Relime Vol.6, Núm. 1, marzo 2003, pp. 27-40

Matemática Educativa: Una visión de su evolución

Ricardo Cantoral⁎
Rosa María Farfán⁎

RESUMEN

La enseñanza en general y la de las matemáticas en particular son asuntos de la mayor importancia para la sociedad contemporánea. A lo largo del tiempo, las sociedades han conformado instituciones con el objeto de incorporar a las matemáticas y a la ciencia en la cultura de la sociedad con la clara intención de favorecer entre la población una visión científica del mundo. Este intenso proceso social de culturización científica, nos ha ayudado a reconocer la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas con base en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares. Del estudio sistemático de los efectos de tales procesos se ocupa la matemática educativa y en este escrito nos hemos propuesto el ejercicio de describir cierta evolución de sus problemáticas.

PALABRAS CLAVES: Matemática educativa (evolución de)

Mathematics Education: A vision of its evolution

ABSTRACT

The teaching in general and of the mathematics particularly are matters of the greater importance for the contemporary society. Through the years, societies have conformed institutions with the purpose to incorporate the mathematics and the science in the society culture to favor among the population a scientific vision of the world. This intense social process of scientific *culturización*, has helped us to recognize the educational need to implement modifications in the field of the mathematics based on better designs adapted the scholastic practices. Of the systematic study of the effects of such processes the mathematics education is occupied and in this writing we have proposed us the exercise to describe certain evolution of its problematic.

KEY WORDS: Mathematics Education (evolution of)

Mathématique didactique: une vision de son évolution

RÈSUMÈ

L´enseignement en général, et celui des mathématiques en particulier, est une affaire de la plus grande importance pour la société contemporaine. A mesure que le temps passe, les sociétés ont formé des institutions ayant pour objectif d' incorporer les mathématiques et la science dans la culture de la société avec la claire intention de promouvoir entre la population une vision scientifique du monde. Cet intense procès social d'acculturation scientifique, nous a aidé reconnaître le besoin d' apporter des modifications éducatives dans le domaine particulier des mathématiques, prenant en compte des méthodes meilleures adaptées aux pratiques scolaires. La mathématique didactique se occupe de l'étude systématique des effets de tels procès et dans cet écrit nous nous sommes proposé comme exercice de d'écrire une certaine évolution de ces

---

Fecha de recepción: noviembre de 2002
⁎ *Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.*

problématiques.

MOTS CLÉS: mathématique didactique (l’évolution de)

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: Uma visão de sua evolução

RESUMO

O ensino, em geral, e da matemática, em particular, são assuntos da maior importância para a sociedade contemporânea. No decorrer dos tempos as sociedades têm formado instituições com o objetivo de incorporar a matemática e a ciência na cultura da sociedade com clara intenção de fornecer à população uma visão científica do mundo. Este intenso processo social de "culturização" científica nos tem ajudado a reconhecer a necessidade de implementar modificações educativas no campo particular da matemática com base em um planejamento melhor adaptados às práticas escolares. Do estudo sistemático dos efeitos de tais processos se ocupa educação matemática e neste trabalho nos propomos o exercício de descrever certa evolução de suas problemáticas.

PALAVRAS CHAVES: Educação matemática (evolução de)

PRESENTACIÓN

La enseñanza en general y la de las matemáticas en particular son asuntos de la mayor importancia para la sociedad contemporánea. A lo largo del tiempo, las sociedades han conformado instituciones con el objeto de incorporar a las matemáticas y a la ciencia en la cultura de la sociedad con la clara intención de favorecer entre la población una visión científica del mundo. Este intenso proceso social de *culturización científica*, nos ha ayudado a reconocer la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas con base en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares. Del estudio sistemático de los efectos de tales procesos se ocupa la matemática educativa.

Aunque las preocupaciones por la enseñanza de la matemática y por su mejora progresiva son tan antiguas como la enseñanza misma y ésta tan antigua como la vida en sociedad, el estudio sistemático para localizar los fenómenos que la caracterizan, tendrá apenas, sí acaso, unas décadas de existencia entre nosotros. Baste como ejemplo el dato de la fecha de fundación de la Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional: 1975.

Sin duda, la actividad del matemático educativo profesional ha sido desarrollada en una atmósfera propicia para la investigación serena como la que normalmente prodiga el Cinvestav del IPN. De entonces a la fecha se han formado varias generaciones de matemáticos educativos y, en ese proceso, la disciplina se ha ido constituyendo como un campo de investigación autónomo que ha ganado para sí la legitimidad de una problemática de estudio. Quizá en un principio, por la misma juventud disciplinar, sólo unos cuantos confiscaban las oportunidades y el quehacer de todos, hoy en cambio, no es difícil encontrar al interior de nuestra pequeña comunidad distintas visiones que buscan cohabitar en pluralidad.

