queda esencialmente como algo relevante del contrato didáctico.

II.2. Dificultades ligadas al concepto de límite

Las dificultades que encuentran los estudiantes cuando entran en contacto con el campo del Análisis no se reducen a las que acabamos de mencionar. Las que están asociadas a la conceptualización de la noción de límite han sido muy investigadas por los didactas (cf. Cornu, 1991, para una primera síntesis). En lo que se refiere a este dominio específico, es necesario mencionar el papel desempeñado por la noción de obstáculo epistemológico introducida por el filósofo G. Bachelard (Cornu, 1983, Sierpinska, 1985, Sierpinska, 1988, Schneider, 1991). Para G. Bachelard, el conocimiento científico no se desarrolla en un proceso continuo, sino resulta del rechazo de formas previas de conocimiento que se constituyen en obstáculos epistemológicos. Los investigadores que se refieren a G. Bachelard formulan la hipótesis de que, en matemáticas también, algunas dificultades de aprendizaje, y especialmente las más persistentes, resultan de formas de conocimiento que han sido, durante un tiempo, coherentes y efectivas en los contextos culturales o escolares de los estudiantes. Plantean también la hipótesis de que estos obstáculos epistemológicos se encuentran a la vez en el desarrollo histórico del concepto y en el aprendizaje actual, a pesar de diferencias cognitivas y culturales evidentes, como si fuesen constitutivos de la génesis del concepto. De aquí, la amplia utilización que hacen del análisis histórico.

En lo que se refiere a los límites, los diferentes autores parecen estar de acuerdo por lo menos sobre los siguientes obstáculos epistemológicos:

• El sentido común de la palabra límite, que induce concepciones persistentes del límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso, o tienden a restringir la convergencia a la convergencia monótona,
• La sobre-generalización de las propiedades de procesos finitos a procesos infinitos; en otros términos, la aplicación del principio de permanencia de Leibniz.
• La fuerza de una geometría de las formas que impide que se identifiquen claramente los objetos involucrados en el proceso de límite y su topología subyacente. Eso, además, hace difícil entender la sutileza del juego entre el marco numérico y el marco geométrico fundamental en este proceso.

La resistencia de tal obstáculo epistemológico está confirmada por las dificultades que generalmente tienen los estudiantes, incluso los estudiantes avanzados, cuando se les plantea la pregunta siguiente, muy poco familiar: ¿por qué el mismo método que consiste en recortar una esfera en sectores transversales pequeñitos, aproximar cada sector por un cilindro, aproximar la esfera por el conjunto de cilindros pequeñitos, y luego pasar al límite, da una respuesta correcta cuando se emplea para calcular el volumen de la esfera y da una repuesta errónea cuando se emplea para calcular su área? Como la pila de cilindros se aproxima geométricamente a la esfera, la mayoría de los estudiantes no puede entender ¡cómo es posible que las diferentes magnitudes asociadas a la pila de cilindros no tengan como límite las magnitudes correspondientes para la esfera!

Como han demostrado las investigaciones, todos estos obstáculos se encuentran también en el desarrollo histórico del concepto, a pesar de las diferencias cognitivas y culturales mencionadas antes.

En la literatura didáctica en torno a los límites, la búsqueda de obstáculos epistemológicos ha desempeñado un papel importante, pero no se puede pensar que las dificultades que tienen los estudiantes se reducen a tales obstáculos epistemológicos. El concepto de límite, como el de función, tiene dos dimensiones: una de proceso y una de objeto, la posibilidad de manejar con eficacia estas dos dimensiones requiere procesos cognitivos: la encapsulación (según la teoría elaborada por Dubinsky), condensación y reificación (según la teoría elaborada por A. Sfard), cuya complejidad está hoy en día muy bien evidenciada. Este hecho contribuye a explicar por qué, en todos los países, los estudiantes encuentran tantas dificultades para identificar 0.999... y 1: la primera representación semiótica 0.999... es claramente de tipo proceso y la segunda de tipo objeto. Para considerar las dos como iguales, es necesario no caer en la trampa de estas diferencias semióticas y ser capaz de ver más allá del proceso descrito por 0.999..., el número creado por este proceso y distinto de él.

