Relime Vol. 4, Núm.1, marzo, 2001, pp.63-92

Múltiplos, divisores y factores: Explorando la red de conexiones de los estudiantes[•]

Rina Zazkis[ϕ]

RESUMEN

Este estudio es una contribución a la investigación, en desarrollo, sobre el entendimiento y el aprendizaje de la introducción a la teoría de números de futuros profesores. El interés central de este artículo son los conceptos fundamentales de múltiplos, divisores y factores; los significados que construyen los estudiantes de estos tres conceptos, así como los vínculos entre las tres nociones y las conexiones con otros conceptos de la teoría elemental de números, tales como números primos, descomposición en números primos y divisibilidad. Enfocándose en las conexiones hechas entre los conceptos se analizaron diecinueve entrevistas clínicas de estudiantes de un curso para futuros profesores, donde se les pidió ejemplificar y explicar los conceptos, a la vez que aplicar sus concepciones en diversas situaciones problema. Un examen a las respuestas de los estudiantes mostró que los significados que asignan a los conceptos, a menudo, difiere de los significados que asignan los matemáticos al contexto de la teoría de números, y que los vínculos entre los conceptos son con frecuencia mínimos o incompletos.

ABSTRACT

This study is a contribution to the ongoing research on preservice teachers' learning and understanding of introductory number theory. The focus of this article is on fundamental concept of factor, divisor, and multiple; the meaning students construct of these three concepts; and students' links among the three notions as well as their connections to other concepts of elementary number theory, such as prime factors, prime decomposition and divisibility. Nineteen clinical interviews in which students in a course for preservice teachers were asked to explain and exemplify the concepts and to apply their understanding in several problem situations were analysed focusing on the connections students made among the concepts. An examination of students' responses showed that the meaning they assign to the concepts is often different from the meaning assigned by mathematicians in the context of number theory, and that their links among the concepts are often weak or incomplete.

RÉSUMÉ

L'étude ci-joint est une contribution à une recherche qui se déroule sur la compréhension et l'apprentissage de la théorie introductrice des nombres en futurs professeurs. L'intérêt central de cet article c'est les concepts fondamentaux de multiple, diviseur et facteur; les signifiés que les élèves construisent sur ces trois concepts, les liens entre les trois notions, du même avec les connexions avec d'autres concepts de la théorie élémentaire de nombres, telle que les nombres premiers, décomposition en nombres premiers et divisibilité. Envisageant les connexions faites entre les concepts, on a analysé dix-neuf interviews cliniques d'étudiants dans un cours de futurs professeurs, on leur a demandé d'exemplifier et expliquer les concepts, en plus d'appliquer ses conceptions de diverses situations-problème. Un contrôle des réponses des étudiants a montré que les signifiés qu'on assigne aux concepts très souvent diffère des signifiés que les mathématiciens assignent dans le contexte de la théorie de nombres, et les liens entre concepts sont assez souvent faibles et incomplets.

RESUMO

Este estudo é uma contribuição a uma investigação em progresso relacionado ao entendimento e aprendizagem da teoria introductoria de números para futuros professores. O interesse primordial deste ortigo são os conceitos fundamentais de múltiplo, divisor e factores; os significados que constroiem os estudantes deste três conceitos , os vínculos entre as três noções assim como as suas conexões com os outros conceitos da teoria elemental de números, tais como: números primos, descomposição en números

---

[•] La publicación de este artículo es posible gracias al convenio entre Relime y CBMS (Conference Board of the Mathematical Science) Issues in Mathematics Education. Versión castellana de Factors, divisors and multiples: Exploring the web of the students´ connections, Zazkis, R. (2000). Vol. 8, 210-238.

[ϕ] Simon Fraser University, Canadá.

VERSIÓN PRELIMINAR

primos e divisibilidade. Fazendo enfoque mas conexões feitas entre os conceitos fez-se análises a dezanove entrevistas clínicas de estudantes mum curso de futuros professores, onde se pediu-lhes dar exemplos e explicar os conceitos e utilizar os concepções en diversas situações do problema em análise. Uma simples inspeção das respostas dos estudantes mostrau que os significados que atribuiam aos conceitos de vez en quando difere dos significados que atribuiam os matemáticos no contexto da teoria dos números, e que os vínculos entre conceitos são as vezes frágil ou incompletos.

El conocimiento matemático para futuros profesores de escuela elemental ha sido el foco central de estudios recientes. Sin embargo, el estudio del entendimiento de conceptos relacionados a la introducción a la teoría de números para futuros profesores ha recibido poca atención. Investigaciones previas indican que el entendimiento de los conceptos básicos de la introducción a la teoría de números y la conexión entre estos conceptos todavía debe explorarse (Ferrari, 1997; Zazkis & Campbell 1996a, 1996b). El objetivo de este estudio es proporcionar un análisis de fina textura sobre el entendimiento, en futuros profesores, de un limitado conjunto de conceptos relacionados con la teoría de números -múltiplos, divisores y factores-.

1. SINOPSIS DE INVESTIGACIONES PREVIAS

La investigación sobre cuestiones de entendimiento y de aprendizaje relacionados a la teoría de números no ha sido tan extensa como la investigación en otros temas centrales de cursos de matemáticas para los futuros maestros de escuelas elementales, tal como números racionales o geometría. Esta investigación se preocupa por el entendimiento y el aprendizaje de conceptos como números primos y complejos, múltiplos, factores y divisores, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, reglas de divisibilidad y divisibilidad, división con residuo y el algoritmo Euclidiano, la factorización con primos y el Teorema Fundamental de la Aritmética, entre otros. Investigaciones antes realizadas (Campbell & Zazkis, 1994; Zazkis & Campbell, 1996a) han revelado que el entendimiento de los futuros profesores de muchos de estos conceptos es incompleto, debido al desfase en su entendimiento de conceptos de “prerrequisito” , tales como números naturales y racionales o distributividad. Además, se percibe que tienen dificultad entre la conexión de divisibilidad vista en términos de multiplicación y la divisibilidad vista en términos de división. También, se observó una ausencia o mínima conexión entre los conceptos de la teoría de números en la representación de conocimientos. Por ejemplo, cuando se representaba un número en su descomposición en primos, algunos estudiantes no reconocieron estos primos como los divisores del número; la divisibilidad de *a* entre *b* no se reconoció como una división que implica un sobrante cero.

Esta investigación pionera apunta hacia la complejidad de temas involucrados en el aprendizaje de la teoría de números y hacia la necesidad de investigar, con más detalle, el entendimiento de conceptos específicos en los estudiantes. Estudios consecuentes, centrados en el entendimiento de temas específicos, tales como el Teorema Fundamental de la Aritmética (Zazkis & Campbell, 1996b) y números pares e impares (Zazkis, 1998a) resaltan la influencia de las creencias intuitivas que posee el estudiante sobre los números y sus estructuras cuando tiene que tomar decisiones ante situaciones de resolución de problemas. Por ejemplo, muchos estudiantes piensan que un número “grande” debe tener un factor primo “pequeño”, como 3, 7 u 11. Esta creencia coexiste en la percepción del estudiante que concibe la existencia de números primos “muy grandes”.

Otros estudios investigaron estrategias de resolución de problemas asociadas al concepto de divisibilidad en los estudiantes del primer año de ciencias computacionales (Ferrari, 1997). Se ha observado que los estudiante frecuentemente recurren a los cálculos al discutir la divisibilidad y, muy a menudo, no son capaces de basar sus justificaciones en la estructura de un número dado. Además, Brown, Thomas y Tolias (1999) reflexionaron sobre la complejidad del entendimiento, en los estudiantes, sobre múltiplos y mínimos comunes múltiplos. En otros estudios se reportó la resistencia de los estudiantes a operar con números representados por sus factores primos, por lo que se sugirieron estrategias para motivar a los alumnos a poner mayor atención a estas representaciones y apreciar así la información que éstas ofrecen (Brown, 1999).

En general, las investigaciones antes realizadas indican la necesidad de estudiar dos problemas relacionados con la construcción del conocimiento de los estudiantes en el área de la teoría elemental de números:

1. El problema de reaprendizaje:

¿Cuáles son las nociones relacionadas a la teoría de números que tienen los futuros profesores antes del curso “Principios de Matemáticas para profesores”? ¿Cuáles son las creencias intuitivas sobre números y su estructura? ¿Cómo

VERSIÓN PRELIMINAR

influyen los conocimientos previos y las intuiciones al aprendizaje de la teoría elemental de números? ¿Qué pedagogía puede ayudar a remplazar las interpretaciones intuitivas incorrectas con representaciones apropiadas de un concepto matemático?

2. El problema de conexión del conocimiento:
¿Cómo se conectan los componentes del conocimiento? ¿Qué vínculos están incompletos o ausentes? ¿Qué metodología puede ayudar a los futuros profesores a hacer conexiones entre los conceptos de la teoría de números?

Este estudio se concentra en el segundo problema, atendiendo a las conexiones entre múltiplos, divisores y factores, y al entendimiento que de estas conexiones tienen los estudiantes.

2. UNA PERSPECTIVA DE RED SOBRE EL CONOCIMIENTO

Los conceptos matemáticos no son estudiados aisladamente, sino en relación a otros conceptos matemáticos. Los investigadores han ilustrado esta idea usando la metáfora de una red. Hiebert y Lefevre describen el conocimiento conceptual como "una *red* conectada de conocimiento, en donde vincular relaciones es tan sobresaliente como las piezas discretas de información. Las relaciones permean las proposiciones y hechos individuales, de tal forma que todas las piezas de información se vinculan a alguna *red*" (las itálicas son mías, Hiebert & Lefevre, 1986, pp. 3-4). La idea de red sugiere no sólo conexión sino también la complejidad del conocimiento.

En la década pasada, con el incremento de popularidad y de acceso a la World Wide Web (en adelante WWW), las ideas sobre red y vinculación se han vuelto a revisar, introduciendo nuevos significados a palabras familiares. Entonces, la web se convirtió en metáfora de conocimiento. Al tomar prestada la metáfora de la WWW para discutir una red de conocimiento, la metáfora se ha ido extendiendo. Además, de la conexión y la complejidad, la WWW proporciona una estructura subyacente a través de la cual el aprendizaje es navegable. Consecuentemente, "la idea de quedar atrapado en la red significa dar a conocer la presencia de una estructura que los aperndices puedan reconstruir y obtener como resultado para apoyo – de la forma que consideren apropiada, con el fin de construir significados sobre algún concepto matemático" (Noss & Hoyles, 1996, p. 108).

La aceptación de la estructura subyacente cambia la discusión de la "construcción de conocimiento" de los estudiantes (Davis, Maher, & Noddings, 1990), que había sido predominante en la investigación en educación matemática, a "la construcción de significados" (Noss & Hoyles, 1996). A pesar de que Noss y Hoyles usaron y ejemplificaron la idea de quedar atrapados en ambientes computarizados, sugirieron que la idea se podía aplicar también a ambientes no computarizados. Este artículo pretende analizar la construcción de significados, en los estudiantes, de varios conceptos introductorios en la teoría de números a través de la perspectiva de la red.