Adicionalmente, valdría la pena destacar otra perspectiva que testifica este proceso de conformación disciplinar; la gran diversidad de congresos, seminarios, instituciones, publicaciones y asociaciones profesionales en distintos sitios del orbe; en nuestra opinión ello exhibe la profunda diversidad en la que se vive actualmente este intenso proceso de institucionalización disciplinar.

Desde esta perspectiva, la matemática educativa es entonces una disciplina del conocimiento cuyo origen se remonta a la segunda mitad del siglo veinte y que en términos generales, podríamos decir se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático.

Aclaremos de inicio que en este escrito no pretendemos mostrar una panorámica de la investigación en nuestro campo, ni buscamos caracterizar sus métodos o sus temáticas de investigación, para ello, el lector podría acudir a diversas revisiones con esa intención (Farfán, 1997a; 1997b; Filloy, 1981; Garnica, 1988; Hitt, 1998; Imaz, 1987; Waldegg, 1996), o en el ámbito internacional, (Artigue, 1999; Biehler, 1994; D'Amore, 1999; Nesher & Kilpatrick, 1990). Por nuestra parte, sólo tenemos el objetivo de describir cierta evolución de las problemáticas.

Mas específicamente asumiremos como problemática aquella concerniente a la evolución del estudio de los fenómenos didácticos que se suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente, en ámbitos no escolares, se introducen al sistema de enseñanza y ello les obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad; de manera que afectan también las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesor. Este proceso de incorporación de saberes altamente especializados al sistema didáctico plantea una serie de problemas teóricos y prácticos no triviales, que precisan para su estudio de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados. El desarrollo de tales aproximaciones se lleva a cabo mediante estudios que nos permiten entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático y del saber científico a las prácticas tanto de los profesores como de sus estudiantes.

Nuestro enfoque ante esta problemática, exige de una incesante interacción entre la elaboración teórica y la evidencia empírica; para lo cual nos auxiliamos permanentemente de investigaciones sobre la formación de profesores y sobre las condiciones de la enseñanza en las aulas escolares y los laboratorios. Nos interesa sobremanera esclarecer las condiciones del aprendizaje de ideas complejas en situación escolar con la finalidad de usar dicho conocimiento en la mejora de los procesos educativos.

UNA VISIÓN DE LA EVOLUCIÓN DE NUESTRA PROBLEMÁTICA

Durante las últimas décadas hemos visto aparecer al seno de la comunidad de educadores matemáticos, didactas de la matemática o de los matemáticos educativos (según se trate de la tradición de escuela[1] que les cobije), sectores académicos universitarios que se ocupan del estudio de los procesos del pensamiento llamados avanzados en los temas matemáticos de la educación superior. Las temáticas que abordan son posteriores al álgebra básica, digamos que suelen tratar con temas desde el cálculo en adelante. Este vertiginoso crecimiento ha sido posible, en nuestra opinión, gracias a dos factores principales; el primero, debido al creciente interés de los matemáticos profesionales en los asuntos de la enseñanza y del aprendizaje, y el segundo, a causa de la estabilidad y madurez que han alcanzado comunidades de investigación que se organizan en torno de grupos académicos con paradigma propio, como es el caso del grupo internacional del ICMI (International Commission for Mathematical Instruction), del PME (Psychology of Mathematics Education) o de la comunidad de investigadores del Clame (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa) grupos que citamos pues representan un punto de referencia obligada en la actualidad.

Este doble proceso de desarrollo que se nutre de la reflexión matemática al seno de lo didáctico por una parte y de apoyar, por otra, la explicación didáctica con base en la construcción -social e individual- del conocimiento, ha sido en nuestra opinión, una de las principales y más recientes contribuciones de nuestra disciplina: la Matemática Educativa.

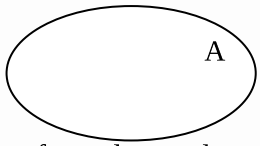
En lo que sigue presentaremos una serie de ejemplos que den cuenta de la evolución de las problemáticas en diferentes momentos que hemos llamado, *una didáctica sin alumnos*, *una didáctica sin escuela*, *una didáctica sin escenarios* y *una didáctica en escenarios socioculturales*.

