This is a reprint of
Lecturas Matemáticas
Volumen **25** *(2004), páginas 43–57*

Matemáticas y arquitectura: un procedimiento de Juan de Torija (1624–1666) para el cálculo aproximado del área de una bóveda de arista

Vicente Meavilla Seguí
Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España

Lecturas Matemáticas
Volumen **25** *(2004), páginas 43–57*

Matemáticas y arquitectura: un procedimiento de Juan de Torija (1624–1666) para el cálculo aproximado del área de una bóveda de arista

Vicente Meavilla Seguí
Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España

Abstract. In this paper Juan de Torija's procedure (1661) to approximate the area of an edge vault is explained. The procedure is based on basic concepts of elementary and descriptive geometry.

Key words and phrases. Architecture, history of mathematics.

2000 Mathematics Subject Classification. 01A45, 65–03.

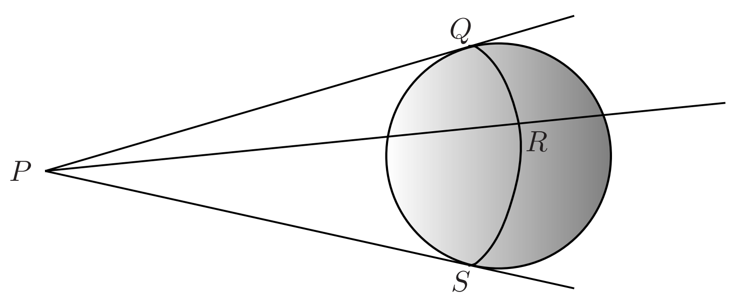
Resumen. En este trabajo, a modo de ejemplo, presentamos un método para el cálculo aproximado del área de una bóveda de arista, debido a Juan de Torixa (1624–1666). Dicho procedimiento, que incluye conceptos elementales de geometría sintética y geometría descriptiva, resuelve de forma sencilla e inteligente un problema que tratado desde una óptica más actual haría uso de las integrales dobles.

1. Introducción

El cálculo integral es, sin duda, una herramienta contundente a la hora de calcular longitudes de curvas, áreas de superficies y volúmenes de sólidos. Sin embargo, a lo largo de los tiempos, los investigadores han ido elaborando distintos procedimientos con los que, sin necesidad de las integrales, se pueden calcular de forma aproximada longitudes, áreas y volúmenes.

En este trabajo, a modo de ejemplo, presentamos un método para el cálculo aproximado del área de una bóveda de arista, contenido en el *Breue tratado de todo genero de bobedas asi regulares como yrregulares execucion de obrarlas y medirlas con singularidad y modo moderno obseruando los preceptos canteriles de los maestros de architectura.* Por Juan de Torixa maestro architecto y aparexador de las obras reales (1661).[1] Dicho procedimiento, que incluye conceptos elementales de geometría sintética y geometría descriptiva, resuelve de forma sencilla e inteligente un problema que tratado desde una óptica formal necesita hacer uso de las integrales dobles.

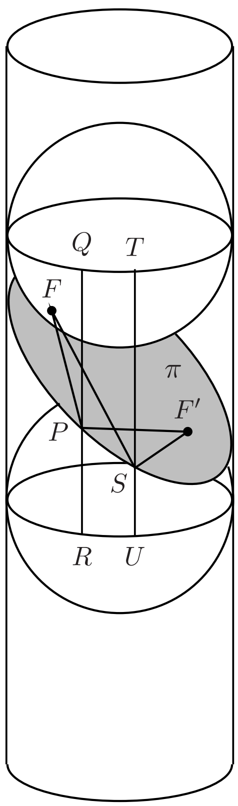
Un teorema para empezar. *Desde un punto P, exterior a una esfera, se pueden trazar a ésta infinitas tangentes que generan una superficie cónica circunscrita a la esfera. La longitud de cualquier segmento de tangente comprendido entre el punto P y el punto de contacto es constante* $[PQ = PR = PS]$.