Otra categoría importante de dificultades viene de las características de la definición formal del concepto de límite, por lo menos en el Análisis estándar que se enseña hoy en día: su complejidad lógica y el hecho de que necesita invertir la dirección del proceso función que va de la variable x al valor de la función $f(x)$. Pero más allá de estas características formales, hay un punto esencial: entre una concepción intuitiva de los límites y una concepción formal, hay un salto cualitativo fundamental, también atestiguado por la historia del concepto. El concepto formal de límite es un concepto que, parcialmente, rompe con las concepciones previas de esta noción. Cuando aparece en la escena matemática, su papel como concepto unificador, como instrumento para fundamentar el campo del Análisis, como "*proof generated concept*" en el sentido de Lakatos (Lakatos, 1976), es quizás más importante que su papel como instrumento productivo para resolver problemas. Encontramos aquí una dimensión epistemológica del concepto cuya transposición didáctica en la enseñanza no es evidente. De hecho, investigadores como A. Robert (Robert & Robinet, 1996) tienen ahora la convicción de que tales características epistemológicas no se pueden transponer mediante procesos a-didácticos (Brousseau, 1986), es decir enfrentando a los estudiantes con problemas apropiados por resolver. Plantean la hipótesis de que una transposición eficaz necesita mediaciones específicas, de naturaleza meta-matemática. Estos investigadores no se refieren a Vigotski pero se pueden encontrar ciertas semejanzas con las distinciones introducidas por este autor entre diferentes tipos de conceptos, en cuanto a sus diferentes modos de formación.

II.3. Dificultades ligadas a la necesaria ruptura con el pensamiento algebraico

La actividad matemática en Análisis se apoya en competencias algebraicas, pero, al mismo tiempo, en la introducción a lo que vamos a llamar, a falta de una frase más adecuada, el pensamiento analítico; es necesario tomar cierta distancia respecto al pensamiento algebraico. En Francia, M. Legrand (Legrand, 1993) contribuyó a llamar la atención sobre este problema. Como lo ha mostrado claramente, la ruptura entre el pensamiento algebraico y el pensamiento analítico se organiza según varias dimensiones; las principales son las siguientes:

Primero, para entrar en el mundo del Análisis y convertirse en un analista eficaz, es necesario enriquecer su visión de la noción de igualdad y desarrollar nuevos métodos para probar igualdades. En este punto, es interesante notar que una reconstrucción similar de la noción de igualdad fue puesta en evidencia por la investigación didáctica, en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

Brevemente, en álgebra, cuando uno quiere demostrar que dos expresiones, $a(x)$ y $b(x)$, son iguales, la estrategia estándar es la siguiente: transformar una o las dos expresiones por equivalencias sucesivas, hasta que se obtengan dos expresiones evidentemente iguales, o transformar su diferencia (respectivamente su cociente) de la misma manera hasta obtener 0 (respectivamente 1). En Análisis, si no se reduce éste a su parte algebraizada, esta estrategia a menudo estará fuera de alcance o, por lo menos, no será la más económica, porque no se conocen los objetos del Análisis como los objetos del álgebra y porque muchas veces se trabaja con propiedades locales. Por eso, se tiene que desarrollar una visión de la igualdad asociada a la idea de "proximidad local infinita", es decir asociada al hecho de que, si para una distancia adecuada, $\forall \varepsilon > 0\ d(\mathrm{A}, \mathrm{B})<\varepsilon$, entonces A=B. Esta nueva relación con las igualdades da, de hecho, un papel predominante a las desigualdades y al modo de razonamiento local por condiciones suficientes.

Por ejemplo, si uno quiere demostrar que existe una vecindad de x_0 tal que $a(x) < b(x)$, no trata de resolver esta desigualdad como lo haría ciertamente en álgebra. La transforma, introduciendo expresiones sucesivas: $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... , $a_n(x)$ y reduciendo de modo adecuado la vecindad, si es necesario, para garantizar que localmente: $a(x)<a_1(x),<a_2(x)$ ... $<a_n(x)$ y esto hasta obtener que en cierta vecindad de x_0, puede asegurar que: $a_n(x)<b(x)$. Cada etapa del proceso requiere decisiones difíciles: es necesario aceptar cierta pérdida de información de $a(x)$, pero no demasiado porque uno quiere quedarse debajo de $b(x)$ y hay que combinar estas decisiones con el juego sutil de las vecindades.

Tomar conciencia de todos estos cambios y del crecimiento correlativo de la dificultad técnica del trabajo matemático, nos ayuda a comprender mejor la distancia que separa, por una parte, la capacidad de formular la definición formal de la noción de límite, ilustrarla con ejemplos y contraejemplos, representarla gráficamente, y, por otra parte, de dominar técnicamente esta definición, es decir, ser capaz de utilizarla como un instrumento operativo en la resolución de problemas.

