MARXE DE ERRO E FIABILIDADE NUN ESTUDIO ESTATÍSTICO:

proposta para o Ensino Secundario Obrigatorio

Antón Labraña
CEFOCOP. Santiago de Compostela

- Porque, ¿cres que eses homes viron de si mesmos ou doutros algo que non fora as sombras proxectadas polo lume da caverna, xustamente enfronte deles?
¿E non cres que lles darían ás sombras que ven os nomes das cousas?
- De certo, eses homes teñen que pensar que o único verdadeiro son as sombras.

Platón, VII libro da República

INTRODUCCIÓN

Na educación obrigatoria tódolos estudiantes deberan adquirir aqueles coñecementos que lles permitisen comprender basicamente a sociedade na que viven. Se, nesta perspectiva, algunha matemática se revela especialmente útil, amais da aritmética elemental, esa é a Estatística.

Despois das eleccións xerais do 3 de marzo puidemos asistir a un apaixonado debate postelectoral que se cebou no pretendido descalabro das enquisas. Varios periodistas, expertos comentaristas políticos, mantiñan unha discusión que se resume nestas dúas frases que recollo:

"a estatística falla"
"non falla, pero a xente mente"

Certamente, non foi un período esplendoroso para a estatística pero a crítica require unha seriedade e unha mínima formación da que, polo menos así o parece, os "expertos comentaristas" carecen.

Nunha sondaxe electoral, a estatística "mide" o grao co que unha mostra determinada de individuos pode informarnos do que *declararían* naquel momento[1] a totalidade dos electores. A partir de aquí, son factores sociolóxicos e non matemáticos os que entran en xogo.

Outros estudios (estaturas, accidentes, producción,...) non están

1 ¡Aqueles datos foran obtidos antes de que empezara a campaña! (campaña na que debemos incluí-lo propio peso que os resultados das sondaxes teñen na opinión).

sometidos a estes avatares, pero aínda neles a estatística non é categórica nas súas afirmacións.

Neste artigo presento un intento de adentrarme nos "interiores" dunha sondaxe estatística que se faga comprensible para os estudiantes de Secundaria Obrigatoria, e con el lanzo a proposta ós profesores de matemáticas de chegaren a desenvolver unha didáctica deste tema que faga posible finalmente que tódolos cidadáns do ano 2000 comprendan, polo menos nun nivel básico, esta cuestión tan presente na súa realidade.

PRECISIÓN DA INFORMACIÓN E CONFIANZA NA SÚA VALIDEZ

A información proporcionada pola análise dunha mostra estatística representativa dunha determinada poboación non pretende acertar con exactitude no conxunto dela, senón que se formula cunha certa aproximación (marxe de erro) e, mesmo tolerando este, tampouco sería totalmente fiable.

A "ficha técnica" que acompaña os resultados expresa precisamente estas características, *que gardan relación entre si*:

FICHA TÉCNICA

Ámbito: Nacional excepto Ceuta, Melilla y las Islas Canarias.
Universo: Población de 15 y más años de edad.
Muestra: 1.017 casos.
Muestreo: Aleatoria estratificado por área geográfica y tamaño de hábitat. Selección final del informante según cuotas de sexo y edad.
Entrevista: Telefónica.
Trabajo de campo: De 2 a 5 de julio de 1996.
Margen de error: + - 3,1% apra p=q=0,5 y un nivel de confianza del 95,5% para datos globales.
Instituto responsable: Gallup España.

LOS ESPAÑOLES RECLAMAN UN REFERENDUM SOBRE LA INTEGRACIÓN EN LA OTAN

Comunicarlle ó lector estas circunstancias é unha cuestión de honestidade profesional, pero de nada serve mostra-la ficha se o seu contido non se comprende nin sequera dun xeito intuitivo.

Certamente, os conceptos que nela hai implícitos son dun nivel considerable e, aínda que as dificultades non han ser poucas, como ensinantes podemos (e, pola súa transcendencia, penso que debemos) asumi-la tarefa da súa divulgación como un problema profesional no que se non atopamos de contado unha solución xeral, confiaremos en achegarnos progresivamente[2] a ela.