UNA DIDÁCTICA SIN ALUMNOS

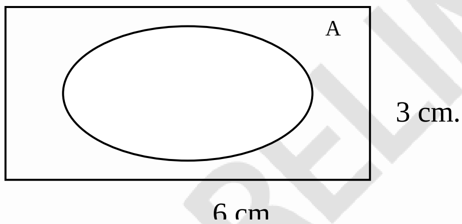
La problemática clásica en matemática educativa se ocupó de diseñar presentaciones del contenido matemático escolar que se consideraban mas accesibles para los alumnos y para los

[1] El nombre de Matemática Educativa da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual; en el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de *Mathematics Education*, mientras que en la Europa continental le han llamado Didáctica de las Matemáticas, *Didactique des Mathématiques, Didaktik der Mathematik*, por citar algunas de las escuelas más dinámicas.

profesores que aquéllas otras presentaciones llamadas tradicionales. Se asumía que una presentación mejor adaptada a la escuela y a sus agentes podría ser construida sólo con la reflexión del profesional de la matemática. Siguiendo esta línea, se produjeron libros de texto y materiales educativos sin tomar en consideración sistemáticamente otros factores como aquellos de naturaleza cognitiva o afectiva o bien los relativos a las cuestiones socio culturales del conocimiento. Se buscaba producir aquello que la escuela habría de consumir, sin estudiar a profundidad la cultura escolar.
Un ejemplo clásico de este enfoque lo constituye la propuesta de aproximación del área de una figura plana mediante particiones cada vez mas finas. Se proponían a los estudiantes diversas actividades de enseñanza para estimar el valor de un área dada, como por ejemplo el área que contiene la figura siguiente.

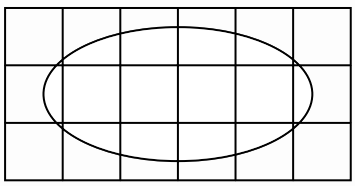


Se proponía introducir una cubierta formada por elementos cuya área es conocida. Por ejemplo, un rectángulo de lados 3 y 6 cm.



De este modo, el área buscada sería menor que 6×3 cm^2. Luego si el área buscada se denota como A cm^2, se cumple entonces con la relación $0 < A < 18$.
A continuación refinaban la aproximación y dividían, por ejemplo, en cuadrados unitarios. Seis a lo largo y tres a lo alto, contando el número de cuadrados en los que quedaba la figura contenida y el número de los que quedaban completamente dentro de la figura. Se proponía por ejemplo $4 \leq A \leq 18$.

Se continuaba refinando la aproximación por iniciativa del docente, y se obtenía nuevas y mejores aproximaciones de manera que la sucesión a_1, a_2, a_3, ... y la b_1, b_2, b_3,... de aproximaciones sucesivas satisfacían las siguientes relaciones:



$a_1 \leq A \leq b_1$
$a_1 \leq a_2 \leq A \leq b_2 \leq b_1$
$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq A \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$
$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq A \leq b_4 \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$
En este proceso, el estudiante no quedaba al cargo del proceso, si acaso sólo de su ejecución. Debido a la naturaleza de la construcción que hemos descrito se sabe que, matemáticamente, el límite de las sucesiones a_n y b_n es, en ambos casos, A, de modo que el proceso de aproximación, conduciría, por una especie de *sensualismo didáctico*, al convencimiento entre los estudiantes de que tal límite existe y de que las concepciones que ellos y ellas tengan sobre lo que es el área y sobre lo que significa representarla mediante aproximaciones, ya sea por exceso o ya por defecto, no producirían dificultades mayores para los profesores al momento de pretender desarrollar esto en sus clases.
Recientemente, a partir de estudios de naturaleza cognitiva, se reporta que los estudiantes tienen mayores dificultades para aproximar las figuras por exceso, que cuando lo hacen por defecto. Era necesario entonces, modificar y ampliar la problemática de estudio en la

matemática educativa al incluir explícitamente al aprendizaje del alumno como factor central del diseño curricular y para el desarrollo de la instrucción en una clase habitual de matemáticas.
Del mismo modo, estas aproximaciones didácticas sin alumnos, hicieron evidente la necesidad de atender aspectos, hasta entonces transparentes para los matemáticos educativos, como el papel que desempeñan las acciones del profesor en los actos de aprendizaje de sus alumnos, o la forma en que los diálogos intervienen en los procesos de desarrollo del pensamiento. De ahí que paulatinamente se hayan incorporado estudios sobre el pensamiento del profesor para dar cuenta de las formas en que el docente conducía un cierto proceso de negociación del significado con sus alumnos. La problemática aunque había sido modificada, no había sido completamente estudiada.

UNA DIDÁCTICA SIN ESCUELA

Hacia la década de los 80's se presentó en la International Conference of Mathematics Education (ICME – 4) un programa de acción en torno del cual se desarrolló paulatinamente nuestra disciplina. Ello se expresó a partir de planteamientos como aquel del profesor Freudenthal al someter a consideración preguntas como la siguiente: ¿Cómo aprenden las personas? y ¿cómo podemos aprender a observar procesos de aprendizaje? En nuestra opinión, ello dio pie a un nuevo paradigma de investigación que modificaba su objeto y su método de estudio. Ello ha derivado en una aproximación cognitiva a la investigación que realiza observación y descripción sistemática de los logros de los estudiantes y de las diversas experiencias de aprendizaje.