Para acabar esta primera parte, se mencionará otra dimensión de la ruptura Álgebra/Análisis. La entrada en el mundo del Análisis obliga también a los estudiantes a reconstruir objetos matemáticos ya familiares pero en otros mundos: la noción de tangente nos proporciona un caso prototípico de tal reconstrucción. En la enseñanza bachillerato, los alumnos encuentran primero esta noción en el contexto del círculo. La tangente es un objeto geométrico que posee propiedades específicas:

• no corta al círculo,
• lo toca en solo un punto,
• en el punto de contacto es perpendicular al radio.

Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común. Además, para ayudar a los alumnos a darse cuenta del carácter abstracto de los objetos geométricos, los profesores subrayan que incluso si perceptivamente el círculo y la tangente parecen coincidir localmente, en realidad tienen solo un punto común. Esta concepción geométrica se puede generalizar aplicándose a otras curvas, por ejemplo parábolas, y conduce a la concepción algebraica de la noción de tangente como recta que tiene una intersección doble con la curva, que resulta operativa con las curvas algebraicas. Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en Análisis, caracterizada por una propiedad local: la recta con que la curva tiende a confundirse localmente (aproximación afín al orden uno) y cuya pendiente está dada por el valor de la derivada de la función asociada.

Una investigación reciente desarrollada por C. Castela (Castela, 1995) muestra que, por lo menos en Francia, el sistema educativo no es sensible a este problema y deja al trabajo privado de los estudiantes la necesaria reorganización de las concepciones. Esto tiene como consecuencia que, cuando acaban su bachillerato, la mayoría de los estudiantes se encuentran siempre en una fase intermedia, sin tener una concepción de la tangente globalmente coherente incluso si tienen éxito en los ejercicios usuales. La misma investigación muestra, sin embargo, que, cuando la enseñanza la toma a su cargo, esta reorganización ocurre y queda estable.

III. La evolución de los programas franceses

III.1. La reforma de 1902: una aproximación al Análisis pragmático y algebraico

Como en varios países, fue en los principios del siglo XX cuando la enseñanza bachillerato del Análisis se generalizó en Francia, con la reforma de 1902 (Artigue, 1996). Fue una introducción apoyada por los más famosos matemáticos de la época, tales como Poincaré, Borel y Hadamard, entre otros, que tuvo un éxito evidente, como lo muestran varios indicadores, por ejemplo el estudio ICME organizado 10años después (Beke, 1914).

Para los matemáticos que participaron en esta reforma, la enseñanza bachillerato del Análisis debía ser rigurosa, liberada de toda clase de metafísica (de toda clase de infinitesimales), pero, a la vez, debía ser accesible a los estudiantes y útil para las matemáticas y también para las ciencias físicas. La declaración siguiente que H. Poincaré hizo en su famosa conferencia sobre las definiciones de matemática (Poincaré, 1904) y el reporte sobre el estudio ICME ilustran estas posiciones con claridad:

> Sin duda es difícil para un profesor enseñar lo que no le satisface enteramente; pero la satisfacción del profesor no es el único objeto de la enseñanza; uno debe preocuparse primero de lo que es la mente del alumno y de lo que se quiere hacer de ella (Poincaré).
>
> Nuestra tarea principal es introducir las nociones del calculo diferencial e integral de modo intuitivo, partiendo de consideraciones geométricas y mecánicas, y progresivamente elevarse hacia la necesaria abstracción. Todas nuestras afirmaciones tienen que ser verdaderas, pero no tenemos que tener toda la verdad como meta (Beke).

Matemáticos como Poncairé estaban convencidos de que era posible desarrollar un currículo en Análisis coherente con estos principios, sin encontrar dificultades importantes y, en lo que se refiere a la noción de límite, se puede leer en el reporte del estudio ICME ya citado: “La noción de límite interviene con tanta frecuencia dentro de la enseñanza bachillerato e incluso en los ciclos inferiores (fracciones decimales ilimitadas, área del círculo, series geométricas, etcétera) que su definición general no debe ocasionar ninguna dificultad.”