1.- Unha situación coloquial e moi sinxela na que aparecen estas ideas é cando lle botámo-la idade a unha persoa:

Se dicimos que terá entre 40 e 60 anos, confiaremos máis en estar no certo ca se dicimos que ten entre 48 e 52, pero neste último caso a información é moito máis precisa.

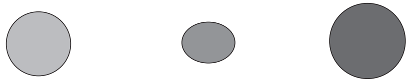
Pódese practicar con facilidade sobre casos reais, nos que concluiremos que con canta maior exactitude intentemos da-lo dato, maior será o risco de equivocarnos.

2.- Un xogo con, por exemplo, tres dianas de diferente diámetro:

Podería axudar a ensinar cómo os dous conceptos, precisión e confianza, se interrelacionan.

Lánzanse tres dardos (ou os que desexemos) a unha das dianas, que antes se elixe libremente.

8 puntos 10 puntos 6 puntos



O exercicio ten, ademais do contido estatístico e á parte de afina-la puntería[3], interese numérico: ¿que

2 Xa dende idades moi temperás pódense fomentar intuicións válidas que, amais do interese que en si mesmas teñen, servirán de soporte para posteriores afondamentos.

3 Obviamente non é necesario executa-lo xogo para decatarse de que a elección que dá máis puntos require maior precisión no tiro, o que fai máis difícil o acerto. En calquera caso, é unha actividade bonita para un recreo chuvioso.

resultados podo obter e cales me compensan a cales outros?

¡QUE MALA SORTE!

Unha actividade moi formativa é a de facer grupos (combinacións, variacións, ...) a partir dun conxunto dado de elementos. Refírome a escribilos realmente, sen prexuízo de que pouco despois se desenvolvan técnicas que permitan calcular cántos grupos poden formarse segundo os criterios que se sigan para facelos. Situémonos, polo de agora, en 1º da ESO:

1.- Cada alumno parte un folio en 8 anacos iguais, facendo papeletas nas que poñeremos as letras A, B, C, D, e, f, g, h, respectivamente maiúsculas e minúsculas, que representan as catro rapazas e os catro rapaces que van xuntos á clase de baile. (Non sería difícil facelas coincidir coas iniciais: Ana, Beti, Carme, Dami, ernesto, fran, gonzalo e hilario[4]).

catro rapazas

A	B	C	D

catro rapaces

e	f	g	h

4 Permítaseme esta licencia ortográfica.

Mañá hai exame de "mates", catro quedaron a estudiar e os outros catro van bailar.

Imos agora barallar e elixir ó chou os catro que van bailar: *¿cantas parellas poderemos facer?* (débese ter en conta que os "pasos" de homes e mulleres non coinciden, polo que non teñen roles permutables).

O que pretendemos é observar en qué medida a *mostra* extraída reflicte a igualdade numérica entre as dúas opcións e ata qué punto a reflicte con certa aproximación.

Mentres elixen, no encerado iremos pintando unha táboa e logo eles dictarán os datos ordenadamente:

Táboa-1

mostra extraída	mulleres + homes	parellas
B, C, f, h	2 + 2	2
A, e, g, h	1 + 3	1
....	....	

Este tipo de actividade ten, ademais, unha pequena, pero non desprezable, compoñente actitudinal, en canto que todos se senten partícipes. (É obvio que a táboa debe ter tantas filas coma alumnos).

2.- Unha vez que teñámo-la lista completa, algúns tipos de combinacións amosaranse máis propicios ca outros e, á vista disto podemos preguntar:

¿Cal credes que é o resultado máis probable? (ou máis posible, como din eles) ¿Por que?

Haberá clase de baile con tal de poder formar unha parella. Indo catro, ¿é seguro que haberá clase?, ¿e case seguro?, ¿por que?

