Lecturas Matemáticas
Volumen **26** *(2005), páginas 27–88*

Une étude comparative concernat les semi-groupes de classe C_0 et les semi-groupes intégrés

Ludovic Dan Lemle[1]
Université Blaise Pascal, Aubière, France
Faculté d'Ingénierie, Université Politehnica, Hunedoara, Roumanie

Abstract. This paper presents a comparative study concerning the well known theory of C_0-semigroups and the theory of once-integrated semigroups. We make some contributions to the structure theory of semigroups, by applying the properties of extended Yosida approximation.

Key words and phrases. C_0-semi-groupe, l'approximation généralisée de Yosida, la partie du générateur, semi-groupe intégré.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. 47D03, 47D06, 47D62.

Resumen. Se presenta una estudio comparativo de la conocida teoría de los semigrupos C_0 y la teoría de los semigrupos integrados. Se presentan también algunas contribuciones a la teoría estructural de los semigrupos usando propiedades de la aproximación extendida de Yosida.

1. Préliminaires

Dans la suite, nous noterons par $\mathcal{E}$ un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, par $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{E}$ et par I l'unité de $B(E)$.

[1] This work was partially supported by *Yangtse Professorship Researches Programme*, Wuhan University, China.

Pour un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ nous noterons par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \lambda I - A \text{ est inversible dans } \mathcal{B}(\mathcal{E})\}$$

l'ensemble résolvant de $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et par

$$R(\,.\,;A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda;A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

la résolvante de l'opérateur linéaire A.

Définition 1.1. On appelle C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{E}$ une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $T(0) = I$;

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)\,, \quad (\forall)\, t, s \geq 0$;

iii) $\lim_{t\searrow 0} T(t)x = x\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E}$.

Définition 1.2. On appelle *générateur infinitésimal* du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble :

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{E} \,\middle|\, \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

par :

$$Ax = \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{D}(A).$$

Exemple 1.3. Soit :

$$\mathcal{C}_{ub}[0,\infty) = \{\, f : [0,\infty) \to \mathbf{R} |\, f \text{ est uniformément continue et bornée}\}\,.$$

Avec la norme $\|f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |f(\alpha)|$, l'espace $\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$ devient un espace de Banach. Définissons :

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha)\,, \quad (\forall)\, t \geq 0 \text{ et } \alpha \in [0,\infty).$$

Evidemment $T(t)$ est un opérateur linéaire, et, en plus, on a :

i) $(T(0)f)(\alpha) = f(0+\alpha) = f(\alpha)$. Donc $T(0) = I$;

ii) $(T(t+s)f)(\alpha) = f(t+s+\alpha) = (T(t)f)(s+\alpha) = (T(t)T(s)f)(\alpha)$, $(\forall)\, f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$. Donc $T(t+s) = T(t)T(s)$, $(\forall)\, t, s \geq 0$;

iii) $\lim_{t\searrow 0} \|T(t)f - f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} = \lim_{t\searrow 0} \left\{ \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |f(t+\alpha) - f(\alpha)| \right\} = 0$, $(\forall)\, f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$.

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}\|T(t)f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} &= \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |(T(t)f)(\alpha)| = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |f(t+\alpha)| \\ &= \sup_{\beta\in[t,\infty)} |f(\beta)| \leq \sup_{\beta\in[0,\infty)} |f(\beta)| = \|f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)}, \quad (\forall)\, t \geq 0.\end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\| = 1$, $(\forall)\, t \geq 0$. Par conséquent $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$, nommé le C_0-semi-groupe de translation à droite.

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \longrightarrow \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$ le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si $f \in \mathcal{D}(A)$, alors nous avons :

$$Af(\alpha) = \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha)\,,$$

uniformément par rapport à α. Par conséquent :

$$\mathcal{D}(A) \subset \{ f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \mid f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \}\ .$$

Si $f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$ tel que $f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$, alors :

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right|\ .$$

Mais :

$$\begin{aligned}\left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| &= \left| \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} f(\tau)\Big|_{\alpha}^{\alpha+t} - f'(\alpha) \right| = \frac{1}{t} \left| \int_{\alpha}^{\alpha+t} [f'(\tau) - f'(\alpha)]\, d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} |f'(\tau) - f'(\alpha)|\ d\tau \longrightarrow 0\end{aligned}$$

uniformément par rapport à α pour $t \searrow 0$. Par suite :

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad t \searrow 0,$$

d'où $f \in \mathcal{D}(A)$ et :

$$\{ f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)\, | f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \} \subset \mathcal{D}(A)\,.$$

Par conséquent $\mathcal{D}(A) = \{ f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \,|\, f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \}$ et $Af = f'$. Comme cet opérateur est non borné, il ne peut pas engendrer un semi-groupe uniformément continu.

Nous noterons par $\mathcal{SG}(M,\omega)$ l'ensemble des C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ pour lesquels il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad (\forall)\, t \geq 0\,.$$

Dans ce cas, on dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe *exponentiellement borné*.

Proposition 1.4. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a l'égalité :*

$$T(t)Ax = AT(t)x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Preuve. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t) \lim_{h\searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h\searrow 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h}\,. \end{aligned}$$

Donc $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x$, $(\forall)\, t \geq 0$. ☑

Remarque 1.5. On voit que :

$$T(t)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Proposition 1.6. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors l'application :*

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$$

est dérivable sur $[0,\infty)$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et nous avons :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Preuve. Soient $x \in \mathcal{D}(A),\ t \geq 0$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\left\| \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax \right\| &\leq \|T(t)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\ &\leq Me^{\omega t} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| .\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax \,,$$

d'où :

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = T(t)Ax \,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Si $t - h > 0$, alors nous avons :

$$\begin{aligned}&\left\| \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax \right\| \\ &\qquad \leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax \right\| \\ &\qquad\qquad \leq Me^{\omega(t-h)} \left(\left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|T(h)Ax - Ax\| \right).\end{aligned}$$

Par suite :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = T(t)Ax$$

et :

$$\frac{d^-}{dt} T(t)x = T(t)Ax \,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Il s'ensuit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0, \infty)$, quel que soit $x \in \mathcal{D}(A)$. De plus, on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \,, \quad (\forall)\, t \geq 0. \quad ☑$$

Lemme 1.7. *Soit* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe. Alors :*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x$$

quels que soient $x \in \mathcal{E}$ *et* $t \geq 0$.

Preuve. L'égalité de l'énoncé résulte de l'évaluation :

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\,ds - T(t)x \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left(T(s) - T(t)\right) x\,ds \right\| \le \sup_{s\in[t,t+h]} \|T(s)x - T(t)x\|$$

et de la continuité de l'application $[0,\infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$. ☑

Proposition 1.8. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{E}$, alors $\int_0^t T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A)$ et on a l'égalité :*

$$A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Preuve. Soient $x \in \mathcal{E}$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^t T(u)x\,du \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\,du\,.
\end{aligned}$$

Par pasage à limite pour $h \searrow 0$ et compte tenu du lemme 1.7, nous obtenons :

$$A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0$$

et :

$$\int_0^t T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A). \quad ☑$$

Théorème 1.9. *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors* $x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $Ax = y$ *si et seulement si*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Preuve. $\Longrightarrow$ Si $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, alors nous avons :

$$\frac{d}{ds}T(s)x = T(s)Ax = T(s)y\,, \quad (\forall)\; s \in [0,t]\,,\; t \geq 0,$$

d'où :

$$\int_0^t T(s)y\,ds = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)x\,ds = T(t)x - x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

$\Longleftarrow$ Soient $x, y \in \mathcal{E}$ tel que

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Alors nous avons

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds\,, \quad (\forall)\, t \geq 0,$$

d'où

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds = T(0)y = y\,, \quad (\forall)\, t \geq 0,$$

compte tenu du lemme 1.7. Finalement on voit que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$. ☑

Théorème 1.10. *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors :*

i) $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;

ii) *A est un opérateur fermé.*

Preuve. i) Soient $x \in \mathcal{E}$ et $t_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, tel que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. Alors :

$$x_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x\, ds \in \mathcal{D}(A)\,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N},$$

d'où :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x\, ds = T(0)x = x\,.$$

Par conséquent $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$.

ii) Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$. Alors :

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \le \|T(s)\|\, \|Ax_n - y\| \le Me^{\omega t}\, \|Ax_n - y\|$$

quel que soit $s \in [0,t]$. Par suite $T(s)Ax_n \longrightarrow T(s)y$, pour $n \to \infty$, uniformément par rapport à $s \in [0,t]$. D'autre part, puisque $x_n \in \mathcal{D}(A)$, nous avons :

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\, ds\,,$$

d'où :

$$\lim_{n\to\infty} [T(t)x_n - x_n] = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(s)Ax_n\, ds\,,$$

ou bien :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\, ds\,.$$

Finalement, on voit que :

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y\, ds = y\,.$$

Par suite $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, d'où il résulte que A est un opérateur fermé. ☑

Nous montrons maintenant un résultat qui concerne l'unicité de l'engendrement pour les C_0-semi-groupes.

Théorème 1.11. [l'unicité de l'engendrement] *Soient deux C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors :*

$$T(t) = S(t)\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Preuve. Soient $t > 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$. Définissons l'application :

$$[0,t] \ni s \longmapsto U(s)x = T(t-s)S(s)x \in \mathcal{D}(A).$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x \\ &= 0\end{aligned}$$

quel que soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, d'où :

$$T(t)x = S(t)x\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{D}(A) \text{ et } t \geq 0.$$

Puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$ et $T(t), S(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, pour tout $t \geq 0$, il résulte que :

$$T(t)x = S(t)x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0 \text{ et } x \in \mathcal{E}\,,$$

ou bien :

$$T(t) = S(t)\,, \quad (\forall)\, t \geq 0. \quad ☑$$

2. La transformée de Laplace d'un C_0-semi-groupe

Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par Λ_ω l'ensemble $\{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$. Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$. Nous avons :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}\,, \quad (\forall)\, t \geq 0$$

et on voit que :

$$\left\|e^{-\lambda t}T(t)x\right\| \leq e^{\operatorname{Re}\lambda t}\,\|T(t)\|\,\|x\| \leq Me^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t}\|x\|\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E}.$$

Définissons l'application :

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}\,,$$

par :

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt\,.$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire. De plus, on a :

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^\infty \left\|e^{-\lambda t}T(t)x\right\| dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|x\|\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E},$$

d'où il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.

Définition 2.1. L'opérateur :

$$R : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\, dt$$

s'appelle la *transformée de Laplace du semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$.

Théorème 2.2. *Soit* $T : [0,\infty) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *une application fortement continue pour laquelle il existe* $M \geq 0$ *et* $\omega \in \mathbf{R}$ *tel que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Alors l'application

$$R : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\, dt$$

est une pseudo-résolvante si et seulement si on a

$$T(t+s) = T(t)T(s)\,, \quad (\forall)\, t, s \geq 0.$$

Preuve. Soient $\lambda, \mu \in \Lambda_\omega$, tel que $\lambda \neq \mu$. Alors nous avons :

$$
\begin{aligned}
\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\mu-\lambda} &= \frac{1}{\mu-\lambda}R(\lambda) - \frac{1}{\mu-\lambda}R(\mu) \\
&= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} R(\lambda)d\tau - \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} R(\mu)d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} \int_0^\infty e^{-\lambda r} T(r)dr\, d\tau - \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} \int_0^\infty e^{-\mu r} T(r)dr\, d\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} e^{-\lambda r} T(r)dr\, d\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} e^{-\mu r} T(r)dr\, d\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} e^{-\lambda r} T(r)dr\, d\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)} e^{-\lambda r} T(r)dr\, d\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} e^{-\lambda r} T(r)dr\, d\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)} d\tau e^{-\lambda r} T(r)dr \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} e^{-\lambda r} T(r)dr\, d\tau - \int_0^\infty\int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\nu)} d\nu e^{-\lambda r} T(r)dr \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)\tau} d\tau + \int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau} d\tau - \int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\nu} d\nu \right) e^{-\lambda r} T(r)dr \\
&= \int_0^\infty\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)s} ds\, e^{-\lambda r} T(r)dr = \int_0^\infty\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)s} e^{-\lambda r} T(r)dsdr \\
&= \int_0^\infty\int_s^\infty e^{-(\mu-\lambda)s} e^{-\lambda r} T(r)drds = \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)s} \int_s^\infty e^{-\lambda r} T(r)drds \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu s} \int_s^\infty e^{-\lambda(r-s)} T(r)drds = \int_0^\infty e^{-\mu s} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+s)dtds \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} T(t+s)dtds\,.
\end{aligned}
$$

D'autre part, il est clair que

$$R(\lambda)R(\mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} T(t)T(s)\, dtds$$

et par conséquent :

$$\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\mu - \lambda} - R(\lambda)R(\mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} [T(t+s) - T(t)T(s)]\, dtds$$

d'où on déduit facilement les affirmations de l'énoncé. ☑

Théorème 2.3. *Soient $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire fermé densement définit et $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ une famille fortement continue pour laquelle il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) *$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe exponentiellement borné ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A ;*

ii) *$\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et tout $x \in \mathcal{E}$ on a $R(\lambda)x = R(\lambda; A)x$.*

Preuve. $i) \Longrightarrow ii)$ Pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et tout $x \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x\, dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)xds - \int_0^h e^{-\lambda s} T(s)xds\Big) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)xdt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\, ds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\, ds\, .
\end{aligned}$$

Par passage à limite, on obtient :

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)R(\lambda)x-R(\lambda)x}{h}=\lambda R(\lambda)x-x\,.$$

Il en résulte que $R(\lambda)x\in\mathcal{D}(A)$ et

$$AR(\lambda)x=\lambda R(\lambda)x-x\,,\quad (\forall)\,x\in\mathcal{E},$$

ou bien

$$(\lambda I-A)R(\lambda)x=x\,,\quad (\forall)\,x\in\mathcal{E}.$$

Si $x\in\mathcal{D}(A)$, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned}R(\lambda)Ax&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax\,dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}T(t)x\,dt\\&=\left[e^{-\lambda t}T(t)x\right]\Big|_0^\infty+\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt=x+\lambda R(\lambda)x\,,\end{aligned}$$

d'où :

$$R(\lambda)(\lambda I-A)x=x\,,\quad (\forall)\,x\in\mathcal{D}(A).$$

Finalement, on voit que $\lambda\in\rho(A)$ et $R(\lambda)x=R(\lambda;A)x$, pour tout $x\in\mathcal{E}$.

ii) $\Longleftarrow$ *i)* Soit $\lambda\in\Lambda_\omega$ et $R(\lambda;A)=R(\lambda)$. Compte tenu du théorème 2.2 il en résulte :

$$T(t+s)=T(t)T(s)\,,\quad t,s\geq 0.$$

De plus, si $T(0)x=0$, alors $T(t)x=T(t)T(0)x=T(t)0=0$, pour tout $t>0$. Par conséquent $R(\lambda)x=0$, d'où il résulte $x=0$ et, par suite, $T(0)=I$. Il en découle $\{T(t)\}_{t\geq 0}\in\mathcal{SG}(M,\omega)$.

