EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **10**, Núm. 1, 46 – 51 (1995)

Stabilisation par Retour d'Etat d'un Système Bilinéaire en Dimension Infinie

Y. EL BOUKFAOUI, A. BOUNABAT AND H. BOUSLOUS

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences,
Univ. Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc

(Presented by W. Okrasiński)

AMS *Subject Class.* (1991): 93D15 *Received October* 4, 1994

1. Introduction

Le problème de stabilisation d'un système bilinéaire par retour d'état, a fait l'objet de nombreux travaux. On peut citer à titre d'example [4] et [7], quand la dimension de l'espace d'état est finie et [1],[2],[3] et [8] quand elle est infinie.

Dans cet article on se propose d'étudier le système suivant:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\Psi}{dt}(t) = A\Psi(t) + u(t)(B\Psi(t) + b), & t \geq 0 \\ \Psi(0) = \Psi_0; \quad u(t) = -\langle b, \Psi(t) \rangle \end{cases}$$

On suppose que la solution Ψ est à valeurs dans un espace de Hilbert réel H, qui est séparable et dont le produit scalaire et la norme sont notés respectivement par: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$.

On suppose également que A et B vérifient les hypothèses suivantes:

(H_1) A est un opérateur linéaire, dissipatif (i.e., $\langle Ax, x \rangle \leq 0$, $\forall x \in D(A)$) et fermé de H dans H tel que $\overline{D(A)} = H$ et $D(A) = D(A^*)$.

(H_2) B est un opérateur de H dans H linéaire, borné et anti-adjoint.

En utilisant le principe d'invariance de Lasalle [5], nous montrons que, sous une condition de contrôlabilité, le système est stabilisable par : $u(t) = -\langle b, \Psi(t) \rangle$, où Ψ est la solution faible de (1) définie dans la section 2.

Ce travail est une généralisation de [2] et [3]. En effet: dans [2] A est anti-adjoint et dans [3] A est dissipatif avec la contrainte $\Psi_0 \in D(A)$.

L'article est divisé en trois sections.

La première section sera consacrée à quelques résultats préliminaires sur la solution faible de (1). Dans la deuxième nous établirons le résultat de stabilisabilité. La troisième section sera réservée à un exemple.

2. Résultats préliminaires sur l'état du système

DÉFINITION 2.1. On dit que $\Psi \in C([0,T];H)$ est une solution faible de (1) sur $[0,T]$ si: pour tout $\varphi \in D(A^*)$ la fonction $t \longmapsto \langle \varphi, \Psi(t) \rangle$ est absolument continue sur $[0,T]$ et

$$\frac{d}{dt}\langle \varphi, \Psi(t)\rangle = \langle A^*\varphi, \Psi(t)\rangle + \langle \varphi, f(\Psi(t))\rangle, \quad p.p.t \in [0,T],$$

où $f(v) = -\langle b, v\rangle(Bv+b)$. On montre d'après [1] que cette solution est donnée par:

$$\Psi(t) = \exp(tA)\Psi_0 + \int_0^t \exp((t-s)A)f(\Psi(s))\,ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

où $\exp(tA)$ désigne le C_0 semi-groupe de contraction engendré par A.

Nous commençons par rappeler le résultat suivant:

THÉORÈME 2.2. (cf. [6]) *Il existe $T_{\max}$ tel que le système* [1] *admet une solution faible Ψ unique sur $[0, T_{\max}[$, avec $\|\Psi(t)\| \to +\infty$ quand $t \to T_{\max}$ si $T_{\max} < +\infty$.*

Nous allons montrer que (1) admet une solution faible unique sur $[0, +\infty[$ (i.e., $T_{\max} = +\infty$). Pour cela il suffit de montrer que Ψ est bornée dans H. En utilisant le lemme de Gronwall on a le lemme suivant qui donne quelques estiamtions a priori sur la solution faible de (1).