A Dami facíalle moita falta quedar a estudiar, pero tiña paixón por danzar. Analizou detidamente as diferentes posibilidades e, finalmente, foi ata o pavillón onde tiñan o baile.

Cando chegou había xa tres persoas .... pero non houbo clase. E ó día seguinte suspendeu as matemáticas; "¡que mala sorte!", dicíase unha e outra vez ¿Con quen se atopou no pavillón? ¿Tivo mala sorte? ¿Por que?

3.- Agora procede escribir tódalas posibilidades. O exercicio, tal como se indicaba, esixe método e rigor, de aí o interese na súa realización, ademais do seu resultado.

Resumiremos noutra táboa:

Táboa-2

Mulleres + homes	posibilidades	parellas
4 + 0	**1**	0
3 + 1	**16**	1
2 + 2	**36**	2
1 + 3	**16**	1
0 + 4	**1**	0

O resultado 2 + 2 reflicte exactamente a proporción real de toda a *poboación* (os oito iniciais), e hai 36 posibilidades entre 70 de obtelo.

Se decidimos admitir resultados aproximados a el (3 + 1 e 1 + 3, que permiten o baile), a representación non é tan precisa, pero as posibilidades aumentan notoriamente: son agora 68 entre 70.

Pero o azar está presente e, aínda sendo difícil, podemos ter *mala sorte* sen que poidamos atribuír un resultado non esperado a defectos da ciencia estatística ou a falseamentos de datos.

ADENTRÁMONOS NUNHA SONDAXE

En 4º da ESO, no estudio da combinatoria podemos chegar a resolver problemas nos que interveñen dous tipos de elementos que non se mesturan entre si, como nas matrículas dos coches (números e letras), aliñacións de equipos (defensas, medios, dianteiros,...), menús dun restaurante (1º prato, 2º prato, sobremesa), etc.

A partir de aí parece factible introducirse na análise de mostras:

1.- Práctica:

Para chegar significativamente a expresións do tipo $\binom{5}{3}\binom{3}{1}$, realizariamos exercicios como os seguintes: no primeiro deben escribi-los resultados, mentres que no segundo deben calcular, ou sexa, aprender un método eficaz.

a) Nunha bolsa temos 4 bólas azuis marcadas coas letras A, B, C, D, e 2 bólas vermellas marcadas con e, f.

Sacamos 3 bólas simultaneamente; *escribe* tódalas posibilidades que poden darse con:

- 2 azuis e 1 vermella	- 3 azuis
- 1 azul e 2 vermellas	- Busca outros tipos diferentes de extracción

- Calcula as probabilidades en cada caso

b) Se temos 5 bólas azuis (A, B, C, D, E) e 3 vermellas (f, g, h), e extraemos 4 delas, calcula (pero *non escribas tódolos casos,* soamente algún para pensar mellor):

- ¿Cantas posibilidades hai de que 3 sexan azuis e 1 vermella?

- ¿Cantas de que haxa dúas de cada?

- ¿Que outros tipos de extracción poden resultarnos?

- Calcula as respectivas probabilidades.

Agora imos necesitar algún aparello de cálculo de relativa potencia[5]. Por outra parte, cabe sinalar que xa é tempo de que estes instrumentos adquiran nas aulas a categoría de normalidade que teñen na vida; máis aínda, a institución escolar non pode permitir que cadaquén os utilice como lle pareza, debe ocuparse de ensinar a usalos.

1.- Temos unha bolsa con 35 bólas azuis (A) e 15 vermellas (V), 50 en total na proporción de 7:3 (ou 70 % A e 30 % V).

Imos extraer unha mostra de 10 bólas.

O resultado 7A + 3V reflectiría exactamente a proporción do conxunto. Pero non imos ser tan ambiciosos, conformámonos con aproximarnos 1 arriba-1 abaixo (o que equivale a unha marxe de erro do 10%). Queremos saber qué probabilidade temos de que a mostra extraída estea nese intervalo.

