Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 3, Núm. 1, marzo, 2000, pp. 47-70.

De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal

Ed Dubinsky[1]

RESUMEN

El objetivo principal de este ensayo es exponer por qué y cómo un matemático dedicado especialmente a las investigaciones en matemática teórica, podría cambiar su campo de estudio a las investigaciones en matemática educativa. Para entender este cambio es necesario describir: cuál era la situación antes y después del cambio, cómo llegué a la decisión del cambio, cómo hice la transformación y a dónde me condujo mi nueva vida profesional. De esta manera intento explorar mis propias experiencias con la esperanza de que a partir de la introspección de un individuo se pueda aprender algo.

ABSTRACT

The main goal of this essay is to understand why and how a mathematican, very much dedicated to research in theoretical mathematics might change his field to research in mathematics education. In order to understand a change, it is necesary to probe a little deeply into how it was before and also after the change; how I came to the point of changing, how I made the transformation and where I went with my new professional life.To do all this, I intend to explore my own experiences in the hopes that through the introspection of an individual we might learn something about the situation for everyone.

RÉSUMÉ

L'objectif principal de cet essai est d'exposer pourquoi et comment un mathématicien dont la spécialité est la recherche théorique en mathématiques peut faire évoluer ses recherches vers le domaine des didactique des mathématiques. Pour bien comprendre cette évolution, il faut décrire quelle était la situation avant et après ce changement, de quelle façon celui a pu se produire et à quel point j'ai pu parvenir dans ma nouvelle vie professionnelle actuelle. J'entends de cette manière explorer mes propres expériences avec l'espoir que cette introspection individuelle puisse être pour certains une source d'enseignement.

RESUMO

O objetivo principal deste ensaio é expor o porque e como um matemático dedicado especialmente a pesquisa em matemática teórica poderia mudar seu campo de estudo às pesquisas em matemática educativa. Para compreender essa mudança é necessario descrever qual era a situação antes e depois da mudança : Como cheguei a decisão da mudança, como fiz a transformação e onde cheguei com minha nova vida profissional. Desta maneira tento explorar minhas próprias experiencias com a esperança de que a partir da introspeção de um indivíduo se possa aprender algo.

[1]Profesor del Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación, Georgia State University.

INTRODUCCIÓN

Describiré mi vida como matemático. Comenzaré con mis primeras experiencias con las matemáticas cuando era niño en la escuela y durante mi educación formal en la universidad. Al principio de mis estudios universitarios estaba más interesado en la educación que en las matemáticas, pero muy pronto cambié y me convertí en un investigador en matemáticas. Quiero describir el proceso específico mediante el cual desarrollé la habilidad de hacer matemáticas avanzadas, en particular, la investigación. Creo que durante aquella época mis ideas sobre la educación también se estaban desarrollando, no tan activamente pero de manera simultánea a mis actividades políticas.

Llegué al punto de cambio con plena conciencia y si no todo lo que pasó estaba bajo mi control, por lo menos estaba consciente de todo lo que sucedía. Así que daré una descripción detallada, correcta o no, pero como yo la entiendo, de la transformación.

Una vez que decidí enfocar mis actividades profesionales en la educación matemática, ya se estaba desarrollando un nuevo proceso. Había un tiempo para formación, algunas primeras investigaciones, el desarrollo de una teoría de aprendizaje, las aplicaciones a la práctica de enseñanza y, después de que me convertí en un matemático educativo, trabajo con otros matemáticos que querían cambiarse a educación matemática. A continuación describiré dichas experiencias.

Para organizar esta historia, divido mi vida profesional en seis períodos: 1943-1952, la prehistoria; 1952-1962, mi educación formal en matemáticas; 1962-1983, conversión en matemático; 1983-1985, la transición; 1985-1995, el desarrollo de una teoría de aprendizaje y 1995-1999, los grupos RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education) y ARUME (Association for Research in Undergraduate Mathematics Education).

1943-1952: PREHISTORIA

El recuerdo más antiguo que tengo sobre mis actividades matemáticas es en el segundo grado cuando tenía ocho años. Mi maestra en aquella época tenía una disciplina severa, y si un niño se portaba mal, ella le daba unas tarjetas donde estaban escritos varios ejercicios aritméticos para realizar. Si el niño se había portado sólo un poco mal recibía una o dos tarjetas, pero si se había portado realmente mal, entonces recibía tres o cuatro. Hasta ahora mantengo viva la imagen de la Sra. Connors, de pie, muy alta, diciendo con una voz ronca: "¡Tome tres tarjetas!" Pero en mi caso, resultó que yo disfrutaba haciendo esos problemas. Entonces, me portaba un poco mal y, al mismo tiempo, ¡aprendía aritmética muy bien!

En esos años las matemáticas que enseñaban en la escuela eran muy rudimentarias, nada más que cálculos, y en ellas mi habilidad era muy alta. En esa época, prevalecía un estado de rebelión contra la autoridad, contra los adultos. Mi forma de "rebelión" era sentarme frente del salón de clases y reñir con el profesor diciendo que, él o ella, estaba equivocado. Para este objetivo, las matemáticas, es decir los cálculos, me servían bien. Podía decidir cuándo el maestro cometía un error y señalárselo directamente, en voz alta y con mucha seguridad. Frecuentemente tenía razón en cuestiones de cálculos. De esta manera satisfacía una necesidad emocional y mejoraba mis habilidades para calcular.

Pero como niño, no tenía mucho éxito en mi vida. Lo único en que me distinguía era en hacer cálculos y hablar en contra de mis maestros. Al crecer, estas habilidades se volvieron más importantes. Mi habilidad para calcular se reflejaba en buenas notas en mis cursos de matemáticas y mi habilidad para argumentar me servía para las conversaciones sociales.

Pero es importante destacar que mis habilidades en matemáticas sólo se referían a los cálculos, no a la comprensión conceptual. Por ejemplo, en la escuela secundaria había un pequeño concurso del club de matemática. Tuvimos que resolver un problema lógico. Gané la competencia pero sólo porque fue posible resolver dicho problema mediante la construcción de una tabla, enlistando todas las posibilidades para llegar a la única opción que resolvía el problema. Fue necesario realizar muchos cálculos y en éstos fui el mejor. Pero fue un éxito aparente. Al pensar ahora en otros problemas que no podía resolver, me doy cuenta que no comprendía demasiado los conceptos matemáticos.

Por ejemplo, uno de mis maestros de matemáticas en la escuela secundaria, se daba cuenta de mis habilidades y trataba de introducirme en algunos conceptos matemáticos, un poco más avanzados, mientras resolvía algunos problemas. Uno de éstos fue considerar un rectángulo de dimensiones determinadas y una regla de una anchura dada. Había que buscar el largo máximo de tal regla de modo que pudiera inscribirse en el rectángulo. La intención del señor Warshaw fue que yo pensara en los problemas de optimización y quizás del cálculo, pero no tuve ninguna idea respecto a cómo abordar esta situación. También pensaba en el problema de trisecar un ángulo arbitrario con la regla y el compás. Otra vez no tenía idea de qué hacer. Pude escribir la fórmula para un ángulo de tal manera que fuera la tercera parte de un ángulo dado y mi única actividad fue manipular esta expresión repetidamente sin ningún resultado y, lo más importante, sin entender siquiera si este método tenía futuro. Podía resolver los problemas de todas las categorías excepto éste: dado cierto número de borregos con un número dado de cabezas y de patas, hallar el número de borregos. No tenía idea de cómo solucionarlo.

1952-1962: EDUCACIÓN FORMAL EN MATEMÁTICAS

A pesar de mi falta de entendimiento conceptual, tuve éxito con mis estudios de matemáticas en la escuela secundaria, y entré en la Universidad Temple con la intención de llegar a ser profesor de matemáticas de secundaria. Me convertí en un estudiante de educación secundaria con especialización en matemáticas.

Mi primer curso de matemáticas fue sobre cálculo; resultó muy fácil. El profesor explicó cómo resolver uno u otro tipo de problema y el trabajo de los estudiantes fue hacer problemas similares. Mi método de estudio fue asistir a clases, pero no hacer las tareas. Sólo esperaba que mis compañeros de la universidad acudieran a mí para que les resolviera sus dificultades, y les mostraba como resolver los problemas que para ellos eran difíciles. Esto fue suficiente para que yo tuviera éxito en los exámenes. En dos años con cuatro cursos de cálculo nunca estudié de otra manera, sin embargo obtuve calificaciones perfectas en cada examen.

Pero todavía sin lograr la comprensión conceptual. Me acuerdo que muchas veces el profesor trataba de explicar la idea de límite. No pude entender. Le pedí al profesor un ejemplo de una función que no tuviera límite en un punto y siempre me daba el mismo ejemplo: la función escalonada en la que, para $x < 0$ su valor es -1 y para $x > 0$ es 1, mostrándome su gráfica. Este ejemplo no me ayudó. Sólo ahora entiendo por qué y lo importante que resulta para mis investigaciones actuales. Recuerdo muy bien que en esa época este ejemplo no era para mí una función ¡porque su gráfica no tiene curvatura! Entonces, me quedé sin ejemplo ya que la definición de límite no me satisfizo.