[1]Sobre la vida del arquitecto JUAN DE TORIJA disponemos de escasos datos biográficos. Entre 1652 y 1653 trabajó en el Alcázar de los Austrias y en la reconstrucción del Palacio del Buen Retiro de Madrid. En 1662 reconstruyó la capilla principal de Atocha (Madrid) según el proyecto de SEBASTIÁN DE HERRERA BARNUEVO. Además de su "Tratado de bóvedas", TORIJA escribió un *Tratado breve sobre las ordenanzas de la villa de Madrid y policia della* (1661).

Intersección de un cilindro recto y un plano no perpendicular a sus generatrices. *Sea un cilindro recto de radio r y un plano π que lo corta oblicuamente. En esta situación la intersección del cilindro y el plano es una elipse.*

En efecto, en la figura adjunta el plano π es tangente en los puntos F y F' a dos esferas de radio r, inscritas en el cilindro.



Sea P un punto cualquiera de la curva cerrada y plana en la que el plano π corta al cilindro recto.

El punto P pertenece a la generatriz del cilindro que pasa por los puntos Q y R.

Entonces, en virtud del teorema anterior, se tiene que:

$$PF + PF' = QP + PR = QR\,.$$

Sea S otro punto de la curva en la que π corta al cilindro.

El punto S pertenece a la generatriz del cilindro que pasa por los puntos T y U.

Entonces, en virtud del teorema anterior, resulta que:

$$SF + SF' = TS + SU = TU\ .$$

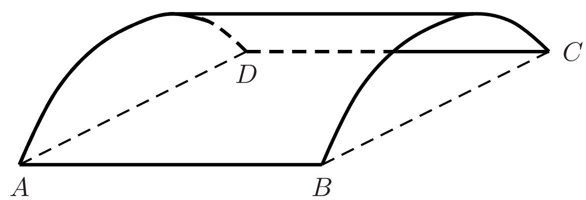
Dado que $QR = TU$, resulta que:

$$PF + PF' = SF + SF'\,.$$

Por tanto, los puntos P y S pertenecen a una elipse.

En consecuencia: La intersección del cilindro y el plano π es una elipse.

Qué es y cómo se genera una bóveda de arista. Sea un semicilindro recto de radio $a/2$ y altura a que se apoya en un cuadrado $ABCD$ de lado a (véase el croquis adjunto).



Si se corta el semicilindro por un plano π que pase por BD y sea perpendicular al plano que contiene al cuadrado $ABCD$, entonces la intersección de las dos superficies es una semielipse (véase la figura 1).

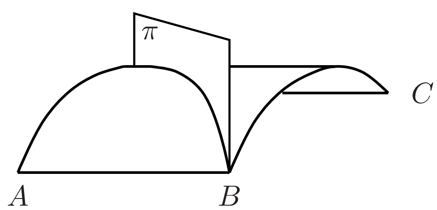


Figura 1

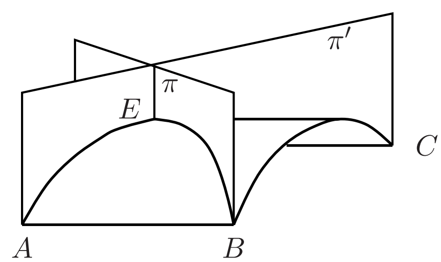


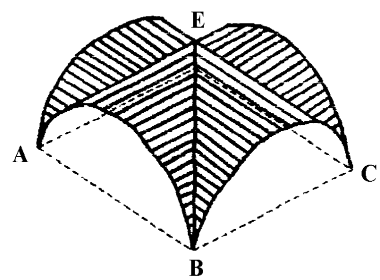
Figura 2

Por otro lado, si se corta el semicilindro por un plano π' que pase por AC y sea perpendicular al plano que contiene al cuadrado $ABCD$, entonces la intersección de las dos superficies es otra semielipse (véase la figura 2).