Táboa-3

Tipos de mostra aceptados	**¿Cantas mostras hai deste tipo?**
6 A + 4 V	$C_{35,6} \cdot C_{15,4}$ = 2´215 E9
7 A + 3 V	$C_{35,7} \cdot C_{15,3}$ = 3´059 E9
8 A + 2 V	$C_{35,8} \cdot C_{15,2}$ = 2´471 E9
Total de casos a favor	7´746 E9
Casos posibles	$C_{50,10}$ = 10´272 E9
Probabilidade	7´746 E9 / 10´272 E9 = 0´754 → 75´4%

Se por azar tomase unha mostra do grupo central, acertaría na proporción da poboación.

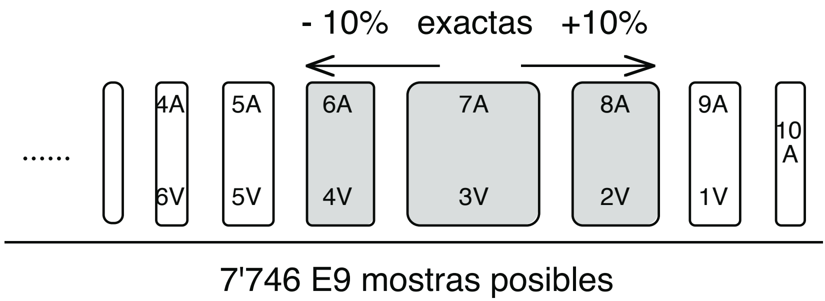
Se por azar tomase unha mostra do grupo anterior ou posterior, estaría a un 10% do resultado correcto.

5 Con números pequenos é moi difícil detectar sucesos estatisticamente relevantes. Escollín estes números para poder introduci-la expresión: “1 arriba - 1 abaixo”

A probabilidade ou confianza de que a mostra elixida represente, cunha aproximación do 10%, á poboación é do 75,4%.

Representación gráfica

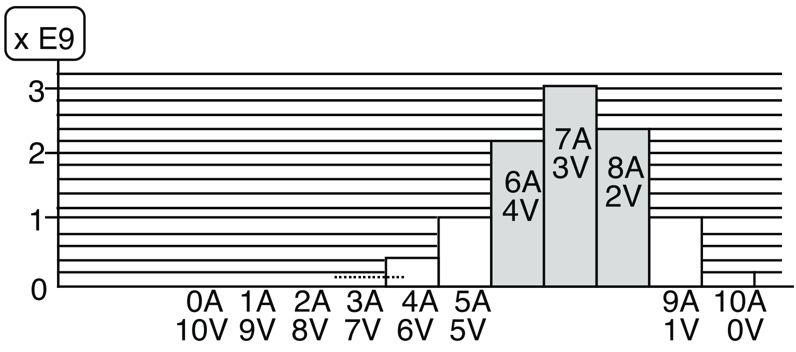
a) Gráfico cualitativo:



As mostras sombreadas serían as aceptables con esa marxe de erro permitido (10%).

A probabilidade de coller unha mostra das sombreadas é do 75,4%.

b) Gráfico cuantitativo:



Conflicto cognitivo

Metidos na lectura de "fichas técnicas" das enquisas, unha das cousas que máis sorprenden é atoparse que sondaxes feitas co mesmo número de entrevistas dean para Galicia a mesma confianza e a mesma precisión que para toda España.

Debo recoñecer que isto me desorientou inicialmente. Supoñía que o comportamento das mostras non sería lineal, pero tampouco esperaba tanto.

Máis adiante puiden comprobar como, sobre disto, está moi estendida a confusión entre mozos e adultos (tamén nos universitarios), e aínda o está a crenza de que o tamaño da mostra debera ser proporcional ó tamaño da poboación que se pretende estudiar.

Comentei este e outros aspectos máis comúns con compañeiros especialistas en estatística e mesmo no correspondente departamento da Facultade de Matemáticas, procurando información.

A escasa formación estatística da poboación é realmente preocupante, ¿seremos quen de pórlle remedio?