El cálculo no fue mi único curso sin muchos contenidos serios. Inmediatamente después tomé un curso de álgebra abstracta que duró catorce semanas pero no me ayudó mucho. El punto más importante fue que éste terminó con un ejemplo, no un teorema, sólo el ejemplo, en Z_{20}, del subgrupo de los múltiplos de 4, y sus conjuntos laterales, cada uno con la misma cardinalidad, y el hecho de que el número de dichos conjuntos laterales dividiera la cardinalidad 20 del grupo. No era mucho material.

La primera crisis llegó en el tercer año de mis estudios en la universidad. Tomaba un curso de cálculo avanzado y otro de análisis complejo. En el primero tenía dificultad para entender la situación de una función de R^n a R^k en la que había relaciones entre las variables en R^n. Fue en parte culpa mía y en parte culpa de mi maestro, pero en todo caso no entendí que esta situación es un ejemplo de la regla de la cadena para las funciones de varias variables. Pensé que había que aprenderse de memoria muchas fórmulas sin una idea general aparente. Comencé a tener incertidumbre, no de mis habilidades sino de la naturaleza de las matemáticas. Por primera vez las matemáticas me parecían una especie de taxidermia. Aprendí de memoria muchas fórmulas y tuve éxito en el curso, pero no del todo. Fue la primera vez que recibí una B (calificación en un curso de matemáticas en v de la acostumbrada A.

La situación en el curso de análisis comple fue más seria. Para el primer examen, no m preparé mucho como era mi costumbre. L la primera pregunta y no tuve idea de cóm contestarla. Pensé que podría omitirla, r solver los otros problemas y regresar ma tarde a la primera pregunta. Continué con segundo problema, pero fue lo mism ¡También con casi todas las preguntas d examen! De alguna manera terminé el exa men resolviendo partes de algunos problema el resultado fue casi un fracaso. No recuerd cómo completé el curso, pero sí lo que n maestra me dijo: "le di a usted la nota A e el curso sólo a causa de su reputación".

Es importante darse cuenta de qué estab sucediendo. Tenía mucha habilidad para hace matemáticas que sólo se relacionaban co cálculos. No estaba consciente de que e matemáticas había algo más que cálculos Entonces ni siquiera trataba de aprender lo conceptos. No entendía lo que pasaba cuand las matemáticas dejaban de ser una activida fácil y se convertían en algo extraño, ajeno Por otro lado, mis maestros tampoco en tendían qué pasaba conmigo y por lo tanto n podían ayudarme.

Afortunadamente tuve un amigo, L. Brickman un compañero de estudios mayor que yo, qu tenía gran habilidad para las matemáticas tanto para los cálculos como para los con ceptos. Brickman era muy nervioso y en esa época yo tenía muy buen sentido del humor Nos convertimos en amigos inseparables. Yo le ayudé a relajarse y él me ayudó a entende matemáticas. El progreso fue lento, pero para mí fue un comienzo.

La segunda crisis llegó durante mi último año en la universidad, cuando me di cuenta de que no quería ser profesor de matemáticas en la escuela secundaria, sino un matemático. Lo supe cuando descubrí que no podía tomar ningún curso de matemáticas en mi último año, sólo los cursos educativos. Decidí cambiar mi campo de estudio, pero los cursos obligatorios para matemáticos eran diferentes de los cursos obligatorios en el área educativa. Entonces tuve que tomar varios cursos adicionales y generales, tales como francés, historia, etc. Estudié mucho en el verano anterior a mi último año universitario y casi fracaso. Pero al fin tuve éxito y terminé mis estudios de matemáticas.

Asimismo, en ese último año en la universidad recibí una beca para estudios avanzados, para obtener el grado de maestro de matemáticas en la Universidad de Pennsylvania. Ello implicó que tuviera que dar dos cursos de matemáticas (el de cálculo, de hecho) a los estudiantes de reciente ingreso a la universidad. Además, se esperaba que tomara tres cursos avanzados de matemáticas. Pero en aquel momento hice dos tonterías, y es importante que describa el contexto en que arreglé mi vida de tal manera que no fuera posible tener éxito en mis actividades.

La primera tontería que cometí, fue en el verano después que terminé mis estudios en la Universidad Temple y antes de comenzar mis estudios avanzados en la Universidad de Pennsylvania. No tenía obligaciones y tampoco dinero, y entonces busqué un trabajo. En aquella época, había una gran demanda de gente con grado universitario en matemáticas debido a su capacidad para elaborar programas de computación. Conseguí un empleo en la empresa Burroughs con un sueldo de 410 dólares al mes. Hay que entender que mi familia era muy pobre, y yo no había tenido nada de dinero durante toda mi vida hasta esa época, y ese sueldo era el más alto en toda la historia de mi familia.

En ese tiempo programar una computadora era una actividad venturosa y emocionante. Trabajábamos con los 0 y 1 para construir un programa, por ejemplo de 50 líneas, que funcionaba de principio a fin; de manera correcta o no. Fue un gran evento digno de celebrarse. Me gustaron mucho esas actividades y el dinero también. Al final del verano no pude renunciar a ese trabajo y entonces decidí dedicarme a ambas actividades: mis estudios con beca para enseñar en la Universidad de Pennsylvania y programar computadoras en la empresa Burroughs.

Hay épocas, en la vida de una persona, en las que confluyen diversos proyectos y actividades que resultan ser muy satisfactorias al mismo tiempo. Para mí, entonces, no sólo fueron mis estudios y mi situación económica que llegaron a un punto culminante, sino que también tenía mucho éxito en el ámbito social. En la escuela secundaria era miembro de una organización nacional que se dedicaba a realizar actividades sociales, religiosas y fraternales. Me involucré en sus políticas; era un funcionario importante y al final del verano de 1956 fui electo presidente nacional de dicha organización. Era muy joven e ingenuo. Creí que podría hacer todo: estudiar matemáticas en tres cursos avanzados (de análisis real, álgebra abstracta y el proseminar de Hans Rademacher); impartir dos clases de cálculo; trabajar 40 horas o más por semana programando computadoras y manejar una organización nacional.

No tuve éxito en todas mis actividades ese año, pero tampoco fue un desastre total. Fui un buen profesor de cálculo, seguro con el manejo de métodos tradicionales, no sé cuánto aprendieron entonces mis estudiantes. No era tan malo para resolver problemas en el proseminar, y aprendí un poco de análisis y álgebra. Por otra parte, tuve mucho éxito en la programación de computadoras, pero como presidente fui un fracaso. Creo que mi falta de éxito no se debió únicamente a mi horario saturado. Tenía 21 años y podía pasar dos o incluso tres días sin dormir, o muchos días con poco descanso. El problema real fue que no comprendía en verdad cómo estudiar matemáticas y no había logrado el nivel emocional e intelectual necesario para manejar una organización grande. En todo caso, a nadie dije que estaba haciendo tantas y tan variadas actividades ¡y nadie lo descubrió!

Naturalmente, los primeros dos años de mis estudios fueron muy desgastantes, especialmente el primero. Recuerdo con mucho gusto que, en el comienzo, pude resolver algunos problemas en el proseminar de Rademacher. Pero cada estudiante debía presentar un artículo de investigación de la literatura matemática. En mi artículo me ocupé de la cuadratura de una función continua en el intervalo unidad [0, 1]. Cuando di mi explicación, tuve dificultades con los conceptos de supremo y de límite superior de una sucesión de números reales. El profesor Rademacher me invitó a su oficina para discutirlos. Cuando platicamos, él se dio cuenta que en verdad yo no entendía nada de dichos conceptos, se puso muy agitado y me gritó recriminándome que estaba tratando de construir mi propio significado para ellos. Simplemente no pudo creer que yo no entendía dichos conceptos, sino que pensó que ¡no quise aceptarlos!

En el curso de análisis real aprendí un poco sobre la construcción de los números reales y de funciones de valores reales, pero me acuerdo que tuve mucha dificultad con el concepto de inducción matemática transfinita y con la prueba de que el conjunto de los números reales no es numerable. Por último, no olvido que la posibilidad de demostrar algo para cada función entre dos conjuntos infinitos me pareció extraordinaria. Pensé que era posible demostrar que todas las funciones que conocemos no podrían ser una biyección, pero me preguntaba si una función que todavía no concebimos podría ser una biyección. Después de discutir con el profesor N. Fine, éste me dejó solo para pensarlo. Supongo que desistió de que yo tratara de entender dicha idea.

En el curso de álgebra abstracta el profesor era japonés; no hablaba muy bien el inglés y cada día llegaba a clase y escribía en la pizarra los contenidos del texto de Van der Waerden. En ese curso no aprendí casi nada.

Después del primer año comencé a darme cuenta de que la situación no era tan buena y que había que cambiar. Entonces mi periodo como presidente terminó, renuncié a mi beca, así que no tuve que enseñar cálculo y tomé solo un curso, el de variables complejas. Decidí concentrarme en dos cosas: mis estudios y mi puesto como programador. Cambió mi método de estudio porque estaba comenzando a entender realmente qué significaba aprender matemáticas avanzadas. Compré un escritorio muy grande y establecí una oficina en mi propia casa. Por primera vez en mi vida organicé mi tiempo con mucha precisión. Durante el día trabajaba en la empresa Burroughs y en la noche pasaba un tiempo concentrado en mis cursos de matemáticas, los que estaba tomando aquel año y los tres del año anterior. Tenía un examen de conocimientos programado en la primavera y estaba preparándome para él.