Después de esto, el semicilindro original queda dividido en dos parejas de"triángulos": ABE, CED [= triángulos mixtilíneos alabeados y congruentes] y AED, BEC [triángulos curvilíneos alabeados y congruentes].[2]

[2]En dichos triángulos, las longitudes de los segmentos rectilíneos AB y CD son iguales a a, las longitudes de los lados curvilíneos EA, EB, EC y ED son la cuarta parte de la longitud de una elipse de ejes a y $a\sqrt{2}$, y las longitudes de los lados curvilíneos BC y AD son iguales a la de una semicircunferencia de diámetro a.

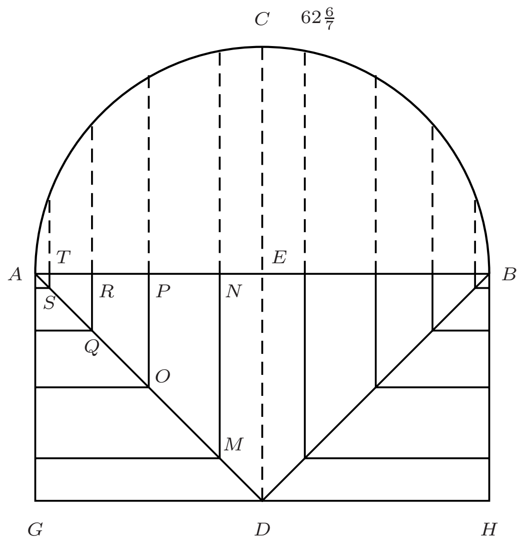
Pues bien, si sobre cada lado del cuadrado $ABCD$ se dispone un triángulo curvilíneo congruente al BEC, se obtiene una bóveda de arista tal como se detalla en el croquis siguiente.



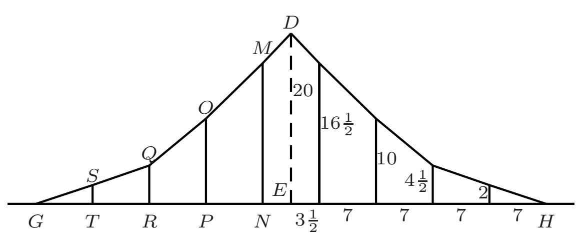
2. Área de una bóveda de arista: el procedimiento de Juan de Torija

El texto de Torija**.**

> *Formaràs la mitad de su planta A. B. G. H. y leuantaràs el perfil A. B. C. el qual diuidiràs en nueue partes iguales, y se baxaràn los plomos desde sus diuisiones, de la forma que toquen las dos lineas de los angulos, como parece por B. D. D. A. y la linea G. D. H. que es el largo de 40. pies tendrà la circunferencia* $62\frac{6}{7}$ *trazando su planta, como parece forma un triangulo, que tenga por vasis la circunferencia* $62\frac{6}{7}$ *y por perpendicular el semidiámetro, que es de 20. pies, cuya vasis la diuidiràs en 9. partes, como lo està dicha circunferencia, y tirando lineas paralelas a dicha perpendicular a vna parte, y a otra; y que tenga a 7. pies de ancho cada vna de dichas diuisiones, como lo està dicha circunferencia.*

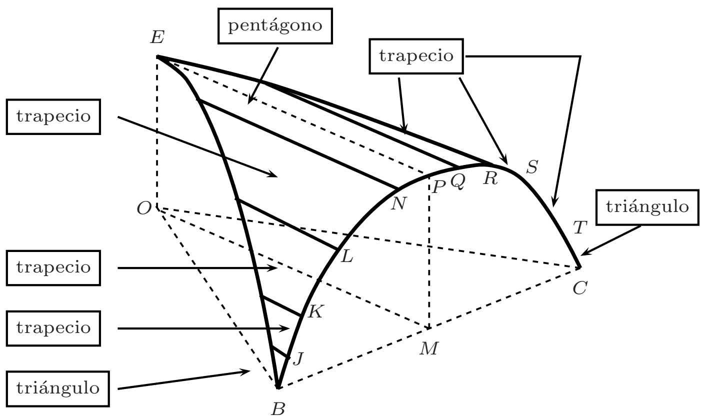


Iràs terminando sus largos de cada diuision de dicha planta D. E. M. N. O. P. Q. R. S. T. todas, y a donde te vinieren tiraràs lineas, de forma que cierres el triangulo G. H. D. mediràs cada trapezia de por si, como se dize en la Capilla esquifada, y hallaràs que vale toda el arca del propuesto triangulo 474 pies.