En esta discusión la estructura subyacente se asume como el contenido matemático. En el área del conocimiento discutido en este escrito, los vínculos matemáticos que apoyan la estructura subyacente del conocimiento son simples y claros. La conexión matemática entre un múltiplo, un divisor y un factor se expresa en la equivalencia de los siguientes tres enunciados; para cualquiera dos números naturales *A* y *B*:

B es un factor de *A*
B es un divisor de *A*
A es un múltiplo de *B*

Existen formas distintas de expresar la misma relación:

B divide a *A*
A es divisible entre *B*

Investigaciones sobre el entendimiento de la divisibilidad, que tienen los estudiantes, han sido el foco central en los primeros estudios reportados por Zazkis y Campbell (1996a). Se ha encontrado que "conexiones insuficientes entre [el punto de vista de divisibilidad en términos de división y el punto de vista de divisibilidad en términos de multiplicación] son fuente de discordancia cognitiva para la mayoría de los participantes" (p. 562). Para continuar con la segunda parte de esta discrepancia, este estudio se enfoca al entendimiento, en los estudiantes, de tres conceptos fundamentales: múltiplo, divisores y factores y su conexión entre estos conceptos. La intención inicial en este estudio es enfocarse en el entendimiento de los vínculos matemáticos que se da en el estudiante, esto es, los vínculos que están

VERSIÓN PRELIMINAR

implícitos en el contenido. Sin embargo, se torna evidente en el análisis la imposibilidad de ignorar otro conjunto de vínculos–conexiones con el conocimiento previo del estudiante.

3. METODOLOGÍA

3.1 Escenario y participantes

Los participantes del estudio fueron diecinueve voluntarios de un grupo de setenta y dos profesores de la escuela elemental para futuros profesores, inscritos en el curso llamado "Principios de Matemáticas para profesores". A pesar del tamaño del grupo, el curso concentró el trabajo en un grupo pequeño, así como en la metodología de resolución de problemas. A menudo, los conceptos nuevos se presentaron, a manera de resumen, sobre la base de las experiencias de los estudiantes. Se estimulaban y se apoyaban las conversaciones entre los alumnos al verificar y al resaltar sus conjeturas y sus explicaciones escritas y orales de lo que pensaban. Al mismo tiempo que se efectuaban las entrevistas, los estudiantes completaban su trabajo en el capítulo correspondiente a la introducción a la teoría de números. Los temas incluían números compuestos y primos, factorización en números primos, el algoritmo de la división, divisores, factores y múltiplos, reglas de divisibilidad y divisibilidad, así como mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Se proporcionaron definiciones matemáticas precisas para estos conceptos, poniendo énfasis en el entendimiento más que en la memorización de tales definiciones, pues se esperaba que los estudiantes fueran capaces de describir y de explicar estos conceptos al aplicarlos en situaciones problema.

3.2. Entrevista clínica

Aquí se analizaron los resultados de las entrevistas correspondientes a dos conjuntos de preguntas explícitas concernientes a múltiplos, factores y divisores. De manera ocasional, se proporciona información adicional al trabajo operacional de los estudiantes para apoyar los datos de las entrevistas.

Conjunto de Preguntas 1
Observa los siguientes términos:
Número entero, números naturales, suma, producto, divisor, factor, número primo, número compuesto, múltiplo (se presenta una tarjeta con esta lista).
¿Te suenan familiares? ¿Qué significa cada una de esas palabras? ¿Puedes ejemplificarlas?

Conjunto de Preguntas 2
¿Cuáles son los factores primos de 117? ¿Puedes listarlos todos?
¿Cuáles son los factores de $117=3^2x13$? ¿Puedes listarlos todos?
¿Cuáles son los divisores de $117=3^2x13$? ¿Puedes listarlos todos?
¿De qué número 117 es un múltiplo ?
¿117 es múltiplo de 26?
¿Puedes dar ejemplo de un múltiplo de 117?
¿Tienes alguna observación?
¿Puedes pensar en un factor que no sea divisor?
¿Puedes pensar en un divisor que no sea factor? ¿Puedes explicarlo?
¿Puedes pensar en un número que sea tanto múltiplo como divisor de 117? ¿Algún otro?

En los conjunto de interrogantes, las preguntas específicas fungieron como guías, más que para establecer un orden o fraseo. No todas las preguntas se presentaron a todos los entrevistados, además se requirió de utilizar distintos niveles de clarificación en las diferentes entrevistas. El entrevistador hizo el intento de encadenar las preguntas con experiencias anteriores del estudiante durante la entrevista, por consiguiente, las preguntas reales variaron. De acuerdo con Ginsburg (1981, 1997) la manera improvisada de preguntar es parte integral del método de entrevista clínica.

El Conjunto de Preguntas 1 intenta delinear los significados que ha construido el estudiante de los conceptos fundamentales de la teoría de números. Se seleccionaron las preguntas que presentan los términos de manera conjunta y no uno por uno para así permitirle al entrevistado escoger el orden en el cual exponer los conceptos y, también, para proporcionar una oportunidad de mostrar las conexiones entre los conceptos, al discutirlos entre todos.

El Conjunto de Preguntas 2 intenta investigar los significados que posee el estudiante de los conceptos de

VERSIÓN PRELIMINAR

factores, divisores y múltiplos, así como las conexiones entre ellos. Este conjunto de preguntas fue diseñado apegándose a los hallazgos de un estudio anterior que sugirió que la equivalencia entre factores y divisores aún no llegaba a comprenderse (Zazkis & Campbell, 1996a).

La habilidad de los estudiantes para dirigir las preguntas del Conjunto 2 dependía de los significados que habían construido de los conceptos. Se volvió evidente, en el proceso de la entrevista, que en muchos casos el entrevistador y el entrevistado no compartían un significado en común, particularmente para los conceptos de divisor y múltiplo. En esos casos el entrevistador recordaba al participante sus actividades durante la clase y el significado matemático asignado al contexto de la teoría de números. Al parecer, la intervención necesaria del entrevistador fue mínima.

3.3. Directriz para el análisis

El Conjunto de Preguntas 2 fue diseñado de tal forma que se pudiera contestar sin ningún esfuerzo, atendiendo a las conexiones entre los diferentes conceptos matemáticos, aunque también se podía hacer un acercamiento sin atender a dichas conexiones. Aproximaciones más inmediatas y notables resultaron al atenderse las relaciones entre conceptos, por lo tanto, las estrategias escogidas por los estudiantes sirvieron como indicador de haber construido o no un vínculo entre los conceptos.

Por ejemplo, al considerar la descomposición prima de $117 = 3^2 \times 13$, los factores primos de 117 son evidentes. Todos los factores de 117 pueden listarse considerando combinaciones de todos los factores primos, dibujando árboles de factores, o por ensayo y error. El primer acercamiento se tomó como demostración de haber entendido el vínculo entre factores y factores primos. Además, al listar los divisores de 117, se puede confiar en la lista de factores hecha con anterioridad, o intentar diferentes cálculos para encontrar qué división resulta de un número entero. Este primer acercamiento se tomó como indicador de un vínculo entre factor y divisor, del significado que construyeron los estudiantes. Similarmente, para considerar si 117 es un múltiplo de 26, se puede confiar en la lista de factores ya efectuada, o ignorar esta lista y orientar la pregunta a observar la paridad o imparidad de estos números, o regresar a los cálculos. La atención puesta en la información precedente referente a divisores y factores de 117 sirvió como indicador de la existencia de un vínculo entre estos conceptos en la mente del estudiante.

En general, desde la perspectiva que el conocimiento individual está conectado, los vínculos pueden verse como conexiones entre diferentes fragmentos o aspectos del conocimiento. Como se mencionó, la intención inicial es describir en qué medida los estudiantes aprovechan los vínculos matemáticos entre los conceptos para dirigir las preguntas. Las aproximaciones de los estudiantes demostraron en qué grado el significado de vínculos de estructuras matemáticas se construyeron en su mente. Durante el análisis otro conjunto substancial de conexiones apareció, el de conexiones con el entendimiento previo del estudiante y con su experiencia escolar.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En lo siguiente describo las respuestas de los estudiantes al Conjunto de Preguntas 1 y 2. Discutiré sectores de las respuestas y de los significados matemáticos de los estudiantes en relación a la “estructura subyacente” del significado matemático convencional. No deseo hacer declaraciones sobre la generalidad de los fenómenos observados. Sin embargo, algunas regularidades son reportadas para sugerir cuales respuestas pueden ser identificadas como comunes en lugar de aleatorias.

4.1 Asignando significado al concepto de factor

El concepto de factor pareció ser el menos problemático de los tres conceptos discutidos. El análisis inicial de las respuestas de los estudiantes sugirió que la mayoría ejemplificó y describió correctamente el concepto. Un análisis profundo posterior identificó varios aspectos distintos en la interpretación del concepto en el estudiante, lo que insinúa que su entendimiento podía ser incompleto.

A excepción de uno, los estudiantes presentaron en sus ejemplos un par de factores en lugar de uno solo. Los siguientes diálogos de las entrevistas ejemplificaron esta tendencia. La preferencia de los estudiantes por discutir factores, en plural, pareció significante, ya que el concepto les fue presentado en singular. A continuación se presentan diversas explicaciones de los estudiantes sobre el concepto de factor y se analizan las posibles fuentes de tal preferencia.

VERSIÓN PRELIMINAR

Amy: Y factor es (pausa) es difícil explicar qué es un factor (pausa). No una fracción, sino un factor,¿cierto?
Entrevistador: Sí...
Amy: No estoy segura de como explicarlo. Es (pausa). No sé cómo explicar éste.
Entrevistador: Tal vez, puedas darme un ejemplo.
Amy: De acuerdo. Si tomas el número 6, sus factores son 2 y 3. Así que los números que puedas multiplicar para obtener ese número son sus factores.

Anne: Un factor es aquél que, cuando dos números se multiplican son los factores del resultado.

Entrevistador: ¿Qué significa para ti decir que un número es factor de otro número?
Robin: ¿Un factor? (pausa). Puedo verlo, pero tengo que entender cómo decirlo. Un factor es un, en un sentido, es un divisor. Es un número que puede ser multiplicado; si tomas dos factores puedes multiplicarlos para obtener un número particular, que estás factorizando o dividiendo, puedes dividir un factor fuera de, de tu número que estás viendo como factor. Mmm, (pausa). Es un, no puedo llamarlo parte de ese número porque no es el número, pero mmm (pausa) siempre lo he pensado como árboles de factores (ríe).
Entrevistador: ¿Qué significa para ti decir que un número es un factor?
Kate: Si un número es un factor significa que (pausa). Algo que puede, cuando tienes un producto; son los números que te dan el producto.