Hubo dos resultados de toda esta actividad. El primero fue que aprendí que éste era el método más eficaz para trabajar. El segundo, que por supuesto aprendí mucho de matemáticas, pero una pregunta seguía vigente: ¿era suficiente para aprobar el examen? El examen fue oral y asistieron todos los profesores de la facultad de matemáticas. Al comienzo del examen, los sinodales me preguntaron sobre los ceros y los polos de una función meromórfica de una variable compleja. Entendí todo y muy bien, pero tuve un gran bloqueo mental y no pude decir nada inteligente durante casi veinte minutos. Por desesperación el jurado cambió el tema y comenzó a hacerme preguntas sobre álgebra abstracta. No entendí mucho pero había pasado tanto tiempo con el libro de Van der Waerden que, cuando me preguntaron sobre los campos finitos de Galois, tuve una imagen total en mi mente de las páginas apropiadas y se las "leí" al jurado ¡exactamente como el profesor en mi curso! Esto rompió el bloqueo y en la segunda mitad del examen contesté muy bien todas las preguntas.

¿Cuál fue el resultado?, ¿cuál la decisión del jurado en mi caso? Tuve una entrevista con el jefe del departamento. Me dijo que si estaba de acuerdo en dejar la universidad y no continuar un doctorado, entonces me otorgarían el grado de maestro de matemáticas. Me sentí muy triste y creía que había sido un fracaso como estudiante. Sin embargo, en realidad esta experiencia se convirtió a largo plazo en un éxito. No sólo había aprendido mucho sobre matemáticas sino que, lo más importante, había aprendido cómo aprender matemáticas. No lo supe en aquella época, ¡pero esta experiencia me preparó para mi carrera como matemático!

Al principio, después del examen, pensaba que tendría una carrera en la industria como programador y después como analista matemático. Quería trabajar en el programa espacial. En la primavera de 1958, un matemático, R.M. Thrall, de la Universidad de Michigan, vino a Burroughs con la idea de reclutar un equipo para realizar investigaciones y operaciones en el laboratorio de Willow Run que pertenecía a la Universidad de Michigan. Estaba interesado y me propuso que fuera a Ann Arbor para concertar una entrevista. Fue en la primavera de ese año, cuando las plantas y los árboles comenzaban a florecer, el sol brillaba y todo me parecía muy bonito. Me enamoré de la ciudad de Ann Arbor y decidí cambiar mi empleo e ir a trabajar a los laboratorios de Willow Run. Pero la situación de las investigaciones industriales y militares en los años cincuenta no eran favorables para mí. No me gustó trabajar en esos laboratorios que estaban ubicados a unas 10 millas de Ann Arbor. Prefería ir a la ciudad, sentarme con los estudiantes y discutir las grandes preguntas del día. Abandoné mi trabajo en Willow Run y me inscribí en la Universidad de Michigan para estudiar el doctorado en matemáticas.

Los siguientes cuatro años fueron muy buenos para mí, porque contaba con tiempo para mis actividades de crecimiento, desarrollo personal y realizaciones. Me concentraba en mis estudios matemáticos, impartía cursos de matemáticas elementales como precálculo y cálculo, hacía buenos amigos y disfrutaba de las actividades culturales, sociales e intelectuales de la ciudad de Ann Arbor, que en tales aspectos era uno de los centros más importantes del occidente medio de los Estados Unidos.

Durante aquella época me convertí en un profesor muy bueno. Empleaba los métodos tradicionales y tenía relaciones muy estrechas con mis estudiantes. Ellos y yo pensábamos que todo iba bien y no nos dábamos cuenta de que, salvo algunos que tenían talento especial para la asignatura, no estaban aprendiendo gran cosa de matemáticas.

Para mi tesis doctoral me interesé en el análisis funcional, en particular sobre el tema de la derivada de Fréchet de una función definida en un espacio topológico vectorial de dimensión infinita, por ejemplo los espacios de distribuciones de L. Schwartz. Mi idea era determinar si sería posible demostrar los teoremas elementales del cálculo y de las ecuaciones diferenciales, en un contexto más abstracto que los espacios R^n. De hecho, demostré un teorema análogo al de Pfaff sobre la existencia de una derivada total y un teorema de existencia de las soluciones de una ecuación diferencial sobre los espacios de Montel.

Todo fue un éxito. Obtuve mi doctorado y gané el premio (junto con otro estudiante) por la mejor tesis de matemáticas en ese año. Y me casé. Junto con mi esposa, fui a la Fourah Bey College, en Freetown, Sierra Leona, para comenzar mi carrera como matemático académico.

Con esto se completó mi formación como matemático formal. La importancia que para mis ideas y actividades en la educación tuvo esta etapa, no sólo fue que en el futuro ya no tuve dificultades para comprender los conceptos matemáticos, sino que tomé conciencia de todo lo que me había pasado. Recuerdo muy bien todo aquello. Además, fui mucho más consciente de mi desarrollo matemático y aprendí que es posible que un estudiante no entienda hoy un concepto matemático, sin embargo eso no significa que no lo entenderá mañana o después de un año, o más. Estas experiencias influyeron en todo lo que hago ahora en relación con las matemática educativa.

1962-1983: CONVERTIRSE EN UN MATEMÁTICO

Es interesante plantear que para que un individuo se convierta en matemático, en el sentido de las investigaciones teóricas, no necesariamente es suficiente que termine los estudios y obtenga el doctorado. Para algunas personas, como yo, hay que tener experiencias adicionales. En todo caso, obtenía resultados interesantes pero no muy importantes, durante los primeros cuatro años de mi doctorado. Alrededor de 1966, influyeron en mi desarrollo profesional algunos matemáticos polacos como C. Bessaga y A. Pelczynski que me mostraron la diferencia entre resultados esencialmente triviales y resultados importantes. Además, aprendí de ellos cómo obtener los resultados importantes. Mi trabajo cambió de ideas muy generales y vagas a las investigaciones de situaciones específicas e investigaciones sólidas, abstractas, detalladas y generales. Investigué las estructuras de subespacios y los cocientes de los espacios nucleares de Frechét, y creé una pequeña escuela internacional de trabajadores en este campo. Además, investigué las aproximaciones de las transformaciones lineales y continuas en los espacios nucleares de Frechét y establecí, en forma de negación, una pregunta en la tesis de A. Grothendieck.

Además, en los años sesenta los movimientos políticos propiciaban una situación muy atractiva; era común tomar parte en la lucha por la libertad de los negros en los Estados Unidos y la lucha contra la guerra vietnamita. Pasé dos años en África (Sierra Leona y Ghana) y luego llegué a la Universidad de Tulane, en Nueva Orleans, donde trabajé en mis investigaciones sobre matemáticas e impartí clases. Al mismo tiempo, realicé actividades políticas al principio en el medio rural de Missisipi y Nueva Orleans ayudando a los negros para que pudieran votar, y más tarde en la Universidad sumándome a la oposición a la guerra. En Misissippi me atacaron físicamente; en Nueva Orleans me castigaron en el periódico local y en Tulane me despidieron de mi trabajo, a pesar de que tenía una plaza permanente. Fui a Canadá y me quedé durante un año trabajando en la Universidad McMaster, y luego dos años en Polonia, donde aprendí en verdad cómo hacer investigaeiones matemáticas.

Durante aquellos años busqué trabajo en los Estados Unidos, principalmente por razones políticas, pero sin éxito. Al fin, obtuve una plaza en la Universidad Clarkson y regresé en 1972; me quedé allí durante los 15 años siguientes. Continué mi trabajo en matemáticas y a la vez participé en el movimiento contra la guerra. Además me dediqué a la lucha por la soberanía de las naciones indias en América del Norte. Fue al final de aquella época cuando cambié mis actividades profesionales: de las investigaciones en matemáticas a las investigaciones en matemática educativa y al desarrollo de métodos pedagógicos innovadores.

Una consecuencia importante para mis actividades futuras, en el ámbito de las matemática educativa, fue el hecho de que realizar investigaciones en matemática teórica me ayudó a entender, cuando leía artículos sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, cómo éste se relaciona con el pensamiento de los matemáticos cuando investigan. De hecho me parecía que la mayor parte de los investigadores educativos no entendían las perspectivas de los matemáticos. La única excepción era Piaget, pero éste es un tema para tratarse más adelante.

Durante esa época todavía era un profesor esencialmente tradicional, pero ya comenzaba a entender que los métodos tradicionales no funcionaban tan bien para los estudiantes. Empezaba a probar con varios métodos alternativos. Por ejemplo, empleaba el método de Sócrates modificado, esto quiere decir que explicaba a mis estudiantes todos los conceptos, las definiciones, los teoremas, las demostraciones, los ejemplos, los contra-ejemplos y los métodos de cálculo, pero no directamente. En una lección típica hablaba poco, hacía una pregunta a los estudiantes, esperaba (aprendí que hay que esperar más de un momento) las respuestas y, en general, trataba de conducir a los estudiantes al desarrollo de las ideas matemáticas.