De hecho, lo que se enseña, entonces, es un cálculo estándar, pero se tiene que estar consciente de que las aportaciones de este cálculo tanto en la resolución de problemas clásicos como en el nivel de rigor que se puede alcanzar, son tales que el interés de este nuevo cálculo parece evidente para todos.

III.2. La reforma de los años sesenta y la reforma de las matemáticas *modernas: hacia una aproximación formal al Análisis*

El currículo va a conservarse casi sin cambios hasta principios de los años sesenta. En este momento, el estructuralismo llega a ser predominante y se descalifica el positivismo que había inspirado la reforma de 1902. Los matemáticos han descubierto la potencia de las estructuras algebraicas y las preguntas de fundamentación adquieren cada vez más y más importancia. En Francia, es la edad de oro del grupo Bourbaki creado en 1937, con la ambición de renovar el curso de cálculo diferencial e integral de la licenciatura de matemáticas. La enseñanza del Análisis en bachillerato se percibe como un objeto obsoleto, poco riguroso, que no toma en cuenta las ideas centrales del campo.

La renovación del currículo secundario empieza en 1960, cuando se introduce una concepción del Análisis menos empírica y pragmática, con un enfoque más amplio en los conceptos fundamentales: funciones, límites, continuidad y en su dimensión estructural. Por la misma época, los cuantificadores, elementos de teoría conjuntista y estructuras algebraicas entran explícitamente en los programas.

Esto fue una verdadera renovación, reforzada en 1965, pero no fue una revolución. Un estudio cuidadoso de los libros de texto muestra que se está aquí en una fase de transición, que las novedades introducidas no trastornan la organización antigua, el mundo antiguo.

La reforma de las matemáticas modernas pasa definitivamente la página a principios de los años setenta. El Análisis no se puede considerar una apuesta de la reforma pero el espíritu de las matemáticas modernas va a influir de manera profunda en su enseñanza. Se vuelve esencialmente formal y teórico, se concentra más en problemas de definiciones y fundamentación que en la resolución de problemas. Este tipo de enseñanza será rechazado poco después por el movimiento global de la reforma de las matemáticas modernas.

III.3. El rechazo de las matemáticas modernas y la introducción de aproximaciones intuitivas

La última reforma de importancia resulta directamente del rechazo que acabamos de mencionar y ocurre en 1982. Se apoya en la reflexión y el trabajo experimental desarrollados en el seno de los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREMs, por sus siglas en francés) creados durante el periodo anterior. Se fundamenta en una concepción de las matemáticas como ciencia construida, dependiente de los contextos históricos y culturales de su desarrollo, que se está volviendo dominante. Además, trata de encontrar un equilibrio más adecuado entre la lógica del saber matemático y la lógica del desarrollo cognitivo del alumno. Trata también de encontrar un equilibrio más satisfactorio entre las dimensiones "instrumento" y "objeto" del análisis según la distinción introducida por R. Douady en 1986, es decir, entre el desarrollo interno y la estructuración matemática de los conceptos fundamentales del campo, por una parte, y su utilización como instrumentos para resolver problemas internos o externos al campo matemático, por la otra. Las proposiciones de la comisión conformada por representantes de los IREMs sobre Análisis publicadas en 1981 reflejan estas ambiciones. Y son las siguientes:

• Modificar las relaciones entre teoría y aplicaciones y organizar los programas en torno a la resolución de problemas de gran alcance y representativos de la epistemología del campo, tales como problemas de aproximación y optimización; el Análisis se ve, entonces, según Dieudonné, como un campo donde los procesos centrales son “aproximar, subestimar y sobrestimar”.

• Encontrar un mejor equilibrio entre el Análisis cualitativo y el Análisis cuantitativo, dando más importancia a problemas de tipo cuantitativo (por ejemplo, problemas de velocidad de convergencia, de aproximaciones numéricas de integrales o soluciones de

ecuaciones, etcétera) ayudándose de las calculadoras.
• Dar una importancia particular a ejemplos simples y típicos que luego podrán servir de referencia, y evitar todo interés demasiado precoz en las situaciones patológicas.
• Teorizar únicamente lo necesario, con niveles de formalización reducidos y accesibles a los estudiantes.
• Y también inscribir las relaciones entre enseñanza y aprendizaje en el marco teórico constructivista.