Como se mencionó la referencia a "factores" más que a "factor" aparece en la mayoría de las entrevistas. Existe evidencia registrada de este pensamiento en exámenes realizados, a mediados de semestre, a un grupo similar de estudiantes que tomó el curso un año antes. Cuando se les pidió a los estudiantes ejemplificar y definir la palabra "factor", la mayoría de los ejemplos manejaban pares de números. Un acercamiento a los ejemplos de los estudiantes ayuda a explicar este fenómeno.

Considere el enunciado de multiplicación C x $B = A$. El número A, el resultado de la multiplicación, se llama producto. Los números C y B se llaman multiplicando y multiplicador, sin embargo, las tradiciones inglesa y americana difieren de cuál es cuál. Para evitar este desacuerdo y, a la vez, enfatizar la conmutación de ambos números C y B en la multiplicación, estos números se llamarán factores. Esto describe su papel en el enunciado de multiplicación de números.

En la teoría elemental de números existe una definición distinta, aunque relacionada, de factor: *Dados dos números naturales A y B, el número B se llama factor de A sí y sólo sí existe un número natural C tal que* C x $B = A$. En este sentido, un factor específica una relación entre números (De hecho, es una relación incompleta de orden que es transitiva, asimétrica y reflexiva.). Esta última definición se usó en el curso de exploración de la teoría elemental de números precedente a las entrevistas y que tuvo una duración de tres semanas. No hay un consenso, en los textos de matemáticas, respecto a la referencia del conjunto de números con esta definición. Varios textos definen factores, divisores y múltiplos haciendo referencia a los números naturales, mientras que otros se refieren a los enteros. Limitar la discusión a los números naturales, en este estudio, respondió a una opción pedagógica: excluir de la discusión al problemático número cero, y no comprometer el significado matemático.

En resumen, hay dos significados para la palabra factor en el contexto de números y operaciones con números: factor como *participación* en la multiplicación de números y factor como la *relación* entre números naturales. (Las asociaciones a la palabra "factor", relacionadas con el proceso de factorización en álgebra, están fuera de alcance en esta discusión). Al reconocer los dos diferentes significados de la palabra factor, se intuye que la referencia en plural, que hace el estudiante, es más que una conveniencia sintáctica. En la mayoría de las definiciones que dan los estudiantes, el concepto factor no fue visto como la relación entre números, no discutieron la propiedad de un número como factor de otro, aún cuando la pregunta fue propuesta explícitamente en ese sentido. Los estudiantes hablaron de factores como el papel que juega un número en una multiplicación. En la discusión del concepto de factor, este punto de vista no causó confusión o ejemplos falsos, dado que se considera a cualquier producto de dos números naturales, cada uno de los factores (en el papel de participante) en este producto es factor del producto (como relación). Se menciona esto porque el caso de los divisores, discutido en la siguiente sección, es diferente.

Además, de la referencia al procedimiento de la multiplicación, se encuentran muchos otros aspectos comunes en las descripciones de factor que proporcionan los estudiantes. Las siguientes conversaciones

VERSIÓN PRELIMINAR

ejemplifican tales aspectos.

Marty: Iba a decir que un factor es cuando tienes, este, en sus números primos. O lo reduces a lo menor posible...

Entrevistador: ¿Qué me dices del término factor?, ¿qué significa para ti decir que un número es factor de otro número?
Mary: Pienso en las ramas de un árbol, pienso en..., entendiendo a todos los diferentes números que se multiplican entre ellos y obtenemos... un número igualmente grande.
Entrevistador: Mmm, de acuerdo (pausa) ¿Podrías...? ¿Podrías darme un ejemplo de eso?
Mary: Si tengo el 24 como el número que quiero factorizar, tengo que reducirlo como a 2 x 12, y reducir el 12. Ir a 2 x 6, y reducir a 2 x 3, y estos números finales serán mis factores. Así que, para acordarme, tengo que escribirlos hacia abajo y mostrarlos.

Entrevistador: ¿Qué me dices del término factor?
Wendy: (pausa). Factor es mmm bueno, tienes un árbol de factores donde, donde tienes ciertos números por multiplicar para obtener el número con el que empezaste.
Entrevistador: Está bien.
Wendy: Entonces, es como, es como una multiplicación.
Entrevistador: De acuerdo. ¿Podrías darme un ejemplo?
Wendy: El 2 y el 6, 2 x 6 = 12.
Entrevistador: De acuerdo. ¿Qué pasa si tienes 2.5 x 6...?
Wendy: También es un factor. No importa si hay un decimal.

No hubo referencia a los números naturales o enteros en las respuestas de los estudiantes, aun cuando se les confrontó con un ejemplo particular, como en el diálogo anterior de Wendy. Esto puede verse como una confirmación más de que los estudiantes ven al factor como participante en una multiplicación, más que como relación.

Otro aspecto común, que apareció en seis entrevistas, es la referencia a los factores primos o a los factores "mas pequeños" posibles que se manifestó en la opinión de Marty. Las referencias a un factor como factor primo se discutirá en la próxima sección.

También, la referencia a los árboles de factores apareció en cinco entrevistas. Esto puede ser indicativo de que el estudiante está pensando en un proceso familiar y está recordando el contexto en el que se utiliza la palabra factor, más que en observar la relación entre números. Cuando Mary habla de números que quiere factorizar, y la referencia de Robin es a números que está factorizando es obvio que están pensando en procedimientos más que en relaciones.

En resumen, para la mayoría de los estudiantes, el concepto de factor parece estar vinculado con la multiplicación y con pares de números multiplicados. Algunos vínculos sugieren conexión con la experiencia de los estudiantes al considerar a los árboles de factores y a los factores primos. Los vínculos al contexto de los números naturales y de los enteros, así como las relaciones entre los números fueron escasos e, inclusive, ausentes en la mayoría de las entrevistas.

4.2. Asignando significado al divisor

El concepto de divisor es problemático en la aritmética elemental. Uno utiliza la etiqueta de divisor para especificar el *papel* de un número en una división: cuando $A \div B = C$, llamamos dividendo a A, divisor a B y cociente a C. Por otro lado, el concepto de divisor especifica la *relación* entre números naturales. En una definición matemática formal esta relación se expresa como: *para los números naturales B y A, B recibe el nombre de divisor de A sí y sólo sí existe un número natural C tal que B* x *C = A*. De hecho, esta definición es idéntica a la definición de factor. En los libros de texto de matemáticas para la escuela básica, así como en algunos textos para la escuela elemental de maestros, esta relación entre números naturales se expresa de manera equivalente en términos de división: *B recibe el nombre de divisor de A sí y sólo sí la división de A por B es un número natural.* Esto es, si de la división no obtenemos un número natural, el número que tiene el papel de divisor en la operación no es un divisor del dividendo. Esta polisemia, esto es, la propiedad de una palabra de tener significados diferentes pero relacionados, provoca una ambigüedad léxica. (Para una discusión detallada de la ambigüedad léxica de divisores y cocientes ver Zazkis, 1998b). En las tres semanas para aprender el tema de teoría elemental de números, los

VERSIÓN PRELIMINAR

entrevistados usaron y definieron el concepto de divisor como una relación entre números naturales. Sin embargo, como se muestra en las siguientes conversaciones de la entrevista, no fue el punto de vista tomado por la mayoría de los estudiantes, cuando se les pedía explicar el significado del concepto. A continuación aparecen varios diálogos donde los estudiantes intentar describir el significado de divisor.

Anne: Mmm un divisor es lo que pones en tu número, como el 4 dividido entre 2, 2 es el divisor.

Dorothy: Divisor. Puede ser un número que puedes usar para descomponer otro; es las veces que un número puede ser dividido. Por ejemplo, 36 usando el divisor 9, entonces 9 puede tomarse 4 veces fuera de 36.

Vickie: Divisor, el divisor es el número que (pausa) que divides entre otro número, 3 en 6, 3 sería el divisor de 6.
Entrevistador: 3 en 6, 3 es divisor de 6...
Vickie: Sí.
Entrevistador: ¿Qué pasa con 5 en 6?
Vickie: 5 sería el divisor.
Entrevistador: 5 es el divisor.
Vickie: Correcto.
Entrevistador: ¿Dirías que 5 es divisor de 6?
Vickie: Sí.

Entrevistador: ¿Qué significa para ti decir que un número es divisor de otro?
Kate: Significa que divide a otro número. Quiere decir que tienes un número dado y tienes que dividirlo en muchos.
Entrevistador: ¿Puedes darme un ejemplo de eso?
Kate: (ríe) Como 12 dividido en 3 es 4.
Entrevistador: Sí ....
Kate: Entonces, el divisor es 3...
Entrevistador: De acuerdo.
Kate: Cualquiera, o es el 12... No, es el 3, sí.
Entrevistador: Y, ¿podrías decir que 5 es divisor de 12?
Kate: Puede ser.
Entrevistador: ¿En qué sentido?
Kate: Que puede dividir a 12, lo único es que habrá un residuo. Entonces, será cualquier número con el que trates de dividir; el divisor es el número que usas para dividir.

Entrevistador: ¿Qué me dices del término divisor, qué significa para ti decir que un número es divisor de otro?
Mary: (pausa) el divisor es, es cuando algo es dividido para obtener un cociente; tienes el dividendo y el divisor, el dividendo dividido por el divisor es igual al cociente...
Entrevistador: Mmm...
Mary: Eso es lo que pienso..., de acuerdo. Aquí tenemos un cociente y tenemos el divisor, entonces el divisor es, (pausa) el divisor multiplicado por el cociente es igual al dividendo.

Entrevistador: ¿Qué me dices del divisor? ¿Qué significa la palabra divisor para ti?
Penny: (pausa) Lo pienso como un proceso, como una etiqueta de; no recuerdo cuál es (ríe). Creo que es el segundo. Como si, si tú, ¿cómo va...?
Entrevistador: ¿Puedes ilustrarme en el papel qué quieres decir con el segundo?
Penny: De acuerdo (ríe). Tienes *A* dividido entre *B* igual a *C*. Creo que éste es el divisor (apunta a *B*), pero no estoy segura, aunque es la forma en la que lo pienso.

De hecho, quince de diecinueve entrevistas definían al divisor haciendo referencia al papel que juega un número en una división. En algunos casos, esta interpretación de divisor fue usada cuando la pregunta expuesta por el entrevistador era “¿Qué significa para ti la palabra divisor?” Sin embargo, en otros casos, cuando la pregunta era “¿Qué significa para ti decir que un número es divisor de otro?”, había una referencia contextual explícita del significado de divisor . En la mayoría de los casos los entrevistados no tuvieron clara la intención del entrevistador. La referencia de Penny al “segundo” y los nombres que asigna Mary a todos los papeles que se jugaban en una división indican que el significado de divisor, como “papel o rol” en una división, es más amplio en la mente de los estudiantes que el significado

VERSIÓN PRELIMINAR

utilizado recientemente en sus cursos de matemáticas. Varias entrevistas mostraron que el significado de divisor que tenían provenía del conocimiento en común de la escuela.