Otro método tenía que ver con los exámenes. Creía entonces, y creo ahora, que los exámenes y las calificaciones tienen aspectos buenos y malos pero los malos pesan más que los buenos. Así que durante algunos años impartí mis cursos sin realizar exámenes. Es interesante señalar que aún no estoy seguro de que este método ayudara mucho, pero estoy seguro de que no hizo daño. En otras palabras, es posible enseñar matemáticas sin aplicar exámenes y, al menos en mis cursos, al parecer ese método no hizo diferencia.

Un método más se relaciona con las calificaciones. En varias clases permitía participar a los estudiantes en la determinación de sus calificaciones. En algunas clases, las decidían ellos mismos; en otras, en forma individual, trataba de explicar a cada estudiante por qué merecía una determinada nota, pero al final, le daba la calificación que él había elegido.

Una vez traté con un método muy raro, la idea era que quizás el profesor no importaba. Daba un curso en el verano en la Universidad McMaster, donde no se me conocía, fui al salón de clase el primer día antes de que llegaran los estudiantes y escribí en la pizarra: "El profesor es una de las personas en la sala". Entonces, salí y más tarde entré en la clase con los estudiantes y esperé a ver qué pasaba. Esperé que los estudiantes comenzaran a organizar el curso y a estudiar el material. Creo que era un poco ingenuo, nada pasó y después de un tiempo me presenté y comencé el curso. Esta experiencia no contribuyó mucho, pero estableció una atmósfera especial compatible con el espíritu general de los años setenta.

Después de reflexionar al respecto decidí que esos métodos no lograban muchas diferencias, quizás los estudiantes aprendían un poco más que si hubiera empleado los métodos tradicionales, pero, basándome en los exámenes, en otros métodos tradicionales y en mis observaciones en clases y después de ellas, en las que había aplicado dichos métodos, fue claro que si había mejoramiento, éste no era muy significativo. Experimenté una gran frustración y comencé a considerar que había que hacer algo más serio si quería elevar el nivel de aprendizaje de mis estudiantes. Antes había pasado por crisis matemáticas, pero ahora tenía una crisis pedagógica.

1983-1985: LA TRANSICIÓN

En este punto me sucedieron cuatro cosas al mismo tiempo: la crisis de pedagogía que acabo de describir; el hecho de que organizaba un taller de verano para los matemáticos que querían aprender a enseñar informática; el descubrimiento del lenguaje de computadora SETL; y el inicio de la lectura de libros y artículos sobre la psicología y la epistemología de las matemáticas.

En ese tiempo hubo exceso de matemáticos académicos en las universidades. Después del Sputnik, en 1957, se registró un fuerte incremento de estudiantes graduados en disciplinas matemáticas, y luego de profesores de matemáticas en las universidades. Durante los años sesenta y setenta creció la matrícula nacional e internacional en matemáticas, pero después de algunos años el número de estudiantes comenzó a decrecer. Al empezar los años ochenta muchos profesores, con plazas permanentes en las universidades, no tuvieron estudiantes para impartir sus cursos.

Al mismo tiempo, creció fuertemente el interés de los estudiantes en las universidades por estudiar informática, y no había suficientes profesores para impartir clases. Adquirí un poco de experiencia y conocimiento en informática y me pareció que las dos asignaturas tenían mucho en común. Tuve la idea de que sería fácil formar matemáticos y enseñar informática. Conseguí los fondos y establecí el Instituto para Reeducar en Informática, IFRICS (sus siglas en inglés). El personal, para este instituto, estuvo formado por profesores de informática y a causa de que los problemas para enseñar informática parecían diferentes a los problemas para enseñar matemáticas, los métodos de enseñanza también fueron diferentes. Sin embargo, no había tantas diferencias como parecía. Asimilé la influencia de los profesores de informática, aprendí sus métodos pedagógicos y me pregunté cómo aplicarlos a las matemáticas.

J. T. Schwartz, del Instituto Courant, era un matemático importante que se interesó en informática. Diseñó un lenguaje de computadora basándose en ideas matemáticas y empleando una sintaxis muy cercana a la notación de las matemáticas. Este lenguaje se llama SETL y es una herramienta muy poderosa para problemas muy abstractos y complejos. Por ejemplo, SETL fue el primero que tuvo éxito en producir un compilador por medio del famoso lenguaje ADA. Leyendo el lenguaje de Schwartz encontré su afirmación sobre el hecho de que, los requisitos matemáticos para aprender a programar en el lenguaje SETL, consisten en los conceptos matemáticos que se abordan en un primer curso de matemáticas discretas. Pero me pareció que hay más personas que pueden aprender a programar en un lenguaje, que las que pueden entender los conceptos matemáticos. Entonces tuve la idea de invertir dicha afirmación y emplear un conocimiento para programar en SETL a fin de ayudar a los estudiantes a entender los conceptos de las matemáticas. Me pregunté si sería posible desarrollar los cursos matemáticos basados en esta idea.

Al mismo tiempo tomé una decisión respecto a mi trabajo en pedagogía. Me pareció que debía dar tanta importancia a mi pensamiento pedagógico como a mi pensamiento matemático. Eso quiere decir que tuve que tratar los problemas de pedagogía como problemas de investigación y convertirme en un investigador en matemática educativa. La primera etapa sería comenzar a leer literatura de matemática educativa.

Para mi formación en esta área, tuve que hacer un bosquejo de toda la literatura especializada y leer los trabajos más importantes. Desafortunadamente, nadie me ayudó y tuve que depender de la biblioteca, de los resúmenes y de los títulos para encontrar el material y decidir qué leer. Naturalmente, después de conocer un poco de literatura, comencé a desarrollar mis propias opiniones sobre lo que era y no era importante. Algo que hizo mi tarea menos difícil, pero que al mismo tiempo resultó un poco desalentador, fue que no necesité más que dos o tres horas para entender todas las ideas contenidas en casi todos los artículos por ejemplo de 20 páginas y fue muy raro que necesitara todo un día para dedicarme a un artículo en particular. En cambio, para lograr entender todo el contenido de un artículo típico de matemáticas de 20 páginas necesité al menos dos o tres días y en algunos casos más de una semana. Me pareció que, en general, la literatura de las investigaciones en matemática educativa no era tan profunda.

Había excepciones y una de ellas fue el trabajo de J. Piaget. Encontré sus artículos y libros difíciles de leer. Me llevaba mucho tiempo entender conceptos suyos y me parecía que no entendía todo. En parte la razón es que el estilo literario de Piaget no es muy claro, pero me parece que lo más importante es que las ideas de Piaget son muy originales, profundas y entonces difíciles de entender. Esta situación me condujo a profundizar más en los trabajos de Piaget que en los de otros autores. Otra atracción para mí fue un fenómeno muy interesante: Piaget no tuvo formación en matemáticas y no conocía mucho este campo. De hecho, cuando usa ejemplos e ideas específicas de matemáticas, con mucha frecuencia se equivoca. Sin embargo, me parece que cuando describe cómo es un matemático cuando trabaja en matemáticas, buscando ideas y resultados nuevos, Piaget entiende muy bien y lo que describe está muy cerca de mis experiencias. En esta tarea: expresar la actividad de hacer matemáticas, Piaget muestra una perspicacia, quizás intuitivamente pero eso no importa, más grande que la de los matemáticos mismos, incluso, en mi opinión que expositores famosos como Hadamard y Polya.

Por estas razones decidí tratar de entender todas las ideas de Piaget. Pero otra vez fui muy ingenuo. Este hombre tenía 84 años y había trabajado durante más de 70, había escrito más de 300 artículos y 50 libros en diversos temas. No es posible para una persona entender una obra de esa magnitud. Sin embargo, traté de entender lo más posible. Los temas más interesantes para mí fueron el estructuralismo y la abstracción reflexiva. No fue fácil en los primeros años. El volumen de trabajo, la falta de legibilidad de los escritos y la profundidad de las ideas, hizo la tarea muy difícil. Otra dificultad es que aún hoy, hay muchos autores que interpretan las ideas de Piaget; existe, en mi opinión, una brecha grande entre los que se dicen intérpretes de Piaget y lo que Piaget dice en verdad. Un ejemplo se derivó de una conversación que tuve con S. Papert, quien trabajó con Piaget durante dos años. Estaba leyendo las ideas de Piaget sobre el estructuralismo, este concepto me pareció muy interesante e importante pero no pude entender las fuentes de las estructuras que un individuo tiene que emplear, según Piaget, para obtener un significado de sus experiencias. Le pregunté a Papert: "¿De dónde vienen las estructuras de Piaget, por ejemplo de las que habla en el libro *Estructuralismo*?" Me dijo que dichas estructuras son innatas, que una persona las tiene desde su origen. Tuve que leer y estudiar mucho para entender lo equivocado que estaba Papert en su respuesta.

En esa época yo era un matemático conocido a nivel internacional. Me emocionaban mucho mis estudios en epistemología y decidí dividir en dos partes iguales mi tiempo: una parte para las investigaciones matemáticas y otra para las investigaciones educativas. Pero no funcionó. En los tiempos para las investigaciones educativas todo era muy interesante, emocionante, tenía muchas ideas y mucho entusiasmo. Trabajaba durante varias horas ininterrumpidamente y me parecían sólo 10 minutos. Pero en los tiempos dedicados a las matemáticas, me aburría, no tenía ninguna idea, y el papel que tenía enfrente quedaba tan vacío como al empezar mi trabajo. Algo en mí decidió terminar con las investigaciones matemáticas y concentrarme en las investigaciones educativas. Mi transición culminó, me había convertido en un trabajador en matemática educativa.