Y porque es la quarta parte de la propuesta Capilla, multiplicaràs los 474 por 4 y lo que saliere a su multiplicación, que seràn 1896 pies quadrados superficiales, y parece por la demostración.

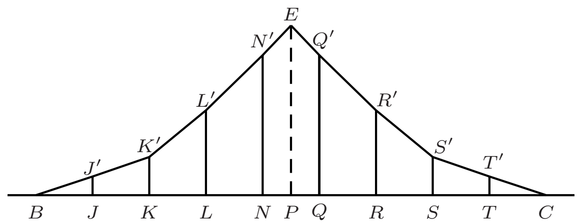
Comentario. El procedimiento utilizado por JUAN DE TORIJA tiene como objetivo calcular el área aproximada de una de las cuatro caras [= triángulo curvilíneo = superficie alabeada] de una bóveda de arista, transformándola en una superficie plana compuesta por varios trapecios rectángulos, un pentágono y dos triángulos rectángulos.



Para ello, el *maestro architecto y aparexador de las obras reales* divide la base BPC [= semicircunferencia] de la cara BEC en nueve partes iguales, y por los ocho puntos de división [J, K, L, N, Q, R, S y T] traza sendas rectas perpendiculares al plano que contiene a dicha semicircunferencia (véase el diagrama adjunto en el que O es el centro del cuadrado $ABCD$ sobre el que se apoya la bóveda y M es el punto medio de BC). Con esto, la cara BEC de la bóveda queda dividida en nueve polígonos alabeados [seis trapecios, dos triángulos y un pentágono].

Después, estirando el triángulo BEC sobre un plano y reemplazando los segmentos curvilíneos por segmentos rectilíneos la cara de la bóveda de arista se convierte en una superficie plana formada por dos triángulos rectángulos, seis trapecios rectángulos y un pentágono [= trapecio rectángulo + trapecio rectángulo].

Entonces, la suma de las áreas de dichos polígonos es una aproximación de la cuarta parte del área de la bóveda.

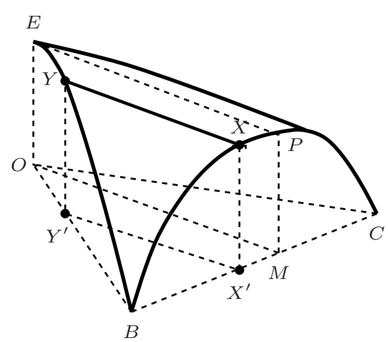


Pero, ¿cuáles son las dimensiones (bases y alturas) de los antedichos polígonos?

Resulta obvio que la altura de cada triángulo y cada trapecio es igual a $\frac{1}{9}h$, siendo h la longitud de la semicircunferencia BPC.[3] Por otro lado, la altura NP [$= PQ$] de cada uno de los dos trapecios que configuran el pentágono es $\frac{1}{18}h$.

Para calcular la longitud de las bases de cada uno de los polígonos [dos triángulos rectángulos, seis trapecios rectángulos y dos trapecios rectángulos en que queda dividido el pentágono], TORIJA se sirve de un dibujo $2D$ que le permite determinar la verdadera magnitud de cada uno de dichos segmentos rectilíneos.

Antes de analizar dicho método (en el que se utilizan conocimientos elementales de geometría descriptiva), consideremos el boceto que sigue.