Todos los ejemplos de división en las entrevistas involucran resultados con números naturales. En estos casos no fue evidente el conflicto entre los dos significados de divisor. No obstante, cuando el entrevistador los confrontaba con un ejemplo de división cuyo resultado no era un número natural, el estudiante no intentaba ajustar sus definiciones. Esto fue más notorio con Kate y Vickie, quienes aseveraban que 5 era divisor de 12 y de 6 respectivamente. En la sección anterior se dan indicios de que pensar en factores como rol en una operación aritmética, más que como relación entre números, no produce afirmaciones matemáticas incorrectas. Sin embargo, como se muestra en esta sección, una visión análoga del divisor produce afirmaciones incorrectas.

Sólo cuatro entrevistas, de diecinueve, explicaron el significado de divisor como la relación entre números naturales; tres de ellas aseveraron explícitamente que divisor era lo mismo que factor. La siguiente opinión de Ronnie muestra que adoptó un significado teórico–numérico para el divisor.

Ronnie: Divisor es lo mismo que factor, por ejemplo, 3 es divisor de 21. Pero no así 4. Si haces la división con el 3 no tendrás residuo. Es un agradable número entero. Es como poner piezas iguales en grupos; todo debe ajustarse perfectamente.

A los estudiantes que describieron a los divisores como relaciones entre números se les preguntó si había diferencia entre divisor y factor. A continuación sus respuestas.

Ronnie: La diferencia entre divisor y factor, mmm, sólo la relación. Si estás pensando en términos de división, entonces, usaré el divisor, quiero decir, de nuevo regresarlo a lo concreto; si estas pensando en 21, 3 y 7, tomemos esos tres, 3 y 7 son factores de 21, pero si clasificas la pieza de un gran pastel que quieres tomar, y digamos que esta pieza es 3, eso es lo que sería para mi un divisor.

Chris: mmm, porque el número se construye de factores, y los factores cuando estás dividiendo lo descomponen de nuevo. Así que es sólo que unos lo construyen y el divisor lo descompone. Por lo que puedo, dado que la multiplicación y la división son una especie de operaciones correspondientes, decir que los factores son como multiplicar, y los divisores como dividir, así podemos ver la relación.

Entrevistador: Dices que la multiplicación y la división son operaciones correspondientes.

Chris: No sé si el término especial sea correcto, pero como en la multiplicación y en la división así en la suma y en la resta hacemos lo opuesto

Entrevistador: ¿Puedes mostrarme?¿Qué quieres decir con hacer lo opuesto?

Chris: Así como 6 dividido entre 3 es igual a 2, esto es, descomponerlo en un número más pequeño; en 2 x 3 = 6 tienes los mismos números, uno de ellos puesto como un todo y el otro separándolo aparte.

Sarah: Sí, creo que la diferencia entre un factor y un divisor puede ser que el factor es un número primo, pero, como en el árbol de factores eventualmente llegamos a números primos, entonces los factores son todos los números que pueden dividir a un número específico; mientras que un divisor es sólo un número que divide a otro dado (pausa)... Mmm como en el árbol de factores (pausa) los factores los derivas como números primos; mientras que el divisor es escoger un número que derive la respuesta.

Liz: (suspira) Mmm, veo al factor como un número total que divide perfectamente. No sé si perfectamente sea la palabra correcta; en un número, como si existiera otro número total que será el resultado. Pero un divisor puede ser cualquier número, aun si no entra perfectamente, puede no dar un número entero, puede dar residuo o un número decimal – no entra perfectamente, o, puede hacerlo, pero (ríe)...

Ronnie y Chris discutieron la relación entre factor y divisor refiriéndose a la relación entre multiplicación y división. Sarah hizo la equivalencia de factor y divisor en su definición, y se confundió por ello. Definir los factores como factores primos, cuando los factores pare ella no eran necesariamente primos, fue su manera de resolver el problema de tener dos palabras distintas para la misma idea. Liz también hizo la equivalencia entre factores y divisores en su explicación inicial, pero para resolver este problema cambio

VERSIÓN PRELIMINAR

su visión de la relación entre números a ver el rol del número en la división. A pesar de la pregunta que el entrevistador hizo en un intento por establecer la equivalencia entre factor y divisor, es posible que los estudiantes estuvieran buscando una diferencia entre los conceptos sólo porque se les cuestionaba al respecto. Sin embargo, un intento por crear una distinción puede verse como indicio de la debilidad que tiene el estudiante al vincular estos conceptos.

En resumen, la mayoría de los estudiantes vinculan “divisor” con la división de números y al número que divide. De manera similar al caso de factor, los vínculos esenciales a los números naturales o enteros así como a las relaciones entre números parece débil o inexistente, en la mayoría de las entrevistas. El vínculo a la equivalencia entre factores y divisores pareció débil, los estudiantes se referían a él buscando una distinción entre los dos conceptos.

4.3. Asignando significado a un múltiplo

El concepto de múltiplo apareció como el mas problemático. Sólo cuatro estudiantes proporcionaron ejemplos correctos para múltiplos. Otros cuatro estudiantes usaron la palabra “múltiplo” como sinónimo de la palabra “producto”. Once estudiantes identificaron explicita o implícitamente un múltiplo y un factor. Esto es consistente con los hallazgos de Nicholson (1977), quien investigó el entendimiento del vocabulario matemático en los estudiantes que ingresaban a la escuela secundaria. Sólo 21 de los 185 participantes en el estudio de Nicholson proporcionaron una respuesta aceptable al ítem “Da un ejemplo de un múltiplo de 30”. Noventa y dos estudiantes dieron como ejemplo un factor de 30 en sus respuestas.

Chris fue de los pocos que pareció tener cierto entendimiento del concepto de múltiplo. Sin embargo, posteriormente en su entrevista, como se muestra en el siguiente extracto, Chris mostró confusión.

Chris: Y un factor es..., es como, por ejemplo, 2 puede ser factor de 8, porque 2 es, ... 8 es divisible entre 2, así que 2 multiplicado por otro número entero me dará 8 y, mmm un múltiplo mmm (pausa) creo que 6 es un múltiplo de 2, puede ser un número que se puede formar multiplicando otro número.
Entrevistador: 6 es un múltiplo de 2, como ya mencionaste, ¿puedes darme otro ejemplo?
Chris: 12 puede ser múltiplo de 6

En la misma entrevista, 15 minutos después

Entrevistador: ¿Crees que 117 es múltiplo de 26?
Chris Siempre me confundo con los múltiplos, esa palabra, siempre pienso que el múltiplo es pequeño, pero en realidad es el número mas grande, así que...
Entrevistador: Eso es muy interesante para, estoy interrumpiendo...
Chris: Sí ...
Entrevistador: ¿Por qué quieres pensar que es pequeño y te forzas a pensar que es mas grande? ¿qué pasa?, veo un conflicto aquí.
Chris: Porque cuando estas multiplicando, lo haces con números pequeños y pienso en la palabra múltiplo, multiplicar, y pienso en obtener uno mayor, un número mayor, mas que en tener un número grande y llamarlo múltiplo.
Entrevistador: Sí...
Chris: Entonces me confundo. Por la terminología, es un múltiplo de, como el múltiplo de 26, me confunde pensar si 26 es el número grande, o, o si es un número más grande que 26, al que 26 lo divide.

Parece que Chris se encuentra en un estado donde su intuición sobre los conceptos contradice los significados matemáticos adquiridos en el curso. Pensar en números “pequeños” y “grandes” le ayuda a obtener la terminología apropiada. Pensar en, en palabras de Chris, “obtener un número mayor, en lugar de tener ese número mayor” parece natural en este grupo de participantes. En el extracto siguiente Ronnie explica esta línea de razonamiento:

Entrevistador: De acuerdo, ¿qué me dices del múltiplo?¿qué significa para ti la palabra?
Ronnie: Incluso sin entender el concepto u otra cosa, sin haber tomado algún curso de matemáticas, yo entiendo que múltiplo significa tantas veces algo, puedes decir tantas veces algo.
Entrevistador: Mmm ¿puedes darme un ejemplo?
Ronnie: Cuando dices múltiplo, quiero decir 2 x 3 = 6, quiero decir que 3 es un múltiplo...

VERSIÓN PRELIMINAR

Entrevistador: Sí.
Ronnie: Eso es lo que es para mi, pero puedo estar mal.

Ronnie ejemplifico un múltiplo como factor. Además, en los siguientes extractos con Amy, Anne y Wendy, las explicaciones de los estudiantes sobre el múltiplo son congruentes con el rol de factor en la multiplicación de números. Anne y Wendy mencionan de forma explícita la equivalencia entre factor y múltiplo. Penny menciona una conexión entre factor y múltiplo, pero además indican sus diferencias.

Amy: Y un múltiplo es un número mmm, (una pausa) un número tantas veces para obtener otro número (ríe).
Entrevistador: ¿Me puedes dar un ejemplo?
Amy: De acuerdo, el múltiplo, creo que si tienes 6 veces algo igual a 12, el múltiplo sería 2, ¿es así? No lo sé (ríe). No estoy segura.

Anne: Un múltiplo es... creo que lo mismo que factor. Es decir, creo que es lo mismo que un factor.
Entrevistador: ¿Entonces crees que la palabra factor y la palabra múltiplo significan lo mismo?
Anne: Creo que sí.
Entrevistador: ¿Me podrías dar un ejemplo por favor?
Anne: Así como 3 y 2, si, 3 y 2, 3 x 2 = 6, y 3 y 2 son ambos factores y múltiplos de 6.

Entrevistador: ¿Qué me dices sobre el múltiplo? ¿Qué significa la palabra múltiplo para ti?
Wendy: (ríe) lo mismo que factor
Entrevistador: Sí...
Wendy: ... dos números, cuando se multiplican para obtener un producto.

Entrevistador: ¿Qué me dices sobre el múltiplo? ¿Qué significa la palabra múltiplo para ti?
Penny: Mmm, (pausa) es como, pienso en múltiplo, de la misma forma que un factor, como, pero no lo es, creo que un factor, debes obtenerlo tan pequeño como sea posible, mientras que un múltiplo no tiene que serlo. Puede ser, como dije con el 12 de nuevo (ríe), los múltiplos pueden ser el 4 y el 3.

En los extractos pasados Anne y Wendy creyeron que las palabras factor y múltiplo tenían el mismo significado. Penny señala la semejanza de un factor y un múltiplo, pensando los conceptos como de una "misma naturaleza", pero además encontró diferencias entre los dos, argumentando que los factores deben ser primos, mientras que los múltiplos pueden no serlo. En los siguientes extractos los estudiantes piensan en múltiplos como producto.