LEMME 2.3. *Si $\Psi_0^n \to \Psi_0$ dans H quand $n \to +\infty$ alors $\Psi_n(t) \to \Psi(t)$ dans H pour tout $t \in [0,T]$. Où Ψ_n et Ψ sont les solutions faibles de* (1) *qui correspondent respectivement aux conditions initiales Ψ_0^n et Ψ_0 sur $[0,T]$.*

A l'aide de ces deux résultats nous allons établir le résultat fondamental suivant:

LEMME 2.4. *La solution faible de* (1) *est bornée dans H sur $[0,T]$.*

Preuve. Nous allons distinguer deux cas:

1[er] cas: $\Psi_0 \in D(A)$:

Soit $v(t) = \frac{1}{2}\|\Psi(t)\|^2$. Comme $\Psi_0 \in D(A)$ alors les solutions faible et forte de (1) coïncident et on a:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \left\langle \Psi(t), \frac{d\Psi(t)}{dt} \right\rangle = \langle A\Psi(t), \Psi(t)\rangle - \langle b, \Psi(t)\rangle^2 \leq 0;$$

de plus $v(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, T]$, donc

$$\|\Psi(t)\| \leq \|\Psi_0\|, \quad \forall t \in [0, T].$$

2[ème] cas: $\Psi_0 \notin D(A)$:

Il existe une suite (Ψ_0^n) de $D(A)$ qui converge vers Ψ_0 dans H comme

$$\|\Psi^n(t)\| \leq \|\Psi_0^n\|, \quad \forall t \in [0, T] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N};$$

alors, d'après le lemme (2.3) on a:

$$\|\Psi(t)\| \leq \|\Psi_0\|, \quad \forall t \in [0, T].$$

∎

Comme on vient de montrer que la solution faible est bornée dans H, on a:

THÉORÈME 2.5. *Le système* (1) *admet une solution faible* Ψ *unique sur* $[0, +\infty[$.

3. PROBLÈME DE STABILISATION

Le but de ce travail est d'établir le résultat suivant:

THÉORÈME 3.1. *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2), *si:*

(i) $b \in D((A^*)^k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$,

(ii) le sous espace engendré par $\{b, A^*b, \ldots, (A^*)^k b, \ldots\}$ *est dense dans* H.

Alors $\Psi(t)$ *tend faiblement vers* 0 *quand* t *tend vers l'infini. Où* Ψ *est la solution faible de* (1) *sur* $[0, +\infty[$.

Nous donnons d'abord le résultat préliminaire suivant:

LEMME 3.2. $\lim_{t\to\infty}\langle b, \Psi(t)\rangle = 0$.

Preuve. Nous allons distinguer deux cas.

1^er^ cas: $\Psi_0 \in D(A)$:

Soit

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \langle A\Psi(s), \Psi(s)\rangle\, ds - \int_0^t \langle b, \Psi(s)\rangle^2 ds.$$

On vérifie facilement que

$$\int_0^t \langle b, \Psi(s)\rangle^2 ds \leq \|\Psi_0\|^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Donc $\int_0^{+\infty} \langle b, \Psi(s)\rangle^2 ds$ converge, de plus $\frac{d}{dt}\langle b, \Psi(t)\rangle$ est bornée, d'où le résultat.

2^ème^ cas: $\Psi_0 \notin D(A)$:

Il existe une suite (Ψ_0^n) de $D(A)$ qui converge vers Ψ_0 dans H. Soient Ψ^n et Ψ les solutions faibles de (1) associées respectivement à (Ψ_0^n) et (Ψ_0). Comme $(\Psi^n(t))$ converge vers $\Psi(t)$ dans H et

$$\int_0^{+\infty} \langle b, \Psi^n(s)\rangle^2 ds \leq \|\Psi_0^n\|^2, \quad \forall n \geq 0,$$

alors d'après le lemme de Fatou on a:

$$\int_0^{+\infty} \langle b, \Psi(s)\rangle^2 ds \leq \|\Psi_0\|^2,$$

et on vérifie aisément que $\frac{d}{dt}\langle b, \Psi(t)\rangle$ est bornée.

Par conséquent $\lim_{t\to\infty}\langle b, \Psi(t)\rangle = 0$. ∎

On définit maintenant l'ensemble ω-limite par:

$$\Gamma(\Psi_0) = \{\Psi^* \in H, \exists t_n \to \infty; \Psi(t_n) \text{ converge faiblement vers } \Psi^*\}.$$

On remarque facilement que $\Gamma(\Psi_0) \subseteq b^\perp$ (où $\perp$ désigne l'orthogonal de b) et la démonstration du théorème se limite à prouver que $\Gamma(\Psi_0) = \{0\}$.

LEMME 3.3. $\exp(tA)\Gamma(\Psi_0) \subseteq \Gamma(\Psi_0)$, $\forall t \geq 0$.