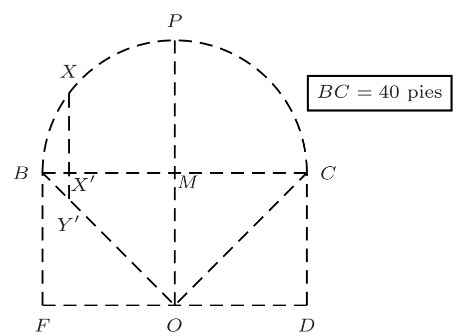


[3]Para el cálculo de h, TORIJA utiliza la fracción 22/7 como aproximación de π.

En él, sea X un punto cualquiera de la semicircunferencia BPC y X' su proyección ortogonal sobre BC. Sea Y el otro extremo del segmento rectilíneo XY, trazado perpendicularmente al semicírculo BPC desde el punto X, e Y' la proyección ortogonal de Y sobre OB.

En esta situación, resulta claro que la longitud de XY coincide con la de $X'Y'$. Además, dado que el ángulo BOM tiene una amplitud de 45°, resulta que $X'Y' = BX'$. Por tanto, $XY = X'B$.

Con esto, pasemos a la consideración del diagrama siguiente (similar al que utiliza TORIJA) en el que se representa la mitad de la planta de la bóveda [$= BCDF$], y la semicircunferencia [$= BPC$] de la cara BEC.



Sea X uno de los puntos de división de la semicircunferencia BPC y X' su proyección ortogonal sobre BC. Entonces, $X'Y' = BX' = XY$ (siendo Y el otro extremo del segmento XY trazado perpendicularmente al semicírculo BPC desde el punto X).

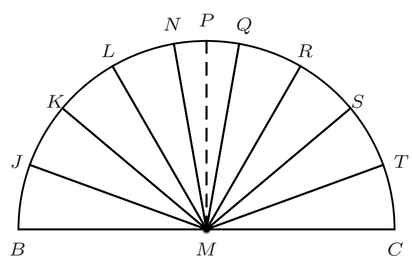
Apoyándose en este resultado, y teniendo en cuenta la escala del dibujo, TORIJA determina las longitudes de las bases de los polígonos en los que se ha dividido una cara de la bóveda[4], calcula el área de dicha cara [= 474 pies cuadrados] y, a partir de ella, obtiene el área de la bóveda [= 1896 pies cuadrados][5].

[4]Los valores que presenta son: $J'J = T'T = 2$ pies, $K'K = S'S = 4,5$ pies, $L'L = R'R = 10$ pies, $N'N = Q'Q = 16,5$ pies, $EP = 20$ pies. Además, TORIJA utiliza los datos siguientes: $BJ = JK = KL = LN = NQ = QR = RS = TC = 7$ pies.

[5]Si se realizan los cálculos pertinentes utilizando los valores de Torija se obtiene que el área de una cara es $474,25$. Por tanto, el área de la bóveda es 1897.

Revisión del procedimiento. Siguiendo los pasos de TORIJA y haciendo uso de la trigonometría, vamos a calcular (con más precisión) el área de la bóveda de arista que se apoya en un cuadrado de 40 pies de lado.

En primer lugar se divide la semicircunferencia BPC [= lado de la cara BCE] en nueve partes iguales.



Dado que $BPC = \dfrac{2\pi BM}{2} = \dfrac{2\pi \cdot 20}{2} = 20\pi = 62,831853\ldots$, entonces:

$$\begin{aligned} BJ = JK = KL = LN = NQ = QR = RS = ST = TC \\ = \frac{62,831853\ldots}{9} = 6,981317\ldots \\ NP = PQ = \frac{6,981317\ldots}{2} = 3,490658\ldots \end{aligned}$$

Acto seguido, por los puntos de división [J, K, L, N, Q, R, S y T] se trazan perpendiculares al semicírculo BPC con lo que, sobre la cara BCE de la bóveda, se materializan nueve polígonos alabeados [seis trapecios, dos triángulos y un pentágono].

