EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 8, Núm. 2-3, 148 – 152 (1993)

Sur un Problème de Perturbation Singulière (II): Elasticité

TAOUFIQ BEN KIRAN

Faculté des Sciences Semlalia, Bd. Moulay Abdellah, B.P.S. 15,
Département de Mathématiques, 40000 *Marrakech, Maroc*

AMS *Subject Class.* (1991): 35B25, 42A10 *Received July* 7, 1993

INTRODUCTION

Cet article est une suite de [1]. Il est consacré à l'étude d'un problème de perturbation singulière provenant de la théorie de l'élasticité [6]:

$$(P_1)(f) \qquad \begin{cases} -\epsilon^2(u_\epsilon^{(4)}-u_\epsilon^{(2)})-u_\epsilon^{(2)}+u_\epsilon=f & \text{pour } 0<x<\pi \\ B_1(x')\,u_\epsilon(x')=B_2(x')\,u_\epsilon(x')=0 & x'=0,\pi, \end{cases}$$

B_1 et B_2 étants deux opérateurs frontières données par:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &B_1(x'):=x'\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2+(\pi-x') \\ &\text{et} \\ &B_2(x'):=x'\,\mathrm{d}^3/\mathrm{d}x^3+(\pi-x')\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 \end{aligned}$$

où x' est un élèment de $]0,\pi[$.

Lorsque f est dans l'espace de Sobolev $L^2(]0,\pi[)$, nous montrons que la solution u_ϵ du problème $(P_1)(f)$ converge vers la solution v du problème:

$$(L_1) \qquad \begin{cases} -v''+v=f & \text{dans } 0<x<\pi \\ v(0)=v(\pi)=0. \end{cases}$$

Dans [2], lorsque $B_1(x'):=x'\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$, $B_2(x'):=x'\,\mathrm{d}^3/\mathrm{d}x^3$ et f n'est pas dans $H^\beta(]0,\pi[)$ pour $\beta>\frac{1}{2}$, nous avons montré que u_ϵ n'est pas bornée dans $L^2(]0,\pi[)$.

Avant d'aborder l'étude, on se propose de commencer par un lemme.

LEMME. *Soient, pour* $\epsilon>0$ *et* $2\leqslant r<3$, *les fonctions:*

$$(2) \qquad G_\epsilon(x):=x^r/P_\epsilon(x)$$

où $P_\epsilon(x):=(x^2+1)(\epsilon^2x^2+1)$. *On a alors:*

(3) $$\Sigma_{n\geqslant 1}\, G_\epsilon(2n) = \epsilon^{(1-r)}\beta((r-1)/2,(3-r)/2)/4 + O(\epsilon^{(2-r)})$$

(4) $$\Sigma_{n\geqslant 1}\, G_\epsilon(2n+1) = \epsilon^{(1-r)}\beta((r-1)/2,(3-r)/2)/4 + O(\epsilon^{(2-r)})$$

où $\beta(p,q)$ désigne la fonction de l'Euler Beta.

Preuve. On fait l'appel à la formule d'Euler (cf [7], page 278):

Pour g dans $C^1([0,+\infty[)$ et n un entier fixé, on a:

(5) $$\int_0^n Q(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \Sigma_{k=0}^n g(k) - \int_0^n g(x)\, \mathrm{d}x - (g(n)+g(0))/2.$$

Avec $Q(x) := (x - \mathrm{E}(x) - \frac{1}{2}$ qui est périodique de période 1 et $|Q(x)| \leqslant \frac{1}{2}$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.