Certamente, a grande esquecida (agás honrosas excepcións) do ciclo superior da EXB e dos primeiros anos do Ensino Medio foi a Estatística, a pesar de que figuraba nos programas. Agora tamén figura en Primaria e Secundaria; nas nosas mans está que non suceda o mesmo.

2.- Dupliquemos agora a poboación e, acordes co prexuízo, dupliquemos tamén a mostra.

Temos, pois, unha bolsa con 70 bólas azuis (A) e 30 vermellas (V), 100 en total na proporción de 7:3 (ou 70 % A e 30% V).

Imos extraer unha mostra de 20 bólas.

O resultado 14A + 6V reflectiría exactamente a proporción do conxunto. Pero non sendo tan presuntuosos, conformámonos con aproximarnos un 10 %, que agora será 2 arriba-2 abaixo. Queremos saber qué probabilidade temos de que a mostra extraída estea nese intervalo.

Táboa-4

Tipos de mostra aceptados	¿Cantas mostras hai deste tipo?
16 A + 4 V	**$C_{70,16} \cdot C_{30,4}$ = 6´796 E19**
15 A + 5 V	$C_{70,15} \cdot C_{30,5}$ = 10´281 E19
14 A + 6 V	$C_{70,14} \cdot C_{30,6}$ = 11´474 E19
13 A + 7 V	$C_{70,13} \cdot C_{30,7}$ = 9´663 E19
12 A + 8 V	$C_{70,12} \cdot C_{30,8}$ = 6´226 E19
Total de casos a favor	4´444E20
Casos posibles	$C_{100,20}$ =5´360 E20
Probabilidade	7´746 E9 / 3´967 E11 = 0´829 → 82´9%

Se por azar tomase unha mostra do grupo central, acertaría na proporción da poboación.

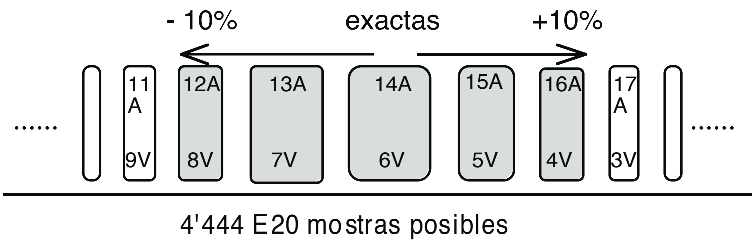
Se por azar tomase algunha das outras mostras "aceptables", estaría a un 10%, ou a menos, do resultado correcto.

A probabilidade ou confianza de que a mostra elixida represente, cunha aproximación do 10%, á poboación é case o 83%.

Logo, aínda sendo o tamaño da mostra proporcional ó da poboación, a mostra pequena é máis *débil* cá outra.

Representación gráfica:

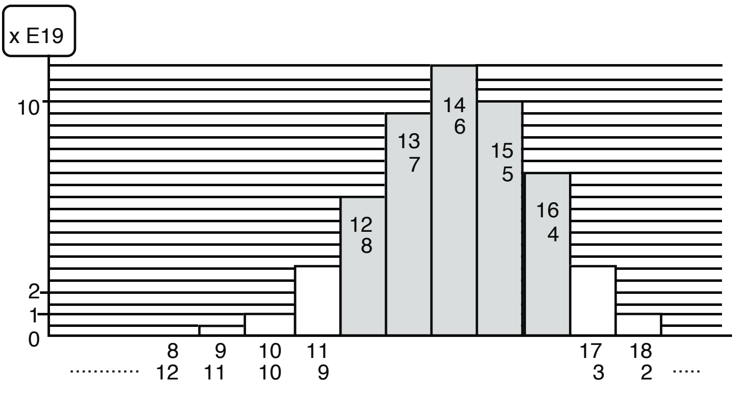
a) Gráfico cualitativo:



As mostras sombreadas serían as aceptables con esa marxe de erro permitido (10%).