1985-1995: DESARROLLO DE UNA TEORÍA Y APLICACIÓN EN LOS CURSOS

Mi trabajo en las matemática educativa tenía dos componentes: el primero era desarrollar una teoría para aprender los conceptos de las matemáticas avanzadas (a nivel postsecundario) y hacer las investigaciones empíricas basadas en dicha teoría. El segundo, desarrollar los cursos innovadores basados en dicha teoría e incluir las experiencias en dichos cursos, así como los objetivos de las investigaciones.

Primeros estudios

En primera instancia hice un estudio de los niveles de comprensión de los estudiantes sobre el concepto de composición de funciones. No desarrollé ninguna teoría ni lenguaje para programar computadoras. Sólo tuve la idea de que, si los estudiantes tienen algunas experiencias usando las combinaciones de las instrucciones de UNIX con el mecanismo de los "entubamientos de UNIX" (es decir, enlazar comandos de UNIX), entonces su comprensión mejoraría. Hice un experimento con estudiantes de primer año de universidad. Los resultados fueron como había previsto: los estudiantes que habían realizado actividades con los entubamientos de *UNIX* se desempeñaron mejor que los estudiantes que no habían utilizado la computadora. Dichos resultados se publicaron en (Ayers et al., 1988). En el experimento no traté de informarme sobre el entendimiento conceptual de los estudiantes, sino de sus habilidades para resolver algunos problemas no triviales que tuvieron que ver con la composición de funciones. Esta experiencia me ayudó a pensar una teoría. De hecho, la primera literatura de las ideas de procesos y objetos están incluidos en dicha publicación.

El experimento duró poco y después me interesé en tres temas para las nuevas investigaciones: la inducción matemática, la cuantificación y las funciones. Dichos estudios comenzaron cuando estaba en la Universidad de Clarkson, y continuaron durante el año académico 1985-1986 (año sabático en Berkeley), al regresar a la Universidad de Clarkson y durante los primeros años después de cambiarme a la Universidad de Purdue, en 1987.

Trabajé con los estudiantes de mis cursos de matemáticas discretas (en los que enseñaba con un método más o menos tradicional), para hacer las entrevistas sobre su capacidad de comprensión de conceptos como los de inducción y cuantificación; sobre sus habilidades para emplear dichas ideas matemáticas a fin de hacer las demostraciones y resaltar el significado de las oraciones matemáticas complejas. Estas entrevistas me ayudaron a desarrollar mis ideas teóricas sobre el aprendizaje, las cuales estaban basadas en el mencionado concepto de la abstracción reflexiva de Piaget, como las acciones, los procesos, los objetos, la interiorización y la encapsulación. Construí, para la inducción y la cuantificación, las descomposiciones genéticas para presentar una descripción de las abstracciones reflexivas, como la interiorización y la encapsulación, que los estudiantes podrían hacer para construir mentalmente los procesos y los objetos a fin de obtener un significado y usar la inducción y la cuantificación. Todo esto se publicó en (Dubinsky, 1987; Dubinsky et al., 1989).

Además, utilicé dichos resultados para diseñar nuevas versiones de mi curso de matemáticas discretas e hice las investigaciones apoyándome en documentos escritos y en las entrevistas, con la esperanza de que los estudiantes aprendieran mejor. Publiqué los resultados en (Dubinsky, 1989; Dubinsky, 1997). Según estos datos, parecía que el desarrollo de la capacidad de comprensión de los estudiantes era compatible con las descomposiciones genéticas plasmadas en los artículos citados y que el uso de las descomposiciones como guía para el diseño del curso, junto con las actividades en la computadora, parecían ayudar a los estudiantes a aprender, entender y desempeñarse mejor.

Al mismo tiempo, conduje una investigación del concepto de la función. Formé un equipo de estudiantes graduados en la Universidad de Purdue y juntos usamos explícitamente la teoría emergente para diseñar un experimento. Nuestros sujetos de estudio fueron los propios estudiantes de mis cursos de matemáticas discretas, en los que aplicaba los métodos innovadores de programar la computadora usando el lenguaje ISETL (véase más adelante) y el comienzo, para mí, del uso del aprendizaje cooperativo.

Nos preguntamos si dichos métodos ayudarían a los estudiantes a transitar desde una concepción de acción a una concepción de proceso y de una concepción de proceso a una concepción de objeto para las funciones.

Nos preguntamos también si, como resultado del uso de dichos métodos, los estudiantes aprenderían cómo reconocer una función en una situación dada y si desarrollarían la habilidad para hacer varias operaciones sobre las funciones. Los resultados fueron muy positivos. Los estudiantes mejoraron en todo. Hicimos algunas entrevistas y pudimos darnos cuenta de que la teoría emergente funcionaba bien para describir y explicar el desarrollo cognitivo de los estudiantes, en cuanto al manejo del concepto de función. También parecía que las actividades realizadas en computadora, el diseño basado sobre la teoría, ayudaban a los estudiantes a progresar en sus concepciones (de acción a proceso y de proceso a objeto) y a aprender a trabajar matemáticamente con funciones. Todo esto se informa en (Breidenbach et al., 1992).

Estos tres estudios (inducción, cuantificación, función) se efectuaron al mismo tiempo, mientras me dedicaba a leer numerosos escritos de Piaget. Traté de resumir entonces todo lo que había aprendido de Piaget y de mis investigaciones en dos artículos que publiqué (Dubinsky, 1991a; Dubinsky, 1991b). Mi objetivo en estos artículos no sólo era resumir los resultados, sino describir mi reformulación del mecanismo de la abstracción reflexiva de Piaget, para aplicarla a los fenómenos en las matemáticas más avanzadas que las que Piaget había estudiado. Dicha reformulación fue el nacimiento de la teoría APOS.

Teoría APOS

Las siglas APOS significan las acciones ("actions"), los procesos ("processes"), los objetos ("objects") y los esquemas ("schemes"). Éstas son las construcciones mentales que, según esta teoría, un individuo realiza para obtener significados de las situaciones y de los problemas matemáticos. Los mecanismos para hacer dichas construcciones se llaman abstracciones reflexivas e incluyen la repetición, la interiorización, la encapsulación, la desencapsulación, la coordinación, la inversión, etcétera.

Consideremos unos ejemplos. Primero, el concepto de función es muy importante en todas las matemáticas, en particular en Cálculo. En Cálculo es importante considerar una función como expresión, tal como la función f dada por $f(x) = 3x^2 + 17x$. Ésta se relaciona con la concepción de acción de una función y es importante, por ejemplo, si queremos calcular la derivada f' de f como $f'(x) = 6x + 17$ rápida y eficientemente. Pero dicho concepto no ayuda al estudiante a entender el concepto de diferenciación y su aplicación en funciones más complejas como:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ 2x+3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4\sqrt{x}+1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Aquí es necesario entender que esta función es continua, tiene una derivada continua en cada punto de la recta real, excepto en 0 y en 1. Además, en 1 la función es continua y tiene derivada pero ésta no es continua, mientras que para el punto 0, la función es continua, pero no existe su derivada. Para todas estas ideas, es necesario tener la concepción de proceso de una función.

Además, tener la concepción de función como objeto es necesario para entender que la derivada de una función es otra vez una función, y que la solución de un problema por ejemplo, una ecuación diferencial podría ser una función.

Otro ejemplo se refiere al dominio del álgebra abstracta. Consideremos un grupo G, un subgrupo H de G y un conjunto lateral (a izquierda) de H. Si $G = \{0, 1, 2, \ldots, 23\}$ con la operación de adición mod 24, y H es el conjunto de los múltiplos de 4, entonces sólo se necesita desarrollar la concepción de acción de conjunto lateral , para escribirlos. Por ejemplo, $3H$ está dada por

$$3H = \{3, 7, 11, 15, 19, 23\}$$

o incluso por la fórmula en donde $3H$ es el conjunto de los elementos de G para que el resto, después de dividir por 4, sea 3.

Pero al pensar sobre los conjuntos laterales de un grupo como S_n, el grupo de las permutaciones de n objetos, para n grande, hay que tener una concepción de proceso de conjuntos laterales y entender que, dado un subgrupo H y un elemento p de S_n, entonces el conjunto lateral pH de p está dado por:

$$pH = \{pq : q \in H\}$$

Además, para pensar acerca de las operaciones sobre los conjuntos laterales, tales como obtener su cardinalidad, contar los conjuntos laterales de un subgrupo fijo, o construir una operación binaria en el conjunto de todos los conjuntos laterales de un subgrupo fijo, se necesita una concepción de conjunto lateral como objeto.

Se pueden usar estas ideas teóricas para entender las dificultades de un estudiante. Vamos a ver, más adelante, cómo diseñar una pedagogía basada en este análisis que ayude a los estudiantes a entender mejor ciertos conceptos.

