Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XII No. 1 (2005), pp. 63–80

CONSTRUCCIÓN DE TOPOLOGÍAS, FILTROS Y UNIFORMIDADES PARA UN PRODUCTO DE CONJUNTOS

GUSTAVO N. RUBIANO O. (∗)

RESUMEN. A partir de filtros sobre el conjunto de índices, se introducen estructuras en un producto de conjuntos si los conjuntos coordenados poseen la estructura en cuestión.

ABSTRACT. Starting from filters over the set of indices, we introduce structures in a product of sets where the coordinate sets have the given structure.

PALABRAS CLAVES: Filtro, topología producto, topología caja, estructura uniforme, espacio de Hausdorff.

KEYWORDS: Filter, product topology, box topology, uniform structure, Hausdorff space.

2000 MSC: Primary 54B10, Secondary 54E15.

1. Introducción y nota histórica

En 1923 H. Tietze [Ti] definió una topología para el producto cartesiano de espacios topológicos; esta topología, pasó a ser referida en la literatura como la topología caja. La definición aceptada para la topología en el producto de los espacios fue introducida por A. Tychonoff [Ty] en 1927; aunque coincide con la topología de Tietze en el caso de un producto finito, en general difieren.
Parece ser que una de las razones por las cuales la definición de Tychonoff se asentó como *la definición* (aunque va contra el sentido común al tomar únicamente finitos abiertos en productos con cualquier cardinal como índice) es el hecho que con ella se satisface el conocido Teorema de Tychonoff (Tychonoff

(∗) Gustavo N. Rubiano O. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: gnrubianoo@unal.edu.co.

la definió para que expresamente se satisfaciera la compacidad como una propiedad productiva). Muchas otras bondades son exclusivas de la topología de Tychonoff, como el hecho de ser la mejor topología para la cual las funciones proyección son continuas, o caracterizar la continuidad de una función que llega a un producto en términos de la continuidad de sus compuestas con las funciones proyección sobre los factores, o poseer una propiedad minimax con la cual la topología de Tychonoff para un producto de espacios de Hausdorff y compactos es maximal para compacidad y minimal para la propiedad de Hausdorff (proposición 2.10).
En este artículo estudiamos una definición para topologías sobre un producto cartesiano de conjuntos, que generaliza las anteriormente mencionadas y conocida como $\mathcal{F}$-topología (por estar supeditada a un filtro $\mathcal{F}$ sobre el conjunto de índices involucrado al indizar la familia de espacios topológicos, sobre la cual se tomará el producto conjuntista). De paso, esta definición nos permite tener un mecanismo para construcciones similares en otras estructuras como los filtros y las uniformidades.

2. Topologías para un producto de espacios topológicos

2.1. La construcción. En esta construcción $\wp(X)$ es considerado un filtro y lo llamamos el filtro trivial; además y a menos que se diga lo contrario, los espacios factores X_i considerados tienen una topología no trivial.
Dada una familia $\{(X_i, \mathcal{J}_i)\}_{i\in I}$ de espacios topológicos, definimos una caja $\mathbf{U}$ en el producto conjuntista $\prod_{i\in I} X_i$, como

$$\mathbf{U} := \langle U_i \rangle := \prod_{i\in I} U_i,\ U_i \in \mathcal{J}_i,\ i \in I.$$

El conjunto $\delta(\mathbf{U})$ de *índices distinguidos* de una caja $\mathbf{U} \neq \emptyset$ es definido como

$$\delta(\mathbf{U}) = \delta\langle U_i \rangle := \{i \in I \mid U_i = X_i\}.$$

El soporte $\sigma(\mathbf{U})$ de la caja $\mathbf{U} \neq \emptyset$ es definido como

$$\sigma(\mathbf{U}) = \sigma\langle U_i \rangle := \{i \in I \mid U_i \neq X_i\}.$$

2.1. **Proposición.** *Sea $\mathcal{F}$ una colección no vacía de subconjuntos de I. Las cajas $\langle U_i \rangle$ tales que $\delta\langle U_i \rangle \in \mathcal{F}$ forman una base para una topología en $\prod_{i\in I} X_i$ si y sólo si $\mathcal{F}$ es cerrada para intersecciones finitas.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $A, B \in \mathcal{F}$ y $\langle A_i \rangle, \langle B_i \rangle$ dos cajas tales que $\delta\langle A_i \rangle = A$, $\delta\langle B_i \rangle = B$. La caja $\langle A_i \rangle \cap \langle B_i \rangle = \langle A_i \cap B_i \rangle$ es tal que $\delta\langle A_i \cap B_i \rangle \in \mathcal{F}$; pero

$$A \cap B = \delta\langle A_i \rangle \cap\ \delta\langle B_i \rangle = \delta\langle A_i \cap B_i \rangle \in \mathcal{F}.$$

($\Leftarrow$) Como $\mathcal{F} \neq \varnothing$, $\langle X_i \rangle = \prod_{i\in I} X_i$ es una caja de la colección. Sean $\langle A_i \rangle, \langle B_i \rangle$ cajas tales que $\delta\langle A_i \rangle, \delta\langle B_i \rangle \in \mathcal{F}$. Entonces

(i) $\langle A_i\rangle \cap \langle B_i\rangle = \langle A_i \cap B_i\rangle$,
(ii) $\delta\langle A_i \cap B_i\rangle = \delta\langle A_i\rangle \cap \delta\langle B_i\rangle \in \mathcal{F}$. □

La topología generada por esta base la notamos

$$\prod\nolimits_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i, \text{ o simplemente } \mathcal{J}_{\mathcal{F}}$$

y la llamamos la $\mathcal{F}$–topología para el producto de los espacios X_i. Un elemento de la base puede entonces ser notado como

$$\prod_{i\in F^c} U_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F} X_i.$$

2.2. **Observación.** El anterior resultado es cierto aún si los X_i no son espacios topológicos. También lo es, si los elementos de las cajas no son necesariamente abiertos; pero por supuesto, esto sería olvidar la estructura topológica en los espacios factores X_i, pero también tiene la bondad de permitirnos generalizar como lo haremos en las secciones 2 y 3.