Por supuesto una de las pretensiones de esta aproximación fue el que estos estudios cognitivos, en tanto dieran explicación de cómo se aprende matemáticas, pudiesen dar pautas (o al menos aproximaciones) para la articulación de los principios que subyacen a los futuros diseños curriculares.

En esta perspectiva y para el caso de las matemáticas escolares del nivel universitario, uno de los primeros y muy representativos estudios fue el contenido en (Tall y Vinner, 1981). En él se introducen y desarrollan términos como "imagen del concepto" y "definición del concepto". Se dice entonces que el estudiante para definir si un objeto matemático dado es un ejemplo o un contra ejemplo de un concepto no decide necesariamente sobre la base de definiciones aprendidas, sino con relación a la imagen conceptual que ha sido forjada al filo de su experiencia y que representa "*la total estructura cognitiva asociada con el concepto que incluye todas las imágenes mentales, propiedades asociadas y procesos*". Así los estudiantes pueden dar una definición conjuntista de la noción de función (definición del concepto) y negarse a reconocer como una función a una relación funcional definida por dos expresiones algebraicas diferentes sobre dos intervalos: "una función dada por dos fórmulas". De la misma forma, pueden negarse a considerar como iguales a funciones matemáticamente equivalentes pero definidas por procesos diferentes. Ello a causa, según se decía, de que su imagen conceptual de una función estaba ligada a su representación algebraica única.

Para dar una explicación del porque los alumnos dan respuestas diferentes y contradictorias de un mismo problema, D. Tall y S. Vinner introdujeron la noción de conflicto cognitivo potencial. El término "potencial" significa que dos concepciones contradictorias no son necesariamente activadas de manera simultánea, los conflictos cognitivos resultado de la incoherencia de la red pueden incluso no aparecer.

Uno de los ejemplos clásicos en la literatura consistió en dos ejercicios propuestos en una misma hoja a estudiantes que terminan el bachillerato o que inician la universidad, darán lugar a respuestas matemáticas contradictorias sin que esta contradicción sea percibida por los alumnos:

- compare los números 0.999… y 1
- calcule la suma de la serie (9/10 + 9/100 + 9/1000 +…)

En el primero de los casos, la respuesta mayoritaria es: $0.999... < 1$ y se acompaña de diversos tipos de justificación producto de una visión de la escritura decimal ilimitada: "al escribir 0.999999 no se detiene jamás con la escritura, entonces debe ser inferior a uno", asimismo al tener una visión infinitesimalista se dice: "es infinitamente próximo a 1, pero no es igual al 1", "justo antes, debe ser el último número antes de 1". En el segundo caso la respuesta mayoritaria: 1, se obtiene por activación del procedimiento de cálculo de la suma de una particular serie geométrica.

Este tipo de estudios proporcionaron una herramienta útil y eficaz para estudiar el comportamiento cognitivo de los estudiantes ante algún tipo de tareas matemáticas; empero creemos que el desempeño de los alumnos no puede reducirse a la dimensión cognitiva. Pues las relaciones que ellos mantienen con los objetos matemáticos están condicionadas por las representaciones que se forjan más globalmente sobre los que es la actividad matemática, de sus ideas de lo que es el aprendizaje de las matemáticas, de su posición con relación de las matemáticas y más globalmente incluso, de su status como alumno.

De modo que la forma en la que vive una situación de enseñanza y sus producciones matemáticas en ese contexto son condicionadas por las características de la costumbre didáctica. Su comportamiento cognitivo en el seno de la institución escolar puede ser entendida de una manera muy diferente a aquella que brinda su comportamiento cognitivo. La vida en las instituciones matiza los procesos del pensamiento. El término "institución", podemos tomarlo en un sentido amplio: la familia, la clase, la escuela, el sistema educativo, el ambiente social constituido también por otro tipo de organizaciones humanas. Las interpretaciones en términos de concepciones para hacer observaciones de alumnos no son necesariamente las únicas pertinentes ni las más pertinentes. Se les debe concebir como las interpretaciones posibles susceptibles de competir con otras dentro del análisis de fenómenos didácticos.

UNA DIDÁCTICA EN LA ESCUELA; PERO SIN ESCENARIOS

Otra forma de abordar los problemas la constituyeron las aproximaciones sistémicas que han intentado analizar fenómenos didácticos tomando en cuenta la complejidad del sistema en donde suelen considerarse distintos polos: el del saber, aquél de quién aprende y el de quién enseña en un medio determinado. Tratando de esclarecer sus relaciones mutuas a fin de "explicar" los diversos fenómenos didácticos que se suceden en el hecho educativo.