Para calcular las longitudes de sus bases [JJ', KK', LL', NN', QQ', RR', SS' y TT'], se deben tener en cuenta los hechos siguientes:

(a) En la figura anterior se tiene que:

$$\text{áng}\, BMJ = 20^{\text{o}}$$
$$\text{áng}\, BMK = 40^{\text{o}}$$
$$\text{áng}\, BML = 60^{\text{o}}$$
$$\text{áng}\, BMN = 80^{\text{o}}$$

Por tanto, si J'', K'', L'', N'', Q'', R'', S'' y T'' son las proyecciones ortogonales de J, K, L, N, Q, R, S y T sobre BC, se verifica que:

$$MJ'' = MT'' = MJ \cdot \cos 20^{\text{o}} = 20 \cdot \cos 20^{\text{o}} = 18,793853\ldots$$
$$MK'' = MS'' = MK \cdot \cos 40^{\text{o}} = 20 \cdot \cos 40^{\text{o}} = 15,320889\ldots$$
$$ML'' = MR'' = ML \cdot \cos 60^{\text{o}} = 20 \cdot \cos 60^{\text{o}} = 10$$
$$MN'' = MQ'' = MN \cdot \cos 80^{\text{o}} = 20 \cdot \cos 80^{\text{o}} = 3,472963\ldots$$

(b) A partir de los resultados anteriores, se tiene que:

$$BJ'' = CT'' = BM - MJ'' = 20 - 18,793853\ldots = 1,206147\ldots$$
$$BK'' = CS'' = BM - MK'' = 20 - 15,320889\ldots = 4,679111\ldots$$
$$BL'' = CR'' = BM - ML'' = 20 - 10 = 10$$
$$BN'' = CQ'' = BM - MN'' = 20 - 3,472963\ldots = 16,527037\ldots$$

(c) Además:

$$BJ'' = JJ' = TT' = CT''$$
$$BK'' = KK' = SS' = CS''$$
$$BL'' = LL' = RR' = CR''$$
$$BN'' = NN' = QQ' = CQ''$$

Por tanto, las longitudes de las bases de los polígonos son:

$$JJ' = TT' = 1,206147\ldots$$
$$KK' = SS' = 4,679111\ldots$$
$$LL' = RR' = 10$$
$$NN' = QQ' = 16,527037\ldots$$

A partir de aquí, las áreas de los polígonos que configuran la superficie plana en la que se convierte la cara de la bóveda vienen dadas por:

$$
\begin{aligned}
\text{Área triángulo}\, BJJ' &= \frac{BJ \cdot JJ'}{2} = \frac{6,981317 \cdot 1,206147}{2} = 4,210247\ldots \\
\text{Área trapecio}\, JKK'J' &= \frac{JJ' + KK'}{2} JK \\
&= \frac{1,206147 + 4,679111}{2} 6,981317 = 20,543426\ldots \\
\text{Área trapecio}\, KLL'K' &= \frac{KK' + LL'}{2} KL \\
&= \frac{4,679111 + 10}{2} 6,981317 = 51,239764\ldots \\
\text{Área trapecio}\, LNN'L' &= \frac{LL' + NN'}{2} LN \\
&= \frac{10 + 16,527037}{2} 6,981317 = 92,596827\ldots \\
\text{Área trapecio}\, NPEN' &= \frac{NN' + PE}{2} NP \\
&= \frac{16,527037 + 20}{2} 3,490658 = 63,751697\ldots \\
\text{Área trapecio}\, PQQ'E &= 63,751697\ldots \\
\text{Área trapecio}\, QRR'Q' &= 92,596827\ldots \\
\text{Área trapecio}\, RSS'R' &= 51,239764\ldots \\
\text{Área trapecio}\, STT'S' &= 20,543426\ldots \\
\text{Área triángulo}\, TCT' &= 4,210247\ldots
\end{aligned}
$$