A probabilidade de coller unha mostra das sombreadas é do 82,9%.

b) Gráfico cuantitativo:



Podemos observar como o gráfico resultante ten un xeito semellante ó do exemplo anterior, o que pode introduci-la sospeita de que responden a un mesmo modelo.

O traballo sobre esta conxectura quedaría indicado para Bacharelato[6].

UN PASO MÁIS

A indagación anterior suxire que as mostras grandes tenden a "parecerse" máis á poboación completa.

Claro que traballamos soamente con dúas opcións (A e V), e sen outros condicionantes que puidesen complica-lo estudio[7]. Estamos posibilitando intuicións que sexan unha primeira aproximación ó complexo tema da "representatividade".

Quizais conveña reforzar cun elo máis a cadea: repitámo-lo proceso de duplica-la poboación e duplicar tamén o tamaño da mostra.

Temos, pois, unha bolsa con 140 bólas azuis (A) e 60 vermellas (V), 200 en total na proporción de 7:3 (ou 70 % A e 30 % V).

Imos extraer unha mostra de 40 bólas.

O resultado 28A + 12V reflectiría exactamente a proporción do conxunto. Pero conformámonos con aproximarnos un 10 %, que agora será 4 arriba-4 abaixo. Queremos saber qué probabilidade temos de que a mostra extraída estea nese intervalo.

Non vou reproducilo todo (aínda que os alumnos si deberan facelo, para afirmarse na comprensión) pero si vou indicar que obtemos case o 92%[8].

Esta pode ser unha boa vía para, analizando algún caso menos inmediato, albergar esperanzas de que non se precisará unha cantidade inmensa de datos na mostra aínda que a poboación sexa enorme (teoricamente infinita), para obter un alto nivel de fiabilidade.

Isto permitiría comprender por qué unha poboación de tres millóns e outra de corenta poden, en moitas ocasións, ser estudiadas cunha mostra de arredor dos 1 000 elementos.

6 Subxace unha distribución normal.

7 Na "ficha técnica" podemos ler p = q = 0´5. Isto significa que o estudio estatístico se fai no suposto de que as dúas opcións sexan igualmente probables, que é o caso máis difícil para o estatista. No noso exemplo temos p =0´7 e q = 0´3 pero, se non coñecesemos a priori a proporción das bólas, deberiamos situarnos no caso p = q = 0´5, o que faría descender ó 71 % e 79 % a fiabilidade nas dúas mostras que analizamos.

Para corrixir isto teriamos que aumenta-lo tamaño da mostra, ou sexa garanti-la veracidade dos cálculos, incluíndo máis individuos da poboación dos que quizais fosen necesarios.

8 Creo que, chegados a este punto, conviña recordar que o 100% significaría a seguridade absoluta de acertar.

¿POR QUE AS MOSTRAS SE COMPORTAN ASÍ?

1.- A primeira reflexión vén a conto da pregunta *¿que mostras admitiremos como válidas?*

Vemos que para mostras grandes o abano de opcións aumenta: hai máis onde elixir, máis diversidade de combinacións que, non sendo "calcadas" á proporción real, son moi semellantes a ela.

Táboa-5

poboación	mostra					proporción				
50	10				6A 4V	**7A** **3V**	8A 5V			
100	20			12A 8V	13A 7V	**14A** **6V**	15A 5V	16A 4V		
200	40	24A 16V	25A 15V	26A 14V	27A 13V	**28A** **12V**	29A 11V	30A 10V	31A 9V	32A 8V

2.- Un enfoque alternativo (ou mellor, complementario), sería traballar con fraccións. Mostro só a parte dereita do abano (a esquerda sería semellante):

$$\frac{7}{3} = 2'33 \rightarrow \frac{6}{4} = 1'50$$

$$\frac{14}{6} = 2'33 \rightarrow \frac{13}{7} = 1'87 \rightarrow \frac{12}{8} = 1'50$$

$$\frac{28}{12} = 2'33 \rightarrow \frac{27}{13} = 2'07 \rightarrow \frac{26}{14} = 1'85 \rightarrow \frac{25}{15} = 1'66 \rightarrow \frac{24}{16} = 1'50$$