Las propuestas hechas se reflejan directamente en el nuevo currículo, publicado en 1982 y la estrategia general utilizada para introducir las diferentes nociones claves lo ilustran claramente:

• Sacar provecho de comportamientos típicos simples, a la vez numérica y gráficamente, con el apoyo de calculadoras para la parte numérica.
• Explotar estas exploraciones para producir definiciones cuantitativas adaptadas a los casos más simples y trabajar con ellas.
• Permitir que los estudiantes se den cuenta de las limitaciones de la primera aproximación introduciendo algunos casos más complejos.
• Introducir definiciones más generales y cualitativas.

Por ejemplo, la noción de derivada se introduce mediante la noción de desarrollo limitado al primer orden, explorando numérica y gráficamente el comportamiento local (en 0) de funciones típicas permitiendo sobrestimaciones de la forma: $| f(x+h) - f(x) - f'(x)h | \leq \mathrm{M}h^2$. Después, funciones que no admiten sobrestimaciones tan simples se introducen y conducen a la definición general de desarrollo limitado al orden uno.

La formalización está muy reducida. Sólo una definición formal se introduce para el límite en 0 y los comentarios que acompañan a los programas sugieren que los profesores tomen muchas precauciones en su introducción y que la utilicen poco, tanto en el curso como en los ejercicios. Como se podía prever, esta definición aislada, cuyo papel se diluye, va a desaparecer en la adaptación siguiente del currículo, tres años después, y el párrafo del programa dedicado a los límites muy modestamente se titulará: “el lenguaje de los límites”.

La actividad matemática se organiza en torno a la resolución de problemas: problemas de optimización, aproximación de números y funciones, modelos de variaciones discretas y continuas... La noción de derivada, sobre todo la de función derivada, instrumento esencial para la resolución de tales problemas, se vuelve la noción central.

El orden lógico: límites-continuidad-derivadas se rompe: se ha introducido un lenguaje mínimo intuitivo de los límites para fundamentar la introducción de la derivación, luego la noción de función derivada se vuelve la pieza maestra del edificio; la noción de continuidad casi desaparece, ya que, con la definición elegida para la noción de límite, cualquier función que tiene un límite en un punto de su dominio de definición es necesariamente continua en este punto.

La influencia del Análisis es ya evidente en el programa del grado 10, un año antes de su enseñanza oficial, como lo demuestra este extracto:

> Temas para actividades
> 1. Sobrestimaciones, subestimaciones de una función en un intervalo.
> 2. Búsqueda de máximos y mínimos asociados a problemas elementales de optimización.
> 3. Tasa de variación: encajamiento de esta tasa; desigualdades del tipo: $|f(y)-f(x)| \leq \mathrm{M}|y-x|$ para cualesquiera x, y; interpretación geométrica.
> 4 Empleo de las variaciones de una función para el estudio de ecuaciones $f(x)=b$ y desigualdades.

Este currículo es ambicioso. Como se ha apuntado antes, trata de privilegiar, desde el principio de la enseñanza, el valor epistemológico del Análisis como campo donde los procesos de aproximación desempeñan un papel esencial; trata de organizar la introducción progresiva de los estudiantes en este campo, en los niveles conceptual y técnico, a la vez. En tal introducción, las relaciones entre las representaciones semióticas algebraicas, numéricas y gráficas y las técnicas tienen un papel importante, y esto se señala explícitamente en los comentarios del programa. El Análisis que se enseña no es un Análisis formal, se aproxima al campo de manera intuitiva y experimental; además se nota claramente la ambición de no limitarlo a prácticas algebraicas.

El currículo se ha modificado en 1985, 1990 y 1993, para adaptarse a la democratización creciente de la enseñanza al nivel del liceo, pero el espíritu se ha mantenido, por lo menos en los términos en que se expresa en los programas oficiales. Por eso, se puede medir ahora los efectos a largo plazo de casi 15 años de tales aproximaciones intuitivas y experimentales.

IV Potencialidades y limitaciones de las aproximaciones intuitivas

Primero se deben apuntar algunos éxitos evidentes. Se limitará esta exposición a tres de ellos que, al parecer, son particularmente importantes.

Las aproximaciones intuitivas han hecho accesible este campo, hasta cierto punto, a todos los estudiantes. Este éxito no ha de considerarse como algo de poca importancia, sobretodo cuando tomamos en cuenta el hecho de que, hoy en día, la gran mayoría (aproximadamente 70%) de los estudiantes de una generación entra en liceos, sea clásicos o profesionales, y tiene, entonces, cursos de Análisis durante dos años.