Soit maintenant B le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Alors, en applicant la première partie de la preuve, on a :

$$R(\lambda;B)=R(\lambda)=R(\lambda;A)$$

d'où il s'ensuit que $B=A$. ☑

Remarque 2.4. On voit que pour tout $\lambda\in\Lambda_\omega$ on a :

$$\mathcal{I}m\ R(\lambda;A)=\mathcal{I}m\ R(\lambda)\subseteq\mathcal{D}(A)$$

et :

$$R(\lambda;A)\mathcal{D}(A)=R(\lambda)\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{D}(A)\,.$$

Remarque 2.5. Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors nous avons :

$$\{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A).$$

et :

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, \operatorname{Re}\lambda \leq \omega\}.$$

Théorème 2.6. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a :*

$$\|R(\lambda;A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Preuve. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$. Alors :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Compte tenu du théorème 2.3, si $\lambda \in \Lambda_\omega$, nous avons $\lambda \in \rho(A)$ et :

$$R(\lambda;A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E}.$$

De plus :

$$\|R(\lambda;A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}.$$

Il est clair que :

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda;A)x = -\int_0^\infty te^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E}$$

et par récurrence on peut montrer que :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A)x = (-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbf{N}^*.$$

D'autre part, nous avons :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A)x = (-1)^n n! R(\lambda;A)^{n+1}x, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbf{N}^*.$$

Par suite, on a :

$$(-1)^n n! R(\lambda;A)^{n+1}x = (-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbf{N}^*,$$

d'où il résulte que :

$$R(\lambda; A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t) x \, dt \,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbf{N}^*.$$

De plus :

$$\begin{aligned} \|R(\lambda; A)^n x\| &\le \frac{M\|x\|}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t} \, dt \\ &= \frac{M\|x\|}{(n-1)!} \frac{n-1}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t} \, dt \\ &= \cdots = \frac{M\|x\|}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \end{aligned}$$

quels que soient $x \in \mathcal{E}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Par conséquent :

$$\|R(\lambda; A)^n\| \le \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*. \quad ☑$$

3. L'approximation généralisée de Yosida

Dans cette section nous avons utilisé les idées de PAZY [**Pa'83-1**, pag. 9] pour obtenir une petite extension de l'aproximation de Yosida .

Lemme 3.1. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes :*

i) *A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;*

ii) *il existe $\omega \ge 0$ et $M \ge 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \le \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, nous avons :

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A) x = x \,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E}.$$

De plus $\lambda A R(\lambda; A) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et :

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \to \infty} \lambda A R(\lambda; A) x = Ax \,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{D}(A).$$

Preuve. Soient $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Alors $R(\lambda; A)(\lambda I - A)x = x$. Si $\operatorname{Re}\lambda \to \infty$, nous avons :

$$\begin{aligned}\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &= \|R(\lambda; A)Ax\| \leq \|R(\lambda; A)\| \, \|Ax\| \\ &\leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \|Ax\| \longrightarrow 0\,,\end{aligned}$$

d'où il résulte que :

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{D}(A).$$

Soit $x \in \mathcal{E}$, puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ si $n \to \infty$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &\leq \|\lambda R(\lambda; A)x - \lambda R(\lambda; A)x_n\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda; A)\| \, \|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq \frac{|\lambda| M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \|x - x_n\| + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \|Ax_n\| + \|x_n - x\| \\ &= \frac{|\lambda| M + \operatorname{Re}\lambda - \omega}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \|x_n - x\| + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \|Ax_n\|\,.\end{aligned}$$

Mais $x_n \longrightarrow x$ si $n \to \infty$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\|x_{n_\varepsilon} - x\| < \varepsilon \, \frac{\operatorname{Re}\lambda - \omega}{|\lambda| M + \operatorname{Re}\lambda - \omega}\,.$$

Par conséquent :

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| < \varepsilon + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \|Ax_{n_\varepsilon}\|\,,$$

d'où :

$$\limsup_{\operatorname{Re}\lambda \to \infty} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| < \varepsilon\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E},$$

ou bien :

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E}.$$

De plus :

$$\lambda A R(\lambda; A) = \lambda \left[\lambda I - (\lambda I - A)\right] R(\lambda; A) = \lambda \left[\lambda R(\lambda; A) - I\right] = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I.$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}\|\lambda A R(\lambda; A)x\| &= \|\lambda \left[\lambda R(\lambda; A) - I\right] x\| \leq |\lambda| \, \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| \\ &\leq |\lambda| \left(\|\lambda R(\lambda; A)x\| + \|x\|\right) \leq |\lambda| \left(\frac{|\lambda| M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} + 1\right) \|x\|\,, \ (\forall)\, x \in \mathcal{E}\end{aligned}$$

et on voit que $\lambda A R(\lambda; A) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors nous avons :

$$\lambda R(\lambda; A)Ax = \left[\lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I\right] x = \lambda AR(\lambda; A)x\,,$$

d'où il résulte que :

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda; A)x = \lim_{\operatorname{Re}\to\infty} \lambda R(\lambda; A)Ax = Ax\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{D}(A). \quad ☑$$

Remarque 3.2. On peut dire que les opérateurs bornés $\lambda AR(\lambda; A)$ sont des approximations pour l'opérateur non borné A. C'est le motif pour lequel on introduit la définition suivante.

Définition 3.3. La famille $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$, où $A_\lambda = \lambda AR(\lambda; A)$, s'appelle *l'approximation généralisée de Yosida* de l'opérateur A.

Théorème 3.4. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$, A son générateur infinitésimal et $\{A_\mu\}_{\mu\in\Lambda_\omega}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Alors pour tout $\mu \in \Lambda_\omega$, il existe $\Omega > \omega$ tel que $\Lambda_\Omega \subset \rho(A_\mu)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\Omega$ on a :*

$$\|R(\lambda; A_\mu)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \Omega}\,.$$

De plus, pour $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ (qui dépend de M et ε) tel que :

$$\|R(\lambda; A_\mu)x\| \leq \frac{C}{|\lambda|}\left(\|x\| + \|Ax\|\right)\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{D}(A),$$

quels que soient $\lambda,\, \mu \in \mathbf{C}$, avec $\operatorname{Re}\lambda > \Omega + \varepsilon$ et $\operatorname{Re}\mu > \omega + \dfrac{|\mu|}{2}$.

Preuve. Soit $\mu \in \Lambda_\omega$ arbitrairement fixé. Nous avons vu que A_μ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\left\{e^{tA_\mu}\right\}_{t\geq 0}$. En ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\mu}\right\| &= \left\|e^{t\left(\mu^2 R(\mu;A) - \mu I\right)}\right\| = \left\|e^{-\mu t I} e^{\mu^2 t R(\mu;A)}\right\| \\ &\leq e^{-\operatorname{Re}\mu t}\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mu^{2k} R(\mu; A)^k}{k!}\right\| \leq e^{-\operatorname{Re}\mu t} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{t^k |\mu|^{2k} \left\|R(\mu; A)^k\right\|}{k!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{-\operatorname{Re}\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k|\mu|^{2k}M}{k!(\operatorname{Re}\mu-\omega)^k}=Me^{-\operatorname{Re}\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t|\mu|^2}{\operatorname{Re}\mu-\omega}\right)^k}{k!}\\
&=Me^{-\operatorname{Re}\mu t}e^{t|\mu|^2/(\operatorname{Re}\mu-\omega)}\\
&=Me^{t(\omega\operatorname{Re}\mu+\operatorname{Im}^2\mu)/(\operatorname{Re}\mu-\omega)}\,.
\end{aligned}$$

Si nous notons :

$$\Omega=\frac{\omega\operatorname{Re}\mu+Im^2\mu}{\operatorname{Re}\mu-\omega}\,,$$

alors il est clair que :

$$\Omega=\omega+\frac{\omega^2+Im^2\mu}{\operatorname{Re}\mu-\omega}>\omega$$

et que $\Lambda_\Omega=\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,\operatorname{Re}\lambda>\Omega\}\subset\rho(A_\mu)$. De plus, pour tout $\lambda\in\Lambda_\Omega$, nous avons :

$$\|R(\lambda;A_\mu)\|\leq\frac{M}{\operatorname{Re}\lambda-\Omega}\,.$$

Si nous considérons $\lambda\in\mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda>\Omega+\varepsilon$, où $\varepsilon>0$, alors on voit que :

$$\|R(\lambda;A_\mu)\|\leq\frac{M}{\varepsilon}\,.$$

D'autre part, pour $x\in\mathcal{D}(A)$ et $\mu\in\Lambda_\omega$ tel que $\operatorname{Re}\mu>\omega+\dfrac{|\mu|}{2}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|A_\mu x\|&=\|\mu R(\mu;A)Ax\|\leq|\mu|\|R(\mu;A)\|\|Ax\|\\
&\leq|\mu|\frac{M}{\operatorname{Re}\mu-\omega}\|Ax\|\leq 2M\|Ax\|\,.
\end{aligned}$$

De l'égalité :

$$(\lambda I-A_\mu)R(\lambda;A_\mu)=I\,,$$

il vient :

$$R(\lambda;A_\mu)=\frac{1}{\lambda}I+\frac{1}{\lambda}R(\lambda;A_\mu)A_\mu$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda;A_\mu)x\|&\leq\frac{1}{|\lambda|}\left(\|x\|+\|R(\lambda;A_\mu)\|\|A_\mu x\|\right)\\
&\leq\frac{1}{|\lambda|}\left(\|x\|+\frac{2M^2}{\varepsilon}\|Ax\|\right)\\
&\leq\frac{C}{|\lambda|}\left(\|x\|+\|Ax\|\right)\,,\quad(\forall)\,x\in\mathcal{D}(A)\,,
\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend que de M et de ε. ☑

Théorème 3.5. *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$, *$A$ son générateur infinitésimal,* $\{A_\mu\}_{\mu\in\Lambda_\omega}$ *l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A et $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que* $\operatorname{Re}\lambda > \omega+\varepsilon$, *arbitrairement fixé pour $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\mu \in \Lambda_\omega$ tel que* $\lambda \in \rho(A_\mu)$, $\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \in \rho(A)$ *et*

$$R(\lambda; A_\mu) = \frac{1}{\lambda+\mu} I + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) .$$

Preuve. Compte tenu du théorème 3.4, pour $\mu \in \Lambda_\omega$, il existe $\Omega > \omega$ tel que $\Lambda_\Omega \subset \rho(A_\mu)$. Nous avons :

$$\Omega = \frac{\omega \operatorname{Re}\mu + Im^2\mu}{\operatorname{Re}\mu - \omega} .$$

Donc l'inégalité $\operatorname{Re}\lambda > \Omega$ est équivalente avec :

$$\operatorname{Re}\lambda > \omega + \frac{\omega^2 + Im\,\mu}{\operatorname{Re}\mu-\omega} .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si $\mu \in \Lambda_\omega$ tel que $\dfrac{\omega^2 + Im\,\mu}{\operatorname{Re}\mu-\omega} < \varepsilon$, alors $\operatorname{Re}\lambda > \omega+\varepsilon$ implique $\operatorname{Re}\lambda > \Omega$. Par suite, $\lambda \in \rho(A_\mu)$. Donc il existe $R(\lambda; A_\mu)$ et avec le théorème 3.4 on voit que :

$$\|R(\lambda; A_\mu)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} .$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} &= \operatorname{Re}\left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}\right) = \operatorname{Re}\lambda - \operatorname{Re}\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu} \\ &> \omega+\varepsilon - \operatorname{Re}\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu} .\end{aligned}$$

Etant donné $k > 0$ tel que $|Im\,\lambda| \leq k$, il existe $\mu \in \Lambda_\omega$ tel que $\operatorname{Re}\dfrac{\lambda^2}{\lambda+\mu} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Il s'ensuit que $\operatorname{Re}\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} > \omega + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, $\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \in \rho(A)$ et donc $R\left(\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)$ existe bien.