La teoría *APOS* trata de describir el desarrollo, en la mente del alumno, de la comprensión de un concepto matemático. La hipótesis es que todo concepto matemático puede ser descrito por esta teoría y si el diseño de la pedagogía se basa en la misma, entonces los estudiantes aprenderán mejor que con otras pedagogías. El desarrollo es una progresión por acciones, procesos, objetos y esquemas. No es exactamente lineal, sino dialéctica, pero para simplificar la exposición, mi descripción será lineal.

Desarrollo de los cursos

Al principio, utilizaba el lenguaje SETL en mis cursos, pero surgían varias dificultades. Primero, SETL es un programa muy grande y necesita mucho espacio en la memoria de la computadora. Además, ejecuta lentamente y es un lenguaje compilado. Esto quiere decir que el usuario escribe el programa en la sintaxis del SETL, lo somete a la computadora, la cual lo regresa en código de computadora. Entonces, como un segundo paso, el usuario introduce el nuevo programa para ejecutarlo. Estas operaciones toman tiempo y son una distracción. Sería mejor, en cuanto a tiempo y para el efecto cognitivo, si el lenguaje fuese interactivo, esto es, que la computadora ejecute el programa inmediata y directamente en cuanto le fuese introducido.

En aquel tiempo estaba conduciendo, en Potsdam, el programa IFRICS en el que participaron muchos científicos especialistas en computadoras, durante cuatro a ocho semanas en el verano, impartiendo los cursos de informática para matemáticos de todo el país (y de otros países también) que querían aprender a enseñar informática. Uno de aquellos profesores de informática, Gary Levin, se interesó en la Universidad de

Clarkson y se incorporó a nuestra facultad. Un día, a finales de 1984, cuando mi colega Levin y yo hablábamos de un problema relacionado con las propiedades de SETL, él me preguntó si el código de fuente para SETL estaba disponible. Le dije que sí, y fue él quien me dijo que podría leer las estructuras de datos de SETL y/o usarlas o mejorarlas para crear una versión nueva de SETL. Él me preguntó sobre las características que quería en este lenguaje y yo le contesté que quería, entre otras, que el lenguaje fuera interactivo y que hiciera posible, para una función, aceptarla como entrada y devolver una nueva función como salida. Él me dijo que podría construir una versión de SETL que tuviera las nuevas características que le pedía, pero no otras características innecesarias para el uso educativo, que ocupan mucho espacio en la computadora y tiempo durante la realización. Él logró este proyecto en menos de un año. Le pedimos a J. Schwartz que nos permitiera llamar ISETL a este nuevo lenguaje, que quiere decir Interactive SETL. La primera versión tenía menos de 200 mb de tamaño, y aun con algunos agregados, ISETL tiene menos de 300 mb y, además, se ejecuta muy rápido. Es una buena herramienta para la educación.

Desde entonces lo he usado para los cursos de Cálculo, Precálculo, Álgebra abstracta y Matemáticas discretas. Prefería los cursos de Álgebra abstracta y Matemáticas discretas porque me parecía que en ellos, las aplicaciones de ISETL y de mis ideas sobre la pedagogía, eran más apropiadas que para los otros cursos. Sin embargo, había mucho interés por parte de los matemáticos en la reforma de la enseñanza del Cálculo y también muchas oportunidades, de obtener apoyo financiero para la investigación y para el desarrollo de cursos de Cálculo, por ejemplo, de la Fundación Nacional de Ciencias (NSF) en Estados Unidos. Entonces, decidí concentrarme durante un tiempo en Cálculo. Pero a la vez, ocuparme de otros cursos.

En 1987 acepté un puesto en la Universidad de Purdue y en el otoño de ese año me cambié a la ciudad de W. Lafayette, Indiana. La mayor parte de mis cursos innovadores tuvo lugar cuando estaba en esta Universidad. Había en Purdue un colega matemático, Keith Schwingendorf, que había enseñado Cálculo durante muchos años. En Purdue, el Cálculo era un curso prolongado, de tres semestres, cinco horas por semana durante los primeros dos semestres y cuatro horas el tercero. Cada año, muchos estudiantes, más de 2 000, toman dicho curso en el que se aplican los métodos tradicionales; tres horas por semana se destinan a conferencias que dicta un profesor a grupos grandes, de 200 o más estudiantes, y dos horas a los ejercicios conducidos por un estudiante licenciado, en clases de 25 a 30 estudiantes. Schwingendorf tenía un conocimiento profundo y muy detallado de todos los aspectos del curso. No sólo conocía el material, sino que sabía todas las dificultades que tenían los estudiantes con dicho material (aunque no sabía por qué). Era un profesor muy bueno que les gustaba mucho a los estudiantes y ganaba muchos premios en reconocimiento por su habilidad para enseñar.

Este hombre, uno de los mejores profesores, sabía que los estudiantes no aprendían mucho y que entendían poco de Cálculo, como resultado de la aplicación de los métodos pedagógicos tradicionales. Se daba cuenta de que sus estudiantes como todos los estudiantes de los mejores profesores se desempeñaban en los exámenes quizás un 5 o 10 % mejor que los otros estudiantes, pero mucho menos de lo que se deseaba. Schwingendorf estaba interesado entonces en los métodos nuevos para enseñar. Él y yo, decidimos colaborar en un proyecto para diseñar, realizar y evaluar un curso completo de Cálculo, basado tanto en las ideas pedagógicas teóricas que estaban surgiendo de mis investigaciones como en las realidades surgidas de sus experiencias.

Al diseñar el curso, desarrollamos un acercamiento general para los cursos de matemáticas basados en la teoría APOS. Este acercamiento pedagógico se llamó "el ciclo ACE": las Actividades en la computadora, las tareas y discusiones en la Clase y los Ejercicios que los estudiantes tenían que bacer fuera de la clase.

Las actividades en la computadora son las tareas específicas que tienen como objetivo inducir a los estudiantes a hacer las construcciones mentales específicas que propone el análisis teórico. Los diseños son la manera más importante en que las investigaciones teóricas se reflejan en la pedagogía. A continuación se aportan unos ejemplos.

Para ayudar a los estudiantes a desarrollar la concepción de proceso de una función, les pedimos crear un programa en la computadora que implementara dicha función. Por ejemplo, para la función F, que discutíamos antes y que está dada por

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x^2+1} & \text{si } x<0\\ 2x+3 & \text{si } 0\le x<1\\ 4\sqrt{x}+1 & \text{si } 1\le x\end{cases}$$

los estudiantes generan un programa como:

```
F := fun(x);
  if x < 0 then return (x+3)/(x**2+1);
  elseif x < 1 then return 2*x+3;
  else return 4*sqrt(x) + 1;
  end;
end;
```

Después de que los estudiantes han creado este programa, pueden discutir su aplicación a varios valores en su dominio y pueden reflexionar sobre cómo funciona la computadora para evaluar, por ejemplo, $F(-1)$, $F(0)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $F(1)$, $F(3)$. Según nuestras investigaciones, la actividad de crear dicho programa y la discusión siguen dando como resultado que muchos estudiantes construyen la concepción de proceso de tal función.

Un efecto semejante se puede obtener con los conjuntos laterales.

Para la concepción de función, pedimos a los estudiantes crear programas en la computadora que aceptaran un proceso como entrada y/o que volvieran un proceso como salida. Por ejemplo, se consideró el siguiente programa:

```
Comp := func(f,g);
    return func(x);
        return f(g(x));
    end;
end;
```

Este programa, al principio, trata dos funciones, f y g, como objetos, es decir algo a lo que se aplica una operación. Después, hay que desencapsular dichas funciones en los procesos de los que provienen y, coordinar los dos procesos para obtener $f(g(x))$. Al final este nuevo proceso se encapsula para obtener como resultado el objeto *Comp (f, g)* que es la función $f \circ g$. Después de escribir la *función Comp* los estudiantes aprenden mucho mediante el significado de expresiones como: *f.comp g* o *(f.comp g)(3)*, si 3 es un número apropiado en el dominio de la función *g*.

Además, podemos plantear a los estudiantes las actividades de incorporar el uso de una función como objeto y la construcción mental de un proceso para la diferenciación. Por eso, les pedimos a los estudiantes generar el siguiente programa:

```
D := func(f);
   return func(x);
       return (f(x + 0.0001) - f(x))/0.0001;
     end;
  end;
```

Les pedimos a los estudiantes explicar expresiones como *D*, *D(f)* y *D(f)(1)* o construir en una única pantalla las gráficas de las funciones *f*, *D(f)*, *D(D(f))* e identificar cada gráfica con su función.

Naturalmente, la manera de asignar dichas tareas para crear los programas es importante, pero no hay suficiente espacio aquí para discutir ese punto. Prefiero cerrar esta discusión con un ejemplo de un programa único, basado en el generado por los estudiantes que tienden a entender los conjuntos laterales, como procesos y objetos, así como también el producto de dos conjuntos laterales. Para emplear este programa, hay que usar un grupo *G* con su operación *o* y un subgrupo *H*.

```
PR := func(G,o,H);
    return func(x,y);
        if (x in G) and (y in G) then
         return x .o y;
        elseif (x in G) and (y subset G) then
         return {x .o g : g in y};
        elseif (x subset G) and (y in G) then
         return {g .o y : g in x};
        elseif(x subset G)and(y subset G) then
         return {g .o h : g in x, h in y};
       end;
     end;
   end;
```

Después de crear este programa, los estudiantes pueden definir un grupo *G*, su operación *o* y un subgrupo *H* y, entonces, definir *oo := PR (G,o,H)*. El resultado es que *oo* es una operación binaria que puede calcular el producto de dos elementos, un conjunto lateral a izquierda, un conjunto lateral a derecha o el producto de dos conjuntos laterales. Los estudiantes aprenden mucho de esta poderosa herramienta que ellos mismos han construido.