Los estudiantes entran en contacto muy rápidamente con algunos problemas centrales de este campo, como los de variación, los de optimización y los de aproximación; el Análisis que se enseña no se reduce a su parte algebraica y, siguiendo los programas, los libros de texto tratan de dar una importancia real a las dimensiones numérica y gráfica de los conceptos y de las técnicas, a la dimensión cuantitativa del Análisis.

Las calculadoras, e incluso las calculadoras gráficas, son instrumentos usuales de los estudiantes, sin duda porque todo tipo de calculadora se puede utilizar en los exámenes nacionales o regionales, desde hace 15 años. El uso de las calculadoras ha permitido claramente hacer viables las aproximaciones numéricas y gráficas preconizadas por los programas.

Sin embargo, a pesar de estos éxitos, no se puede pensar que se ha encontrado una vía real para el aprendizaje del Análisis. Algunos de los problemas importantes no han sido resueltos y surgen problemas nuevos. Una vez más, esta exposición se concentrará en algunos de los que son particularmente sobresalientes.

• *El apoyo de las calculadoras tiene limitaciones evidentes y, además, su integración efectiva en la vida real de las clases sigue siendo insatisfactoria*

Como ya se mencionó, las calculadoras, e incluso las calculadoras gráficas, han tenido una gran difusión en la enseñanza bachillerato. En 1981, el Ministerio de Educación tomó la decisión de autorizar todo tipo de calculadora en los exámenes de bachillerato y esta situación permanece vigente hoy en día. Así, los estudiantes franceses pueden pasar el bachillerato con una calculadora gráfica y aun con una TI-92. Los programas mismos precisan que los alumnos de bachillerato deben tener calculadoras, los del liceo, calculadoras programables y que deben aprender a utilizarlas, en particular para estudiar funciones y sucesiones. Estas decisiones fueron tomadas para promover la integración institucional de estos instrumentos y contribuir a vencer ciertas resistencias previsibles de los profesores. Pero ahora, 15 años después, no se puede considerar que se haya logrado la anhelada integración a las prácticas de enseñanza. La mayoría de los profesores siguen considerando las calculadoras como instrumentos “privados” de los estudiantes y no se hacen cargo de los aprendizajes instrumentales necesarios. Quince años después siguen siendo más sensibles a las dificultades que les plantea esta integración que al apoyo que les proporciona para su trabajo de profesor. Las investigaciones recientes publicadas en los IREMs (Trouche, 1996) muestran los efectos negativos del uso no controlado en la enseñanza sobre las concepciones desarrolladas por los estudiantes, por ejemplo en lo que concierne al concepto de límite, las aproximaciones numéricas o la interpretación de las representaciones gráficas producidas por las máquinas. Además, cada vez más nos damos cuenta de que una enseñanza eficaz del Análisis con calculadoras necesita aprendizaje específico, conocimientos específicos (Artigue, 1996). El sistema educativo no reconoce fácilmente este hecho y tiene pocas ganas de consagrar a estos aprendizajes el tiempo y la energía necesarios.

• *Las dificultades de viabilidad de la dimensión de “aproximación” en Análisis*

La evolución reciente ha mostrado también las dificultades que ha tenido el sistema educativo con la dimensión de "aproximación" del Análisis. Como he mencionado antes, para el desarrollo de esta dimensión se necesita tomar cierta distancia con respecto a los modos usuales de pensamiento e integrar técnicas complejas cuyo dominio se puede pensar sólo a largo plazo. Los profesores encuentran problemas evidentes para organizar y preservar un “nicho ecológico” para tales prácticas matemáticas, ya que no pueden evitar la competencia entre las técnicas de aproximación y las técnicas algebraicas mucho más fáciles de aprender y manejar (Artigue, 1993). Por eso, a pesar de las exigencias formuladas en el texto de los programas, se nota un desequilibrio creciente entre aproximación y algebraización.

• *Las dificultades de viabilidad de una enseñanza centrada en la resolución de problemas de gran alcance y epistemológicamente significativos*

El currículo de 1982 quería organizar la enseñanza del Análisis alrededor de problemas de gran alcance y significativos. Se nota, por una parte, una vez más un desfase creciente entre estos anhelos expresados siempre en los programas, y, por otra, la organización y el contenido de los libros de texto. Los libros recientes más difundidos derivan hacia una acumulación poco estructurada de problemas limitados cuya resolución se descompone en tantas sub-preguntas que los estudiantes, simples ejecutantes de micro tareas, pierden todo acceso a su problemática global. Quizás se puede ver aquí una adaptación más o menos consciente del sistema educativo a cambios introducidos por la democratización creciente de la enseñanza bachillerato. Pero, más allá de esto, tal evolución muestra claramente la fuerza de los procesos de transposición didáctica que condicionan el currículo real (Chevallard, 1985) y tienden siempre a llevar el funcionamiento del sistema hacia los equilibrios anteriores.