La *topología de Tychonoff* tiene como base al conjunto de las cajas $\langle U_i\rangle$ tales que $U_i = X_i$ para todo i en I excepto para un número finito de índices i. Es decir, $\langle U_i\rangle$ está en la base si y sólo si

$$\delta\langle U_i\rangle := \{i \in I \mid U_i = X_i\} \in \mathcal{F}$$

donde $\mathcal{F}$ es el filtro de Frèchet en I —el filtro de los cofinitos sobre I; más precisamente, $F \in \mathcal{F}$ si y sólo si el complemento de F en I es finito—.
Como cada filtro es obviamente una familia cerrada para intersecciones finitas, es claro entonces que *la topología producto de Tychonoff* es aquella determinada por el filtro de los cofinitos (notamos por $\bigotimes_{i\in I} X_i$ al espacio producto con la topología de Tychonoff). *La topología caja* es generada a partir del filtro trivial $\wp(I)$ —partes de I—; para esta topología caja, el producto arbitrario de abiertos es abierto, o en otras palabras, toda caja es abierta (notamos por $_{i\in I} X_i$ al espacio producto con la topología caja).
Recordemos que para todo conjunto no vacío X, las colecciones $Top(X)$ de las topologías sobre X y, $Fil(X)$ de los filtros sobre X, son ordenadas de manera natural por la contenencia entre conjuntos. En el caso de $Top(X)$ tenemos un retículo completo donde el elemento mínimo es la *topología trivial* cuyos únicos dos elementos son $\emptyset$ y X, mientras que el elemento máximo es la *topología discreta* o partes de X.
La siguiente proposición nos dice que la construcción es mucho más que una función biunívoca de $Fil(I)$ a las $\mathcal{F}$-topologías para la familia $\{(X_i, \mathcal{J}_i)_{i\in I}\}$.

2.3. Proposición. *Para una colección fija* $\{(X_i, \mathcal{J}_i)\}_{i\in I}$ *de espacios topológicos no triviales, la asignación*

$$\mathcal{F} \mapsto \prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i$$

es una inmersión de orden:

$$\mathcal{F} \leq \mathcal{G} \Longleftrightarrow \textstyle\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i \leq \prod_{i\in I}^{\mathcal{G}} X_i.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $U \in \prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i$ es un abierto básico, nótese que también lo es en $\prod_{i\in I}^{\mathcal{G}} X_i$ pues si $F = \delta\langle U\rangle \in \mathcal{F}$ entonces $F \in \mathcal{G}$.
($\Leftarrow$) Supongamos $\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i \leq \prod_{i\in I}^{\mathcal{G}} X_i$ y veamos que $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$. De no ser así, existe $F \in \mathcal{F}$ con $F \notin \mathcal{G}$ y por tanto se tiene que $G \nsubseteq F$ para todo $G \in \mathcal{G}$, o, de manera equivalente $F^c \nsubseteq G^c$ para todo G, esto es, para cada G existe un índice $i_G \in I$ con $i_G \in F^c$ e $i_G \notin G^c$.
Para este F fijo, el abierto

$$\prod_{i\in F^c} U_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F} X_i \tag{1}$$

de la $\mathcal{F}$-topología, también está —por hipótesis— en la $\mathcal{G}$-topología y por tanto debe ser unión de elementos de la base en la $\mathcal{G}$-topología. Veamos que esto último no se tiene.
En la $\mathcal{G}$-topología la base está conformada por conjuntos de la forma

$$\prod_{i\in G^c} U_i \overset{\mathcal{G}}{\times} \prod_{i\in G} X_i.$$

Por cada elemento básico —determinado por un $G \in \mathcal{G}$—

$$\prod_{i\in G^c} U_i \overset{\mathcal{G}}{\times} \prod_{i\in G} X_i$$

existe i_G con $i_G \in F^c$ e $i_G \in G$; para este índice i_G tomamos un abierto $U_{i_G} \neq X_{i_G}$ y un elemento $x_{i_G} \notin U_{i_G}$ para construir un punto $x = (\ldots, x_{i_G}, \ldots)$ —los x_i con coordenadas i diferentes a i_G son arbitrarios— el cual, no pertenece al abierto

$$\prod_{i\in F^c} U_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F} X_i$$

pero sí pertenece a

$$\prod_{i\in G^c} U_i \overset{\mathcal{G}}{\times} \prod_{i\in G} X_i.$$

Por tanto, ningún elemento de la base está contenido en

$$\prod_{i\in F^c} U_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F} X_i$$

y así (1) no puede ser unión de elementos de la base, lo que implica no pertenecer a la $\mathcal{G}$-topología, y por tanto, $\mathcal{F}$-topología $\nsubseteq$ $\mathcal{G}$-topología lo que contradice la hipótesis. □

El siguiente ejemplo presenta una clase particular de $\mathcal{F}$-topologías, las cuales, hasta donde el autor conoce —búsqueda en MathSci y Zentralblatt— son las únicas $\mathcal{F}$-topologías referenciadas en la literatura.

2.4. **Ejemplo.** *Una clase especial de espacios producto.* Sea I un conjunto con cardinal infinito, digamos $|I| = \mathfrak{c}$. Si $\mathfrak{d}$ es otro cardinal con $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$ entonces el conjunto $\mathcal{F} = \{F \subseteq I : |X - F| < \mathfrak{d}\}$ de los complementos de subconjuntos de I con cardinal menor que $\mathfrak{d}$ es un filtro sobre I, llamado el filtro de los $\mathfrak{d}$-complementos. La $\mathcal{F}$-topología correspondiente tiene como abiertos básicos las cajas $\langle U_i\rangle$ tales que $|\sigma\langle U_i\rangle| < \mathfrak{d}$; cuando $\mathfrak{d} = |\mathbb{N}|$, el filtro correspondiente es el de los cofinitos, y si $\mathfrak{d} = |\mathbb{R}|$ tenemos el filtro de los coenumerables.