Nous avons :

$$\frac{1}{\lambda+\mu}(\lambda I - A_\mu)(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)$$
$$= \frac{1}{\lambda+\mu}\left[\lambda I - \mu^2 R(\mu;A) + \mu I\right](\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)$$
$$= \left(\mu I - A - \frac{\mu^2}{\lambda+\mu}I\right)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)$$
$$= \left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}I - A\right)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right) = I\,.$$

Par un calcul analogue, on peut obtenir :

$$\frac{1}{\lambda+\mu}(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)(\lambda I - A_\mu) = I\,.$$

Il s'ensuit que :

$$R(\lambda;A_\mu) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)\,.$$

De plus, compte tenu de l'identité de la résolvante, il en résulte que :

$$R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right) - R(\mu;A) = \left(\mu - \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)R(\mu;A)\,.$$

En applicant la commutativité de la résolvante, on obtient :

$$R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right) = R(\mu;A) + \frac{\mu^2}{\lambda+\mu}R(\mu;A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)$$

d'où il s'ensuit que

$$\frac{1}{\lambda+\mu}(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right) = \frac{1}{\lambda+\mu}I + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu};A\right)\,. \quad ☑$$

Remarque 3.6. Evidemment, pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on voit que A_λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\left\{e^{tA_\lambda}\right\}_{t\geq 0}$. Nous utiliserons cette famille pour montrer l'existence d'un C_0-semi-groupe engendré par A.

4. Le théorème de Hille-Yosida

Dans ce paragraphe nous présentons un résultat très important concernant les semi-groupes de classe C_0. Il s'agit du célèbre théorème de Hille-Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui sont générateurs de C_0-semi-groupes. Il a été montré pour la première fois indépendamment par HILLE dans [**Hi'48**] et par YOSIDA dans [**Yo'48**] pour les C_0-semi-groupes de contractions. Quelques années plus tard, FELLER dans [**Fe'53**], MIYADERA dans [**Mi'52**] et PHILLIPS dans [**Ph'52**] donnent une preuve pour le cas général d'un C_0-semi-groupe. Nous avons obtenu une preuve dans le cas le plus général, en utilisant l'approximation généralisée de Yosida que nous avons introduit dans la définition 3.3.

Dans la suite, pour tout $r > 1$, nous notons par $\Lambda_{\omega,r}$ l'ensemble

$$\left\{ \lambda \in \mathbf{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}\lambda > \frac{r}{r-1}\omega \right\}.$$

Lemme 4.1. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes :*

i) *A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;*

ii) *il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ est l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A, alors pour tout $r > 1$ et tous $\alpha, \beta \in \Lambda_{\omega,r}$ nous avons :

$$\left\| e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x \right\| \leq M^2 t e^{\omega r t} \left\| A_\alpha x - A_\beta x \right\|, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E} \text{ et } t \geq 0.$$

Preuve. Soient $\alpha, \beta \in \Lambda_\omega$, $v \in [0, 1]$ et $x \in \mathcal{E}$. Alors :

$$\frac{d}{dv}\left(e^{vtA_\alpha} e^{(1-v)tA_\beta} x \right) = tA_\alpha e^{vtA_\alpha} e^{(1-v)tA_\beta} x - te^{vtA_\alpha} A_\beta e^{(1-v)tA_\beta} x.$$

On peut facilement vérifier que A_α, A_β, e^{vtA_α} et $e^{(1-v)tA_\beta}$ commutent quels que soient $\alpha, \beta \in \Lambda_\omega$ et $t \geq 0$. Nous obtenons :

$$\int_0^1 \frac{d}{dv}\left(e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x\right)dv =$$

$$\int_0^1 \left(te^{vtA_\alpha}A_\alpha e^{(1-v)tA_\beta}x - te^{vtA_\alpha}A_\beta e^{(1-v)tA_\beta}x\right)dv\,,$$

d'où :

$$e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x\Big|_0^1 = \int_0^1 \left(te^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}A_\alpha x - te^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}A_\beta x\right)dv\,,$$

ou bien :

$$e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x = t\int_0^1 e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}\left(A_\alpha x - A_\beta x\right)dv$$

quels que soient $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{E}$. Nous en déduisons que :

$$\left\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\right\| \leq t\int_0^1 \left\|e^{vtA_\alpha}\right\|\left\|e^{(1-v)tA_\beta}\right\|\left\|A_\alpha x - A_\beta x\right\|dv\,.$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\alpha}\right\| &= \left\|e^{t\left(\alpha^2R(\alpha;A)-\alpha I\right)}\right\| = \left\|e^{-\alpha tI}e^{\alpha^2 tR(\alpha;A)}\right\| \\
&\leq e^{-\operatorname{Re}\alpha t}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\alpha^{2k}R(\alpha;A)^k}{k!}\right\| \leq e^{-\operatorname{Re}\alpha t}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{t^k|\alpha|^{2k}\left\|R(\alpha;A)^k\right\|}{k!} \\
&\leq e^{-\operatorname{Re}\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k|\alpha|^{2k}M}{k!(\operatorname{Re}\alpha-\omega)^k} = Me^{-\operatorname{Re}\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t|\alpha|^2}{\operatorname{Re}\alpha-\omega}\right)^k}{k!} \\
&= Me^{-\operatorname{Re}\alpha t}e^{t|\alpha|^2/(\operatorname{Re}\alpha-\omega)} = Me^{t(\omega\operatorname{Re}\alpha+Im^2\alpha)/(\operatorname{Re}\alpha-\omega)}\,,
\end{aligned}$$

quel que soient $\alpha \in \Lambda_\omega$ et $t \geq 0$. Soit $r > 1$ tel que :

$$\frac{\omega\operatorname{Re}\alpha + Im^2\alpha}{Re\,\alpha - \omega} < \omega r\,.$$

Alors, nous avons :

$$\omega \operatorname{Re} \alpha + Im^2 \alpha < \omega r \operatorname{Re} \alpha - \omega^2 r\,,$$

d'où :

$$\omega \operatorname{Re} \alpha < \omega r \operatorname{Re} \alpha - \omega^2 r\,,$$

ou bien :

$$\omega^2 r < \omega (r-1) \operatorname{Re} \alpha\,.$$

Il en découle :

$$\operatorname{Re} \alpha > \frac{r}{r-1} \omega\,.$$

Par conséquent, pour tout $r > 1$ et tout $\alpha \in \Lambda_{\omega,r}$, on obtient :

$$\left\| e^{tA_\alpha} \right\| \leq M e^{r\omega t}\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\alpha} x - e^{tA_\beta} x \right\| \quad &\leq \quad t \int_0^1 M e^{\omega r v t} M e^{\omega r (1-v) t} \left\| A_\alpha x - A_\beta x \right\| \, dv = \\ &= \quad M^2 t e^{\omega r t} \left\| A_\alpha x - A_\beta x \right\| \end{aligned}$$

quels que soient $x \in \mathcal{E}$ et $t \geq 0$. ☑

Maintenant nous présentons une variante du célèbre théorème de Hille–Yosida pour les semi-groupes de classe $\mathcal{SG}(M,\omega)$.

Théorème 4.2. [Hille–Yosida] *Un opérateur linéaire :*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *si et seulement si :*

i) *A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;*

ii) *il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :*

$$\left\| R(\lambda; A)^n \right\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}\,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Preuve. $\Longrightarrow$ On obtient cette implication en tenant compte du théorème 1.10 et du théorème 2.6.

$\Longleftarrow$ Supposons que l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ possède les propriétés (i) et (ii). Soit $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\omega}$, l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Compte tenu du lemme 3.1, il résulte que $A_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et :

$$\lim_{\operatorname{Re} \lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{D}(A).$$

Pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, soit $\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0} = \left\{e^{tA_\lambda}\right\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe uniformément continu engendré par A_λ. Soit $r > 1$. Avec le lemme 4.1, on a :

$$\|T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x\| \leq M^2 te^{\omega rt} \|A_\alpha x - A_\beta x\|, \ (\forall)\alpha, \beta \in \Lambda_{\omega,r}, x \in \mathcal{D}(A) \text{ et } t \geq 0.$$

Soient $[\mathcal{D}(A)]$ l'espace de Banach $\mathcal{D}(A)$ avec la norme $\|\,.\,\|_{\mathcal{D}(A)}$, et $\mathcal{B}([\mathcal{D}(A)],\mathcal{E})$ l'espace des opérateurs linéaires bornés définis sur $[\mathcal{D}(A)]$ avec valeur dans $\mathcal{E}$, doté de la topologie forte. Notons par $\mathcal{C}\left([0,\infty);\mathcal{B}([\mathcal{D}(A)],\mathcal{E})\right)$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,\infty)$ à valeurs dans $\mathcal{B}([\mathcal{D}(A)],\mathcal{E})$ doté de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. Si $[a,b] \subset [0,\infty)$, alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ nous avons :

$$\sup_{t\in[a,b]} \|T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x\| \leq M^2 be^{\omega rb} \left(\|A_\alpha x - Ax\| + \|A_\beta x - Ax\|\right) \longrightarrow 0$$

si $r \searrow 1$, donc si $\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\beta \to \infty$, d'où il résulte que $\left(\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0}\right)_{\lambda\in\Lambda_{\omega,r}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}\left([0,\infty);\mathcal{B}([\mathcal{D}(A)],\mathcal{E})\right)$. Donc, il existe un unique $T_0 \in \mathcal{C}\left([0,\infty);\mathcal{B}(\mathcal{D}(A),\mathcal{E})\right)$ tel que $T_\lambda(t)x \longrightarrow T_0(t)x$, si $\operatorname{Re}\lambda \to \infty$, quel que soit $x \in \mathcal{D}(A)$, pour la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. Puisque :

$$\|T_\lambda(t)\| \leq Me^{\omega rt}, \quad (\forall)\, t \geq 0,$$

on obtient :

$$\|T_0(t)x\| \leq Me^{\omega t}\|x\|, \quad (\forall)\, t \geq 0 \text{ et } x \in \mathcal{D}(A).$$

Considérons l'application linéaire :

$$\Theta_0 : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{C}\left([a,b];\mathcal{E}\right)$$

$$\Theta_0 x = T_0(\,.\,)x$$

quel que soit $[a,b] \subset [0,\infty)$. Comme nous avons :

$$\|\Theta_0 x\|_{\mathcal{C}([a,b];\mathcal{E})} = \sup_{t\in[a,b]} \|T_0(t)x\| \leq Me^{\omega b}\|x\| \leq Me^{\omega b}\|x\|_{\mathcal{D}(A)}, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{D}(A),$$

on voit que Θ_0 est une application continue et puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$, elle se prolonge de façon unique en une application linéaire continue :

$$\Theta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}\left([a,b];\mathcal{E}\right)$$

telle que :

$$\Theta|_{\mathcal{D}(A)} = \Theta_0$$

et :

$$\|\Theta x\|_{\mathcal{C}([a,b];\mathcal{E})} \leq Me^{\omega b}\|x\|$$

quel que soit $x \in \mathcal{E}$. Par conséquent, il existe un seul opérateur $T \in \mathcal{C}([a,b];\mathcal{B}(\mathcal{E}))$ tel que :

$$\Theta x = T(\,.\,)x\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E}.$$

On peut répéter ce procédé pour tous les intervalles compacts de $[0,\infty)$ et on voit qu'il existe un seul opérateur, noté aussi par $T \in \mathcal{C}([0,\infty);\mathcal{B}(\mathcal{E}))$, tel que pour tout $x \in \mathcal{E}$ on ait :

$$T_\lambda(t)x \longrightarrow T(t)x \quad \text{si} \quad \operatorname{Re}\lambda \to \infty,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. De plus :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Il est évident que :

$$T(0)x = \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty} T_\lambda(0)x = x\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E}$$

et :

$$\lim_{t\searrow 0} T(t)x = \lim_{t\searrow 0}\left(\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty} T_\lambda(t)x\right) = \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty}\left(\lim_{t\searrow 0} T_\lambda(t)x\right) = x\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E}.$$

Soient $t,\, s \in [0,\infty)$ et $x \in \mathcal{E}$. Alors, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|T(t+s)x - T(t)T(s)x\| &\leq \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| \\
&\quad + \|T_\lambda(t+s)x - T_\lambda(t)T(s)x\| + \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \\
&\leq \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| + \|T_\lambda(t)\|\,\|T_\lambda(s)x - T(s)x\| \\
&\qquad + \|T_\lambda(t)\,(T(s)x) - T(t)\,(T(s)x)\|\,.
\end{aligned}$$

Puisque $T_\lambda(t) \longrightarrow T(t)$, si $\operatorname{Re}\lambda \to \infty$, pour la topologie forte de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, il s'ensuit que $T(t+s)x = T(t)T(s)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$. Par conséquent $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$.

Montrons que A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a :

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(s)A_\lambda x - T(s)Ax\| &\leq \|T_\lambda(s)\|\,\|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \\
&\leq Me^{\omega r t}\,\|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

si $\operatorname{Re}\lambda \to \infty$, uniformément par rapport à $s \in [0,t]$, d'où :

$$T(t)x - x = \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty}[T_\lambda(t)x - x] = \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty}\int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda x\, ds = \int_0^t T(t)Ax\, ds$$

quels que soient $x \in \mathcal{D}(A)$ et $t \geq 0$.

Soit B le générateur infinitésimal du C_0-semigroupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax\, ds = Ax$$

et nous voyons que $x \in \mathcal{D}(B)$. Par conséquent $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $B|_{\mathcal{D}(A)} = A$.

D'autre part, nous avons l'inégalité :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Si $\lambda \in \Lambda_\omega$, alors $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Soit $x \in \mathcal{D}(B)$, on a donc $(\lambda I - B)\, x \in \mathcal{E}$ et comme l'opérateur $\lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{E}$ est bijectif, il existe $x' \in \mathcal{D}(A)$ tel que $(\lambda I - A)\, x' = (\lambda I - B)\, x$. Puisque $B|_{\mathcal{D}(A)} = A$, il vient que $(\lambda I - B)\, x' = (\lambda I - B)\, x$ et comme $\lambda \in \rho(B)$, il en résulte que $x' = x$. Par suite $x \in \mathcal{D}(A)$ et donc $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$.