Consideremos para este caso, el ejemplo de los estudios de convergencia de series infinitas. En (Farfán, 1997b) se reporta una investigación que buscó significar entre profesores universitarios al concepto de convergencia de series infinitas haciendo uso de una aproximaciones didácticas novedosas, con el fin de encontrar una veta en la asociación de la noción de convergencia con el estudio científico de la propagación del calor. El fenómeno de la propagación del calor fue una cuestión tratada tanto por la Mecánica Racional como por el Análisis Matemático durante el siglo dieciocho y al cual no dieron, en su momento, una respuesta definitiva.

Para robustecer el aporte sistémico que no limitara las cuestiones del aprendizaje a los procesos puramente mentales, dicha investigación consideró pertinente hacer un estudio del tratamiento del cálculo algebraico en la época que le dio origen, enfatizando los procedimientos heurísticos comúnmente utilizados. Al lado de este desarrollo, se buscaba localizar el surgimiento institucional de la ingeniería matemática sobre la práctica tradicional y desentrañar el papel sustantivo que esa institución de educación superior, la *École Polytechnique*, tuvo para consolidar una tradición educativa, un paradigma del saber y una institucionalización de las prácticas sociales.

Así pues, el problema matemático que ocupó entonces a esa investigación de matemática educativa en el nivel superior, fue el de estudiar la noción de convergencia de series infinitas en los ambientes fenomenológico que les dieron origen, particularmente aquel referido a *la conducción del calor* en estrecha relación con la ingeniería. Todo ello arrojó información didáctica pertinente en virtud de que la conjunción de diversas variables que rebasaba las cuestiones propiamente mentales y abría el camino al estudio sistemático de la formación del conocimiento desde una perspectiva social. El desarrollo del cálculo algebraico y el surgimiento de la ingeniería en el siglo XVIII, resultaron según este programa una materia prima fundamental para el desarrollo de estrategias didácticas para los sistemas educativos contemporáneos.

Este abandono de la perspectiva psicologista, perspectiva característica del periodo anterior, permitió la incorporación de elementos innovadores a la investigación. Por ejemplo, para el caso que hemos citado, se conjeturó, a partir del examen de la obra de Biot, que sería necesario contar como antecedente para la construcción del conocimiento matemático entre los estudiantes, de una serie de actividades que pusieran en juego la medida y la experimentación, el tratamiento de datos. Ello con el fin de que con los cálculos, se desecharan explicaciones del fenómeno basadas en nociones precientíficas, como aquella del calórico. Para ello se hizo uso de las indicaciones suministradas por termómetros, para obtener la primera ecuación diferencial que rige al fenómeno. Esto abrió la posibilidad de articular las clases de matemáticas con las de ciencia y pensar de nueva cuenta la cuestión del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes con base en aproximaciones sistémicas.

De paso, estas investigaciones permitieron además la reconstrucción teórica del campo de conceptos característico del análisis matemático, como por ejemplo la noción de función, el estatus de la expresión analítica, el papel del continuo numérico, así como la interpretación física de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, pues en ese marco, y sólo en ese marco, es que se dio inicio al estudio de la convergencia de series infinitas, pilar fundamental del Análisis Matemático moderno. Como resultado de estos estudios se obtuvieron reformulaciones importantes para las investigaciones en curso, tanto al nivel de las propias hipótesis de investigación como de las posibles preguntas y respuestas de investigación. Se decía entonces por ejemplo que,

...para la construcción de la noción de convergencia de series infinitas, se precisa de un ambiente fenomenológico estrechamente relacionado con la estabilidad de sistemas fluidos. De suerte tal, que determinar el estado estacionario del sistema conduce, necesariamente, a un estudio de la convergencia de una serie trigonométrica infinita... (Farfán, 1997b).

Una vez determinada entonces la citada *fenomenología intrínseca* del concepto de convergencia, algo que se obtenía del estudio de su génesis, se diseñaban apropiados montajes experimentales a fin de estudiar los procesos implementados por grupos de profesores de matemáticas del nivel universitario cuando tenían que involucrar problemas físicos similares a aquellos abordados por Fourier durante el siglo XIX y, por otro, los planteados en un contexto propiamente matemático. Se retomaron entonces los experimentos en las investigaciones en didáctica de las matemáticas con el fin de analizar las ideas intuitivas que sobre la conducción del calor poseían los profesores, así como también aspectos referidos a la representación matemática del fenómeno. Se realizaron exploraciones con diversos propósitos: sobre la definición de convergencia y acerca del límite de una serie de funciones, dada por Abel en 1826. Dichos diseños experimentales se llevaban a efecto en condiciones controladas a lo largo de periodos mas amplios que aquellos usados en los primeros años de la investigación en matemática educativa. En el caso que ahora se reporta, se trabajó durante dos años y medio ininterrumpidamente buscando ambientar de mejor manera los acercamientos propuestos.