De cette formule découle l'inégalité:

(6) $$\left|\Sigma_{k=0}^n g(k) - \int_0^n g(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[\int_0^n |g'(x)|\, \mathrm{d}x + g(0) + g(n)\right]$$

que nous appliquons à $g(x) := G_\epsilon(2x)$. Nous obtenons alors:

(7) $$\left|\Sigma_{k=0}^n G_\epsilon(2k) - \frac{1}{2}\int_0^{2n} G_\epsilon(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[\int_0^{2n} |G_\epsilon'(x)|\, \mathrm{d}x + G_\epsilon(2n)\right].$$

Or, pour $\epsilon > 0$ et $2 \leqslant r < 3$, G_ϵ est dans l'espace $C^1([0,+\infty[) \cap W_1^1(]0,+\infty[)$, nous sommes dans les mesures d'appliquer le théorème de Lebesgue et obtenir

(8) $$\left|\Sigma_{n\geqslant 1}\, G_\epsilon(2n) - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} G_\epsilon(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} |G_\epsilon'(x)|\, \mathrm{d}x\right].$$

Donc pour obtenir (3) et (4), on commence par majorer $\int_0^{+\infty} |G_\epsilon'(x)|\, \mathrm{d}x$.

* Pour $2 < r < 3$:

$$G_\epsilon'(x) = r(x^{r-1}/P_\epsilon(x)) - 2(1+\epsilon^2)\, x^{r+1}/(P_\epsilon(x))^2 - 4\epsilon^2 x^{r+3}/(P_\epsilon(x))^2.$$

D'une part le changement de variables $x = 1/\epsilon\sqrt{y}$ donne:

$$K_1 = \int_0^{+\infty} x^{r-1}/P_\epsilon(x)\, \mathrm{d}x = (\epsilon^{(2-r)}/2) \int_0^{+\infty} y^{1-r/2}/(1+y)(1+\epsilon^2 y)\, \mathrm{d}y \leqslant$$

$$\leqslant (\epsilon^{(2-r)}/2) \int_0^{+\infty} y^{1-r/2}/(1+y)\, \mathrm{d}y.$$

C'est à dire $K_1 \leqslant (\epsilon^{(2-r)}/2)\beta((r-2)/2,(4-r)/2)$.

D'autre part:

$$K_2 = \int_0^{+\infty} x^{r+1}/(P_\epsilon(x))^2\, \mathrm{d}x = (\epsilon^{(2-r)}/2) \int_0^{+\infty} y^{2-r/2}/(1+y)^2(1+\epsilon^2 y)^2\, \mathrm{d}y \leqslant$$

$$\leqslant (\epsilon^{(2-r)}/2) \int_0^{+\infty} y^{2-r/2}/(1+y)^2\, \mathrm{d}y.$$

C'est à dire $K_2 \leqslant (\epsilon^{(2-r)}/2)\beta((r-2)/2,(6-r)/2)$.

$$K_3 = \int_0^{+\infty} x^{r+3}/(P_\epsilon(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\leqslant (\epsilon^{-r}/2)\int_0^{+\infty} y^{1-r/2}/(1+y)^2\,\mathrm{d}y \leqslant (\epsilon^{-r}/2)\beta(r/2,(4-r)/2).$$

* Pour $r=2$:

$$G'_\epsilon(x) = 2x/(P_\epsilon(x))^2 + 2\epsilon^2 x^5/(P_\epsilon(x))^2.$$
$$J_1 = \int_0^{+\infty} x/(P_\epsilon(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} x/(1+x^2)^2\,\mathrm{d}x = 1/2$$

et

$$J_2 = \int_0^{+\infty} x^5/(P_\epsilon(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant (\epsilon^{-2}/2)\int_0^{+\infty} 1/(1+y)^2\,\mathrm{d}y = \epsilon^{-2}/2.$$

Par conséquent, pour $2 \leqslant r < 3$, on peut écrire:

(10) $$\int_0^{+\infty} |G'_\epsilon(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant C\epsilon^{2-r}$$

où C est une constante.