Finalement on voit que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ et $A = B$. Nous avons montré donc que A est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et compte tenu du théorème de l'unicité de l'engendrement, il résulte que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'unique C_0-semi-groupe engendré par A. ☑

Corollaire 4.3. *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ *, A son générateur infinitésimal et* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\omega}$ *l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Alors :*

$$T(t)x = \lim_{\mathrm{Re}\,\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty)$.

Preuve. Elle résulte du théorème de Hille–Yosida. ☑

Il existe des semi-groupes qui ne sont pas C_0-semi-groupes, comme nous pouvons le voir dans l'exemple suivant [**Vr'01**, Problema 2.3].

Exemple 4.4. Soit :

$$\mathcal{C}_{cb}\,(\mathbf{R}) = \{\, f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ est continue et bornée}\}\ .$$

Avec la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}_{cb}(\mathbf{R})} = \sup_{\alpha \in \mathbf{R}} |f(\alpha)|$$

l'espace $\mathcal{C}_{cb}(\mathbf{R})$ devient un espace de Banach. Soit $t \geq 0$ et

$$S(t) : \mathcal{C}_{cb}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_{cb}(\mathbf{R})$$

$$(S(t)f)\,(\alpha) = f(t + \alpha)\,, \quad (\forall) f \in \mathcal{C}_{cb}(\mathbf{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Compte tenu de l'exemple 1.3, on voit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{C}_{cb}(\mathbf{R})$. Mais l'égalité

$$\lim_{t\searrow 0} S(t)f = f\,, \quad (\forall) f \in \mathcal{C}_{cb}(\mathbf{R})$$

est vraie si et seulemant si f est une fonction uniformément continue sur $\mathbf{R}$. Comme dans l'espace $\mathcal{C}_{cb}(\mathbf{R})$ on peut trouver des fonctions qui ne sont pas uniformément continue, par exemple $f(\alpha) = \sin \alpha^2$, il s'ensuit que le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ n'est pas de classe C_0.

De plus, on peut voir que le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ a pour générateur infinitésimal l'opérateur

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{C}_{cb}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_{cb}(\mathbf{R})$$
$$Af = f'$$

où

$\mathcal{D}(A) = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,|\, \text{est uniformément derivable à droite sur } \mathbf{R} \text{ et } f' \in \mathcal{C}_{ub}(\mathbf{R})\}$.

Comme

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{C}_{ub}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{C}_{cb}(\mathbf{R})\,,$$

il s'ensuit que A n'est pas un opérateur dens définit.

Dans le cas d'un générateur infinitésimal A qui n'est plus un opérateur dens définit, on a le théorème suivant.

Théorème 4.5. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longleftarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire fermé pour lequel il existe $M \geq 0$ et $\omega > 0$ tel que $\Lambda_\omega \in \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\,\lambda - \omega)^n}\,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Alors la partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe sur $\overline{\mathcal{D}(A)}$.

Preuve. La partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$ est l'opérateur linéaire $A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$ définit sur l'ensemble

$$\mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right) = \left\{x \in \mathcal{D}(A) \,\middle|\, Ax \in \overline{\mathcal{D}(A)}\right\}$$

par

$$A_{\overline{\mathcal{D}(A)}} = A\Big/_{\mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)}\,.$$

Il est clair que pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et tout $x \in \mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)$ on a

$$\lambda x - A_{\overline{\mathcal{D}(A)}} x = \lambda x - Ax\,.$$

Par suite $\Lambda_\omega \in \rho\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)$ et pour la résolvante de la partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$

$$R\left(\,.\,; A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right) : \rho\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right) \longrightarrow \mathcal{B}\left(\mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)\right)$$

on obtient

$$R\left(\lambda; A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right) = R(\lambda; A)\Big/_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\,.$$

Alors, pour tout $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ et tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ il résulte que

$$\left\| R\left(\lambda; A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)^n x \right\| = \|R(\lambda; A)^n x\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}\|x\|\,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a :

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| = \|R(\lambda; A)Ax\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)}\|Ax\|$$

d'où il s'ensuit que

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{D}(A).$$

De même, on peut remarquer que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ il résulte $\lambda R(\lambda; A)x \in \mathcal{D}(A)$ et

$$\begin{aligned} A(\lambda R(\lambda; A)x) &= \lambda A R(\lambda; A)x = \lambda[\lambda I - (\lambda I - A)]R(\lambda; A)x \\ &= \lambda[\lambda R(\lambda; A)x - x] = \lambda[\lambda R(\lambda; A)x - R(\lambda; A)(\lambda I - A)x] \\ &= \lambda R(\lambda; A)[\lambda x - \lambda x + Ax] = \lambda R(\lambda; A)Ax\,, \end{aligned}$$

quel que soit $\lambda \in \Lambda_\omega$. Par conséquent, $\lambda R(\lambda; A)x \in \mathcal{D}(A)$ et $A(\lambda R(\lambda; A)x) \in \mathcal{D}(A) \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $\lambda \in \Lambda_\omega$. Il s'ensuit donc que $\lambda R(\lambda; A)x \in \mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $\lambda \in \Lambda_\omega$.

Soit maintenant $x \in \mathcal{D}(A)$ et $t_n \in \left(0, \frac{1}{\omega}\right)$, $n \in \mathbf{N}$, tel que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Alors

$$x_n = \frac{1}{t_n} R\left(\frac{1}{t_n}; A\right) x \in \mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)\,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} R\left(\frac{1}{t_n}; A\right) x = x\,.$$

Il en résulte que $\mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)$ est dens dans $\mathcal{D}(A)$, donc dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$.

Avec le théorème de Hille-Yosida il s'ensuit que $A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{\mathcal{D}(A)}$.

Soit $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Alors la famille $\left\{A_{\lambda,\overline{\mathcal{D}(A)}}\right\}_{\lambda\in\Lambda_\omega} \subset \mathcal{B}\left(\mathcal{D}\left(A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}\right)\right)$ donnée par

$$A_{\lambda,\overline{\mathcal{D}(A)}} = A_\lambda \Big/_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$$

est l'approximation de Yosida de l'opérateur $A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$. Compte tenu du corollaire 4.3 il en résulte que pour le C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ engendré par la partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$ on a :

$$T(t)x = \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty} e^{tA_{\lambda,\overline{\mathcal{D}(A)}}}x\,, \quad (\forall)\, x \in \overline{\mathcal{D}(A)},$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. ☑

5. Semi-groupes intégrés. Propriétés élémentaires

Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Soit

$$S(t) = \int_0^t T(s)\, ds\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Alors la transformée de Laplace de S satisfait les égalités suivantes :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t T(s)\, ds dt = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt = -\frac{1}{\lambda} R(\lambda; A)\,.$$

Le théorème 2.2 conduit à la question suivante : on peut trouver une équation fonctionelle vériffiée par S tel que l'application

$$\Lambda_\omega \ni \lambda \longmapsto \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt$$

est une pseudo-résolvante ? On a le théorème suivant :

Théorème 5.1. [[**Ar'87**, **Hi'91-1**, **MPV'97**]] *Soit* $S : [0\infty) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *une application fortement continue pour laquelle il existe* $M \geq 0$ *et* $\omega \in \mathbf{R}$ *tel que*

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) *l'application* $R : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt$$

est une pseudo-résolvante;

ii) *pour tous* $t, s \geq 0$ *on a*

$$S(t)S(s) = \int_t^{t+s} S(r)\, dr - \int_0^s S(r)\, dr\,.$$

Preuve. Soit $\lambda, \mu \in \Lambda_\omega$ tel que $\lambda \neq \mu$. Compte tenu de l'identité de la résolvante, on a

$$\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu - \lambda}[R(\lambda) - R(\mu)] = \frac{R(\lambda)}{\lambda}\frac{R(\mu)}{\mu}\,.$$

Pour la partie de droite de l'égalité on obtient

$$\frac{R(\lambda)}{\lambda}\frac{R(\mu)}{\mu} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} S(t)S(s)\, dsdt\,.$$

Pour obtenir l'égalité de l'énoncé il est suffisant de montrer que

$$\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu - \lambda}[R(\lambda) - R(\mu)] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} \left[\int_t^{t+s} S(r)\, dr - \int_0^s S(r)\, dr \right] dsdt.$$

On voit que

$$\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu - \lambda}[R(\lambda) - R(\mu)] = \frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu - \lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda} - \frac{R(\mu)}{\mu}\right] + \frac{1}{\mu - \lambda}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{R(\mu)}{\mu}.$$

Nous avons succesivement :

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda}-\frac{R(\mu)}{\mu}\right]=\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda}-\frac{R(\mu)}{\mu}\right]$$

$$=\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\frac{R(\lambda)}{\lambda}d\tau-\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\frac{R(\mu)}{\mu}d\tau$$

$$=\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda r}S(r)drd\tau-\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\int_0^\infty e^{-\mu r}S(r)drd\tau$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}S(r)drd\tau-\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\mu r}S(r)drd\tau$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}S(r)drd\tau-\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)}e^{-\lambda r}S(r)drd\tau$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}S(r)drd\tau-\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)}d\tau e^{-\lambda r}S(r)dr$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau e^{-\lambda r}S(r)dr-\int_0^\infty\int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\nu}d\nu e^{-\lambda r}S(r)dr$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau+\int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau-\int_r^\infty e^{-(\mu-\lambda)\nu}d\nu\right]e^{-\lambda r}S(r)dr$$

$$=\int_0^\infty\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)s}dse^{-\lambda r}S(r)dr=\int_0^\infty\int_0^r e^{-(\mu-\lambda)s}e^{-\lambda r}S(r)dsdr$$

$$=\int_0^\infty\int_s^\infty e^{-(\mu-\lambda)s}e^{-\lambda r}S(r)drds=\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)s}\int_s^\infty e^{-\lambda r}S(r)drds$$

$$=\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_s^\infty e^{-\lambda(r-s)}S(r)drds=\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t+s)dtds$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu s}S(t+s)dsdt\,.$$

D'autre part, compte tenu de l'égalité

$$\frac{1}{\mu} = \int\limits_0^\infty e^{-\mu v} dv$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda} - \frac{R(\mu)}{\mu}\right] &= \frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\int\limits_0^\infty e^{-\mu\tau} S(t+\tau)d\tau dt \\
&= \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\int\limits_0^\infty e^{-\mu\tau} S(t+\tau)\int\limits_0^\infty e^{-\mu v} dv d\tau dt \\
&= \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\int\limits_0^\infty S(t+\tau)\int\limits_0^\infty e^{-\mu(\tau+v)} dv d\tau dt \\
&= \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\int\limits_0^\infty S(t+\tau)\int\limits_\tau^\infty e^{-\mu s} ds d\tau dt \\
&= \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\int\limits_0^\infty e^{-\mu s}\int\limits_0^s S(t+\tau) d\tau ds dt \\
&= \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\int\limits_0^\infty e^{-\mu s}\int\limits_t^{t+s} S(r) dr ds dt \,.
\end{aligned}$$

De plus

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{R(\mu)}{\mu} = -\frac{1}{\mu\lambda}\frac{R(\mu)}{\mu} = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\mu r}}{\mu} S(r)dr - \frac{1}{\mu\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-\mu r} S(r) dr$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-\mu r} S(r)\int\limits_0^\infty e^{-\mu v} dv dr = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty S(r)\int\limits_0^\infty e^{-\mu(v+r)} dv dr$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty S(r)\int_r^\infty e^{-\mu s}dsdr = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s S(r)dsdr$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s S(r)dsdrdt\,.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}\frac{1}{\mu-\lambda}[R(\lambda)-R(\mu)] = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu s}\left[\int_t^{t+s} S(r)\,dr - \int_0^s S(r)\,dr\right]dsdt.$$

On en déduit facilement l'équivalence des affirmations de l'énoncé. ☑

Remarque 5.2. Pour tous t, $s \geq 0$ on a

$$S(t)S(s) = \int_t^{t+s} S(r)\,dr - \int_0^s S(r)\,dr$$
$$= \int_0^{t+s} S(r)\,dr - \int_0^t S(r)\,dr - \int_0^s S(r)\,dr = \int_s^{t+s} S(r)\,dr - \int_0^t S(r)\,dr$$
$$= \int_0^t S(\tau+s)\,d\tau - \int_0^t S(\tau)\,d\tau = \int_0^t [S(\tau+s)-S(\tau)]\,d\tau\,.$$

De plus

$$S(t)S(s) = S(s)S(t)\,, \quad (\forall)\, t, s \geq 0$$

et

$$S(t)S(0) = 0\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Définition 5.3. On appelle semi-groupe intégré sur $\mathcal{E}$ une famille $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) S(0)=0 ;

ii) l'application $[0,\infty) \ni t \longmapsto S(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est fortement continue ;

iii) pour tous t, $s \geq 0$ on a

$$S(t)S(s) = \int_0^t [S(\tau+s)-S(\tau)]\,d\tau\,.$$

Remarque 5.4. Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ un semi-groupe intégré. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous désignerons par $\mathcal{C}^n$ l'ensemble

$$\{x \in \mathcal{E} \mid S(.)x \in \mathcal{C}^n([0,\infty);\mathcal{E})\}$$

avec la convention $\mathcal{C}^0 = \mathcal{E}$.