2.2. Espacios de Hausdorff. ¿Cuándo el $\mathcal{F}$-producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff?

Dados dos puntos $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ en $X = \prod_{i\in I} X_i$ con $x \neq y$, existe al menos un índice i con $x_i \neq y_i$. Para este índice podemos separar por vecindades en el espacio X_i, luego al pasar al espacio producto necesitamos que este índice nos quede habilitado para así poder tomar abiertos propios del espacio X_i. Si recordamos que los abiertos básicos son de la forma

$$\prod_{i\in F^c} U_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F} X_i \qquad (F \in \mathcal{F}),$$

entonces para poder separarlos por vecindades disyuntas debe suceder que $i \notin F$ para algún $F \in \mathcal{F}$.

2.5. **Proposición.** *Sea $\mathcal{F}$ un filtro en I. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para cada $i \in I$ existe $F \in \mathcal{F}$ con $i \notin F$.*
2. *Para cada $i \in I$ el conjunto $I - \{i\} \in \mathcal{F}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Dado i existe F con $i \notin F$, luego $F \subseteq I - \{i\}$ y así $I - \{i\} \in \mathcal{F}$.

($\Leftarrow$) Es inmediato. □

2.6. **Definición.** Un filtro con la propiedad de la proposición anterior es llamado *saturado.*

- Si un filtro $\mathcal{F}$ es saturado entonces el filtro de los *cofinitos* está contenido en $\mathcal{F}$, ya que al tomar intersecciones finitas en $\mathcal{F}$ podemos producir cualquier elemento de *cofinitos.*
- Existen filtros saturados diferentes al filtro de los cofinitos, por ejemplo el filtro de los *coenumerables* conformado por todos los subconjuntos de I que tienen complemento enumerable finito o infinito (ver ejemplo 2.4).
- Todo *ultrafiltro libre* (ultrafiltros no generados por un elemento) es un filtro saturado, pues de no serlo existe un índice $i \in I$ con $I - \{i\} \notin \mathcal{F}$ y esto implica $\{i\} \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ no sería libre.

¿Qué condiciones sobre el filtro $\mathcal{F}$ garantizan que las funciones proyección

$$p_i : \prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i \longrightarrow X_i$$

sean continuas?

2.7. **Proposición.** *Sean $\{(X_i, \mathcal{J}_i)\}_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos no triviales y $\mathcal{F}$ un filtro en I. La $\mathcal{F}$–topología hace las proyecciones continuas si y sólo si el filtro $\mathcal{F}$es más fino que el filtro de los* cofinitos.

($\Rightarrow$) Recordemos que la topología de Tychonoff es caracterizada como la *mejor* topología sobre el producto que hace de las proyecciones funciones continuas —*mejor* significa la topología con menos abiertos, o la mas gruesa, o la menos fina—. Si las proyecciones son continuas entonces

$$cofinitos\text{–topología} \subseteq \mathcal{F}\text{–topología}$$

y por la proposición 2.3 tenemos $cofinitos \subseteq \mathcal{F}$.
($\Leftarrow$) De acuerdo a la proposición 2.3 si $cofinitos \subseteq \mathcal{F}$ entonces

$$cofinitos\text{–topología} \subseteq \mathcal{F}\text{–topología}$$

y por tanto para la $\mathcal{F}$–topología las proyecciones también son continuas.

2.8. **Proposición.** *Sea $\mathcal{F}$ un filtro saturado de I. La $\mathcal{F}$-topología es de Hausdorff si y sólo si cada X_i es de Hausdorff.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Mostremos que cada factor X_i es homeomorfo a un subespacio X_i^y de X, y como ser un epacio de Hausdorff es una propiedad hereditaria e invariante tenemos que X_i también es de Hausdorff. Para construir a X_i^y tomamos un punto y arbitrario de X y el índice i involucrado; definimos

$$X_i^y := \{(x_j) \mid x_j = y_j \text{ para } j \neq i\} = \prod_{j \neq i} \{y_j\} \times X_i.$$

La restricción de la función proyección

$$p_i|_{X_i^y} : X_i^y \longrightarrow X_i$$

es un homeomorfismo —recuérdese que $\mathcal{F}$ es saturado—.
($\Leftarrow$) Esta implicación es precisamente la razón para introducir el concepto de saturado. □

La proposición anterior implica que, en general, el producto de espacios de Hausdorff no es de Hausdorff; es necesaria la condición de filtro saturado.

- Utilizando técnicas del análisis no–estándar, Y. Suemura, Y. Nakano en [SN] pretenden demostrar que dado un filtro $\mathcal{F}$, $\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i$ es de Hausdorff si y sólo si cada espacio factor es de Hausdorff. La "demostración" de este último resultado es errónea por la sencilla razón de que el enunciado es *falso!* como lo hemos establecido en la proposición anterior y el siguiente contraejemplo.

2.9. **Ejemplo.** Sean $I = \mathbb{N}$ y $\mathcal{F}=\langle 1 \rangle$ el ultrafiltro (no saturado) generado por el elemento $1 \in \mathbb{N}$. Para todo i definimos $X_i := (\{0,1\}, discreta)$ con lo que cada factor resulta ser de Hausdorff. Sin embargo, el espacio producto $X = \prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i$ no es de Hausdorff, pues los puntos $(1,0,0,0,\ldots)$ y $(0,0,0,0,\ldots)$ no se pueden separar en la $\mathcal{F}$-topología ya que cada abierto básico en el índice 1, toma todo el espacio X_1.