Cando a fracción está composta de números grandes, pequenas variacións deles inflúen pouco no resultado. Podemos reforzar esta apreciación:

$$\frac{70}{30} = 2'33 \rightarrow \frac{69}{31} = 2'22 \rightarrow \frac{68}{32} = 2'12 \ \ldots\ldots$$

$$\frac{700}{300} = 2'33 \rightarrow \frac{699}{301} = 2'32 \rightarrow \frac{698}{302} = 2'31 \rightarrow \frac{697}{303} = 2'30 \ \ldots\ldots$$

Poderiamos enuncia-la conclusión dicindo que *as fraccións tenden a estabilizarse a medida que medran os números que as forman, resistindo pequenas oscilacións sen a penas cambiar de valor*.

UNHA VOLTA DE ROSCA

A análise anterior suxire que se reducisémo-la marxe de erro a, poñamos por caso, o 5%, pode que as mostras pequenas aínda se debiliten máis.

Na seguinte táboa quedan unicamente as mostras que terían validez:

Táboa-6 **(para unha marxe de erro do 5%)**

poboación	mostra			proporción			confianza
50	10			**7A** **3V**			29´7%
100	20		13A 7V	**14A** **6V**	15A 5V		58´6%
200	40	26A 14V	27A 13V	**28A** **12V**	29A 11V	30A 10V	66´5%

¿POR QUE A REALIDADE IMITA Á MATEMÁTICA?

No III Congreso ENCIGA (Monforte de Lemos, 1990) presentei unha experiencia na que se trataba, entre outras cuestións, a *regularidade estatística* ou *lei dos grandes números*.

Utilizábase un xogo no que se lanzaban dous dados e se sumaban as súas puntuacións. As partidas requirían uns 25 lanzamentos.

Cada partida, illadamente, a penas deixaba entreve-las probabilidades subxacentes, pero ó reuni-los datos de toda a clase *emerxía unha realidade que imitaba sen disimulo as previsións da matemática*.

Resúmoo nun cadro:

Puntos	Carlos	Susana	Probabilidade	Previstos en 489 lanzamentos	Obtidos nos 489 lanzamentos
2	0	0	1/36	13	11
3	5	2	2/36	27	28
4	1	2	3/36	40	41
5	4	3	4/36	54	53
6	3	6	5/36	67	72
7	2	4	6/36	81	81
8	1	4	5/36	67	60
9	4	3	4/36	54	59
10	4	2	3/36	40	43
11	1	0	2/36	27	22
12	0	1	1/36	13	16

Unha explicación ortodoxa consistiría en analiza-las diferentes opcións que poderiamos ter con 489 lanzamentos, tal como procedemos nos exercicios anteriores coas bólas. Claro que as bólas habíaas todas (as escollidas e as que quedaron sen escoller) e, agora, lanzamentos soamente hai os que fixemos[9].

Pero tamén, esta aproximación da realidade á matemática podemos interpretala en termos de mostras.

9 Isto, que pode obviarse se se desexa, non é trivial e ten relación con outro conflicto cognitivo coñecido como "a memoria do azar".

Efectivamente, xogar unha partida suporía a "extracción" dunha pequena mostra (arredor dos 25 elementos) dunha poboación infinita (a de tódolos lanzamentos de dous dados) que dificilmente podería representarse con tan poucos elementos.

Reunir varias partidas significaría aumenta-lo tamaño da mostra elixida e, consecuentemente, a probabilidade de que ela se aproxime á poboación real.

¿Poboación real de tódolos lanzamentos de dous dados?; ¡que estrañas palabras!, se os lanzamentos aínda están por facer.

Pero se xa existisen tódolos infinitos lanzamentos segundo a distribución ideal, unha serie de tiradas non consistiría máis que nunha escolla aleatoria dunha pequena parte deles, unha representación sensible deles. En todo caso, esta pequena concesión á filosofía platónica permite unha coherencia e unha claridade expositiva moi aproveitables.