Alors la propriété (iii) de la définition 5.3 est équivalente avec

$$S(t)x \in \mathcal{C}^1$$

et

$$S'(r)S(t)x = S(r+t)x - S(r)x\,, \quad (\forall) r, t \geq 0$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$. De plus, nous avons

$$S(t) : \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{C}^{n+1}\,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N} \text{ et } t \geq 0$$

et

$$S'(t) : \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{C}^n\,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^* \text{ et } t \geq 0.$$

Proposition 5.5. *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ un semi-groupe intégré. Alors :*

i) *pour tout $x \in \mathcal{C}^1$ on a*

$$S(r)S'(t)x = S(r+t)x - S(t)x\,, \quad (\forall) r, t \geq 0;$$

ii) *pour tout $x \in \mathcal{C}^1$ on a*

$$S'(t)x = S''(0)S(t)x + S'(0)x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0;$$

iii) *pour tout $x \in \mathcal{C}^2$ on a*

$$S''(0)S(t)x = S(t)S''(0)x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Preuve. i) Soit $x \in \mathcal{C}^1$ et $r, t \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} S(r)S'(t)x &= \frac{d}{dt}[S(r)S(t)]x = \frac{d}{dt}[S(t)S(r)]x = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t [S(\tau+r) - S(\tau)]d\tau\right] x \\ &= S(t+r)x - S(t)x\,. \end{aligned}$$

ii) Soit $x \in \mathcal{C}^1$ et $r,\, t \geq 0$. Alors

$$S''(r)S(t)x = \frac{d}{dt}\,[S'(r)S(t)x] = \frac{d}{dt}[S(r+t)x - S(r)x] = S'(r+t)x - S'(r)x\,.$$

Pour $r = 0$, il en résulte :

$$S''(0)S(t)x = S'(t)x - S'(0)x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0,$$

d'où on obtient (ii).

iii) Soit $x \in \mathcal{C}^2$ et $r, t \geq 0$. Alors

$$S(r)S''(t)x = \frac{d}{dt}\left[S(r)S'(t)\right]x = \frac{d}{dt}[S(r+t)x - S(t)x] \\ = S'(r+t)x - S'(t)x\,.$$

Pour $t = 0$, il vient

$$S(r)S''(0)x = S'(r)x - S'(0)x\,, \quad (\forall) r \geq 0.$$

Compte tenu de l'égalité (ii), il s'ensuit (iii). ☑

Exemple 5.6. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$. Alors la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$

$$S(t) = \int_0^t T(s)ds$$

est un semi-groupe intégré sur $\mathcal{E}$.

Exemple 5.7. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$. Alors la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E}^*)$

$$S(t) = \int_0^t T^*(s)ds$$

est un semi-groupe intégré sur $\mathcal{E}^*$. En général, ce semi-groupe n'est pas de classe C_0.

Définition 5.8. On appelle *espace dégénéré du semi-groupe intégré* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ l'ensemble

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{E} \mid S(t)x = 0\,, \quad (\forall)\, t \geq 0\}\ .$$

Remarque 5.9. $\mathcal{N}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^1$.

Proposition 5.10. *Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *et*

$$\mathcal{N}_1 = \left\{ x \in \mathcal{C}^1 \;\middle|\; S'(0)x = 0 \right\}\ .$$

Alors $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$.

Preuve. Fixe $x \in \mathcal{N}$. Alors $S(t)x = 0$, pour tout $T \geq 0$. Par conséquent $S'(t)x = 0$, pour tout $t \geq 0$, d'où il résulte $S'(0)x = 0$. Donc $x \in \mathcal{N}_1$ et, par suite, $\mathcal{N} \in \mathcal{N}_1$. Soit $x \in \mathcal{N}_1$. Alors $S'(0)x = 0$. De l'égalité

$$S(r)S'(t)x = S(t+r)x - S(t)x\,, \quad (\forall)\, t, r \geq 0$$

on obtient

$$S(r)S'(0)x = S(r)x\,, \quad (\forall)\, r \geq 0.$$

Il en résulte

$$S(r)x = 0\,, \quad (\forall)\, r \geq 0$$

et on voit que $x \in \mathcal{N}$. Par suite $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$. Finalement, on voit que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$. ☑

Définition 5.11. On dit que le semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est *non-dégénéré* si $\mathcal{N} = \{0\}$. En cas contraire, on dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est un semi-groupe intégré dégénéré.

Remarque 5.12. Le semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est non-dégénéré si pour tout $t \geq 0$, $S(t)x = 0$ implique $x = 0$.

Proposition 5.13. *Un semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est non-dégénéré si et seulement si on a $S'(0)x = x$ pout tout $x \in \mathcal{C}^1$.*

Preuve. $\Longrightarrow$ Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ un semi-groupe intégré non-dégénéré. Alors $S(t)x = 0$ pour tout $t \geq 0$, implique $x = 0$. Soit $x \in \mathcal{C}^1$. Avec la proposition 5.5, i), pour tout $r, t \geq 0$ on voit que

$$S(r)S'(t)x = S(r+t)x - S(t)x$$

d'où, pour $t = 0$, il s'ensuit

$$S(r)S'(0)x = S(r)x\,, \quad (\forall) r \geq 0$$

ou bien

$$S(r)[S'(0)x - x] = 0\,, \quad (\forall) r \geq 0.$$

Comme $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré, il en résulte

$$S'(0)x - x = 0$$

donc

$$S'(0)x = x.$$

$\Longleftarrow$ Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ un semi-groupe intégré tel que $S(0)x = x$, pour tout $x \in \mathcal{C}^1$. Soit $x \in \mathcal{N}$. Alors $S'(0)x = 0$ et, par conséquent, $x = S'(0)x = 0$, d'où il s'ensuit que $\mathcal{N} = \{0\}$. Il en résulte que $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré. ☑

Théorème 5.14. *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ un semi-groupe intégré non-dégénéré. Alors $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $\mathcal{C}^1$.*

Preuve. Pour tout $x \in \mathcal{C}^1$, l'application

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto S'(t)x \in \mathcal{C}^1$$

est continue. Compte tenu de la proposition 5.13 on a $S'(0) = I$ et avec la proposition 5.5, i), on voit que

$$S'(r)S'(t)x = S'(r+t)\,, \quad (\forall)r,t \geq 0\,.$$

Il en résulte que $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur $\mathcal{C}^1$. ☑

6. Le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré

Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ un semi-groupe intégré non-dégénéré. Compte tenu des résultats de la section 2, nous avons la tentation de considerer pour générateur du semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ un opérateur linéaire

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

définit par

$$A = \lambda I - R^{-1}(\lambda)$$

où

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt\,.$$

Malheureusement, l'intégrale de la partie de droite de l'égalité n'existe pas en général, comme on peut voir dans l'exemple suivant [**KH'89**, Example 1.2].

Exemple 6.1. On considère $\mathcal{E} = l^2$ et la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires sur $\mathcal{E}$ définie par

$$S(t)(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*} = \left(\int_0^t e^{a_n s} ds x_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$$

où

$$a_n = n + 2^{n^2}\pi i\,, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Nous alons montrer que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré. Pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\|S(t)(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}\|_{l^2}^2 &= \left\| \left(\int\limits_0^t e^{a_n s} ds x_n \right)_{n\in\mathbf{N}^*} \right\|_{l^2}^2 = \left\| \left(\frac{e^{a_n t}-1}{a_n} x_n \right)_{n\in\mathbf{N}^*} \right\|_{l^2}^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{a_n t}-1}{a_n} x_n \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{\ n+2^{n^2}\pi i \ \ t} - 1}{n+2^{n^2}\pi i} \right|^2 |x_n|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left| e^{nt+2^{n^2}\pi i t} \right| + 1}{2^{n^2}\pi} \right)^2 |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{nt}+1}{2^{n^2}} \right)^2 |x_n|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2e^{nt}}{e^{n^2 \ln 2}} \right)^2 |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2e^{nt-n^2\ln 2} \right)^2 |x_n|^2 .
\end{aligned}$$

Comme l'application $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = -\ln 2x^2 + tx$ à un maximum : $\varphi_{max} = \dfrac{t^2}{4\ln 2}$, il en résulte que

$$\|S(t)(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}\|_{l^2}^2 \leq \left(2e^{\frac{t^2}{4\ln 2}}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \left(2e^{\frac{t^2}{4\ln 2}}\right)^2 \left\|(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}\right\|_{l^2}^2$$

d'où

$$\|S(t)\| \leq 2e^{\frac{t^2}{4\ln 2}}, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Par conséquent $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Evidemment, l'application $t \longmapsto S(t)\,(\delta_{in})$ est continue. Comme l'ensemble $\{\,(\delta_{in})|\ n \in \mathbf{N}\}$ est totale dans l^2 et comme $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément borné par rapport à t sur les intervales compacts de $[0,\infty)$, il en résulte que l'application $[0,\infty) \ni t \longrightarrow S(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est fortement continue. De plus $S(0)=0$ et pour tous t, $s\geq 0$ on a :

$$
\begin{aligned}
S(t)S(s)\left(x_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*} &= S(t)\left(\int_0^s e^{a_n\sigma}d\sigma x_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*} = S(t)\left(\frac{e^{a_n s-1}}{a_n}x_n\right)\\
&= \left(\int_0^t e^{a_n\tau}\,d\tau\frac{e^{a_n s-1}}{a_n}x_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}\\
&= \left(\int_0^t \frac{e^{a_n(\tau+s)}-e^{a_n\tau}}{a_n}\,d\tau x_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}\\
&= \left(\int_0^t \left[\frac{e^{a_n(\tau+s)}-1}{a_n}-\frac{e^{a_n\tau}-1}{a_n}\right]\,d\tau x_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}\\
&= \left(\int_0^t \left[\int_0^{\tau+s} e^{a_n u}\,du-\int_0^{\tau} e^{a_n u}\,du\right]d\tau x_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}\\
&= \int_0^t \left[\left(\int_0^{\tau+s} e^{a_n u}\,du x_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}-\left(\int_0^{\tau} e^{a_n u}\,du x_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}\right]d\tau\\
&= \int_0^t \left[s(s+\tau)-S(\tau)\right]\left(x_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}d\tau\,.
\end{aligned}
$$

Par conséquent $\{S(t)\}_{t\geq 0}\subset\mathcal{B}(\mathcal{E})$ est un semi-groupe intégré. Soit maintenant $\lambda\in\mathbf{C}$. Pour tout $x=\frac{1}{\overline{a_n}}$ et $y=\frac{1}{a_n-\lambda}$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
\left\langle\int_0^\alpha e^{-\lambda t}S(t)\,dt\,\frac{1}{\overline{a_n}}\,,\,\frac{1}{a_n-\lambda}\right\rangle &= \left\langle\int_0^\alpha e^{-\lambda t}\int_0^t e^{a_n s}ds dt\,\frac{1}{\overline{a_n(a_n-\lambda)}}\,,1\right\rangle\\
&= \left\langle\int_0^\alpha e^{-\lambda t}\frac{e^{a_n t}-1}{a_n}dt\,\frac{1}{\overline{a_n(a_n-\lambda)}}\,,1\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \int_0^\alpha \left[e^{(a_n-\lambda)t} - e^{-\lambda t} \right] dt \, \frac{1}{|a_n|^2 \, \overline{(a_n-\lambda)}} \, , 1 \right\rangle \\
&= \left\langle \int_0^\alpha e^{(a_n-\lambda)t} dt \, \frac{1}{|a_n|^2 \, \overline{(a_n-\lambda)}} \, , 1 \right\rangle - \left\langle \int_0^\alpha e^{(a_n-\lambda)t} dt \, \frac{1}{|a_n| \, \overline{(a_n-\lambda)}} \, , 1 \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{e^{(a_n-\lambda)\alpha}-1}{a_n-\lambda} \frac{1}{|a_n|^2 \, \overline{(a_n-\lambda)}} \, , 1 \right\rangle - \left\langle \int_0^\alpha e^{-\lambda t} dt \, \frac{1}{|a_n|^2 \, \overline{(a_n-\lambda)}} \, , 1 \right\rangle \\
&= \left\langle e^{(a_n-\lambda)\alpha} \frac{1}{|a_n|^2 \, |a_n-\lambda|^2} \, , 1 \right\rangle - \left\langle \frac{1}{|a_n|^2 \, |a_n-\lambda|^2} \, , 1 \right\rangle \\
&\qquad\qquad - \left\langle \int_0^\alpha e^{-\lambda t} dt \, \frac{1}{|a_n|^2 \, \overline{(a_n-\lambda)}} \, , 1 \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{(a_n-\lambda)\alpha} \frac{1}{|a_n|^2 \, |a_n-\lambda|^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2 \, |a_n-\lambda|^2} \\
&\qquad\qquad - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\alpha e^{-\lambda t} dt \, \frac{1}{|a_n|^2 \, \overline{(a_n-\lambda)}} \, .
\end{aligned}
$$

Les dernières deux séries sont convergentes par rapport à $\alpha \to \infty$. Pour la première série, en posant $\alpha \in \mathbf{N}$, on voit que

$$
\sum_{n=1}^{\infty} e^{(a_n-\lambda)\alpha} \frac{1}{|a_n|^2 \, |a_n-\lambda|^2} = e^{-i \operatorname{Im} \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\; n - \operatorname{Re} \lambda - 2^{n^2} \pi i \quad \alpha}}{|a_n|^2 \, |a_n-\lambda|^2} \, ,
$$

d'où il s'ensuit la divergence de cette série pour $n > Re\ \lambda$. Par conséquent, pour $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$
\left\langle \int_0^\alpha e^{-\lambda t} S(t) \, dt \, \frac{1}{\overline{a_n}} \, , \, \frac{1}{a_n - \lambda} \right\rangle
$$

est divergente par rapport à $\alpha \to \infty$.