2.3. Espacios de Hausdorff y compacidad. Una topología $(X, \mathcal{J})$ que es de Hausdorff y compacta está caracterizada por una propiedad *mini-max* [He]; exactamente:

2.10. **Proposición.** *Si $(X, \mathcal{J})$ es de Hausdorff y compacto entonces $\mathcal{J}$ es:*

- minimal de Hausdorff*: $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{J}$ implica que $\mathcal{H}$ no es de Hausdorff.*
- maximal compacta*: $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{H}$ implica que $\mathcal{H}$ no es compacta.*

Demostración. Recordemos que: *si $(X, \mathcal{G})$, $(Y, \mathcal{H})$ son espacios topológicos con X compacto y Y un espacio de Hausdorff, entonces toda biyección continua*

$f : X \longrightarrow Y$ *es un homeomorfismo.* Por tanto, al considerar —en ambas direcciones— a la función identidad $id_X : (X, \mathcal{J}) \longrightarrow (X, \mathcal{H})$ tenemos necesariamente $\mathcal{J} = \mathcal{H}$. $\square$

2.11. **Corolario.** *Si* $(X, \mathcal{J})$ *es de Hausdorff y compacto entonces para todo espacio* $(X, \mathcal{H})$ *de Hausdorff y compacto que se compara con* $(X, \mathcal{J})$ *tenemos* $\mathcal{H} = \mathcal{J}$.

Por lo anterior, si una topología para el producto de espacios de Hausdorff y compactos está estrictamente contenida en la de Tychonoff —lo que la hace compacta— para dicha topología el producto de espacios de Hausdorff no sería de Hausdorff. Si la topología usada contuviera a la de Tychonoff, entonces el producto de espacios compactos no necesariamente sería compacto (no existe teorema de Tychonoff para dicha topología). Por esto, la topología de Tychonoff puede ser considerada como *mini–max* en la categoría de los espacios bicompactos —de Hausdorff y compactos— y en particular minimal de Hausdorff o de Hausdorff minimal. En 1940, Katetov [Ka] caracterizó los espacios de Hausdorff que son de Hausdorff minimal y produjo un ejemplo de un espacio de Hausdorff minimal que no es compacto.

2.12. **Proposición.** *Sea* $\mathcal{F}$ *un filtro saturado —para poder comparar—. Si* $\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i$ *es de Hausdorff y compacto entonces* $\mathcal{F}$ *es cofinitos.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es saturado tenemos
$$\prod_{i\in I}^{Cofinitos} X_i \subseteq \prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i.$$
De otra parte, si $\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i$ es de Hausdorff y compacto, entonces cada X_i es de Hausdorff y cada X_i es compacto pues las proyecciones son continuas y sobres; por tanto, $\prod_{i\in I}^{Cofinitos} X_i$ es también de Hausdorff y compacto. Esto último implica
$$\prod_{i\in I}^{Cofinitos} X_i = \prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i$$
con lo cual $\mathcal{F}$ es cofinitos. $\square$

2.13. **Corolario.** *Sea* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltro libre en* I. *Si cada factor es de Hausdorff entonces* $\prod_{i\in I}^{\mathcal{U}} X_i$ *no es un espacio compacto así lo sea cada espacio factor.*

Demostración. Los ultrafiltros libres contienen al filtro de los cofinitos. $\square$

2.14. **Observación.** El teorema *generalizado de Tychonoff* (compacidad en el producto para topologías diferentes a la de Tychonoff) no es válido en la categoría de los espacios de Hausdorff cuando la $\mathcal{F}$-topología proviene de un ultrafiltro libre. Más aún, solo puede tener sentido sobre filtros no comparables con el filtro de los cofinitos; esto, excluye de raíz a los filtros saturados diferentes de cofinitos.

Y como cada filtro no principal admite estar contenido en un ultrafiltro libre:

- El *teorema generalizado de Tychonoff* no es válido para una amplia gama de $\mathcal{F}$-topologías.
- Sea $\mathcal{F}$ un filtro saturado. El Teorema generalizado de Tychonoff —para las $\mathcal{F}$-topologías— en la categoría de Hausdorff se tiene si y sólo si $\mathcal{F}$ es el filtro de los cofinitos.

Con respecto a otras propiedades de separación más débiles que la propiedad de ser un espacio de Hausdorff tenemos lo siguiente.

2.15. **Lema.** *Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios T_1 con $|X_i| \geq 2$ y $|I| \geq \aleph_0 = |\mathbb{N}|$ entonces $X = \ {}_{i\in I} X_i$ (la topología caja) es no compacto.*

Demostración. Veamos que X contiene un subespacio cerrado, discreto e infinito, lo cual contradice que X sea compacto pues todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto como subespacio.

Por cada $i \in I$ sea $D_i = \{x_i^0, x_i^1\} \subseteq X_i$ con la topología discreta. El espacio

$$D = X = \ {}_{i\in I} D_i,$$

como subconjunto de X es cerrado, ya que se trata de un producto de factores cerrados; también es discreto, pues cada punto $x = (x_i)_{i\in I} \in \square_{i\in I} D_i$ es abierto, puesto que, en cada coordenada i de x tomamos el otro punto en D_i y obtenemos

$$x = (x_i) = D \cap (\prod_i \{x_i^0\}^c)$$

donde el segundo conjunto de la intersección es un abierto. Por supuesto que D es infinito. $\square$

2.16. **Proposición.** *Sea* $\{X_i\}_{i\in I}$ *una familia de espacios* T_1 *con* $|X_i| \geq 2$ *y* $|I| \geq \aleph_0 = |\mathbb{N}|$. *Si* $\mathcal{F}$ *es un filtro saturado diferente al filtro de los cofinitos entonces la* $\mathcal{F}$*-topología no es compacta.*