Entrevistador: ¿Sería correcto decir que 117 es múltiplo de 13? ¿Es correcto decirlo?
Sarah: No, tendrían que ser 13 y 19.
Entrevistador: ¿Sería correcto decir que 117 es múltiplo de 3?
Sarah: No, tendría que ser 3 y 39.
Entrevistador Entonces ¿quieres decir que 117 es un múltiplo de 3 y 39?
Sarah: Sí.

Entrevistador: ¿Qué me dices del múltiplo? ¿Qué significa para ti decir que un número es múltiplo de otro?
Mary: Mmm, (pausa) es el producto de, de multiplicarlo, algo una y otra vez (pausa)

Sarah no mencionó la palabra "producto", sin embargo esta percepción de un múltiplo como producto se muestra en su rechazo a la frase "117 es un múltiplo de 3" y al aceptar el argumento "117 es múltiplo de 3 y 39". Mary hace referencia explícita al producto cuando explica el significado de múltiplo. La referencia de Mary a "una y otra vez" puede ser un indicio de una percepción aditiva del múltiplo, una percepción que se expresa de forma explícita en los siguientes extractos con Kate y Marty

Entrevistador: De acuerdo. ¿Qué significa para ti decir que un número es múltiplo de otro?
Kate: Significa que tomas el número original y lo sumas a sí mismo de manera continua.
Entrevistador: Sí...
Kate: Es como si tuvieras 6 y le sumas otros 6, serían 12, entonces 12 sería múltiplo de 6.

Entrevistador: ¿Qué significa para ti decir que un número es múltiplo de otro?

VERSIÓN PRELIMINAR

Marty: ¿un múltiplo de otro número? Pienso que estos son múltiplos, si tengo 2, 4, 6, 8, 10, son múltiplos de 2, entonces estoy sumando 2, mas 2, mas 2, eso es lo que es un múltiplo para mi.

Esta visión aditiva de un múltiplo se puede ver como una necesidad de los estudiantes de pensar en un proceso. Por ejemplo, Marty no nos dijo que era un múltiplo, explicó como se generan.

Como se mencionó antes, para la mayoría de los estudiantes el vínculo entre factor y divisor era débil, la evidencia en esta sección muestra que el vínculo entre factor y múltiplo era erróneo en la mayoría de los casos. A diferencia del divisor y el factor, que presentan ambigüedad al tener un doble significado como conceptos matemáticos, el concepto de múltiplo tiene un solo significado con respecto a los números naturales. Es particularmente perturbador que la mayoría de los estudiantes en este grupo de entrevistas no tengan un entendimiento del significado del concepto de múltiplo. Puede ser que el estudiante estuviese buscando un significado del concepto como rol en una operación numérica, y al no existir, le asignaron lo que les pareció mas razonable. Como explicó Ronnie en uno de los extractos anteriores, la palabra múltiplo nos trae la idea de multiplicación. Entones, al pensar en una multiplicación de números, hay dos posibles roles para sus elementos: un factor y un producto. Esto puede explicar porque la mayoría de los estudiantes vieron al múltiplo como cualquiera de esos roles.

Otra explicación para la mayoría de las visiones de un múltiplo como factor puede encontrarse, como sugiere uno de los participantes, en la estructura y sonido de la palabra misma. De manera análoga a los "sumandos", esto es, a los números que se suman en la operación suma, tenemos a los "múltiplos", esto es, los números que se multiplican en la operación multiplicación. Desafortunadamente, el entendimiento convencional del múltiplo que comparten los matemáticos no presta atención a esta analogía.

4.4. Identificando los factores

En esta sección discutiré la primera parte del Conjunto de Preguntas 2, donde al estudiante se le presentó el número 117 = 3^2 x 13 y se le pidió determinar los factores primos y todos los factores del número. Todos los estudiantes identificaron correctamente los factores primos, sin embargo algunos no se basaron inmediatamente en 3^2 x 13 como descomposición prima del número. Dos estudiantes (de 19) construyeron árboles de factores y otras dos desarrollaron una variedad de operaciones de división con la calculadora para obtener los factores primos de 117. Los siguientes extractos con Marty y Darlene ejemplifican estas dos acercamientos.

Entrevistador: ¿Podrías listar todos los factores primos de 117?
Marty: Necesito la calculadora.
Entrevistador: Si tuvieras la calculadora, ¿qué harías con ella?
Marty: Simplemente (pausa), es, ¿es 9 x 13, 117?
Entrevistador: Sí...
Marty: Esto es. Puedo comenzar con números, tengo, es decir, 3 podría ser lo primero que haga, y tengo que seguir, en mi calculadora, tengo 117 dividido por 3, eso me dará una respuesta, si se dirige con uniformidad hacia él, entonces se que es un múltiplo.

Entrevistador: Podrías ver ahora un número diferente. El número es 117.
Darlene: Sí...
Entrevistador: Y es igual a 3^2x13, yo ya lo calculé
Darlene: De acuerdo.
Entrevistador: Te estoy haciendo preguntas sobre este número 117.
Darlene: Sí...
Entrevistador: ¿Cuáles son los factores primos de 117?
Darlene: Los factores primos.
Entrevistador: Sí...
Darlene: [Darlene los encuentra con el árbol de factores 117=3x3x13]
Entrevistador: Encontraste 3, 3 y 13 y los has escrito como 3^2x13. Ahora, te pregunto, lo que yo había escrito antes aquí, cuando te di el número 117, lo escribí aquí como 3^2x13.
Darlene: Sí.
Entrevistador: ¿Podías usar esto?
Darlene: ¿Cómo explicación de esto? [Darlene señala el árbol de factores]
Entrevistador: No como explicación, quizá como una señal.

VERSION PRELIMINAR

Darlene: Oh no, sólo viendo eso, diferente a lo que hice, no lo entendería.

Ambas, Marty y Darlene ignoraron la información proporcionada por la descomposición prima de 117. Dado que las estrategias de estos estudiantes sugieren un consumo de tiempo y esfuerzo, es razonable dar por hecho que no saben utilizar la información. Marty sugiere comenzar con números, mientras que Darlene usa una aproximación sistemática para construir un árbol de factores. Cuando el entrevistador señala a Darlene que lo que encontró después de construir su árbol de factores era lo que se le había dado inicialmente, Darlene admite que sin haber hecho todo el proceso no hubiera sido capaz de usar la información. Sin embargo, en otro caso, la reacción del estudiante a los resultados obtenidos por el árbol de factores fue muy distinto. La estudiante sintió que debió haber notado y usado la descomposición que se le había presentado.

Pedir una lista de todos los factores representó un reto inesperado. Sólo cuatros estudiantes (de 19) generaron todos los factores considerando las combinaciones de sus factores primos. Otros estudiantes confiaron en los árboles de factor o en la calculadora como medio para determinar los factores.

En los siguientes extractos Amy responde a la petición de la lista de factores de 117, después de haber sido identificados los factores primos de 117.

Entrevistador: Ahora, te pido que me des una lista de todo los posibles factores.
Amy: Correcto. Sólo tengo que usar mi calculadora y dividirlos todos. Entonces, divido entre 2 =, no sería nada, entonces voy a dividir entre (pausa), tengo que hacer algo como esto y encontrar todos sus factores...
Entrevistador: Estas dividiendo 117 entre 2 y entre 5.
Amy: Sí...
Entrevistador: ¿Para encontrar otros factores?
Amy: Sí. Sólo puedo ir a través del sistema completo...
Entrevistador: De acuerdo, pero el hecho de que el número 117 este como 3^2x13 ¿te ayuda de alguna forma?
Amy: Bueno, me ayuda con los primos, porque se que 13 es primo y 3 es primo...
[...]
Entrevistador: De acuerdo, has dividido 117 entre 2 y entre 5, ¿cómo vas a continuar?
Amy: Sólo tengo que continuar, con 1, 2, ..., bueno, se que no pueden ser los números pares porque, este es impar, así que sólo, sólo continuare (ríe), no lo sé.

A pesar que Amy describe su aproximación como "ir a través del sistema completo" demuestra ciertas creencias explícitas sobre factores. Amy sabía que un número par no puede ser un factor del impar 117, por lo tanto no intenta dividir 117 entre números pares para encontrar los factores. Esta consideración de pares-impares, ejemplificada de nuevo en el siguiente extracto con Robin, pareció ser típica en este grupo de participantes. Sin embargo, Amy, así como sus compañeros, no generalizó esta observación a los múltiplos de 5 o cualquier otro no factor de 117. El tratamiento de la propiedad de paridad versus la propiedad de divisibilidad que muestran los estudiantes se discute en detalle en Zazkis (1998a).

Robin construyó un árbol de factores para 117 con la finalidad de enumerar sus factores.

Entrevistador: ¿Puedes encontrar todos los factores de 117?
Robin: Bueno, puedes ver que es divisible por 3 y por 9, porque la suma tiene los tres dígitos: 117, 1+1+7=9; esto nos dice que es divisible entre 3 y entre 9, porque el 9 entra en el 9 y 3 entra en el 9 también, mmm; eso te muestra que los factores están ahí. Uno siempre entra en 117, porque es una de esas cosas (ríe)...
Entrevistador: Sí...
Robin: Mmm, es impar, al final es un número impar, entonces 2 no entra en él, ni 4, ni 6; ese tipo de cosas, lo que te deja con 3 y 9, mmm, puedes encontrar los múltiplos de 3 y de 9 que te den 117, ¿sabes a lo que me refiero?
Entrevistador: Sí. ¿Cuántos factores en total habrá para 117?
Robin: (pausa) ¿En total? Bueno, tengo que calcularlos (ríe), bien, factor...
Entrevistador: Está bien, tómate tu tiempo (pausa). De acuerdo Robin, has desarrollado tus árboles de factor y, ¿cuántos te han resultado?
Robin: ¿Los números que entren en...? Seis: 1 y 117, 3 y 39, 9 y 13.

En un principio Robin señaló que 3 y 13 eran factores primos de 117. Sin embargo, la exposición de

VERSIÓN PRELIMINAR

Robin al decir que 117 es divisible entre 3 y entre 9, al considerar la suma de sus dígitos, aunque correcta, era absolutamente innecesaria en este caso. La atención de Robin se concentró en reparar en 117 como un número impar y por lo tanto, no podía tener factores pares. Esta consideración muestra la habilidad de Robin para aplicar los conceptos y los procedimientos aprendidos recientemente o, bien, para revisar los que ya posee, así como el entendimiento de los mismos. No obstante, su atención a las reglas de divisibilidad y el no tomar ventaja de la descomposición en primos sugerida en un principio insinúa que no ha establecido un vínculo entre la descomposición prima y los factores de un número. Robin fue muy cuidadoso en la búsqueda de pares de factores y enunció seis de ellos, de acuerdo con el árbol de factores. Esto puede entenderse como otra aplicación de su conocimiento previo. Pero, en otros cinco casos, al considerar dichos árboles se obtuvieron resultados parciales. Los números que los estudiantes no escribieron en las ramas de los árboles de factores tampoco se incluyeron en la lista de factores. Por ejemplo, cuando un árbol de factor para 117 se construía por descomposición como 13 x 9, y la descomposición de 9 como 3 x 3, el número 39 no se mencionaba en las ramas del árbol y, por lo tanto, frecuentemente se pasaba por alto en la lista de todos los factores.