(11) $$\int_0^{+\infty} G_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(1-\epsilon^2)}\left[\epsilon^{1-r}(1-\epsilon^{1-r})\int_0^{+\infty} y^{(1-r)/2}/(1+y)\,\mathrm{d}y\right] =$$
$$= (\epsilon^{1-r}(1-\epsilon^{1-r})/2(1-\epsilon^2))\beta((r-1)/2,(3-r)/2) =$$
$$= \epsilon^{1-r}\beta((r-1)/2,(3-r)/2)(1+O(\epsilon))/2.$$

D'après (8),(9),(10) y (11), on obtient le reultat voulu. ∎

Pour $\epsilon > 0$, on écrit le problème $(P_1)(f)$ sous la forme:

$$(P_1)(f) \qquad \begin{cases} -\epsilon^2(u_\epsilon^{(4)} - u_\epsilon^{(2)}) - u_\epsilon^{(2)} + u_\epsilon = f & \text{pour } 0 < x < \pi \\ u_\epsilon(0) = u_\epsilon^{(2)}(\pi) = 0 \\ u_\epsilon^{(2)}(0) = u_\epsilon^{(3)}(\pi) = 0 \end{cases}$$

et

$$(L_1) \qquad \begin{cases} -v'' + v = f & \text{dans } 0 < x < \pi \\ v(0) = v(\pi) = 0. \end{cases}$$

THÉORÈME. *Pour f la fonction de $L^2(]0,\pi[)$, donnée par:*

(12) $$f(x) := \Sigma_{n \geqslant 1} \sin(nx)/n^\alpha \quad \textit{avec } \tfrac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Alors la solution u_ϵ du problème $(P_1)(f)$ converge vers la solution v du problème (L_1) dans l'espace de Sobolev $H^2(]0,\pi[)$.

Preuve. f donnée par (12) avec $\alpha < 1$, implique qu'elle n'est pas dans l'espace de Sobolev $H^{\beta}(]0,\pi[)$, $\beta > \frac{1}{2}$ [4, page 391].

On considère le problème de Sturm–Liouville:

$$(SL)(h) \qquad \begin{cases} -\epsilon^2(v_\epsilon^{(4)} - v_\epsilon^{(2)}) - v_\epsilon^{(2)} + v_\epsilon = h & \text{pour } 0 < x < \pi \\ v_\epsilon(0) = v_\epsilon(\pi) = 0 \\ v_\epsilon^{(2)}(0) = v_\epsilon^{(2)}(\pi) = 0 \end{cases}$$

En faisant appel à la théorie spectrale [2] et [3], pour h dans $L^2(]0,\pi[)$ donnée par: $h(x) = \Sigma_{n\geqslant 1} h_n \sin(nx)$; $\Sigma_{n\geqslant 1} |h_n|^2 < +\infty$ la solution v_ϵ du problème $(SL)(h)$ est donnée par:

$$(13) \qquad v_\epsilon(x) = \Sigma_{n\geqslant 1} (h_n/\mu_{n,\epsilon}) \sin(nx)$$

avec $\mu_{n,\epsilon} = (1+n^2)(1+n^2\epsilon^2)$. On sait d'une part que $v_\epsilon \longrightarrow v$ dans $H^2(]0,\pi[)$ (cf. [5]), et d'autre part que l'ensemble E des solutions du problème:

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\epsilon^2(w_\epsilon^{(4)} - w_\epsilon^{(2)}) - w_\epsilon^{(2)} + w_\epsilon = 0 & \text{dans }]0,\pi[\\ \\ w_\epsilon^{(2)}(0) = w_\epsilon^{(2)}(\pi) = 0, \end{cases}$$

est un sous–espace vectoriel de $H^2(]0,\pi[)$ de dimension deux dont une base est $(\varphi_\epsilon, \psi_\epsilon)$ avec:

$$(14) \qquad \begin{aligned} &\varphi_\epsilon(x) = (x/2) + \Sigma_{n\geqslant 1} ((-1)^n/n\mu_{n,\epsilon}) \sin(nx) \\ \& \\ &\psi_\epsilon(x) = ((\pi - x)/2) - \Sigma_{n\geqslant 1} ((-1)^n/n\mu_{n,\epsilon}) \sin(nx). \end{aligned}$$

Soient v_ϵ, u_ϵ les solutions respectivement des problèmes $(SL)(f)$ et $(P_1)(f)$ où f est la fonction donnée par (12).