Demostración. Sea $F \in \mathcal{F}$ con F^c un conjunto infinito; por cada $i \in F$ tomemos $a_i \in X_i$. El conjunto A definido como

$$A =: \{x = (x_i) \in \prod_{i\in I} X_i \mid x_i = a_i,\ i \in F\} \tag{2}$$

es cerrado, pues

$$A = \prod_{i\in F}\{a_i\} \times \prod_{i\in F^c} X_i = \bigcap_{i\in F} p_i^{-1}\{a_i\}.$$

De otra parte A es isomorfo al espacio $\quad_{i\notin F} X_i$ pues si $\mathcal{F}_A$ es la topología de subespacio de $\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} X_i$ para A entonces

$$U \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow U = A \cap (\prod_{i\in F} X_i \times \prod_{i\in F^c} U_i) = \prod_{i\in F}\{a_i\} \times \prod_{i\in F^c} U_i.$$

Luego A es un cerrado no compacto y por tanto la $\mathcal{F}$-topología tampoco puede ser compacta. $\square$

2.4. Resolubilidad. El concepto de espacio resoluble (un espacio X es resoluble si contiene dos subconjuntos E, D densos y disyuntos tales que $X = D\cup E$) fue introducido y estudiado por E. Hewitt [He] en su célebre artículo de 1943, entre otras cosas con el fin de construir dentro del retículo completo $Top(X)$ topologías más finas (o expansiones) que una dada.

Desde entonces, definiciones más generales concernientes con la resolubilidad han sido estudiadas. Para $0 \leq n \leq \omega$, un espacio X es n–resoluble si X es unión de n subconjuntos densos disyuntos (ser n–resoluble para cada n implica ser ω–resoluble [Ill]); aún más, la anterior definición es extendible a cardinales infinitos. En esta sección mostramos una amplia clase espacios resolubles.

En 1947 Katetov [Ka 2] retomó la resolubilidad para responder una pregunta de existencia: *¿Existe un espacio topológico X sin puntos aislados para el cual cada función a valor real definida sobre X posee un punto donde es continua?*

Si un espacio X contiene dos subconjuntos E, D densos y disyuntos tales que $X = D \cup E$ entonces la función f definida como $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $f(E) = 0$

y $f(D) = 1$ no puede ser continua en algún punto. Luego una respuesta afirmativa al problema de Katetov debe estar en la clase de espacios no resolubles o irresolubles (espacios que no son unión de subconjuntos densos disyuntos).
Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F}$ un filtro en I. Dado un punto fijo $x = (x_i)$ en el producto cartesiano $X = \prod_{i\in I} X_i$ definimos el siguiente subconjunto llamado el *igualador* por $\mathcal{F}$ del punto x,

$$\sum^{\mathcal{F}}(x) = \{(z_i) \in X \mid \{i \in I : x_i = z_i\} \in \mathcal{F}\} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \left(\prod_{i\in F} \{x_i\} \times \prod_{i\in F^c} X_i \right)$$

(esta definición generaliza la definición dada por la ecuación (2)).

2.17. **Proposición.** *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F}$ un filtro en I. Para cada $x \in X$ el conjunto $\sum^{\mathcal{F}}(x)$ es denso en $X = \prod^{\mathcal{F}}_{i\in I} X_i$. Además, si $x, y \in X$ son tales que $\{i : x_i \neq y_i\} \in \mathcal{F}$ —los llamamos* diferentes por $\mathcal{F}$— *entonces*

$$\sum^{\mathcal{F}}(x) \bigcap \sum^{\mathcal{F}}(y) = \emptyset.$$

Demostración. Sean

$$U = \prod_{i\in F^c} U_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F} X_i$$

un abierto básico y $y = (y_i) \in U$. Para el subconjunto de índices

$$\delta(U) = \delta\langle U_i \rangle := \{i \in I \mid U_i = X_i\} \in \mathcal{F}$$

definamos el punto $z = (z_i)_i \in I$ como

$$z_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in \delta(U), \\ y_i & \text{si } i \notin \delta(U). \end{cases}$$

El punto $z \in U \cap \sum^{\mathcal{F}}(x)$, lo que muestra la densidad.
Para ver que los conjuntos son disyuntos, sea $z \in \sum^{\mathcal{F}}(x) \cap \sum^{\mathcal{F}}(y)$ —z es igual a x y y por medio de $\mathcal{F}$— luego $F_x = \{i \in I : x_i = z_i\} \in \mathcal{F}$ y $F_y = \{i \in I : y_i = z_i\} \in \mathcal{F}$ y por tanto $F_x \cap F_y \in \mathcal{F}$ pero

$$F_x \cap F_y \subseteq \{i : x_i = y_i\} = \{i : x_i \neq y_i\}^c$$

con lo que $\{i : x_i \neq y_i\}^c \in \mathcal{F}$ y esto contradice que $\mathcal{F}$ es un filtro. $\square$

Como cada conjunto que contiene a un subconjunto denso es a su vez denso, la anterior proposición muestra que $X = \prod^{\mathcal{F}}_{i\in I} X_i$ es un espacio resoluble.