Como se advertirá inmediatamente, Anne confió en la descomposición prima de 117 para generar la lista de factores. Consideró múltiplos de los factores primos como factores potenciales y tomó decisiones sobre la base de las divisiones efectuadas en su calculadora.

Entrevistador: ¿Puedes listar todos los factores, por favor? No sólo los factores primos, sino todos.

Anne: Espera un segundo (pausa). Es difícil, no puedo decir realmente, creo que tengo que usar la calculadora...

Entrevistador: De acuerdo, usa la calculadora, por favor.

Anne: (pausa). Creo que esos son todos.

Entrevistador: ¿Qué tienes en tu lista? ¿Cuáles son los factores de 117? Aquí veo 1, 117...

Anne: 3 y 39, 9 y 13 y creo que, tal vez, 27, no (pausa)...

Entrevistador: Trabajaste un par de segundos en tu calculadora, ¿podrías decirme lo que verificabas?

Anne: Estaba verificando si había otro producto de 13, como 13 x mmm, así como el 13 x 3 para ver si era un factor de 117. Estás usando distintos, distintos factores, no factores, productos de 9 y 3 para ver si funcionan.

Entrevistador: ¿Qué producto de 3 verificaste?

Anne: 27.

Entrevistador: Y no funcionó.

Anne: No. Creo que era 4.5 o algo así.

Entrevistador: También verificaste el 18, ¿funcionó?

Anne: No, no funcionó.

Entrevistador: ¿Tienes alguna explicación de porque 27 no funcionó?

Anne: Porque hubiera funcionado si fuera más pequeño, si hubiera tenido la mitad a lo mucho (pausa) y, pero no hubiera sido un número impar, hubiera sido .5 porque sólo cabe 4.5 veces...(pausa).

Entrevistador: Es un poco difícil para mí...

Anne: Bueno, 27 entra en 117, 4.5 veces, por lo tanto, no funciona.

Entrevistador: De acuerdo, pero dices que verificaste múltiplos de 9 y de 3 (pausa) ¿Verificaste algo con el 13?

Anne: Sí, así es como obtengo el 39.

Parece que Anne entendió la idea de usar factores primos para construir bloques y generar otros factores. Pese a ello, parece no haber entendido que estos eran los únicos bloques permitidos, lo cual manifiesta en una confianza innecesaria en los cálculos y la calculadora.

La tarea de identificar factores demostró que los estudiantes sabían lo que estaban buscando, pero, en la mayoría de los casos, no tenían una forma efectiva de encontrarlos. Expresaron entender el significado del concepto de factor y tener la habilidad para aplicar este conocimiento; sus vínculos entre factores, descomposición prima y factores primos parecieron ser incompletos.

4.5 Identificando divisores

Una vez identificados todos los factores de 117, se solicitó a los estudiantes hacer una lista de todos sus divisores. En este caso, la mayoría (12 de 19) declaró que los factores y los divisores eran los mismos números. Ya que, al comienzo de las entrevistas, sólo cuatro alumnos pensaron en los divisores como una

VERSIÓN PRELIMINAR

relación entre números, este hallazgo puede ser interpretado, de manera optimista, como un desarrollo positivo del conocimiento de los estudiantes durante la entrevista. Además señala la importancia de la entrevista clínica no sólo como una herramienta para proporcionar datos, sino también como una experiencia de aprendizaje. A menudo, se puede considerar lo anterior de manera pesimista, como confusión e incertidumbre de los alumnos sobre la ambigüedad del significado de los conceptos y como la elección de un punto de vista que es adecuado sólo para ciertas situaciones de resolución de problemas.

Kate estaba segura de su punto de vista sobre los divisores. Para ella los divisores de 117 eran "cualquiera que se elija de ellos". Desatendió el indicio explícito sobre el significado del divisor provisto en el cuestionario, que le permitiría contestar a la pregunta sobre los divisores de 117.

Entrevistador: ¿Cuáles son los divisores de 117?
Kate: Cualquiera que se elija de ellos.
Entrevistador: ¿Puedes pensar en algún factor de 117, tal que no es un divisor de 117?
Kate: No.
Entrevistador: ¿Puedes pensar en algún divisor de 117, tal que no sea un factor de 117?
Kate: No. No. Espera, sí puedo, lo puedo hacer. Puedo pensar en algo que dividirá a 117, aunque no puedo crear finalmente un número en general.
Entrevistador: Mmm, de acuerdo, ¿un ejemplo puede ser?
Kate: 117 dividido entre 2.
Entrevistador: En este caso, 2 no puede ser un factor...
Kate: No...
Entrevistador: Pero puede ser un divisor de 117.
Kate: Sí.

Amy y Robin aparecen en los diálogos siguientes durante la etapa de resolución del conflicto entre el significado que ellos desean dar a un divisor y el significado propuesto por el entrevistador. Robin pregunta si el resultado de una división tiene que ser un número entero, una pregunta que puede indicarle que significado del divisor tiene que utilizar.

Entrevistador: De acuerdo, así es que ésta es tu lista de factores.
Amy: Sí.
Entrevistador: Ahora te pregunto ¿Cuáles son los divisores de 117?
Amy: Los divisores son estos números, todos estos números son.
Entrevistador: ¿Todos estos números?
Amy: Sí.
Entrevistador: Así que, ¿puedes pensar en un factor que no es un divisor?
Amy: Mmm, (pausa) ¿Qué es un divisor? Los obtuve todos revueltos. ¿Qué es un divisor, otra vez?
Entrevistador: Divisor es un número entre el cual otro es divisible. Podemos decir que 6 es divisor de 12, pero 5 no es un divisor de 12.
Amy: De acuerdo, (pausa), si pienso eso, estos pueden caber en 117.
Entrevistador: Sí...
Amy: Así que todos ellos son divisores.
Entrevistador: De acuerdo. Así que lo que tengo es que, ¿me estás diciendo que los divisores y los factores de 117 son los mismos?
Amy: En este caso sí lo son, pero no sé si en todos los casos lo son.
Entrevistador: De acuerdo, así que, ¿tú crees que para 117 los divisores y los factores son los mismos?
Amy: Sí...
Entrevistador: Pero si yo te doy otro número como 525, ¿no estás segura de si es lo mismo?
Amy: Pienso que es probable que lo sea, creo que puede ser.
Entrevistador: Y, ¿qué te hace pensar de ese modo?
Amy: Porque si lo descompones en todos sus factores, del modo que quieras, 3 cabe en 117, 39 veces, o...13 veces, bien, o lo que ...

Entrevistador: Tú calculaste los factores de 117.
Robin: Sí...
Entrevistador: Mi pregunta es, ¿puedes pensar en un divisor que no es factor de 117?
Robin: Puede caber en el, 2 no puede ser, porque es un número par. Bien, puede ser, pero puede dar, no puede dar un número entero como resultado...

VERSIÓN PRELIMINAR

Entrevistador: Mmm...
Robin: ¿Es eso lo que me está preguntando y no lo entiendo? ¿No estoy entendiendo? (risas).
Entrevistador: No, no lo es, no pienso eso, así que la pregunta básicamente es, ¿puedes pensar en un divisor de 117 que no es factor de 117?
Robin: De acuerdo, ¿tiene que ser un número entero?
Entrevistador: ¿Debe ser un número entero?
Robin: En conclusión. Si divide 117 entre 2, puede tener uno u otro: una fracción o un decimal. Sí, puede ser dividido, pero no es un, 2 no es un factor.
Entrevistador: De acuerdo, pero tú has llamado a 2 divisor de 117.
Robin: Sí.

En las respuestas de estos estudiantes, podemos identificar su esfuerzo por enfrentarse al significado del concepto de divisor y a la incompatibilidad presentada cuando el significado sugerido por el entrevistador no encaja con su conocimiento previo. Amy resolvió que los divisores de 117 eran los mismos números que son factores de 117, pero no estaba segura de que ese patrón se extendiera también a otros números. Prestar atención a otra variedad de ejemplos podría ayudarle a generalizar este vínculo. Aunque Robin pudo llamar erróneamente a 2 divisor de 117, su rápida conclusión de si el resultado de la división debía ser un número entero, es un indicador de su conocimiento de que este resultado es crucial para considerar divisores. De todas formas, ningún estudiante de este grupo entró a un proceso de cálculo de divisores, resultado que se puede interpretar como el comienzo del sólido establecimiento de la relación entre factores y divisores.

4.6. Identificando múltiplos

En las respuestas de los estudiantes, cuando se les pidió realizar una lista de todos los números de los cuales 117 es un múltiplo, reconocemos una gran dificultad ante el significado del concepto de múltiplo, así como de enlace entre múltiplo y factor/divisor.

En el siguiente diálogo Penny se da cuenta de que había una relación entre los números 117 y 39 que no existe entre 117 y 26. De cualquier modo, describe esta relación como “39 es un múltiplo de 117”, sugiriendo, además, que “39 y 3 son múltiplos”.

Entrevistador: ¿Dirías que 117 es un múltiplo de 26?
Penny: No.
Entrevistador: De acuerdo. Mmm, ¿ y de 39?
Penny: De acuerdo, ¿117 es un múltiplo de 39? Supongo, sí, veo, no estoy segura si comprendo el significado de múltiplo (pausa). Realmente no, no creo (pausa) no, no podría decir que 117 es un múltiplo de 39, diría que 39 es un múltiplo de 117.
Entrevistador: Sí...
Penny: Porque creo, esto es lo que pienso, porque los múltiplos son las partes de, como puede ser más grande que los números, como es una parte de 100, como 39 es una parte de 117. Sí, como 39 y 3 son múltiplos y los multiplicas juntos.
Entrevistador: Así, por qué, ¿por qué piensas que los matemáticos usarían la misma palabra tanto para múltiplo como para, digamos, factor?
Penny: Bueno, es justo el contexto que tú uses en...

Esta conversación con Penny es una evidencia más de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes ante el concepto de múltiplo, y de su disposición para identificar un múltiplo con un factor y, también, de considerar pares de números como factores/múltiplos.

El enlace matemático entre los conceptos factor/divisor y múltiplo es evidente: *B es un múltiplo de A sí y sólo sí A es un factor de B.* De cualquier modo, algunos estudiantes no aprovechan esta conexión, lo cual indica que el significado de este enlace todavía no ha sido construido. Tanto Kate como Kevin ejecutan la división, aunque pese a haber efectuado la misma operación sus reacciones son totalmente diferentes.

Entrevistador: ¿Dirías que 117 es múltiplo de 9?
Kate: Mmm (pausa). Sí, pienso así. Espera un segundo (pausa). Sí, es un múltiplo porque, ¿por qué tengo que hacer esto? (ríe)...
Entrevistador: Y tú, haces la división.
Kate: Sí.