La fonction $w_\epsilon = u_\epsilon - v_\epsilon$ est une solution du problème (P_2) donc:

$$(15) \qquad (u_\epsilon - v_\epsilon)(x) = a_\epsilon \varphi_\epsilon(x) + b_\epsilon \psi_\epsilon(x)$$

où a_ϵ et b_ϵ sont des constantes qu'on détermine en faisant $u_\epsilon(0) = 0$. Cela donne $u_\epsilon(0) = \pi b_\epsilon/2 = 0$ c'est à dire $b_\epsilon = 0$. Et en faisant $u_\epsilon^{(3)}(\pi) = v_\epsilon^{(3)}(\pi) + a_\epsilon \varphi_\epsilon^{(3)}(\pi) = 0$, on obtient:

$$(16) \qquad a_\epsilon (\Sigma_{n\geqslant 1} n^2/\mu_{n,\epsilon}) = \Sigma_{n\geqslant 1} ((-1)^{n+1} n^{3-\alpha})/\mu_{n,\epsilon}.$$

Or, pour $\epsilon > 0$, les séries $\Sigma_{n\geqslant 1} n^2/\mu_{n,\epsilon}$ et $\Sigma_{n\geqslant 1} ((-1)^{n+1} n^{3-\alpha})/\mu_{n,\epsilon}$ sont absolument convergentes, donc, en utilisant le lemme, pour r de $\{2, 3-\alpha\}$, on a:

$$\Sigma_{n\geqslant 1}\, n^2/\mu_{n,\epsilon} = \epsilon^{-1}\beta(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})(1+O(\epsilon))/2. \tag{17}$$

$$\Sigma_{n\geqslant 1}\, ((-1)^{n+1}n^{3-\alpha})/\mu_{n,\epsilon} = O(\epsilon^{\alpha-1}). \tag{18}$$

D'où:

$$a_\epsilon = O(\epsilon^\alpha). \tag{19}$$

Ainsi:

$$\|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{H^2(]0,\pi[)} \leqslant |a_\epsilon|\, \|\varphi_\epsilon\|_{H^2(]0,\pi[)}. \tag{20}$$

Comme $\Sigma_{n\geqslant 1}\, ((-1)^{n+1}/n\mu_{n,\epsilon})\sin(nx)$, la solution du problème $(SL)(x/2)$, converge dans $H^2(]0,\pi[)$ alors $\|\varphi_\epsilon\|_{H^2(]0,\pi[)}$ est bornée indépendament de ϵ, et donc d'après (19)&(20):

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{H^2(]0,\pi[)} = 0 \tag{21}$$

i.e., u_ϵ et v_ϵ sont de même nature dans $H^2(]0,\pi[)$, ce qui prouve la convergence de u_ϵ vers v dans $H^2(]0,\pi[)$. ∎

Remarque. Dans [1], lorsque f est donnée par (12) avec $\alpha \geqslant 1$, nous avons montré la convergence de u_ϵ vers v dans $H^2(]0,\pi[)$.

REMERCIEMENTS

Je dédie ce papier à mon Professeur M[elle] Denis Huet.

RÉFERENCES

1. BEN KIRAN, T., Sur un problème de perturbation singulière (I): Elasticité, *Extracta Mathematicae,* Vol. 8(2) 1993.
2. BEN KIRAN, T., Comportement asymptotique d'un problème de perturbation singulière, à paraître dans *Collect. Math.,* 1993.
3. DAUTRY, R. AND LIONS, J.L., "Analyse Mathématique et Calcul Numerique pour les Sciences et Technique", Tome 5 (Spectre des Opérateurs), Masson, 1980.
4. GEORGE, C., "Exercises et Problèmes d'Integration", Université de Nancy I, Gauthiers–Villiars, 1980.
5. HUET, D., Stabilité et convergence dans le problèmes de perturbations singulières, in "Asymptotic Analysis 2", 1989, 5–19
6. LANDAU, L. AND LIFSCHITZ, E., "Théorie de l'Elasticité", Mir, Moscou, 1967 (Transl. from Russian).
7. SMIRNON, V.S., "Cours de Mathématiques Supérieures", Tome 3, Mir, Moscou, 1972.