3. Filtros para un producto de conjuntos

3.1. La construcción. Como fue notado en la observación 2.2, la construcción es válida aún si la familia $\mathcal{J}_i$ considerada en cada X_i no es una topología. Consideremos entonces, el caso de una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de conjuntos no vacíos y por cada índice i un filtro $\mathcal{F}_i$ en X_i. En otras palabras, consideramos una familia de pares $\{(X_i, \mathcal{F}_i)\}_{i\in I}$ y a cada par lo llamamos un *espacio filtrado* (remedando el concepto de espacio topológico donde la estructura topológica es cambiada por la de filtro).
Dado el producto cartesiano $X = \prod_{i\in I} X_i$ de los conjuntos X_i, nos preguntamos: ¿cómo construir un filtro en X a partir de la familia de filtros $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ en los factores? La respuesta, es la construcción que motiva esta sección.
Dada una familia $\{(X_i, \mathcal{F}_i)\}_{i\in I}$ de espacios filtrados, definimos una *caja* $\mathbf{F}$ en el producto conjuntista $\prod_{i\in I} X_i$, como

$$\mathbf{F} := \langle F_i \rangle := \prod_{i\in I} F_i,\ F_i \in \mathcal{F}_i,\ i \in I.$$

El conjunto $\delta\langle F_i\rangle$ de *índices distinguidos* de una caja es definido como

$$\delta(\mathbf{F}) = \delta\langle F_i\rangle := \{i \in I \mid F_i = X_i\}.$$

El *soporte* $\sigma\langle F_i\rangle$ de la caja $\langle F_i\rangle$ es definido como

$$\sigma(\mathbf{F}) = \sigma\langle F_i\rangle := \{i \in I \mid F_i \neq X_i\}.$$

3.1. **Proposición.** *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre I. Las cajas $\langle F_i\rangle$ tales que $\delta\langle F_i\rangle \in \mathcal{F}$ forman una base para un filtro en $\prod_{i\in I} X_i$.*

Demostración. Sean $\mathbf{F} = \langle F_i\rangle$, $\mathbf{G} = \langle G_i\rangle$ dos cajas tales que $\delta\langle F_i\rangle \in \mathcal{F}$ y $\delta\langle G_i\rangle \in \mathcal{F}$. La caja $\langle F_i\rangle \cap \langle G_i\rangle = \langle F_i \cap G_i\rangle$ es tal que $\delta\langle F_i \cap G_i\rangle \in \mathcal{F}$.
($\Leftarrow$) Como $\mathcal{F} \neq \varnothing$, existe por lo menos un elemento en el filtro. Sean $\langle F_i\rangle, \langle G_i\rangle$ cajas tales que $\delta\langle F_i\rangle, \delta\langle G_i\rangle \in \mathcal{F}$. Entonces

(i) $\langle F_i\rangle \cap \langle G_i\rangle = \langle F_i \cap G_i\rangle$,
(ii) $\delta\langle F_i \cap G_i\rangle = \delta\langle F_i\rangle \cap\ \delta\langle G_i\rangle \in \mathcal{F}$.

El filtro generado por esta base lo notamos

$$\textstyle\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} \mathcal{F}_i,$$

y lo llamamos el $\mathcal{F}$–filtro para el producto de los espacios filtrados X_i. Un elemento de la base puede entonces ser notado como

$$\prod_{i\in F^c} F_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F} X_i \qquad (F \in \mathcal{F})$$

Por tanto, los elementos del $\mathcal{F}$–filtro son todos los subconjuntos de $\prod_{i\in I} X_i$ que son superconjuntos de alguna caja. □

3.2. Algunas propiedades. Si $\mathcal{F}$ es el filtro de los *cofinitos* en I, al $\mathcal{F}$–filtro correspondiente lo llamamos *el filtro producto* de la familia $\{(X_i, \mathcal{F}_i)\}_{i\in I}$ y lo notamos $\prod_{i\in I}^{cofinitos} \mathcal{F}_i$. (¿Debería ser llamado el filtro de Tychonoff para el producto?).
El *filtro caja* es por definición el filtro correspondiente al caso en que $\mathcal{F}$ es el filtro trivial de partes de I.
Como las funciones proyección $p_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ son sobreyectivas, dado un filtro cualquiera $\mathcal{G}$ en el producto $\prod_{i\in I} X_i$ la familia $p_i(\mathcal{G})$ es un filtro en X_i.
Una pregunta natural es: ¿para que clase de filtros $\mathcal{F}$ se tiene

$$p_i(\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} \mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_i$$

—continuidad de la construcción—?

3.2. **Proposición.** *Si $\mathcal{F}$ es un filtro saturado en I entonces* $p_i(\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} \mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_i$.

Demostración. Por la definición del filtro $p_i(\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} \mathcal{F}_i)$ tenemos

$$p_i(\prod_{i\in F^c} F_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F} X_i) = F_i,$$

lo que implica $p_i(\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} \mathcal{F}_i) \subseteq \mathcal{F}_i$.
Para verificar la otra contenencia, dado $F_i \in \mathcal{F}_i$ debemos tener que existe una caja $\langle F_i\rangle$ para la cual $p_i(\langle F_i\rangle) = F_i$; y para esto, debemos poder escoger el elemento F_i del filtro $\mathcal{F}_i$, y por tanto, es necesario que el índice i no pertenezca a algún elemento $F \in \mathcal{F}$, lo que implica $X - \{i\} \in \mathcal{F}$; es decir, $\mathcal{F}$ es saturado. □

En particular, como el filtro de los cofinitos es saturado, tenemos que para *el filtro producto* su proyección en X_i es $\mathcal{F}_i$. Pero tenemos mucho más; el filtro producto es "el mejor" (el más pequeño) filtro que cumple esta propiedad.

3.3. Proposición. *Sea $\mathcal{G}$ un filtro en $\prod_{i\in F} X_i$ tal que $p_i(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_i$ para cada $i \in I$. Entonces*

$$p_i(\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} \mathcal{F}_i) \subseteq \mathcal{G}.$$

Demostración. Sea A un elemento de la base para el filtro $\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} \mathcal{F}_i$. Existe $F \in \mathcal{F}$ para el cual $A = \prod_{i\in F^c} F_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F} X_i$. Como F^c es un subconjunto finito, tenemos

$$A = \bigcap_{i\in F^c} p_i^{-1}(F_i) \in \mathcal{G}$$

pues cada uno de los conjuntos $p_i^{-1}(F_i) \in \mathcal{G}$ ya que por hipótesis $p_i(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_i$ lo cual implica que existe $H \in \mathcal{G}$ con $p_i(H) = F_i$ para cada $i \in F^c$ y, por tanto, $H \subseteq p_i^{-1}(F_i)$. $\square$

3.4. Observación. La anterior proposición es exactamente el dual de la caracterización de la topología producto de Tychonoff.