Preuve. Soit $\Psi^* \in \Gamma(\Psi_0)$ et $t_n \to +\infty$ tel que $\Psi(t_n)$ converge faiblement vers Ψ^*. Soit $t \geq 0$.

$$\Psi(t_n + t) = \exp(tA)\Psi(t_n) - \int_0^t \exp((t-s)A)\langle b, \Psi(s+t_n)\rangle(B\Psi(s+t_n) + b)\, ds.$$

On a

$$\begin{aligned}&|\langle\varphi,\Psi(t+t_n)\rangle-\langle\exp(tA)\Psi^*,\varphi\rangle|\\ \leq&|\langle\varphi,\Psi(t+t_n)\rangle-\langle\exp(tA)\Psi(t_n),\varphi\rangle|\\ +&|\langle\varphi,\exp(tA)\Psi(t_n)\rangle-\langle\exp(tA)\Psi^*,\varphi\rangle|.\end{aligned}$$

De plus

$$|\langle\varphi,\Psi(t+t_n)\rangle-\langle\exp(tA)\Psi(t_n),\varphi\rangle|\leq c\left|\int_0^t\langle b,\Psi(s+t_n)\rangle ds\right|.$$

Comme

$$|\langle b,\Psi(s+t_n)\rangle|\to 0\quad\text{quand}\quad n\to+\infty,$$

et

$$|\langle\varphi,\exp(tA)\Psi(t_n)\rangle-\langle\exp(tA)\Psi^*,\varphi\rangle|\to 0$$

alors

$$|\langle\varphi,\Psi(t+t_n)\rangle-\langle\exp(tA)\Psi^*,\varphi\rangle|\to 0,$$

donc il existe $(s_n)\to\infty$ telle que $\Psi(s_n)$ converge faiblement vers $\exp(tA)\Psi^*$. ∎

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Soit $\Psi^*\in\Gamma(\Psi_0)$. Par définition on a:

$$\frac{d^m}{dt^m}\langle\exp(tA)\Psi^*,b\rangle=\langle\exp(tA)\Psi^*,(A^*)^m b\rangle=0,\quad\forall t\geq 0,\ \forall m\in\mathbb{N}.$$

Donc pour $t=0$ on aura:

$$\langle\Psi^*,(A^*)^m b\rangle=0,\quad\forall m\in\mathbb{N},$$

et par suite $\Psi^*=0$, ce qui prouve que $\Gamma(\Psi_0)$ est réduit à $\{0\}$ et par conséquent $\Psi(t)$ converge faiblement vers 0 quand t tend vers $+\infty$. ∎

4. EXEMPLE

Considérons le système suivant:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi(x,t)+u(t)\left(\sin(x)\Psi(t,-x)+\exp\left(-x^2/2\right)\right), \\ \hfill x\in\mathbb{R};\ t\geq 0\\ \Psi(0)=\Psi_0\end{cases}$$

Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et $A = -\partial/\partial x + \partial^2/\partial x^2$ dont le domaine est donné par:

$$D(A) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x} f(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty \right\}.$$

On a $A^* = -\partial/\partial x + \partial^2/\partial x^2$. Soit $B : H \longrightarrow H$ défini par: $Bf(x) = \sin(x) f(-x)$ et $b(x) = \exp(-x^2/2)$. On vérifie facilement que les hypothèses du théorème (3.6) sont vérifiées et donc le système ci dessus est stabilisé par:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2/2)\, \Psi(x,t)\, dx, \quad \forall t \geq 0$$

où $\Psi(x,t)$ est sa solution faible.

Références

[1] Ball, J.M. and Slemrod, M., Feedback stabilization of distributed semilinear control systems, *Appl. Math. Optim.,* **5** (1979), 169–179.

[2] Bounabat, A. and Gauthier, J.P., Weak stabilizability of infinite dimensional non linear systems, *Appl. Math. Lett.,* **4** (1) (1991), 95–98.

[3] Bouslous, H., Bounabat, A. and Hammouri, H., Stabilisation faible d'un système bilinéaire en dimension infinie, *Extracta Mathematicae,* **7** (2-3) (1992), 110–113.

[4] Jurjevic, V. and Quinn, J.P., Controllability and stability, *Journ. of Diff. Equations,* **28** (1978), 381–389.

[5] Lasalle, J.P., Stability theory for ordinary differential equations, *Journ. of Diff. Equations,* **4** (1968), 57–65.

[6] Pazy, A., "Semi-Groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations", Springer-Verlag, New York, 1983.

[7] Slemrod, M., Stabilisation of bilinear control system with applications, to non conservative problem in elasticity, *SIAM J. on Control and Optimization,* **16** (1978), 131–141.

[8] Ztot, K., "Stabilisation des Systèmes Bilinéaires Distribués, Aspects Théoriques et Pratiques", Thèse de troisième cycle, Université Mohamed V, Rabat, 1990.