En aquella época obtuvimos apoyo financiero sustancial del NSF y desarrollamos cursos de Cálculo, Álgebra abstracta y Matemáticas discretas. Para cada uno aplicamos el ciclo ACE, ya descrito, organizando todo el material en secciones que pueden desarrollar los estudiantes en una semana. Cada sección consiste de tres partes: las actividades en la computadora, un texto escrito que es el punto de partida para la discusión y las tareas y los ejercicios más o menos tradicionales que se realizan en la clase. Era necesario escribir nuevos libros de texto en cada curso (Baxter et al., 1988; Dubinsky et al., 1995; Dubinsky et al., 1996; Leron, 1994; Dubinsky et al., 1996) a fin de sustentar este acercamiento. Implantamos este acercamiento en los cursos de Cálculo, Álgebra abstracta y Matemáticas discretas en la Universidad de Purdue. Además, en el verano organizamos talleres para otros profesores de matemáticas que querían aprender a usar nuestros métodos. De esta manera, con el apoyo del NSF, difundimos nuestro acercamiento a toda la comunidad de profesores de matemáticas en las universidades de los Estados Unidos y también de otros países.

Mientras impartíamos esos cursos en la Universidad de Purdue, también diseñábamos varios estudios del desempeño de los estudiantes y de la naturaleza de su comprensión de los conceptos más importantes abordados en los cursos. Recogimos una enorme cantidad de datos cuantitativos y cualitativos. Obtuvimos tales datos de los exámenes normales, de instrumentos especiales y de las entrevistas. Una descripción completa de nuestras ideas para realizar todos estos proyectos se puede encontrar en (Asiala et al., 1996).

En este punto tuvimos varios problemas prácticos y teóricos. El problema práctico fue que aun cuando había dos investigadores (Schwingendorf y yo) y algunos estudiantes licenciados como ayudantes, la cantidad de datos que manejábamos era excesiva y nuestro método para analizar esos datos tomaba demasiado tiempo, de manera que necesitábamos más trabajadores y varios años para completar su análisis.

Tuvimos dos problemas teóricos. Uno fue que, aun cuando tuvimos buenas ideas respecto a las acciones, procesos y objetos, fueron demasiado subjetivas. Necesitábamos las opiniones de otros investigadores y había que obtener las definiciones operativas de dichas construcciones. El otro problema teórico se refería a los esquemas. Tuvimos sólo una vaga idea de esta construcción. No entendíamos bien, por ejemplo, cómo ese concepto era diferente de la idea de imagen conceptual de Tall y Vinner (Tall et al., 1981) y no entendíamos qué significaba la idea de la coherencia de un esquema.

Por fortuna, precisamente en este tiempo, una situación, al principio no relacionada con nuestro problema, nos condujo a la formación de RUMEC, que contribuyó a la solución de todos esos problemas y propició desarrollos adicionales para la investigación en matemática educativa a nivel postsecundario.

1995-2000: RUMEC Y ARUME

En el desarrollo de los cursos, nuestro énfasis se ha enfocado en la base teórica, en los resultados de las primeras investigaciones y en el ciclo ACE. Pero mientras conocíamos la literatura especializada y asistíamos a las reuniones, encontrábamos mucha información sobre otro método pedagógico denominado aprendizaje cooperativo. Me interesé en dicho método y lo apliqué en mis clases. Me parecía que la idea de aprendizaje cooperativo era compatible con las nuestras y entonces lo incorporé. Desde entonces, en todos nuestros cursos, cada estudiante es asignado a grupos permanentes (para todo el curso) de cuatro personas. Casi todo el trabajo del curso, las actividades en la computadora, las tareas en clase, las discusiones, los ejercicios y los exámenes lo hacían los estudiantes en grupos; es decir, los estudiantes estaban supeditados al grupo.

Mi interés en dicho método de aprendizaje cooperativo me condujo a leer más sobre el mismo, a pensar más sobre él y a dar conferencias sobre dicho tema en varias universidades. Al fin, con dos colegas, Barbara Reynolds, de la College de Cardinal Stritch, y David Mathews, de la Universidad de Longwood, obtuvimos una beca del NSF para organizar talleres de verano, para los profesores de matemáticas a nivel postsecundario, que querían aprender a usar el método. Llamamos al programa CLUME (por sus siglas en inglés Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics Education). Aunque no lo supe en aquella época, este programa puso en escena a RUMEC y fue una etapa muy importante en el desarrollo de nuestro campo.

El primer taller de CLUME se llevó a cabo en el verano de 1995, con treinta y un participantes y tres profesores. Una participante fue Georgia Tolias, que había obtenido un doctorado reciente en matemática educativa, sin embargo parecía que ella no se había preparado para realizar investigaciones en su campo. Me preguntó si había personas en CLUME interesadas en interaccionar sobre temas de investigación en matemática educativa a nivel postsecundario. Con la finalidad de ubicarla, una noche realizamos una reunión para todos los participantes y/o profesores que compartían su interés. Para nuestra sorpresa, veinticinco personas asistieron a esta primera reunión y casi todas regresaron la noche siguiente para continuarla. Debe entenderse que el programa CLUME era muy fuerte y los participantes tenían que trabajar muchas horas cada día, incluso los fines de semana. Sin embargo, asistieron a dichas reuniones y hablaban de la idea de la investigación. Estaba claro que había mucho interés.

Naturalmente, para mí esta situación fue muy agradable. Tuve datos de muchas personas para el trabajo de varios años y conté con un grupo grande que quiso hacer las investigaciones, pero la mayor parte no obtuvo fondos para realizarlas. Sencillamente no supieron cómo. Debido a que estábamos interesados en el aprendizaje cooperativo, ¡quizás las investigaciones cooperativas podrían ser una buena idea! Entonces, tuvimos la idea de formar grupos cooperativos (como para estudiantes) para hacer investigaciones en matemática educativa a nivel postsecundario. Si en cada grupo había personas con y sin fondos, los segundos aprenderían de los primeros y éstos participarían en los proyectos grandes. De hecho, no se necesitaría comenzar a recolectar datos porque yo tenía suficientes. Así que todos podrían comenzar con el análisis de los datos y de esta manera aprender mucho sobre cómo hacer investigación.

Para extender la oportunidad a otras personas sobre cómo aprender a realizar tales investigaciones y organizar nuestras actividades, formamos una asociación que llamamos RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Decidimos tratar de efectuar reuniones tres veces al año y al principio acordamos varios puntos: hacer las investigaciones por medio de los grupos, adoptar un marco teórico único, conducir los juicios críticos internos en nuestros manuscritos, usar los datos existentes al principio pero no permanentemente y mantener reducido el grupo de RUMEC, pero sin dejar de ayudar a otros que compartieran nuestro interés. Vamos a discutir estos aspectos de las actividades de RUMEC un poco más detalladamente.

Ya expliqué que la mejor razón para trabajar en grupos fue mezclar a los investigadores que tenían experiencia en nuestro campo con los que no la tenían. Hicimos una lista de artículos y libros para que cualquier persona pudiera aprender los fundamentos y estuviera preparada para hacer las investigaciones. Desarrollamos también un método para analizar los datos cualitativos, el cual fue bastante detallado y específico, para que un novato pudiera aprenderlo. Dicho método está descrito en el artículo publicado en (Asiala et al., 1996). Escogimos varios proyectos basados en los temas de los datos existentes, formamos los grupos y comenzamos a hacer las investigaciones.

Una observación importante es que cada investigación en nuestro campo debe estar basada en uno o más marcos teóricos y que, la decisión sobre cuál perspectiva teórica se debe aplicar a un estudio, tiene que considerarse como parte del diseño inicial de la investigación. No importa cuál teoría, sino que se use una perspectiva teórica. Pero para RUMEC la pregunta fue: ¿cuál teoría debemos usar? Nos pareció conveniente que, para evitar demasiados argumentos sobre los puntos pequeños y vagos, sería una buena idea adoptar un marco teórico único que todos podrían aprender y en cuyo desarrollo todos podrían participar (porque un marco teórico no es estático sino dinámico y las investigaciones que lo usan contribuyen a su desarrollo y extensión). Este acercamiento ayudaría a los aspirantes a aprender cómo trabajar con un marco teórico y cómo desarrollarlo. Por esta razón, y no porque pensáramos que era la "verdad" o la única teoría válida, adoptamos la teoría APOS para todas las investigaciones. Entendimos que esta teoría desempeñaría ese papel, pero sólo por un tiempo, no para siempre.