De los resultados de esa experiencia en el contexto físico, se observó que si bien la primera intuición sobre el fenómeno es perceptible, esto no ocurre con sus representaciones gráfica y analítica, pues se obtuvieron casi tantas representaciones como respuestas. En realidad, al pedir una representación gráfica estabamos exigiendo un manejo versátil sobre una producción cultural que vincula los contextos físicos con los geométricos, cosa inusual en la enseñanza contemporánea. En el contexto físico por ejemplo, supimos que habría de tenerse una clara referencia para distinguir *lo que varía* respecto *a qué* es lo que produce tal variación[2] para, enseguida, *predecir* cuándo la variación que subsiste ha llegado a un estado estable. Esa predicción era la determinación del estado estacionario al que se aproximan los diversos estados en donde, para cada uno, se tiene determinada su evolución. Precisar la relación existente entre evolución del fenómeno para cada tiempo y predicción fue lo que se les requirió a los profesores; en realidad, estuvimos pidiendo que reconstruyeran la síntesis del intelecto de Fourier en esta tarea de representación.

El estudio de Fourier fue precedido de un análisis cualitativo y empírico del fenómeno físico en cuestión, de la intuición acerca de la certeza sobre la convergencia de la solución, ligada a la naturaleza propia del fenómeno (la temperatura no es infinita). Y sobre ello hacía descansar sus posteriores desarrollos analíticos anteponiendo, así, el contexto físico al geométrico y al algebraico, haciendo uso en este último de habilidades matemáticas propias de la época, ajenas a nuestras tradiciones educativas. No obstante, el estudio de problemas físicos actuales planteados por la ingeniería requiere del análisis cualitativo y de una representación adecuada. De ahí la importancia de estudiar el contexto físico a fin de procurar un acercamiento fenomenológico que posibilite futuros diseños didácticos en contextos afines a la ingeniería en las diversas especialidades que lo propicien.

[2] Esto, sin ser precisamente lo mismo, se vincula a un obstáculo epistemológico reportado en Sierpinska (1992) referido a un esquema inconsciente de pensamiento *...se observan los cambios como fenómenos, enfocando la atención sobre cómo cambian los objetos, ignorando qué cambia...*(*op. cit.*, p. 36). Sierpinska alude al trabajo de Aristóteles en donde su atención se enfoca en cómo los objetos pasan de un estado a otro, y en encontrar una definición de cambio, así como en establecer las categorías de ellos... *En su Física, libro III, capítulo i, Aristóteles define "movimiento de cambio" como una actualización de un estado potencial y dice que "existen tantas clases de movimiento de cambio como clases de ser". Sus ejemplos de movimiento de cambio son: cambio cualitativo, incremento y decrecimiento, rotación, maduración y envejecimiento. Estas denominaciones describen la naturaleza del cambio como una variable que pasa de un posible valor a otro. Sin embargo Aristóteles no se interesó en la variable misma, no centró su atención en métodos y medios para medir sus cambios...*(*ibid.* p.36).

Nuestra hipótesis inicial radicó entonces en que es indispensable, para la construcción de un concepto matemático avanzado, de la significación que le dio origen; en este caso, de la determinación del estado estacionario. Sin embargo, descubrimos también que este concepto físico no es producto de la primera experiencia sensible; baste decir que la humanidad conoce, requiere y manipula el calor desde tiempos remotos, en tanto que su estudio científico se inicia con el siglo XIX, poco después de la publicación de la *Mecánica Celeste* de Laplace. Es decir, se ha estudiado la naturaleza del espacio que circunda el globo terrestre antes de dar cuenta de un fenómeno vital para la vida humana. Ello no fue gratuito, la abstracción requerida para la adquisición del concepto físico involucrado representa una tarea cognitiva de las más complejas. Nadie se atrevería a levantar una olla que contiene agua en ebullición sosteniéndola por su base: esta decisión es producto de la intuición primitiva (casi instintiva). Pero, ¿podré admitir que, siendo el flujo de calor constante (no hay aumento de temperatura), las temperaturas en los puntos difieran?... es tanto como admitir *variabilidad* dentro de la estabilidad. Esto último no se deriva de la experiencia sensible, sino de una profunda abstracción y reflexión del fenómeno para lo cual se requiere de un amplio repertorio de habilidades no cultivadas en el ámbito escolar. De lo que se desprendió la obligatoriedad de desarrollar la intuición más allá de lo sensible, como una etapa previa, antes de significar nuestro particular concepto matemático.
En síntesis, este tipo de estudios proporcionaron la explicación que niega, al menos parcialmente, nuestras hipótesis de partida, a saber, si bien es cierto que el concepto surge en el ámbito de la determinación del estado estacionario; éste no resulta propicio para recrearse en el aula pues resulta ser mas complejo que aquél que deseamos introducir. Esto último nos indujo a incorporar aspectos sociales en las investigaciones didácticas. Poner una mayor atención en la construcción social del conocimiento, aunque esto significara perder, en un cierto sentido, el ámbito propiamente escolar y adicionar al campo de la matemática educativa otras prácticas de referencia como la del tecnólogo, ingeniero, etc. lo que implicó en su momento, en un cambio conceptual de centración. No mirar los conceptos y sus diferentes estructuraciones conceptuales en forma aislada, sino tratar con las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos. Del concepto a las prácticas, el nuevo reto.