VERSIÓN PRELIMINAR

Entrevistador: Y encuentras que...
Kate: 9 estuvo en 117 (ríe), 13 veces.
Entrevistador: 13 veces. Y ahora dices por qué, ¿por qué tengo que hacer eso?
Kate: Bueno, porque estaba realmente frente a mí.
Entrevistador: ¿De qué forma dirías que estaba frente a ti?
Kate: Porque sé que los factores primos fueron 13, 3, y 3 veces 3 da 9, así...

Entrevistador: De acuerdo, ¿dirías que 117 es un múltiplo de 26?
Kevin: (pausa). Sí.
Entrevistador: ¿Y por qué piensas así?
Kevin: Mmm, 117 es, 117 es mmm, (pausa) 9, = a 9 x (pausa). Creo que fue; porque 26 es justamente el doble de 13.
Entrevistador: Sí...
Kevin: (pausa). Y creo que si puedo reducir 9 por su mitad, entonces, sería un divisor, pero, porque 9, la mitad de 9 es, no es un número entero, es 4 1/2 ó 4.5, entonces, 26 no es un divisor de 117.
Entrevistador: De acuerdo, gracias. ¿Dirías que 117 es un múltiplo de 39?
Kevin: (ríe y abre la calculadora)
Entrevistador: Te permitiré usar tu calculadora en un momento. Antes de usarla, por favor, contéstame qué estás, qué estás pensando sobre esto.
Kevin: ¿Qué fue 39?
Entrevistador: Sí. Y, de nuevo, trata de responder sin hacer la división...
Kevin: De acuerdo...
Entrevistador: Pero si tu sientes la necesidad de hacerlo, hazlo.
Kevin: De acuerdo, 39 (pausa) Diría (pausa) diría que sí (pausa) ...
Entrevistador: Porque...
Kevin: Diría que sí porque, porque hice la división en mi cabeza...
Entrevistador: (ríe)
Kevin: Pero no sé si está bien (pausa). Está bien. Mmm, 117 es un múltiplo de 39, 39x3.
Entrevistador: De acuerdo...
Kevin: No sé. No sé cómo podría hacer mmm, sin hacer la división, no sé cómo podría decidir si era o no.
Entrevistador: ¿Piensas que es posible, en el caso de 26, tomar una decisión sin hacer la división con la calculadora?
Kevin: (pausa). No. Hice el 117; el 39 entre, dividí entre 117, división, mmm, veo si algo multiplicado por él, el 9 en 39 podría producir uno terminado en 7.
Entrevistador: Sí...
Kevin: Y, entonces, es que decidí seguir con la división en mi cabeza. Con 26, si no dividí, no podía mirar en el número y decidir si era o no un múltiplo sin hacer realmente la división. Esto es, qué múltiplo es, es decir, si puede ser dividido.

Kate, después de reparar en la evidencia, hace la conexión entre un factor y un múltiplo. Kevin, de todos modos, realiza la división y afirma que la decisión era imposible sin ella. Además hace una interesante observación acerca del último dígito de la multiplicación, lo cual le sugirió que era posible que 117 sea un múltiplo de 39; así fue capaz de realizar una división mental. Aunque, Kevin declara que en el caso de 26 “no podía ver el número y decidir si era o no un múltiplo sin hacer la división”.

Cuando Amy responde sobre los números de los que 117 es múltiplo, indica la lista de factores de 117. La declaración de Amy de que “estos son múltiplos”, así como su arreglo con el entrevistador de que “117 es un múltiplo de todos ellos” muestran que el significado de múltiplo no estaba establecido aún. Sin embargo, realmente ha construido algunas conexiones entre factores y múltiplos.

Entrevistador: ¿De qué números es múltiplo 117?
Amy: (pausa) 117 es un múltiplo de 39...
Entrevistador: Bien...
Amy: Porque la respuesta podría ser 3, y 117 es un múltiplo de 13; yo pienso que todos estos son múltiplos (indica en la lista de factores realizada antes).
Entrevistador: ¿117 es múltiplo de todos estos?
Amy: Sí.

VERSIÓN PRELIMINAR

Entrevistador: De acuerdo, ¿ahora podrías, por favor, mirar a 117 de nuevo y contestarme si 117 es un múltiplo de 26?
Amy: Seguro...
Entrevistador: ¿Es 117 múltiplo de 26?
Amy: De acuerdo, ¿puedo usar la calculadora?
Entrevistador: Seguro.
Amy: De acuerdo, 26 (pausa) ¡oh!, 26 (pausa). No.
Entrevistador: ¿Podrías, por favor, decirme qué hiciste con tu calculadora?
Amy: Estuve probando un montón de números enteros, estuve multiplicando 26 por números enteros para tratar y de encontrar 117.
Entrevistador: ¿Y?
Amy: No pude hallar ninguno.
Entrevistador: De acuerdo, ¿significa que no hay tal número o que no pudiste encontrar uno?
Amy: (pausa). Significa que no pude encontrar uno (ríe), pero quizás no existe tal número...
Entrevistador: ¿Qué te hace pensar eso?
Amy: Prueba y error.
Entrevistador: Prueba y error. (pausa). Puedes verificar mirando estos números, mirando 26 y 117? ¿Podrías, sin prueba y error, decir inmediatamente no, esto es imposible, 117 no es un múltiplo de 26?
Amy: Bueno, pienso que éste no es un número par, que, (pausa). Pienso que éste es impar y éste par...
Entrevistador: ¿Y?
Amy: (pausa). Cuando multiplicas esto por un número, éste número está haciéndolo par o algo; no sé...
Entrevistador: Yo creo que sabes.
Amy: (ríe)...
Entrevistador: Lo que dices es absolutamente correcto. Tú dices 26, cuando lo multiplicas por otro número esto está haciendo que sea par.
Amy: Bueno, porque justamente fui tratando de emparejar en mi cabeza, y fueron todos pares, pero no había probado con todos ellos, así que no estaba completamente segura.
Entrevistador: Así que para estar completamente segura...
Amy: Lo verifiqué (ríe), los verifiqué a todos.

Amy fue capaz de identificar que 117 era un múltiplo de todos estos factores. Sin embargo, no parece haber comprendido que esta lista era exhaustiva, esto es, no había otro número más del cual 117 fuera múltiplo. Para decidir si 117 era múltiplo de 26, Amy usa una aproximación empírica, busca números enteros que cuando los multiplica por 26 le dan por resultado 117. Aunque esta aproximación es consistente con la definición de un múltiplo, comprobar con la realización de varias multiplicaciones y no con una simple división puede entenderse como una falta de conexión entre la visión de un múltiplo como relación en términos de división y de multiplicación. Después de haber sido orientada y animada varias veces a aplicar un razonamiento deductivo, Amy construyó su razonamiento sobre evidencia empírica, por lo que “no estaba completamente segura” de sus argumentos hasta verificar todas las posibilidades. Esta necesidad de verificar indica un vínculo mínimo entre los conceptos.

La siguiente conversación con Chris tuvo lugar después de haberse establecido que 117 era múltiplo de todos los números enlistados previamente como factores/divisores de 117.

Entrevistador: ¿Dirías que 117 es un múltiplo de 26?
Chris: Mmm (pausa) bueno, 2x13 =26, pero cuando pruebo 2x9= 18 no funciona, así supongo; no creo que pudiera ser.
Entrevistador: No crees que podría ser, ¿y por qué crees que no podría ser? ¿Puedes, por favor, compartir tus ideas?
Chris: ¡Oh!, porque si miramos nuestro árbol de factores no tenemos nada para usar, y la única manera de conseguir 26 es teniendo un 2, por ejemplo, 2x13; así que asumo que no podría ser y, también, cuando pruebo con 2x9, por ejemplo, no funciona como 18 entre eso.

Chris nota que 26 tiene un factor 2, y que 2 no aparece en el árbol de factores para 117. Hace referencia a su experiencia inmediata, cuando tratando de extender la lista de factores de 117 “prueba” con 18. Y ya que ha verificado que 18 no es un divisor de 117 fácilmente concluye, sin cálculos, que 117 no era múltiplo de 26; y confía en su conclusión. Aunque recurre a un razonamiento parecido, para ambos

VERSIÓN PRELIMINAR

cálculos podría haber simplificado al considerar el hecho de que una lista completa de factores de 117 se había discutido apenas unos pocos minutos antes.

Chris y Amy usan la conexión entre factor y múltiplo, deduciendo que 117 era un múltiplo de todos los factores de 117. Sin embargo, la inferencia de que 117 no puede ser múltiplo de un número que no es su factor no se utilizó, y tan sólo se respondió considerando a los árboles de factores, o a través de prueba y error en una calculadora. Esto indica que la red de conexión mental entre factores y múltiplos de los estudiantes parece ser mucho más compleja que la sugerida por la definición matemática.

4.7. La confianza en las prácticas escolares

Se mencionó la dependencia de los estudiantes con el conocimiento y las prácticas adquiridas en la escuela elemental, cuando el significado asignado a un divisor y a un factor estuvo basado, en la mayoría, en el conocimiento memorizado en la escuela y no en el que habían aprendido recientemente. Una observación más, que el múltiplo es, también, una otra referencia al frecuente ejercicio escolar de listar los múltiplos de un número dado.

En esta sección, se darán ejemplos que demuestren la confianza en las prácticas escolares, tal como en los cálculos y en las tablas de multiplicar.

4.7.1. Confiando en los cálculos

Chris aseguraba que 18 no era factor de 117, porque es el resultado de 2x9, y 2 no es un factor de 117. De todos modos, después de aplicar este razonamiento eficaz, Chris pidió una calculadora y realizó la división de 117 entre 18. El entrevistador le dijo que explicara el resultado de la calculadora.

Entrevistador:	Tú, primero tenías una excelente explicación: 2x9 y tú aquí encerraste en un círculo 2 y 3^2 y, entonces, lo comprobaste rápido, rápido, rápido en tu calculadora. ¿Te sientes mejor después de hacer esto?
Chris:	Sí (ríe)... Confío demasiado en la calculadora, desafortunadamente, pero...
Entrevistador:	¿Puedes decirme más acerca de por qué confías demasiado en tu calculadora?
Chris:	Pienso que es, es como el sistema escolar, como si; es por esto que realmente disfruto esta clase, me estoy dando cuenta, porque te animas a pensar en un sentido más general los conceptos; mientras que en el sistema escolar siempre estás con fórmulas y utilizando tu calculadora todo el tiempo, y realizando todos estos cálculos tan complejos que no tienes realmente tiempo para reflexionar, así que creo que te hacen flojo en ese sentido.