Poco tiempo después de comenzar nuestro trabajo, tuvimos la idea de que sería bueno que todo el grupo leyera y discutiera el informe de cada investigación. Esto ayudaría a entender las actividades de los otros y a aprender de ellas. También pensamos que la discusión abierta de un artículo ayudaría a los autores a mejorarlo. Entonces establecimos como política que, después de elaborarse un artículo que surgiera de una investigación, éste estaba completo, pero antes de proceder a su publicación, los autores debían distribuir el artículo a todos los miembros de RUMEC para que lo leyeran y en la siguiente reunión se lo discutiera de manera detallada y completa. Hay que entender que el juicio crítico interno no tenía el propósito de controlar las investigaciones de un equipo. De hecho, aunque nuestras discusiones pueden ser muy serias y críticas, nunca tomamos decisiones y después de la revisión, la decisión final sobre la forma y el contenido de un artículo es responsabilidad de los autores. Nos parece que los resultados de dicha política son mejorar la calidad de nuestro trabajo, de nuestros resultados y de nuestros informes, y también mejorar nuestras relaciones personales y construir un espíritu de grupo.

En general, para aprender cómo hacer las investigaciones es necesario aprender, al mismo tiempo, cómo diseñarlas, cómo recoger los datos, analizarlos y hacer las conclusiones, todo sobre la guía de un marco teórico. Por supuesto, hay que tener los datos antes de analizarlos, pero sería bueno tener al menos un poco de experiencia en cuestiones de análisis antes de recoger los datos o de diseñar la investigación. Así que decidimos que los aspirantes deberían comenzar con las actividades de análisis de datos existentes. Fue una decisión cómoda y práctica porque generalmente tenemos muchos datos que necesitan analizarse. Naturalmente, entendimos que los investigadores noveles tendrían que recoger los datos y diseñar ellos mismos las investigaciones.

Finalmente, aunque queríamos mantener reducido el número de miembros de RUMEC, quizás treinta o treinta y cinco, comprendimos que había muchas más personas que querían aprender cómo hacer investigaciones en matemática educativa, que requerían de ayuda para ello, y a la vez nuestro campo necesitaba muchos otros trabajadores. Entonces, nos ocupamos de incorporar a otras personas interesadas en trabajar en este campo. En los años siguientes a 1995, les preguntamos a los participantes en los talleres de CLUME, si continuaban interesados. Les preguntamos también a los miembros de NExT, una organización de la Mathematical

Association of America (MAA), y a los matemáticos jóvenes susceptibles de desarrollar habilidades pedagógicas. También organizamos, cada año, un congreso nacional sobre el tema de las investigaciones en matemática educativa a nivel postsecundario. En todas estas actividades tuvimos apoyo financiero de la fundación educativa de la empresa EXXON.

Durante aquella época, diversos equipos (que cambiaban con cada proyecto) se dedicaron a varios proyectos enfocados a estudiar cómo podría aprenderse un concepto matemático. Hicimos comparaciones entre los estudiantes que tomaron nuestros cursos sobre dichas investigaciones y los que tomaron los cursos usando los métodos pedagógicos normales. Investigamos conceptos de Cálculo tales como límite, pendiente, interpretación gráfica de la derivada, la regla de la cadena, interpretaciones intuitivas de los estudiantes sobre integral, sucesiones y series infinitas, estas últimas de números y de funciones. Además, estudiamos los efectos a largo plazo de nuestro acercamiento pedagógico para el Cálculo. Investigamos conceptos en Álgebra abstracta como permutaciones y simetrías, operaciones binarias, grupos, subgrupos, conjuntos laterales, normalidad y grupos cocientes. También estudiamos las actitudes de los estudiantes sobre los conceptos abstractos y otros aspectos de las matemáticas después de tomar un curso de Álgebra abstracta. Investigamos cómo los estudiantes podían aprender, entender y usar los cuantificadores existenciales y universales en las operaciones matemáticas y en el desarrollo del concepto del infinito. En fin, investigamos la mecánica de la comprensión de los estudiantes sobre varios conceptos estadísticos tales como mediana, media y el teorema central del límite. Estas investigaciones se canalizaron en diversas publicaciones (Weller et al., en revisión).

En general, los resultados proporcionaron un fuerte apoyo a nuestro paradigma de investigaciones, a nuestra perspectiva teórica y a nuestro acercamiento pedagógico. En muchos casos, la teoría APOS se probaba como una herramienta eficaz para describir y explicar el desarrollo de un concepto en la mente de los estudiantes. En varios casos el análisis de los datos nos condujo a revisar nuestra descripción teórica de dicho desarrollo. Incluso hubo, al menos un ejemplo, de esquemas, en nuestras investigaciones, que nos condujo a revisar la teoría APOS al relacionarlo con la idea de la tríada de Piaget y García (Clark et al., 1997). Además, como resultado de muchos análisis específicos, obtuvimos las definiciones operativas de las acciones, de los procesos y de los esquemas que se han incluido en los artículos que reportan los resultados.

La mayoría de nuestras investigaciones sugieren que los estudiantes que tomaron nuestros cursos aprendieron bien la materia. En comparación con los estudiantes que tomaron los cursos tradicionales, la mayor parte de los resultados favoreció a nuestro método de enseñanza, en un grado más o menos significativo. Hubo algunos resultados en los que no se registraron diferencias apreciables, pero casi nunca ejemplos en los que los estudiantes de los cursos tradicionales se desempeñaran mejor que los estudiantes de los cursos experimentales. Todos los resultados se compilan en el artículo publicado en (Weller et al., en revisión).

En el transcurso de los años noventa, se incrementó el número de colegas en nuestro campo y también de matemáticos que quieren cambiar sus investigaciones de las matemáticas a la matemática educativa. Además, hubo un enorme incremento en el número de matemáticos que no quieren hacer investigaciones pero que están muy interesados en nuestros resultados. Este desarrollo coincidió con un crecimiento mayor del interés de los matemáticos en sus métodos de enseñanza y en sus resultados. Toda esta actividad fue excesiva para una organización con menos de treinta y cinco miembros. Asimismo, aunque los integrantes de RUMEC aceptaron coadyuvar en el desarrollo de nuestro campo, nosotros como organización hicimos énfasis en las investigaciones específicas y en el desarrollo de un marco teórico. Surgió la necesidad de generar una organización nueva, más grande, que se dedicara a los investigadores y a los que quisieran conocer sobre las investigaciones y las aplicaciones potenciales a la práctica pedagógica.

En este punto, la MAA propuso crear una organización nueva que se llamaría Association for Research in Undergraduate Mathematics Education (ARUME) para las personas interesadas en hacer o conocer las investigaciones en matemática educativa a nivel postsecundario. Por un tiempo de prueba de tres años, ARUME tendría derecho de realizar actividades tales como sesiones y conferencias para difundir los informes sobre las investigaciones, así como reuniones encauzadas a asuntos relativos a los congresos anuales de la MAA, y de anunciar sus actividades en las publicaciones de la MAA. ARUME se formó en enero de 1999 con más de ciento cincuenta miembros. En abril de este año obtuvo una beca de la Fundación EXXON y ya ha comenzado a realizar sus actividades.

Al escribir estas palabras me siento integrado al campo de RUME (Research in Undergraduate Mathematics Education) y como matemático dedicado a esta actividad no estoy solo. Hay muchas personas inteligentes, conocedoras, jóvenes enérgicos y entusiastas, que están listos y son capaces de hacer las investigaciones y definir la dirección que tendrá el campo. El futuro de RUME me parece promisorio.

BIBLIOGRAFÍA

Asiala, M., Brown, N., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II. CBMS Issues in Mathematics Education, 6,* 1-32.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. & Lewin, P. (1988). Computer Experiences in the Teaching of Composition of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19(3), 246-259.

Baxter, N., Dubinsky, E. & Levin, G. (1988). *Learnig Discrete Mathematics with ISENTL,* Springer-Verlag.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, F., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule, *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.

Dubinsky, E. (1987). On Teaching Mathematical Induction, I. *Journal of Mathematical Behavior*, 6(1), 305-317.

Dubinsky, E. (1989). On Teaching Mathematical Induction, II. *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 285-304.

Dubinsky, E. (1997). On Learning Quantification, I. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16(213), 335-362.

Dubinsky, E. (1991a). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-126. Kluwer.

Dubinsky, E. (1991b). The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, New York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E., Elterman, F. & Gong, C. (1989). The Student's Construction of Quantification. *For the Learning of Mathematic*, 8(2), 44-51.

Dubinsky, E., Schwingendorf, K. & Mathews, D. (1995) *Calculus, Concepts & Computers*. Second Edition. McGraw-Hill.

Dubinsky, E. & Fenton, W. E. (1996). *Introduction to Discrete Mathematics with ISETL*. Springer.

Leron, U. (1994). *Learnig Abstract Algebra with ISETL*. Springer-Verlag.

Mathews, D. & Clark, J. M. *Successful Students' Conceptions of Mean, Standard Derivation, and The Central Limit Theorem*, Manuscrito no publicado.

Schwingendorf, K., Dubinsky, E. & Mathews, D. (1996). *Applied Calculus, Concepts & Computers*. Revised Preliminary Edition. McGraw-Hill.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12(2), 151-169.

Weller, K., Clark, J. M., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. A. & Merkovsky, R. *An Examination of Student Performance Data in Recent RUMEC Studies*. En revisión.