UNA DIDÁCTICA EN ESCENARIOS SOCIOCULTURALES

Como lo reportan diversas revisiones recientes (Artigue, 1999; Cantoral, 2000), los estudios que tratan sobre la didáctica de la matemática en el nivel superior, por ejemplo las de análisis matemático, han usado distintas metáforas del aprendizaje que conservan, en algún sentido, puntos comunes, como por ejemplo el uso de la tesis central que proporciona la epistemología genética relativa al desarrollo del pensamiento. Apuntamos el hecho de que esas investigaciones se han centrado en problemáticas que se ocupan de la matemática relevante en la enseñanza superior, asumiendo que la matemática interviene en ese nivel casi exclusivamente como disciplina principal de enseñanza olvidando un hecho fundamental que caracteriza al sistema didáctico de la educación superior; también y quizá con mayor fuerza, la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación.
La línea de investigación que se desarrolla en el grupo de investigación del Área de Educación Superior del DME considera como necesidad básica, el dotar a la investigación de una aproximación sistémica y situada, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple, que en la jerga le nombramos "la cuarta dimensión", le hemos llamado formalmente el acercamiento socioepistemológico[3]. En este sentido, el pensamiento y el lenguaje variacional es entendido como una línea de investigación que, ubicada al seno del acercamiento socioepistemológico, permite tratar con la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas

[3] Este acercamiento fue presentado en el Seminario de Investigación en Matemática Educativa del Área de Educación Superior del Cinvestav en México y en una conferencia plenaria de la Conference on Research in Mathematics Education en EUA durante el mes de septiembre de 1997.

didácticos.

Actualmente se desarrollan estudios sobre currículo, en los que se busca determinar cuáles deben ser los contenidos por enseñar, considerando la evolución de la matemática y las necesidades sociales que el sistema educativo espera cubrir con la escuela; otra mas sobre la instrucción, es decir de las actividades que acompañan al aprendizaje, se busca la mejora de los métodos de enseñanza, los problemas que se enmarcan en torno a la transmisión oral del conocimiento, los procesos cognitivos, la motivación y creación de actitudes positivas. Se pone cierta atención sobre recursos, específicamente sobre aquellos que refuerzan el proceso de enseñanza, los materiales educativos, las calculadoras y computadoras, y la manera en que los medios audiovisuales se habrían de introducir en las aulas. Así mismo se realizan investigaciones que tratan de la vida del conocimiento en la escuela. Se busca determinar la influencia que el sistema escolar ejerce en los aprendizajes; se determinan las matemáticas que se aprende en y fuera de la escuela y se trata del papel de los medios de comunicación, los entornos familiares o gregarios con los grupo de estudiantes. Se quiere también investigar sobre el sistema escolar para saber el rumbo y sentido de las decisiones políticas o sociales que modifican al funcionamiento del sistema educativos.

Veamos a continuación, en forma resumida, un ejemplo de los estudios que cumplen con este tipo de características. Se pretende comunicar los aspectos relevantes de un programa de investigación con que buscamos construir una base de significaciones para procesos y conceptos del análisis matemático del nivel universitario. Este acercamiento inicia con una serie de actividades que buscan la construcción, entre los estudiantes, de un universo de formas gráficas que sea a la vez, amplio y estructurado; y se continua con el desarrollo de la noción de predicción de los fenómenos de flujo apoyados en el binomio de Newton. La combinación de ambas tareas, sostenemos esta hipótesis, favorece al desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional.

La línea de investigación que desarrollamos considera necesario dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple le llamamos el acercamiento socioepistemológico.

El desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados. Supone del dominio de la matemática básica y de los mecanismos del pensamiento asociados, pero exige diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional. Dichas rupturas no pueden sostenerse con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce de la construcción de los números reales, ni tampoco descansar en la idea de aproximación; sino que deben permitir la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio.

Al iniciar un curso de análisis, el estudiante debe concebir a la función como un objeto, y por ende susceptible de las operaciones que otro procedimiento efectúe sobre ella. En nuestras experiencias hemos encontrado que en caso de tener un dominio del contexto gráfico/visual, será posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones. El problema didáctico estriba fundamentalmente en la dificultad para adquirir maestría en el contexto geométrico, por ejemplo, en el plano de la argumentación es más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que hacerlo geométricamente.