Dada una $\mathcal{F}$-topología en el producto, por $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}(x)$ denotamos el filtro de las vecindades del punto $x = (x_i)$; para cada espacio $(X_i, \mathcal{J}_i)$ denotamos por $\mathcal{V}(x_i)$ el filtro de las vecindades del punto x_i. La relación entre $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}(x)$ y el filtro producto de los $\mathcal{V}(x_i)$ para el producto cartesiano está dada por la siguiente proposición.

3.5. Proposición. *Dados $\{(X_i, \mathcal{J}_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro en I y $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ un punto en el espacio producto con la $\mathcal{F}$-topología, entonces*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{F}}(x) = \prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} \mathcal{V}(x_i).$$

Demostración. Dada $V_x \in \mathcal{V}_{\mathcal{F}}(x)$ existen $F \in \mathcal{F}$ y un abierto en la base de la $\mathcal{F}$-topología para el cual

$$x \in \prod_{i\in F^c} U_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F} X_i \subseteq V_x.$$

Como cada $x_i \in U_i \in \mathcal{V}(x_i)$ tenemos que la caja $\prod_{i\in F^c} U_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F} X_i$ pertenece a la base del filtro $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}(x)$ y por tanto $V_x \in \mathcal{V}_{\mathcal{F}}(x)$. $\square$

4. Producto de espacios uniformes

Como una última aplicación, veamos la construcción de una estructura uniforme para un producto cartesiano de conjuntos.
La noción de *espacio uniforme* fue introducida por A. Weil [We] en 1937; básicamente, se trata de un conjunto X junto con una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X \times X$ que satisface ciertas condiciones naturales si se tienen en mente a los espacios métricos.
La colección $Unif(X)$ de las uniformidades sobre un conjunto fijo X con el orden usual entre conjuntos, es un retículo completo donde el primer y último elemento son $\{X \times X\}$ y $\{M \subseteq X \times X : \Delta(X) \subseteq M\}$ respectivamente.

4.1. La construcción. Consideremos el caso de una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de conjuntos no vacíos y por cada índice i una uniformidad $\mathcal{U}_i$ en X_i. En otras palabras, consideramos una familia de espacios uniformes $\{(X_i, \mathcal{U}_i)\}_{i\in I}$.
Dado el producto cartesiano $X = \prod_{i\in I} X_i$ de los conjuntos X_i, nos preguntamos ¿cómo construir una uniformidad en X a partir de la familia de uniformidades $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ en los factores? Como debemos considerar relaciones en X identifiquemos

$$X \times X = \prod_{i\in I} X_i \times \prod_{i\in I} X_i = \prod_{i\in I}(X_i \times X_i).$$

Por cada $i \in I$ consideremos una base $\mathcal{B}_i$ para $\mathcal{U}_i$. Definimos una caja $\mathbf{B}$ en el producto conjuntista $X \times X$, como

$$\mathbf{B} := \langle B_i \rangle := \prod_{i\in I} B_i,\ B_i \in \mathcal{B}_i,\ i \in I.\ \ (\text{Nótese que } B_i \subseteq X_i \times X_i)$$

El conjunto $\delta\langle B_i \rangle$ de *índices distinguidos* de una caja es definido como

$$\delta(\mathbf{B}) = \delta\langle B_i \rangle := \{i \in I \mid B_i = X_i \times X_i\}.$$

4.1. **Proposición.** *Sea $\mathcal{F}$ un filtro I. Las cajas $\langle B_i \rangle$ tales que $\delta\langle B_i \rangle \in \mathcal{F}$ forman una base $\mathcal{B}$ para una uniformidad en $\prod_{i\in I} X_i$.*

Demostración. Para la demostración utilizaremos la caracterización de base dada en la proposición 10.1. Un elemento $\langle B_i \rangle$ de la base $\mathcal{B}$ puede ser notado como

$$\langle B_i \rangle = \prod_{i\in F^c} B_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i\in F}(X_i \times X_i) \qquad (F \in \mathcal{F}).$$

1. Sea $\langle B_i \rangle$ un elemento de la base; por cada $i \in I$ y cada $B_i \in \mathcal{B}_i$ tenemos $\Delta(X_i) \subseteq B_i$. Luego
$$\Delta(X) = \prod_{i \in I} \Delta(X_i) \subseteq \prod_{i \in I} B_i$$
2. Sea $\langle B_i \rangle$ un elemento de base; por cada $i \in I$ y cada $B_i \in \mathcal{B}_i$ existe $U_i \in \mathcal{B}_i$ con $U_i \subseteq B_i^{-1}$. Nótese que $\prod_{i \in I} U_i \in \mathcal{B}$ y
$$\prod_{i \in I} U_i \subseteq \prod_{i \in I} B_i^{-1} = \prod_{i \in F^c} B_i^{-1} \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i \in F} (X_i \times X_i) \qquad (F \in \mathcal{F}).$$
3. Sea $\langle B_i \rangle$ un elemento de base; por cada $i \in I$ y cada $B_i \in \mathcal{B}_i$ existe $U_i \in \mathcal{B}_i$ con $U_i \circ U_i \subseteq B_i$. Tenemos
$$\prod_{i \in I} (U_i \circ U_i) \subset \prod_{i \in F^c} B_i \overset{\mathcal{F}}{\times} \prod_{i \in F} (X_i \times X_i) \qquad (F \in \mathcal{F}).$$
4. Sean $\langle C_i \rangle$ y $\langle D_i \rangle$ elementos de la base; por cada $i \in I$ existe $W_i \in \mathcal{B}_i$ con $W_i \subseteq C_i \cap D_i$ —si $C_i = D_i = X_i \times X_i$ tomamos $W_i = X_i \times X_i$—. Ya que $\mathcal{F}$ es un filtro, tenemos que $\prod_{i \in I} W_i$ está en la base y
$$\prod_{i \in I} W_i \subset \prod_{i \in I} C_i \bigcap \prod_{i \in I} D_i = \prod_{i \in I} (C_i \cap D_i). \quad \square$$

La uniformidad generada por la anterior base la notamos $\prod_{i \in I}^{\mathcal{F}} \mathcal{F}_i$, y la llamamos la $\mathcal{F}$–uniformidad para el producto de los espacios uniformes X_i. Por tanto, los elementos de la $\mathcal{F}$–uniformidad son todos los subconjuntos de $X \times X$ que son superconjunto de alguna caja.