Par contraste avec autres caractérisations des C_0-semi-groupes, la propriété prouvée dans le théorème 1.9 peut-être utilisée dans le cas des semi-groupes intégrés, sans imposer des conditions supplémentaires [**Th'90**, pag.419].

Définition 6.2. On appelle *générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ un opérateur linéaire

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

définit par : $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si pour tout $t \geq 0$ on a

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(r)ydr\,.$$

Remarque 6.3. On voit que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si $x \in \mathcal{C}^1$ et

$$S'(t)x - x = S(t)y\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Proposition 6.4. *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$*. Alors*

$$\mathcal{C}^2 \subseteq \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{C}^1$$

et

$$Ax = S''(0)x\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{C}^2.$$

Preuve. Compte tenu de la remarque 6.3, on voit que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si $x \in \mathcal{C}^1$ et

$$S'(t)x - x = S(t)y\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Avec la proposition 5.5, ii) il vient

$$S''(0)S(t)x + S'(0)x - x = S(t)y\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Comme $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré, compte tenu de la proposition 5.13, il résulte

$$S''(0)S(t)x = S(t)y\,, \quad (\forall)\, t \geq 0$$

pour tout $x \in \mathcal{C}^1$. En utilisant la proposition 5.3, iii), pour tout $x \in \mathcal{C}^2$ il s'ensuit que

$$S(t)S''(0)x = S(t)y\,, \quad (\forall)\, t \geq 0$$

d'où

$$S(t)[S''(0)x - y] = 0\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Par conséquent

$$S''(0)x = y\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{C}^2$$

donc

$$Ax = S''(0)x\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{C}^2. \quad ☑$$

Proposition 6.5. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors A est un opérateur fermé.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$. Alors :

$$\|S(s)Ax_n - S(s)y\| \leq \|S(s)\| \, \|Ax - ny\| \ .$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} S(s)Ax_n = S(s)y$$

uniformément par rapport à $s \in [0, t]$. Pour $x_n \in \mathcal{D}(A)$ nous avons

$$S(t)x_n - tx_n = \int_0^t S(s)Ax_n ds \, , \quad (\forall) : t \geq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} [S(t)x_n - tx_n] = \lim_{n\to\infty} \int_0^t S(s)Ax_n ds \, , \quad (\forall) \, t \geq 0$$

d'où

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(s)y ds \, , \quad (\forall) \, t \geq 0.$$

Par conséquent $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$. Donc A est un opérateur fermé. ☑

Proposition 6.6. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors*

$$S(t) : \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^2 \subset \mathcal{D}(A)$$

et pour tout $x \in \mathcal{C}^1$ on a

$$AS(t)x = S''(0)S(t)x = S'(t)x - x \, , \quad (\forall) \, t \geq 0.$$

De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a

$$AS(t)x = S(t)Ax \, , \quad (\forall) \, t \geq 0.$$

Preuve. Avec la proposition 6.4 on voit que

$$S(t) : \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{C}^2 \subset \mathcal{D}(A) \, , \quad (\forall) \, t \geq 0.$$

Pour tout $x \in \mathcal{C}^1$ il s'ensuit $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$, pour tout $t \geq 0$. En appliquant successivement la proposition 6.4 et la proposition 5.5, ii), pour tout $x \in \mathcal{C}^1$ il en résulte :

$$AS(t)x = S''(0)S(t)x = S'(t)x - S'(0)x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Compte tenu de la proposition 5.13, il vient

$$AS(t)x = S'(t)x - x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

De plus, pour $x \in \mathcal{D}(A)$ avec la proposition 6.4 et la proposition 5.5, iii) on obtient

$$S(t)Ax = S(t)S''(0)x = S''(0)S(t)x = AS(t)x\,, \quad (\forall)\, t \geq 0. \quad ☑$$

Proposition 6.7. *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *. Pour tout* $x \in \mathcal{E}$ *il résulte* $\int_0^t S(\sigma)x d\sigma \in \mathcal{D}(A)$ *et*

$$A\int_0^t S(\sigma)x d\sigma = S(t)x - tx\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Preuve. Pour tous r, $\sigma \geq 0$ on a

$$S(r)S(\sigma) = \int_0^r [S(\tau+\sigma) - S(\tau)]d\tau\,,$$

d'où

$$\int_0^t S(r)S(\sigma)d\sigma = \int_0^t \int_0^r [S(\tau+\sigma) - S(\tau)]d\tau d\sigma$$

ou bien

$$S(r)\int_0^t S(\sigma)d\sigma = \int_0^r \int_0^t [S(\tau+\sigma) - S(\tau)]d\sigma d\tau\,.$$

Par conséquent, $x \in \mathcal{E}$ implique $\int_0^t S(\sigma)x d\sigma \in \mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}S(r)\int\limits_0^t S(\sigma)xd\sigma \\
&\qquad = \int\limits_0^t [S(r+\sigma)-S(r)]xd\sigma = \int\limits_0^t [S(r+\sigma)-S(\sigma)+S(\sigma)-S(r)]xd\sigma \\
&\qquad = \int\limits_0^t [S(r+\sigma)-S(\sigma)]xd\sigma + \int\limits_0^t S\sigma)xd\sigma - \int\limits_0^t S(r)xd\sigma \\
&\qquad = S(t)S(r)x - tS(r)x + \int\limits_0^t S(r)xd\sigma = S(r)[S(t)x-tx] + \int\limits_0^t S(r)xd\sigma\,.
\end{aligned}$$

Compte tenu de la remarque 6.3, on voit que $\int\limits_0^t S(\sigma)xd\sigma \in \mathcal{D}(A)$ et

$$A\int\limits_0^t S(\sigma)xd\sigma = S(t)x - tx\,, \quad (\forall)\, t \geq 0. \quad ☑$$

Lemme 6.8. *Soient $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathcal{E}$ une application continue tel que*

$$\int\limits_0^t \varphi(s)\; ds \in \mathcal{D}(A)\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Si

$$A\int\limits_0^t \varphi(s) = \varphi(t)\; ds \in \mathcal{D}(A)\,, \quad (\forall)\, t \geq 0,$$

alors $\varphi(t) = 0$, pour tout $t \geq 0$.

Preuve. Soient $t \geq 0$ et $r \in [0,t]$ tel que

$$\int\limits_0^r \varphi(s)\; ds \in \mathcal{D}(A).$$

Puisque $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{C}^1$, il s'ensuit que

$$\int_0^r \varphi(s)\, ds \in \mathcal{C}^1.$$

Compte tenu de la remarque 6.3, on obtient :

$$\frac{d}{dr}\left[S(t-r)\int_0^r \varphi(s)\, ds\right] = \frac{d}{dr}[S(t-r)]\int_0^r \varphi(s)\, ds + S(t-r)\frac{d}{dr}\left[\int_0^r \varphi(s)\, ds\right]$$

$$= -\int_0^r \varphi(s)\, ds - S(t-r)A\int_0^r \varphi(s)\, ds + S(t-r)\varphi(r)$$

$$= -\int_0^r \varphi(s)\, ds - S(t-r)\varphi(r) + S(t-r)\varphi(r) = -\int_0^r \varphi(s)\, ds\,.$$

Par intégration par rapport à $r \in [0,t]$, il en résulte

$$\int_0^t \frac{d}{dr}\left[S(t-r)\int_0^r \varphi(s)\, ds\right] dr = -\int_0^t \int_0^r \varphi(s) ds dr$$

ou bien

$$\left[S(t-r)\int_0^r \varphi(s)\, ds\right]\Bigg|_0^t = -\int_0^t \int_0^r \varphi(s) ds dr$$

Par conséquent

$$\int_0^t \int_0^r \varphi(s) ds dr = 0$$

d'où il s'ensuit que $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. ☑

Théorème 6.9. [l'unicité de l'engendrement] *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *et* $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ *deux semi-groupes intégrés ayant pour générateur le même opérateur linéaire* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. *Alors pour tout* $t \geq 0$ *on a* $S(t) = U(t)$.

Preuve. Pour tout $x \in \mathcal{E}$ on considère l'application

$$\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathcal{E}\,, \quad \varphi(t) = S(t) - U(t)$$

Compt tenu de la proposition 6.7, on obtient

$$A\int_0^t \varphi(s)\,ds = A\int_0^r S(s)x\,ds - \int_0^t U(s)x\,ds$$
$$= S(t)x - tx - U(t)x + tx = \varphi(t)\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Avec le lemme 6.8 il s'ensuit

$$\varphi(t) = 0\,, \quad (\forall)\, t \geq 0$$

d'où l'affirmation de l'énoncé en découle immédiatement. ☑

Remarque 6.10. La définition 6.2 peut-être etendue dans le cas des semi-groupe intégrés dégénéré. On appelle *générateur* d'un semi-groupe intégré dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ l'application

$$A : \mathcal{E} \longrightarrow 2^{\mathcal{E}}$$

définie par : $x, y \in \mathcal{E}$ et $y \in Ax$ si et seulement si

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(r)y\,dr\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Si on posse

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in \mathcal{E} | Ax \neq \emptyset\},$$

alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y \in Ax$ si et seulement si $x \in \mathcal{C}^1$ et

$$S'(t)x - x = S(t)y\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Compt tenu de la définition de l'espace non-dégénéré, on peut établir un procédé par lequel le cas des semi-groupe intégrés dégénérés peut-être réduit au cas des semi-groupes intégrés non-dégénérés. Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré dégénéré ayant pour générateur l'opérateur A et pour l'espace dégénéré l'ensemble $\mathcal{N}$, alors on considère l'espace facteur $\mathcal{E}/_{\mathcal{N}}$ et les opérateurs induits

$$[S(t)][x] = [S(t)x]$$

et

$$[A][x] = \{[y] \mid y \in Ax\}$$

où

$$\mathcal{D}([A]) = \{[x] \mid \in \mathcal{D}(A)\}$$

et

$$[x] = x + \mathcal{N} \in \mathcal{E}/_{\mathcal{N}}\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E}.$$

On peut prouver [**Th'90**, pag. 423] que $\{[S(t)]\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré ayant pour générateur l'opérateur $[A]$.

7. Semi-groupes intégrés non-dégénéré exponentiellement bornés

Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ un semi-groupe intégré.

Définition 7.1. On dit que le semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est exponentiellement borné s'il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbf{R}$ tel que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}\,.$$

Remarque 7.2. Il existe des semi-groupes intégrés qui ne sont pas exponentiellement bornés comme on peut voir dans l'exemple 6.1. Pour un semi-groupe intégré exponentiellement borné $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$, l'intégrale de Laplace

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt$$

existe pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$. Si, en plus, le semi-groupe est non-dégénéré, alors on peut montrer le théorème suivant.

Théorème 7.3. [[**Ar'87**, **KH'89**, **Ne'88**, **Th'90**]] *Soient $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire fermé et $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ une famille fortement continue pour laquelle il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

et ayant l'espace non-dégénéré $\mathcal{N} = \{0\}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) *la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré exponentiellement borné ayant pour générateur l'opérateur A ;*

ii) *$\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a*

$$R(\lambda; A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt\,.$$

Preuve. $i) \Longrightarrow ii)$ Pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ considérons l'application

$$R(\lambda)x = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt\,.$$

Compte tenu de la remarque 5.4 et de la proposition 5.5, i), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} S(r)R(\lambda)x &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dr} S(r)S(t)x\, dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[s(r+t) - S(r)\right] x\, dt \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[S(t+r) - S(t)\right] x\, dt + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(r)x\, dt \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(r) \frac{d}{dt} S(t)x\, dt + R(\lambda)x - S(r)x \\
&= \lambda S(r) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} S(t)x\, dt + R(\lambda)x - S(r)x \\
&= \lambda S(r) \left[e^{-\lambda t} S(t)x \Big|_{t=0}^{\infty} + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt \right] + R(\lambda)x - S(r)x \\
&= \lambda S(r)R(\lambda)x + R(\lambda)x - S(r)x = S(r)[\lambda R(\lambda)x - x] + R(\lambda)x\,.
\end{aligned}$$

Par suite

$$S(t)R(\lambda)x = \int_0^t S(r)[\lambda R(\lambda)x - x]\, dr + tR(\lambda)x$$

Avec la définition 6.2 on voit que $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ et

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$$

d'où

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = x\,, \quad (\forall)\, x \in \mathcal{E}.$$

Soit maintenant $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(r)Ax\, dr\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Compte tenu de la proposition 6.6, nous avons

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax\, dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} AS(t)x\, dt \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\frac{d}{dt} S(t)x - x\right] dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} S(t)x\, dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} x\, dt \\ &= \lambda \left[e^{-\lambda t} S(t)x\Big|_{t=0}^{\infty} + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt \right] - x = \lambda R(\lambda)x - x \end{aligned}$$

d'où nous obtenons

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x\,, \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A).$$

Par conséquent $\lambda I - A$ est un opérateur inversible, donc $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et

$$R(\lambda; A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt\,.$$

ii) $\Longrightarrow$ *i)* Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire fermé tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a

$$R(\lambda; A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt\,.$$

Avec le théorème 5.1 on voit que

$$S(t)S(s) = \int_t^{t+s} S(r)\, dr - \int_0^s S(r)\, dr\,, \quad (\forall)\, t,\, s \geq 0.$$

On peut vérifier facilement que $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré exponentiellement borné. Nous allons maintenant montrer que le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ a pour générateur l'opérateur A. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ nous avons

$$\begin{aligned}
x &= R(\lambda)(\lambda I - A)x = \lambda R(\lambda;A)x - R(\lambda;A)Ax \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\,dt - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax\,dt \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\,dt - \lambda \left[\left(e^{-\lambda t} \int_0^t S(s)Ax\,ds \right)\Bigg|_{t=0}^{\infty} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t S(s)Ax\,ds \right] \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[S(t)x - \int_0^t S(s)Ax\,ds \right] dt\,.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$x = \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} tx\,dt\,.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on obtient

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[S(t)x - \int_0^t S(s)Ax\,ds \right] dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} tx\,dt\,.$$

Avec le théorème de l'unicité de la transformée de Laplace [**Wi'71**, 5.7, cor 7.2], il vient

$$S(t)x - \int_0^t S(s)Ax\,ds = tx\,, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Il s'ensuit donc que A est le générateur du semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. ☑

8. Le théorème de Arendt

Dans la théorie des semi-groupe intégré, une grande importance revient à un théorème de représentation de la transformée de Laplace pour une fonction avec des valeurs réelles, montré par WIDDER en 1934.