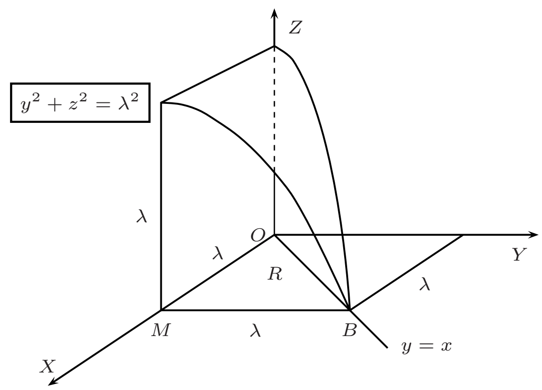
Por tanto:

$$\text{Área de la cara}\, BCE \cong 464,68392\ldots$$

En consecuencia, el valor aproximado del área de la bóveda de arista viene dado por:

$$\text{Área bóveda de arista } = 4 \cdot \text{ Área de la cara BCE } \cong 1858,7357\ldots$$

El cálculo integral y el área de la bóveda de arista. En la figura siguiente hemos representado la octava parte de una bóveda de arista, referida a un sistema ortogonal de referencia. Dicha porción de bóveda se apoya sobre una superficie cilíndrica de ecuación $y^2+z^2=\lambda^2$ [$\Rightarrow z=\sqrt{\lambda^2-y^2}$] y determina sobre el plano OXY un recinto R limitado por cuatro rectas de ecuaciones $y=0$, $y=x$, $x=0$ y $x=\lambda$.



En esta situación, el área [$=A$] de la octava parte de bóveda viene dada por:

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \iint_R \sqrt{1+\frac{y^2}{\lambda^2-y^2}}\,dxdy \\
&= \iint_R \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2-y^2}}\,dxdy = \iint_R \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-y^2}}\,dxdy \\
&= \int_0^\lambda dx \int_0^x \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-y^2}}\,dy = \lambda \int_0^\lambda \operatorname{arcsen}\frac{x}{\lambda}\,dx = \lambda^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) .
\end{aligned}
$$

Por tanto, el área de la bóveda de arista es $8A = 8\lambda^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 4\lambda^2(\pi-2)$.

En el caso estudiado por JUAN DE TORIJA $\lambda=20$, por tanto:

$$\boxed{\text{Área de la bóveda de arista } = 4\cdot 20^2(\pi-2) \cong 1826,5482\ldots}$$

Comparando este resultado con el obtenido por TORIJA [= 1896] y el conseguido vía trigonometría [$= 1858,7357\ldots$] se observa que, en el primer caso, el error es del $3,80\%$ y en el segundo del $1,76\%$.

Obviamente dichos errores se reducirían aumentando el número de divisiones practicadas en la semicircunferencia BPC.

A modo de conclusión

En las líneas precedentes hemos ofrecido tres soluciones distintas a un mismo problema: el cálculo del área de una superficie alabeada. Dos de ellas son aproximadas y la otra exacta. La primera se apoya en conocimientos elementales de geometría sintética y geometría descriptiva, la segunda recurre a la trigonometría y la tercera utiliza el cálculo integral.

Desde una perspectiva didáctica, resultaría saludable incluir en nuestros programas elementales de enseñanza aquellas soluciones a problemas de Matemáticas Superiores que sólo utilizan conceptos matemáticos básicos. De este modo, los alumnos y alumnas de Educación Secundaria (16–18 años) podrían tomar contacto con algunos problemas a los que, dentro de unos años, deberán enfrentarse desde una óptica más formalizada.

Bibliografía

Fuentes

TORIJA, JUAN DE (1661). *Breue tratado de todo genero de bobedas asi regulares como yrregulares execucion de obrarlas y medirlas con singularidad y modo moderno obseruando los preceptos canteriles de los maestros de architectura.* Por Juan de Torixa maestro architecto y aparexador de las obras reales. Madrid, Pablo del Val.

Literatura secundaria

MEAVILLA, V. (2003). *Matemáticas y arquitectura: un procedimiento de Juan de Torija (1624 - 1666) para el cálculo aproximado del área de una bóveda esquifada.* EUREKA, Revista de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Universidad Autónoma de Querétaro (México). Pendiente de publicación.

(Recibido en noviembre de 2003)

Vicente Meavilla Seguí
e-mail: vmeavill@hotmail.com
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza
Zaragoza, España