• *Las dificultades que resultan de la creciente falta e de estructuración*

Una vez más, estas dificultades se notan con claridad al leer los libros de texto recientes más difundidos. El estatuto de los objetos, de las nociones, de las aserciones queda flojo. Las definiciones formales han sido rechazadas, remplazadas por expresiones más o menos precisas en lenguaje natural. En realidad estas expresiones sólo tienen la apariencia de la lengua natural: no tienen nada que ver con el lenguaje vernáculo de nuestros estudiantes. Y no permiten un control eficaz de sus prácticas. Además, como los cuantificadores están situados parcialmente al principio de la frase, parcialmente al fin, estas formulaciones no ayudan necesariamente a los estudiantes a comprender el juego sutil de las cuantificaciones en las definiciones. Los teoremas se aceptan sobre la base de unas exploraciones y no son siempre mencionados como tales. Al leer estos libros de texto, se tiene la impresión incómoda de que la coherencia inducida por las coerciones lógicas del saber matemático ha desaparecido sin que otra forma de coherencia sólida la reemplace.

Para muchos de nuestros estudiantes, lo que estamos desarrollando, más allá de la parte algebraica estándar del Análisis, es quizás más un mundo de bricolaje que el mundo matemático que queríamos empezar a construir.

V. Conclusión

Las investigaciones didácticas muestran con toda evidencia que no es fácil para los estudiantes entrar en el campo conceptual del Análisis, cuando éste no es reducido a su parte algebraizada, sino que pretende el desarrollo de los modos de pensamiento y de las técnicas que están, hoy en día, fundamentadas en él.

La introducción generalizada del Análisis, con la reforma de 1902, dotó a la enseñanza bachillerato de instrumentos eficaces para resolver problemas clásicos, tanto en matemáticas como en las ciencias físicas. Esta introducción fue claramente un éxito pero sus propósitos quedaban limitados y lo que se enseñaba a esta época era esencialmente un cálculo diferencial e integral, es decir la parte más accesible del Análisis. Con las reformas de los años sesenta, el currículo en Análisis se dio nuevos anhelos: el Análisis se independizó del álgebra y su dimensión como objeto emergió de su dimensión como instrumento. Poco después, la reforma de las matemáticas modernas impuso una visión formal del campo donde los planteamientos relativos a sus fundamentos tendían a volverse dominantes. Esta visión formal fue rechazada con la contrarreforma de 1982; una nueva organización de este campo conceptual en torno a problemas de variación y aproximación constitutivos de su historia emergió, y las aproximaciones intuitivas y experimentales fueron preconizadas.

Estas aproximaciones intuitivas y experimentales se impusieron progresivamente y hoy en día aparecen como la única puerta de entrada razonable, tanto más que los cursos de Análisis no están ya reservados a una élite matemática o social. Pero se debe confesar que no han hecho milagrosamente fácil el aprendizaje de los principios del Análisis, ni tampoco su enseñanza satisfactoria completamente. Han permitido resolver algunos problemas didácticos pero, a largo plazo, tienden a generar otros, como lo demuestra el estudio del caso francés. Se tienen que controlar mejor estas aproximaciones intuitivas si no se quieren ver las facilidades aportadas en los primeros contactos que generan obstáculos serios a aprendizajes ulteriores. Las actuales investigaciones didácticas en Francia se dedican más y más a estos problemas que se están volviendo esenciales15 años después de la contrarreforma y conciernen tanto al liceo como a la transición entre el liceo y la universidad.

El estudio de los procesos de transposición didáctica en este campo muestra también las dificultades encontradas cuando tratamos de aprovechar resultados didácticos o experimentaciones que localmente han tenido éxito, para organizar cambios curriculares sustanciales y más globales. Para tal aprovechamiento, los enfoques cognitivos y epistemológicos dominantes hoy en día, son claramente insuficientes. Es necesario integrar aproximaciones al campo didáctico que nos permitan tomar en cuenta mejor el papel desempeñado por las coerciones y fuerzas institucionales y culturales en los problemas de aprendizaje y enseñanza.