Chris admitió "volverse floja". Aunque, la mayoría de los estudiantes cuando se detienen y se preguntan sobre el propósito del uso de la calculadora, cuando ésta fue innecesaria desde la perspectiva del entrevistador, argumentan que querían "verificar" o "estar seguros". Algunos se refirieron al hábito adquirido durante los días de escuela de "verificar todas sus respuestas". De cualquier modo, esto demuestra que la comprobación en la calculadora les da a los estudiantes más seguridad que la aplicación de cualquier razonamiento matemático.

4.7.2. Dependencia a las tablas de multiplicar

Muchos entrevistados equivocadamente creyeron que 91 era un número primo, porque su descomposición prima 7x13 no está entre los factores "básicos" de la multiplicación memorizada en los primeros años escolares (Zazkis & Campbell, 1996a). En este grupo, la creencia de que 39 era un número primo fue expresada por tres alumnos, esto dependió de su conocimiento de las tablas de multiplicar. La divisibilidad de 39 entre 3 es "fácil", considerando la regla de división para 3; la división de 39 entre 3 (en comparación con la división de 91 entre 7) es tan simple que puede ser realizada mentalmente sin mucho esfuerzo. Por lo tanto, la creencia de los estudiantes de que 39 es un número primo es un fuerte indicador de que están muy sujetos a los límites de su conocimiento escolar. Las siguientes citas son testimonios de estudiantes:

Entrevistador:	¿Y cómo puedes determinar que 39 es un primo?
Liz:	Creo que lo puedo determinar de la forma larga, pero sólo porque conozco mi tabla de multiplicar; nada entra en 39.

VERSIÓN PRELIMINAR

Entrevistador: Así que has multiplicado 3x39 para obtener 117. ¿Has pensado que ambos son factores primos?
Penny: Sí, pienso que 39 es un factor primo.
Entrevistador: ¿Y cómo puedes determinar o convencerte a ti misma de que 39 es, en verdad, un primo?
Penny: Bien, tengo que estar segura que ningún otro cabe en él, otro que el uno y él mismo (pausa)... Y no puedo pensar en ninguno...
Entrevistador: Sí...
Penny: De acuerdo, pienso, yo sé, no puedo pensar en otro que al mismo tiempo quepa en él, entonces, me gustaría 11, 12, 13 y, entonces, me está dando, que, no pienso que haya ninguno en mi cabeza...
Entrevistador: Mmm, ahora te pido que trates con 3.
[...]
Penny: (se queda callada).
Entrevistador: Quiero preguntarte, ¿por qué, por qué piensas que 39 es primo? Tú, tú parecías, por un momento, estar completamente convencida...
Penny: Porque pienso, si pensaba, porque (pausa) quiero, sé, estoy segura que, tal vez no (ríe) puedo, pero pienso, estaba segura con mis multiplicaciones arriba de 10, usted sabe, como, como tener tantas veces cada una que sea menor de 10...

En verdad, 39 no es el resultado de ninguna multiplicación que ha sido memorizada dentro de las tablas de multiplicar arriba de 10 ó 12. Buscar la descomposición de un número usando las tablas de multiplicar parece ser un método razonable. De cualquier modo, Penny con su estar “segura con [mis] multiplicaciones” y Liz con sus “tablas de multiplicar” están llegando a conclusiones equivocadas. Ambas trabajaron sobre la suposición implícita de que los números menores de 100, cuando se descomponen como el producto de dos factores, tienen que tener factores menores de 10 ó 12.

5. RESUMEN Y CONCLUSIÓN

Este estudio se centró en investigar los significados de múltiplos, divisores y factores construidos por los estudiantes para profesores a la escuela elemental, así como los vínculos entre los tres conceptos y los vínculos con otros conceptos relacionados como números primos, descomposición de números primos y divisibilidad. Los resultados sugieren que los vínculos que matemáticamente parecen claros y sencillos representan una red compleja para los estudiantes. Las aproximaciones que tienen los estudiantes, al resolver problemas, demuestran que no utilizan totalmente las conexiones matemáticas de estos conceptos. Además, se manifiesta la influencia que ejerce la experiencia previa de los estudiantes cuando realizan sus construcciones.

En esta investigación, el significado asignado por los estudiantes a un múltiplo se confundió, la mayoría de las veces, con el significado de factor o de producto. Con frecuencia, los significados asignados a factor y a divisor fueron inconsistentes con relación a lo que se intentó enseñar del contexto de la teoría elemental de números. La existencia de distintos significados matemáticos para factores y divisores contribuyó a la confusión de los estudiantes. Desde la perspectiva de la teoría de números, factores y divisores se perciben como sinónimos y describen una relación entre números naturales. Desde la perspectiva de las operaciones aritméticas, factores y divisores describen el rol que juega un número en una operación de multiplicación y de división. Estos dos significados, aunque relacionados, pueden interferir en una situación problema; donde el significado asignado por el estudiante sea diferente del que se intenta enseñar (por un profesor, un entrevistador o un libro de texto). En las tres semanas del curso de matemáticas, anterior a las entrevistas, los participantes estudiaron una unidad sobre teoría elemental de números. La relación de significado entre factor y divisor se manejó en el salón de clase durante esas semanas. Sin embargo, como lo muestran los resultados, durante las entrevistas, la mayoría de los estudiantes, explicaron estos conceptos haciendo referencia al significado del rol que juegan en una operación.

Hubiera sido sencillo revelar el significado, que se pretendió enseñar, a través de indicios léxicos y contextuales (Zazkis, 1998b). En el contexto de la introducción a la teoría de números y en la discusión de números primos y múltiplos se intentó destacar la relación de significados entre factor y divisor. Los indicios léxicos a estos significados se dan para poner atención al factor o al divisor *de* un número, más que al factor o divisor *en* una ecuación numérica. Es extremadamente importante que en la escuela elemental para profesores se aprenda a distinguir entre los dos significados y a aplicar el significado apropiado a cada contexto particular. Dado que el rol que juega el concepto en una operación era con el

VERSIÓN PRELIMINAR

significado con que estaban más familiarizados los estudiantes en su formación escolar, el esfuerzo por construir un nuevo significado fue mayor del que se esperaba. Regularmente los libros de texto proporcionan definiciones rigurosas seguidas de ejemplos, pero no incluyen referencias a lo que podría ser un conocimiento previo en los estudiantes. En ocasiones, los libros proporcionan diferentes definiciones para el mismo término en sus distintas páginas, además de que no mencionan la conexión. Por lo tanto, el papel del instructor al ayudar a los estudiantes a construir el significado que proporciona la estructura subyacente de la red de conocimientos matemáticos es crucial.

Sugiero exponer explícitamente el tema de la ambigüedad de significados; ya que puede ser una estrategia prometedora. También, una aproximación para tener una visión de la relación entre factores y divisores que coexista y, cuando sea necesario, encargarse de la visión de rol en una operación es dirigir de forma activa la ambigüedad de significados y significados deseados en una situación especial. Esto se puede llevar a cabo involucrando al estudiante en una situación en la cual distintas interpretaciones proporcionen diferentes resultados (Un ejemplo de dicha actividad se puede encontrar en Zazkis, 1998b). Una discusión posterior en el salón de clase podría centrarse en resolver el desequilibrio existente, atendiendo la posibilidad de distintas interpretaciones y buscando una interpretación adecuada a través de indicios contextuales y de estructuras gramaticales. Por supuesto, se necesita verificación empírica para decidir a qué grado la aproximación sugerida es benéfica.

"Construir relaciones entre piezas de información no siempre ocurre espontáneamente" (Hiebert & Lefevre, 1986, p.16). De forma similar, la construcción de vínculos entre conceptos matemáticos no siempre ocurre de manera espontánea. Este estudio enfatiza una vieja noción de educación –la importancia de relacionar el conocimiento previo de los estudiantes. Se muestra que las percepciones existentes en los estudiantes son mucho más fuertes que los conocimientos y prácticas recientes. Un intento por que el estudiantes construyan nuevas conexiones entre conceptos matemáticos puede tener más éxito si dichos conceptos están relacionados con su conocimiento previo.

Sin embargo, la noción de "conocimiento previo" en el caso de los estudiantes para profesores de escuela elemental puede diferir del conocimiento previo de niños o de los matemáticos especializados. Lo que frecuentemente ocurre en un curso con contenido en la escuela para profesores no es la construcción de conocimiento nuevo, sino la reconstrucción de significados previamente construidos. Esto nos lleva a la discusión del primer problema revelado por la investigación antes realizada – el problema de *reaprender*. ¿De qué manera difiere el *reaprendizaje* del aprendizaje? ¿Existirán teorías de aprendizaje que se adecuen y expliquen el *reaprendizaje*, o necesitamos reconsiderarlas y extenderlas para generar una "teoría del *reaprendizaje*"? La idea de esquema (Asiala et al., 1992) es lo que más serviría como perspectiva teórica, intentando acomodar y clarificar el *reaprendizaje*, así como darle forma a la noción de vínculo y su papel en el aprendizaje de las matemáticas. Tal avance teórico debe tenerse en consideración en investigaciones futuras.

"Los educadores matemáticos debemos encontrar un balance apropiado entre lo que los maestros prospecto deben saber y lo que saben" (Simon, 1993, p. 253). La atención al conocimiento previo que los maestros prospecto traen de sus cursos de matemáticas debe ser la clave para reducir la brecha entre lo que se "debe" y lo que se "tiene".

BIBLIOGRAFÍA

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1992). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (pp. 1-32). Providence, RI: American Mathematical Society.

Brown, A. (1999). *Patterns of thought and prime factorization*. Manuscrito enviado para su publicación.

Brown, A., Thomas, K. & Tolias, G. (1999). *Conceptions of divisibility: Success and understanding*. Manuscrito enviado para su publicación.

Campbell, S. & Zazkis, R. (1994). Distributive flaws: Latent conceptual gaps in preservice teachers' understanding of the property relating multiplication to addition. En D. Kirshner (Ed.), *Proceedings of the Sixteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 268-274). Baton Rouge, Louisiana: Louisiana State University.

VERSIÓN PRELIMINAR

Davis, R., Maher, C. A. & Noddings, N. (Eds.). (1990). Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Series Number 4*. Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.

Ferrari, P. L. (1997). Action-based strategies in advanced algebraic problem solving. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 257-264). Lahti, Finland. University of Helsinki.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 4-12.

Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice*. Cambridge, Cambridge University Press.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Nicholson, A. R. (1977). Mathematics and language. *Mathematics in School 6*(5), 32-34.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meaning: Learning cultures and computers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Simon, M**.** (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Alathematics Education 24*(3), 233-254.

Zazkis, R. (1998a). Odds and ends of odds and evens. An inquiry into students' understanding of even and odd numbers. *Educational Studies in Mathematics 36*(1), 73-89.

Zazkis, R. (1998b). Quotients and divisors.- Acknowledging polysemy. *For the Learning of Mathematics, 18*(3), 27-30.

Zazkis, R. & Campbell, S. (1996a). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 540-563.

Zazkis, R. & Campbell, S. (1996b). Prime decomposition. Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior 15*(2), 207-218.

VERSIÓN PRELIMINAR