Nuestra primera hipótesis consiste en asumir que la introducción al análisis precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite la transferencia de campos conceptuales ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico. Esta hipótesis ha sido desarrollada siguiendo dos directrices; en primer término, se presenta la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables dando sentido a operaciones fundamentales. El segundo aspecto, lo constituye la posibilidad de construir un universo amplio de funciones a partir de algunas primitivas.

Pasemos a la segunda tesis de nuestra aproximación. El binomio de Newton se escribe por vez primera como $(P+PQ)^{m/n}$ y no como $(a+b)^n$. Ello obedece a una concepción alternativa que se apoya en una epistemología que difiere de la que hoy enseñamos en clase. Atiende a un programa en el dominio de la ciencia con el que se busca predecir el comportamiento de los fenómenos de cambio. Un programa de matematización de los fenómenos modelables mediante la metáfora del flujo de agua aplicada por igual a la evolución de otras magnitudes.

Esa noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar entonces el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio, de la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente.

El objeto matemático, binomio de Newton se presenta como una entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una clase de situaciones que requieren de la predicción, de donde transita hasta llegar a tomar la forma abstracta del concepto de función analítica.

En nuestra opinión, estos hallazgos favorecen la discusión y elaboración de propuestas de enseñanza que traten sobre el qué enseñar y no sólo, como ha sido habitual, sobre el cómo enseñar. En síntesis, nuestra línea de investigación toma como objeto de estudio a la socioepistemología de los saberes matemáticos e incluye las intuiciones primarias del alumno con el fin de rediseñar el discurso matemático escolar.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1992). Didactic Engineering. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *Selected Papers,* 41- 66.

Artigue, M. (1999). L’évolution des problématiques en Didactique de l’Analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18*(1), 31 - 63.

Biehler, R., Scholz, R. W., Sträber, R. y Winkelmann,B. (Eds.) (1994). *Didactics of Mathematics as a scientific discipline*. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 33-112.

Cantoral, R. (2000). *El futuro del cálculo infinitesimal: ICME 8, Sevilla España*. México: Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1997). *An example of the Sociological Point of View in Math Education: The Case of Analytical Functions at the University Level*. Principal speaker, Conference on Research in Mathematics Education. Michigan State University, EUA.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon,* No. 42, 353 – 369.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados (un estudio del discurso matemático escolar).* Tesis doctoral Cinvestav – IPN, México.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna, Italia: Pitagora Editrice.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática,* (pp. 61-96). Colombia: Editorial Iberoamérica.

Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.) (1992). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy*. EUA: MAA, Notes 25.

Farfán, R. (1995). Ingeniería Didáctica, *Pedagogía 10* (5), 14-23.

Farfán, R. (1997). La investigación en matemática educativa en la reunión centroamericana y del Caribe referida al nivel superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1*(0), 6-26.

Farfán, R. (1997a). Problemática de la enseñanza de las matemáticas en América Latina. En D. Calderón y O. León (Eds.) *La didáctica de las disciplinas en la educación básica* (pp. 123-146), Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Farfán, R. (1997b). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Editorial Iberoamérica.

Farfán R. (1998). Problemi e sfide dell'insegnamento della Matematica nell'America Latina. En D'Amore (Ed.). *Diversis Aspetti e Diversi Àmbiti della Didattica della Matematica. Incontri con la Matematica* 12,(pp. 25-32). Italia: Pitagora Editrice.

Filloy, E. (1981). Investigación en matemática educativa en México. Un reporte. *Recherches en Didactique des Mathématiques 2*(2), 233-256.

Garnica, I. (1988). *Elementos para un estudio introductorio a la actividad educación matemática*. Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México.

Hitt, F. (1998). Matemática Educativa: Investigación y desarrollo 1975 – 1997. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 41-65). México: Editorial Iberoamérica.

Imaz, C. (1987). ¿Qué es la Matemática Educativa? En E. Bonilla, O. Figueras y F. Hitt (Eds.). *Publicaciones Centroamericanas 1*(1), 267-272.

Nesher, P. y Kilpatrick J. (Eds.). (1990). *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis of the International Group for the PME*. Cambridge University Press.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.) *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy*. (pp. 23 – 58). EUA: MAA, Notes 25.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Vinner, S. y Tall, D. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*: 151-169.

Waldegg, G. (Ed.). (1996). *Procesos de enseñanza y aprendizaje* (3 Vols.) Consejo Mexicano de Investigación Educativa, AC México.

Ricardo Cantoral y Rosa María Farfán
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemática Educativa
Avenida Instituto Politécnico Nacional #2508
07360, San Pedro Zacatenco, México, DF
Teléfonos: (52-5) 7473800 exts. 6043 y 6019
Fax: (52-5) 7473823

E-mail: rcator@mail.cinvestav.mx
rfarfan@mail.cinvestav.mx