Referencias bibliográficas

Commission interIREM Université (1990). Enseigner autrement les mathématiques en DEUG SSM première année. IREM de Lyon.

Artigue, M. (1991a). Analysis". *Advanced Mathematical Thinking*. 167-198. Kluwer Academic Press.

Artigue, M. & Ervynck, G. (Eds.) (1992). Proceedings of Working Group 3 on students' difficulties in calculus. *ICME 7. Université de Sherbrooke*.

Artigue, M. (1993). Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM*. vol. 11, pp. 115-139.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. P. Gomez (Ed.) (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Artigue, M. (1996). Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée 1902-1994. *Les sciences au lycée - Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. B. Belhoste. H.Gispert et N.Hulin (Eds.). (pp. 197-217). Paris: Ed. Vuibert.

Beke, E. (1914). Rapport général sur les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des établissements secondaires. *L'Enseignement Mathématique*. Vol. 16, pp. 246-284.

Bachelard. G. (1937). *La formation de l'esprit sceintifique*. Paris: J.Vrin.

Brousseau. G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 7.2. pp. 33-116.

Castela. C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures - un exemple concret: celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 15.1, pp. 7-47.

Castela. C. (1996). *La droite des réels en seconde: point d'appui disponible ou enjeu clandestin?* IREM de Rouen..

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique. *La Pensée Sauvage*. Grenoble.

Commission interIREM Analyse (de.). (1981). *L'enseignement de l'analyse*. IREM de Lyon.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limit: conceptions et obstacles*. Thèse de doctorat. université de Grenoble Y.

Cornu, B., Limits. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. pp. 153-166. Kluwer Academic Press.

Dagher. A. (1996). Apprentissage dans un environnement informatique: Possibilité, nature, transfert des acquis. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 30.4. pp. 367-398.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. vol. 7.2, pp. 5-32.

Dubinsky, (Ed.) (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, En *Advanced Mathematical Thinking*, D.Tall (Ed.). Kluwer Academic Publishers. pp. 95-123.

Dubinsky, Ed & Harel, G. (Eds.) (1992). The concept of Function: Some aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, No. 25.

Duval, R., (1995). Semiosis et pensée humaine- registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Ed. Peter Lang, Berne.

Farfán, R. M. (Ed.) (1993). IV Seminario Nacional de Investigación en Didáctica del Cálculo, Monterrey: mayo 1993, Cinestav-IPN, Mexico.

Lakatos I. (1976). Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery, Cambridge: Cambridge University Press.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères IREM*. Vol. 10, (pp. 123-159).

Munyazikwiye, A. (1995). Problèmes didactiques liés aux écritures de nombres, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 15/2, pp. 31-62.

Pihoué, D. (1996). L'entrée dans la pensée fonctionnelle en classe de seconde, *DEA*, Université Paris 7.

Poincaré, H. (1904). Les définitions en mathématiques, *L'Enseignement Mathématique*. Vol. 6, pp. 255-283.

Robert, A. & Robinet, J. (1996). Prise en compte du meta en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 16/2, pp. 145-176.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modèles en ont les élèves, *Cahier de Didactique des Mathématiques* No. 21, IREM Paris 7.

Romberg, T., Carpenter, T., & Fennema, E. (1994). *Integrating research on the graphical representation of functions,* Hillsdale, N. J. Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A., Smith, J.& Arcavi, A. (1990). Learning. the microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. En R.Glaser (De.). *Advances in Instructional Psychology.* Vol. 4, Hillsdale N.J. Lawrence Erlbaum Associates.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 11 2/3, pp. 241-294.

Sfard, A. (1992). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics* No. 22, pp. 1-36.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 6.1, pp. 5-67.

Sierpinska, A. (1988). *Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique, Actes du Colloque: Construction des savoirs: obstacles et conflits,* Montréal, CIRADE.

Tall, D. (ed) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Press.

Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics* Vol. 22, pp. 125-147.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* Vol. 12/2, pp. 151-169.

Trouche, L. (1994)Calculatrices graphiques la grande illusion? *Repères IREM* No. 14, pp. 39-55.

Trouche, L. (1996). *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un "environnement calculatrice" étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*. Doctoral thesis, Université de Montpellier 2.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions in the Concept of Function, *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 20/4, pp. 356-366