Théorème 8.1. [WIDDER] *Soient $r : \Lambda_0 \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $M \geq 0$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) *$r \in \mathcal{C}(\Lambda_0)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_0$ on a*

$$\left| r^{(n)}(\lambda) \right| \leq \frac{Mn!}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^{n+1}}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N};$$

ii) *il existe une fonction $f \in L^\infty[0, \infty)$ avec la propriété $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$, tel que*

$$r(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt, \quad (\forall)\, \lambda \in \Lambda_0.$$

La preuve de ce théorème peut-être trouver dans [**Wi'34**] ou [**Wi'71**]. On peut remarquer facilement une grande analogie entre le théorème de Widder et le théorème de Hille-Yosida. En effet, compte tenu de l'égalité

$$R(\lambda; A)^{(n)} = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}$$

la relation (ii) du théorème de Hille-Yosida est équivalente avec

$$\left\| R(\lambda; A)^{(n)} \right\| \leq \frac{Mn!}{(\mathrm{Re}\ \lambda - \omega)^{n+1}}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Malheureusement, en 1960 Zaidman a prouvé que c'est impossible d'etendre le théorème de Widder aux fonctions avec des valeurs dans un espace de Banach arbitraire [**Za'60**]. ARENDT a prouvé dans [**Ar'87**, pag. 329] une version "intégré" du théorème de Widder pour fonctions avec des valeurs dans un espace de Banach.

Théorème 8.2. [WIDDER–ARENDT] *Soient $\mathcal{E}$ un espace de Banach, $a > 0$, $R : \Lambda_a \longrightarrow \mathcal{E}$ une fonction, $M \geq 0$ et $\omega \in (-\infty, a]$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) *$R \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda_a, \mathcal{E})$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_a$ on a*

$$\left\| R(\lambda)^{(n)} \right\| \leq \frac{Mn!}{(Re\ \lambda - \omega)^{n+1}}, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N};$$

ii) *il existe une fonction $F : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{E}$ avec les propriétés*

$$F(0) = 0$$

et

$$\| F(t+h) - F(t) \| \leq M e^{\omega(t+h)} h, \quad (\forall)\, t, h \geq 0,$$

tel que pour tout $\lambda \in \Lambda_a$ *on a*

$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t)\, dt\,.$$

Preuve. $i) \Longrightarrow ii)$ Pour $x^* \in \mathcal{E}^*$ nous considérons l'application

$$r : \Lambda_0 \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$r(\mu) = \langle R(\mu + a), x^* \rangle$$

Alors pour tout $\mu \in \Lambda_0$ on obtient

$$\begin{aligned} \left| r(\mu)^{(n)} \right| &\leq \left\| R(\mu + a)^{(n)} \right\| \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \leq \frac{Mn!}{[\text{Re } (\mu + a) - \omega]^{n+1}} \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \\ &\leq \frac{Mn!}{(\text{Re } \mu)^{n+1}} \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} , \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Avec le théorème 8.1 on voit qu'il existe une fonction $g(., x^*) \in L^\infty[0, \infty)$ (qui dépend de x^*) avec la propriété

$$\|g\,(t, x^*)\|_{L^\infty[0,\infty)} \leq M \,\|x^*\|_{\mathcal{E}^*} , \quad (\forall)\, t \geq 0$$

tel que

$$r(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu t} g\,(t, x^*)\; dt\,, \quad (\forall)\, \mu \in \Lambda_0.$$

Pour tout $\omega \in (-\infty, a]$ considérons l'application

$$p_\omega : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathbf{R}\,, \qquad p_\omega(\lambda) = r(\lambda - \omega)\,.$$

Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on obtient

$$p_\omega(\lambda) = r(\lambda - \omega) = \int_0^\infty e^{-(\lambda-\omega)\, t} g\,(t, x^*)\; dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\omega t} g\,(t, x^*)\; dt$$

et en posant

$$f\,(t, x^*) = e^{\omega t} g\,(t, x^*)\; dt\,, \quad t \geq 0$$

il en résulte que

$$p_\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f\,(t, x^*)\; dt\,, \quad (\forall) \lambda \in \Lambda_\omega.$$

De plus, $f(., x^*) \in L^\infty[0, \infty)$ et

$$\|f\,(t, x^*)\|_{L^\infty[0,\infty)} \leq M e^{\omega t} \,\|x^*\|_{\mathcal{E}^*} , \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

Définissons l'application

$$F(.,x^*):[0,\infty)\longrightarrow \mathbf{R}\,,\quad F(t,x^*)=\int_0^t f(s,x^*)\ ds\,.$$

Il s'ensuit que $F(0,x^*)=0$, pour tout $x^*\in\mathcal{E}^*$. De plus

$$\begin{aligned}p_\omega(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t,x^*)\ dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}F(t,x^*)\ dt\\ &= e^{-\lambda t}F(t,x^*)\big|_{t=0}^{\infty}+\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}F(t,x^*)\ dt=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}F(t,x^*)\ dt\,.\end{aligned}$$

Comme $F(.,x^*)$ est une application continue, avec le théorème de l'unicité de la transformée de Laplace [**Wi'71**, 5.7,cor.7.2] il en résulte que $F(.,x^*)$ est une application linéaire par rapport à $x^*\in\mathcal{E}^*$. De plus, pour tout $x^*\in\mathcal{E}^*$ et pour tous $t,h\geq 0$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}|F(t+h,x^*)-F(t,x^*)| &= \left|\int_0^{t+h} f(s,x^*)\ ds-\int_0^t f(s,x^*)\ ds\right|\\ &= \left|\int_t^{t+h} f(s,x^*)\ ds\right|\leq\int_t^{t+h}|f(s,x^*)|\ ds\\ &\leq \int_t^{t+h}\|f(s,x^*)\|_{L^\infty[0,\infty)}\ ds\leq M\int_t^{t+h}e^{\omega t}\,ds\,\|x^*\|_{\mathcal{E}^*}\\ &\leq M\sup_{s\in[t,t+h]}e^{\omega t}h\,\|x^*\|_{\mathcal{E}^*}=Me^{\omega(t+h)}h\,\|x^*\|_{\mathcal{E}^*}\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t\geq 0$, il existe $F(t)\in\mathcal{E}^{**}$ tel que

$$F(t,x^*)=\langle F(t),x^*\rangle\,,\quad (\forall)\,x^*\in\mathcal{E}^*.$$

Donc pour tout $\lambda\in\Lambda_a$ et tout $x^*\in\mathcal{E}^*$ on voit que $p_a(\lambda)=r(\lambda-a)$ d'où il s'ensuit que

$$\langle R(\lambda),x^*\rangle=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\langle F(t),x^*\rangle\ dt\,.$$

Par conséquent

$$R(\lambda)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}F(t)\,dt\,,\quad (\forall)\lambda\in\Lambda_a,$$

où $F(t)\in\mathcal{E}^{**}$, pour tout $t\geq 0$.

Pour montrer ii), il est suffisant de prouver que $F(t)\in\mathcal{E}$, pour tout $t\geq 0$. Pour cela, on peut indentifier l'espace $\mathcal{E}$ par un sous-espace fermé de $\mathcal{E}^{**}$, en utilisant l'inclusion canonique

$$\mathcal{E}\ni x\longmapsto i_x\in\mathcal{E}^{**}\,,\quad i_x\left(y^*\right)=y^*(x)\,,\quad (\forall)\,y^*\in\mathcal{E}^*.$$

Soit

$$\Phi:\mathcal{E}^{**}\longrightarrow \mathcal{E}^{**}/_{\mathcal{E}}$$

Pour tout $\lambda\in\Lambda_a$, on obtient $R(\lambda)\in\mathcal{E}$. Par conséquent

$$0=\Phi\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda}\right)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(F(t))\,dt\,,\quad (\forall)\,\lambda\in\Lambda_a.$$

Avec le théorème de l'unicité de la transformée de Laplace il en résulte

$$\Phi(F(t))=0\,,\quad (\forall)\,t\geq 0.$$

Il s'ensuit que $F(t)\in\mathcal{E}$, pour tout $t\geq 0$. De plus, de l'égalité $F\left(0,x^*\right)=0$ il en résulte $F(0)=0$ et comme

$$\left|F\left(t+h,x^*\right)-F\left(t,x^*\right)\right|\leq Me^{\omega(t+h)}h\left\|x^*\right\|_{\mathcal{E}^*}$$

on obtient

$$\|F(t+h)-F(t)\|\leq Me^{\omega(t+h)}h\,,\quad (\forall)\,t,h\geq 0.$$

$ii)\Longrightarrow i)$ Pour tout $x^*\in\mathcal{E}^*$ considérons l'application

$$f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbf{R}\,,\quad f(t)=\left\langle F(t),x^*\right\rangle\,.$$

Alors pour tout $\lambda\in\Lambda_a$, on obtient

$$\left\langle R(\lambda),x^*\right\rangle=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left\langle F(t),x^*\right\rangle\,dt==\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)\,dt\,.$$

De plus, pour tous $t,h\geq 0$ on a

$$\begin{aligned}|f(t+h)-f(t)|&=\left|\left\langle F(t+h)-F(t),x^*\right\rangle\right|\\&\leq\|F(t+h)-F(t)\|\left\|x^*\right\|_{\mathcal{E}^*}\leq Me^{\omega(t+h)}h\left\|x^*\right\|_{\mathcal{E}^*}\,.\end{aligned}$$

Par conséquent f est une application dérivable p.p. et on a

$$|f'(t)| \leq Me^{\omega t} \|x^*\|_{\mathcal{E}^*}, \quad (\forall)\, t \geq 0.$$

De plus

$$\begin{aligned}\langle R(\lambda), x^* \rangle &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt = \int_0^\infty \left(-e^{-\lambda t}\right)' f(t)\, dt \\ &= -e^{-\lambda t} f(t)\Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^\infty e^{-\lambda t} f'(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f'(t)\, dt\,.\end{aligned}$$

Compte tenu de l'égalité

$$\left\langle \frac{d}{d\lambda} R(\lambda), x^* \right\rangle = -\int_0^\infty t e^{-\lambda t} f'(t)\, dt\,,$$

par récurrence on obtient

$$\left\langle R^{(n)}(\lambda), x^* \right\rangle = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} f'(t)\, dt\,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\left|\left\langle R^{(n)}(\lambda), x^* \right\rangle\right| &\leq \int_0^\infty t^n e^{-\operatorname{Re}\lambda t} M e^{\omega t} \|x^*\|_{\mathcal{E}^*}\, dt = M \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \int_0^\infty t^n e^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t}\, dt \\ &= M \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \frac{n}{Re\ \lambda - \omega} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t}\, dt = \cdots \\ &= M \|x^*\|_{\mathcal{E}^*} \frac{n!}{(Re\ \lambda - \omega)^{n+1}}\end{aligned}$$

d'où il vient

$$\left\|R^{(n)}(\lambda)\right\| \leq \frac{Mn!}{(Re\ \lambda - \omega)^{n+1}}\,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}. \quad ☑$$

Cette version "intégré" du théorème de Widder décrite dans le théorème 8.2 conduit à une caractérisation complète du générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré. Le théorème suivant, connu sous le nom du *théorème de Arendt* [**Ar'87**, **Hi'91-1**, **MPV'97**, **XL'96**], a la même importance pour les semi-groupes intégrés ainsi que le théorème de Hille-Yosida pour les semi-groupes de classe C_0. Nous avons obtenu une preuve presque élémentaire du théorème de Arendt en utilisant l'aproximation généralisée de Yosida et une idée de ADAM BOBROWSKI [**Bo'94**].