Si $\mathcal{F}$ es el filtro de los *cofinitos* en I, a la $\mathcal{F}$–uniformidad correspondiente la llamamos *la uniformidad producto* de la familia $\{(X_i, \mathcal{U}_i)\}_{i \in I}$ y la notamos $\prod_{i \in I}^{cofinitos} \mathcal{U}_i$. (¿Debería ser llamada la uniformidad de Tychonoff para el producto?). La uniformidad producto se caracteriza por ser la uniformidad más pequeña para la cual las funciones proyección $p_i : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$ son continuas.

A cada espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ se asocia de manera natural una topología para el conjunto X notada como $\mathcal{J}_{\mathcal{U}}$ y definida como sigue:
Si $U \in \mathcal{U}$ y $x \in X$ definimos el *U–entorno* de x como
$$U[x] := \{y : (x, y) \in U\}.$$

Definimos

$$\mathcal{J}_{\mathcal{U}} := \{G \subseteq X : \text{ para todo } x \in G \text{ existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } U[x] \subseteq G\}.$$

En otras palabras, $G \in \mathcal{J}_{\mathcal{U}}$ si y sólo si G contiene un *U–entorno* alrededor de cada uno de sus puntos —dual a los espacios métricos y las bolas—.
Finalmente resaltamos el hecho que, sobre un producto de espacios uniformes, la $\mathcal{F}$–uniformidad induce la $\mathcal{F}$–topología, esto es,

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}-uniformidad} = \mathcal{F} - \text{topología}.$$

Referencias

[Al] P. S. Aleksandroff, *The principal mathematical discoveries of A. N. Tykhonoff*, Russian Math. Surveys, Vol 31, no. 6 (1976).

[Bo] N. Bourbaki, *General toplogy, Part 1, Elements of Mathematics*, Addison-Wesley, (1966).

[Bu] R. W. Button, *Monads for regular and normal spaces*, Notre Dame J. of Formal Logic, Vol XV, no. 3 (1976).

[Ca] D. E. Cameron, *The birth of the Stone-Čech compactification.*, In: rings of Continuous Functions, (ed. C. E. Aull), Marcel dekker, N. Y. 67–68. MR 86g:01035, 1985.

[Če] E. Čech, *On bicompact spaces*, Ann. Math., **38** (1937), 823–844.

[GK] M. Z. Grulović, Miloš S. Kurilić, *On the preservation of separation axioms in products*, Comment. Math. Univ. Carolinae **33** 4 (1992) 713–721.

[He] E. Hewitt, *A problem of set-theoretic topology*, Duke Math. J. **10** (1943) 309–333.

[Ill] A. Illanes, *finite and ω–resolvability*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996) 1243–1246.

[Ja] I. M. James, (editor) *History of topology*, North-Holland, Elsevier, 1999.

[J] P. T. Johnstone, *Tychonoff's theorem whithout the axiom of choice*, Fund. Math. **113** (1982), 21—35.

[K] J. L. Kelley, *The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice*, Fund. Math. **37** (1950), 75–76.

[Ka] M. Katetov, *Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume,* Časopis Pešt. Mat. Fys. **69** (1940), 36–49.

[Ka 2] M. Katetov, *On topological spaces containing no disjoint dense sets,* (in Russian), Mat. Sbornik **21** (1947), 3–12.

[Kn] C. J. Knight, *The box topology*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **15** (1964), 41–54.

[L] P. Loeb & D. Hurd, *Introduction to non-standard analysis,* Academic Press (1990).

[MR] *MathSci, electronic database of Mathematical Reviews,* American Mathematical Society, 1940–1999.

[NV] S. Negri, S. Valentine, *Tychonoff´s theorem in framework of formal topologies*, The Journal of Symbolic Logic Logic, **62** no. 4(1997), 1315–1332.

[SN] Y. Suemura, Y. Nakano *The representation of the product by the monad*, J. Fac. Liberal Arts, Yamaguchi Univ. Natur. Sci. **20** (1987), 1–5.

[Ti] H. Tietze, *Über Analysis situs*, Abhandl. Math. sem. Univ. Hamburg, 2 (1923) 27–70

[Ty 1] A. Tychonoff, *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Ann., 102 (1930) 544–561.

[Ty 2] A. Tychonoff, *Über einen Funktionenraum*, Math. Ann. **111** (1935) 544–561.

[Ty 3] A. Tychonoff, *Ein Fixpunktsatz.*, Math. Ann., **111** (1935a) 767–776, 544–561.

[Ve] J. J. C. Vermeulen, *Proper maps of locales*, Journal of Pure and Applied Algebra **92** (1994), 79–107.

[We] A. Weil, *Sur les espaces á structure uniforme et sur la topologie générale*, Actualités Scient. et Ind. **551** Paris (Hermann) (1937).

[Vi] L. Villegas, *Maximal Resolvability on some topological spaces*, Bol. Soc. Mat. Maxicana **5**, 1, (1937) 123–136.

Recibido: Abril de 2005. Aceptado para publicación: Junio de 2005.