Théorème 8.3. [ARENDT] *Un opérateur linéaire*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *pour lequel il existe* $M \geq 0$ *et* $\omega \in \mathbf{R}$ *tel que*

$$\|S(t+h) - S(t)\| \leq Me^{\omega(t+h)}h\,, \quad (\forall)\, t, h \geq 0$$

si et seulement si

i) *A est un opérateur fermé ;*

ii) *il existe* $a \geq \max\{0, \omega\}$ *tel que* $\Lambda_a \subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda \in \Lambda_a$ *on a*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\ \lambda - \omega)^n}\,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}^*.$$

Preuve. $\Longrightarrow$ Soit

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ pour lequel il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbf{R}$ tel que

$$\|S(t+h) - S(t)\| \leq Me^{\omega(t+h)}h\,, \quad (\forall)\, t,\ h \geq 0$$

Avec la proposition 6.5 on voit que A est un opérateur fermé. Dans l'inégalité précédente on peut prendre $t = 0$. Il s'ensuit que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}h \leq Me^{(\omega+1)t}\,, \quad (\forall)\, h \geq 0.$$

Par conséquent, il existe $a = \max\{\omega + 1, 0\} \geq \max\{\omega, 0\}$ tel que

$$\|S(t)\| \leq Me^{ah}\,, \quad (\forall)\, h \geq 0.$$

Avec le théorème 7.3 on voit que $\Lambda_a \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_a$ on obtient

$$R(\lambda; A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt\,.$$

Compte tenu du théorème 8.2, il s'ensuit donc que

$$\left\| R^{(n)}(\lambda; A) \right\| \leq \frac{Mn!}{(Re\ \lambda - \omega)^{n+1}}\,, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et tout $n \in \mathbf{N}$ on a

$$R^{(n)}(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}.$$

Par suite, on a :

$$\left\|(-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}\right\| \leq \frac{Mn!}{(Re\ \lambda - \omega)^{n+1}}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}$$

d'où

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\ \lambda - \omega)^n}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

$\Longleftarrow$ Soit $\{A_\nu\}_{\nu \in \Lambda_a}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A et $\left\{A_{\nu,\overline{\mathcal{D}(A)}}\right\}_{\nu \in \Lambda_a}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur $A_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$ (la partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$), où

$$A_{\nu,\overline{\mathcal{D}(A)}} = A_\nu \Big/_{\overline{\mathcal{D}(A)}}$$

Avec le théorème 4.5, on déduit que la partie de A dans $\overline{\mathcal{D}(A)}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}\left(\overline{\mathcal{D}(A)}\right)$ avec la propriété

$$T(t)x = \lim_{Re\nu \to \infty} e^{A_{\nu,\overline{\mathcal{D}(A)}} t} x, \quad (\forall)\ x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty)$. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $Re\ \lambda > a + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé. Avec le théorème 3.5 on voit qu'il existe $\mu \in \Lambda_a$ tel que $\lambda \in \rho(A_\mu)$, $\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \in \rho(A)$ et

$$R(\lambda; A_\mu) = \frac{1}{\lambda + \mu} I + \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}; A\right).$$

Alors pour tout $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ nous définissons

$$S_\mu(t)x = \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds$$

et nous avons

$$
\begin{aligned}
S_\mu(t)x &= \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds = R(\lambda; A_\mu)(\lambda I - A_\mu) \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds \\
&= R(\lambda; A_\mu)\, \lambda \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds - R(\lambda; A_\mu)\, A_\mu \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds \\
&= \left[\frac{1}{\lambda+\mu} I + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)\right] \lambda \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds \\
&\qquad - \left[\frac{1}{\lambda+\mu} I + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)\right] e^{A_\mu s} x \Big|_{s=0}^{t} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \lambda R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds \\
&\qquad - \left[\frac{1}{\lambda+\mu} I + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)\right] \left(e^{A_\mu t} x - x\right) \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \lambda R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds \\
&\qquad - \frac{1}{\lambda+\mu} e^{A_\mu t} x - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) e^{A_\mu t} x \\
&\qquad - \frac{1}{\lambda+\mu} e^{A_\mu t} x - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) e^{A_\mu t} x + \\
&\qquad + \frac{1}{\lambda+\mu} x + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) x \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_0^t e^{A_\mu s} x\, ds + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \lambda \int_0^t e^{A_\mu s} R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) x\, ds \\
&\qquad - \frac{1}{\lambda+\mu} e^{A_\mu t} x - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 e^{A_\mu t} R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) x \\
&\qquad + \frac{1}{\lambda+\mu} x + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) x
\end{aligned}
$$

compte tenu de l'égalité

$$R(\alpha;A)A_\beta = A_\beta R(\alpha;A)\,, \quad (\forall)\alpha,\beta\in\Lambda_a.$$

Comme

$$\begin{aligned}
\left\|e^{A_\mu s}\right\| &= \left\|e^{\left(\mu^2 R(\mu;A)-\mu I\right)s}\right\| = \left\|e^{-\mu s I}e^{\mu^2 s R(\mu;A)}\right\| \\
&\le e^{-\operatorname{Re}\mu s}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k\mu^{2k}R(\mu;A)^k}{k!}\right\| \le e^{-\operatorname{Re}\mu s}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{s^k|\mu|^{2k}\left\|R(\mu;A)^k\right\|}{k!} \\
&\le e^{-\operatorname{Re}\mu s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k|\mu|^{2k}M}{k!(\operatorname{Re}\mu-\omega)^k} = Me^{-\operatorname{Re}\mu s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{s|\mu|^2}{\operatorname{Re}\mu-\omega}\right)^k}{k!} \\
&= Me^{-\operatorname{Re}\mu s}e^{(s|\mu|^2)/(\operatorname{Re}\mu-\omega)} = Me^{s(\omega\operatorname{Re}\mu+\operatorname{Im}^2\mu)/(\operatorname{Re}\mu-\omega)}\,,
\end{aligned}$$

on peut définir la famille $\{S(t)\}_{t\ge0}\subset\mathcal{B}(\mathcal{E})$ où

$$S(t)x = \lim_{\operatorname{Re}\mu\to\infty}S_\mu(t)x = \lambda\int_0^t T(s)R(\lambda;A)x\,ds - T(t)R(\lambda;A)x + R(\lambda;A)x\,,$$

pour tout $t\ge0$ et $x\in\mathcal{E}$. Comme $\{T(t)\}_{t\ge0}$ est un C_0-semi-groupe, il en résulte que la famille $\{S(t)\}_{t\ge0}\subset\mathcal{B}(\mathcal{E})$ est fortement continue. De plus, pour tout $\mu\in\Lambda_a$, tout $x\in\mathcal{E}$ et tous $s,t\ge0$ on obtient :

$$\begin{aligned}
S_\mu(s)S_\mu(t)x &= \int_0^s e^{A_\mu u}S_\mu(t)x\,du = \int_0^s e^{A_\mu u}\int_0^t e^{A_\mu v}x\,dv\,du \\
&= \int_0^s\int_0^t e^{A_\mu(u+v)}x\,dv\,du = \int_0^s\int_u^{u+t}e^{A_\mu r}x\,dr\,du \\
&= \int_0^s\int_0^{u+t}e^{A_\mu r}x\,dr\,du - \int_0^s\int_0^u e^{A_\mu r}x\,dr\,du \\
&= \int_0^s S_\mu(u+t)\,du - \int_0^s S_\mu(u)\,du = \int_0^s\left[S_\mu(u+t)-S_\mu(u)\right]x\,du\,.
\end{aligned}$$

Par pasage à limite pour $Re\ \mu \to \infty$ il s'ensuit que

$$S(s)S(t)x = \int_0^s [S(u+t) - S(u)]\, x\, du$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tous $s, t \geq 0$. Comme $S(0) = 0$, avec la définition 5.3 on déduit que la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est un semi-groupe intégré. De plus, pour tous $t, h \geq 0$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|S(t+h) - S(t)\| &= \lim_{\operatorname{Re}\mu\to\infty} \left\| \int_0^{t+h} e^{A_\mu s}\, ds - \int_0^t e^{A_\mu s}\, ds \right\| \\
&= \lim_{\operatorname{Re}\mu\to\infty} \left\| \int_t^{t+h} e^{A_\mu s}\, ds \right\| \leq \lim_{\operatorname{Re}\mu\to\infty} \int_t^{t+h} \left\| e^{A_\mu s} \right\|\, ds \\
&\leq \lim_{\operatorname{Re}\mu\to\infty} \int_t^{t+h} M e^{s(\omega \operatorname{Re}\mu + \operatorname{Im}^2\mu)/\operatorname{Re}\mu - \omega}\, ds \\
&\leq \lim_{\operatorname{Re}\mu\to\infty} M e^{(t+h)(\omega \operatorname{Re}\mu + \operatorname{Im}^2\mu)/(\operatorname{Re}\mu - \omega}\, h = M e^{\omega(t+h)} h\,. \quad ☑
\end{aligned}$$

Remerciements. Une bonne partie de ce matériel a été éxposé pour le séminaire d'"Analyse fonctionnelle" (19 février 2003, 19 mars 2003) et pour le groupe de travail de "Théorie des opérateurs et analyse complexe" (18 février 2003, 18 mars 2003) au seine de l'Institut Girard Desargues de Lyon, France, à l'invitation du professeur Gilles CASSIER. La forme actuelle a été obtenue dans mon stage de recherche (mai-juin 2004) à l'Université de Wuhan, Chine, dans le cadre du programme "Yangtse Professorships Researches" dirigé par professeur Liming WU.

Je veux exprimer toute ma reconnaissance pour l'hospitalité et l'amabilité avec lesquelles j'ai été accueilli par toutes personnes que j'ai eu le plaisir de connaître pendant mes stages en France et en Chine. Particulièrement je veux présenter mes remerciements à Monsieur GILLES CASSIER de l'Université Claude Bernard de Lyon et à Monsieur LIMING WU de l'Université de Wuhan.

RÉFÉRENCES

[**Ar'87**] ARENDT, W. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* Israel J. Math., (3)59(1987), 327–352.

[**Bo'94**] BOBROWSKI, A. *Integrated Semigroups and the Trotter-Kato Theorem.* Bull. Polish. Acad. Sci. Math., (4)42(1994), 297–304.

[**Da'80**] DAVIES, E. B. *One-parameter semigroups.* Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, 1980.

[**DLHWW'97**] DE LAUBENFELS, R., HUANG, Z., WANG, S., WANG, Y. *Laplace transforms of polynomially bounded vector-valued functions and semigroups of operators.* Israel J. Math., 98(1997), 189–207.

[**Fe'53**] FELLER, W. *On the generation of unbounded semigroups of bounded linear operators.* Ann. of Math., 58(1953), 166–174.

[**GW'74**] GAŞPAR, D., WESTPHAL, U. *Über den Kogenerator einer Kontractionshalbgruppe.* Analele Universităţii din Timişoara, 1(1974), 43–55.

[**Hi'91-1**] HIEBER, M. *Laplace Transforms and α-Times Integrated Semigroups.* Forum Math., 3(1991), 595–612.

[**Hi'91-2**] HIEBER, M. *Integrated Semigroups and the Cauchy Problems for Systems in L^p Spaces.* J. Math. Anal. Appl., 162(1991), 300–308.

[**Hi'48**] HILLE, E. *Functional Analysis and Semi-Groups.* A.M.S., New York, 1948.

[**HP'57**] HILLE, E., PHILLIPS, R.S. *Functional Analysis and Semi-Groups.* A.M.S., Providence, Rhode Island, 1957.

[**KH'89**] KELLERMAN, H., HIEBER, M. *Integrated Semigroups* J. Funct. Anal., 84(1989), 160–180.

[**Le'03**] LEMLE, L.D. *La formule de Lie-Trotter pour les semi-groupes fortement continus.* Prepublications de l'Institut Girard Desargues, Lyon, 8(2003), 1–136.

[**MPV'97**] MIJATOVIĆ,M., PILIPOVIĆ, S., VAJZOVIĆ, F. *α-Times Integrated Semigroups ($\alpha \in \mathbf{R}^+$).* J. Math. Anal. Appl., 210(1997), 790–803.

[**Mi'52**] MIYADERA, I. *Generation of strongly continuous semi-groups of operators.* Tohoku Math. J., 4(1952), 109–114.

[**Mi'56**] MIYADERA, I. *On the representation theorem by Laplace transformation of vector-valued functions.* Tohoku Math. J., 8(1956), 170–180.

[**Ne'88**] NEUBRANDER, F. *Integrated Semigroups and their Applications to the Abstract Cauchy Problem.* Pacific J. Math., (1)135(1988), 111–155.

[**Pa'83-1**] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer Verlag, New York, Berlin, 1983.

[**Pa'83-2**] PAZY, A. *Semigroups of operators in Banach spaces.* Lect. Notes in Math., 1017(1983), Springer, Berlin, 508–524.

[**PC'98**] PENG, J., CHUNG, S.K. *Laplace Transform and Generators of Semigroups of Operators.* Proc. Amer. Math. Soc., (8)126(1998), 2407–2416.

[**Ph'52**] PHILLIPS, R.S. *On the generation of semi-groups of linear operators.* Pacific J.Math., 2(1952), 393–415.

[**Th'90**] THIEME, H. *Integrated Semigroups and Integrated Solutions to Abstract Cauchy Problems.* J. Math. Anal. Appl., 152(1990), 416–447.

[**Vr'01**] VRABIE, I.I. *Semigrupuri de operatori liniari şi aplicaţii.* Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2001.

[**Wi'34**] WIDDER, D.V. *The inversion of the Laplace integral and the related moment problem.* Trans. Amer. Math. Soc., 36(1934), 107–200.

[**Wi'71**] WIDDER, D.V. *An introduction to Transform Theory.* Academic Press, New York, 1971.

[**XL'96**] XIAO, T.J., LIANG, J. *Widder-Arendt theorem and integrated semigroups in locally convex space.* Sci. China. Ser., (11)39(1996), 1121–1130.

[**XL'00**] XIAO, T.J, LIANG, J. *Approximations of Laplace Transforms and Integrated Semigroups.* J. Funct. Anal., 172(2000), 202–220.

[**Yo'48**] YOSIDA, K. *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators.* J. Math. Soc. Japan, 1(1948), 15–21.

[**Yo'67**] YOSIDA, K. *Functional Analysis.* Springer Verlag, New York, 1967.

[**Za'60**] ZAIDMAN, S. *Sur un théorème de I. Miyadera concernant la représentation des fonctions vectorielles par des intégrales de Laplace.* Tohoku Math. J., 1(1960), 12–47.

(Recibido en octubre de 2004. Aceptado para publicación en junio de 2005)

UFR DE RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE, UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL
63177 AUBIÈRE, FRANCE
FACULTÉ D'INGÉNIERIE, UNIVERSITÉ POLITEHNICA
331128 HUNEDOARA, ROUMANIE
e-mail : `lemledan@fih.utt.ro`