EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 7, Núm. 2-3, 126 – 128 (1992)

Carence de Dérivations dans les Algèbres sans éléments Nilpotents

KHALED BOUHYA

Faculté des Sciences, Ain Chock, BP. 5366, *Mâarif, Casablanca, Morocco*

AMS *Subject Class.* (1980): 16A46, 17A15, 17C30. *Received November* 9, 1992

Il est bien connu qu'une algèbre associative sans élément nilpotent de dimension finie sur un corps algébriquement clos F est commutative. De ce fait une telle algèbre est isomorphe à un produit fini de copies de F. Ce résultat est obtenu en combinant le théorème de Wedderbum–Artin avec la structure des algèbres de division de dimension finie sur un corps algébriquement clos [4]. Des résultats dans la même sont traîtés dans [2, 3].

Dans cette note, nous donnons une preuve simple de ce résultat dans le cas plus général des algèbres de Jordan non commutatives. Cette preuve est intrinsèque dans la mesure où la théorie de representation n'est pas utilisée.

On rappelle qu'une algèbre de Jordan non commutative sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 est un $\mathbb{K}$–espace vectoriel A muni d'une application bilinéaire $(a,b) \longmapsto ab$ vérifiant les deux identités suivantes

$$x^2(yx) = (x^2y)x \quad \text{(L'identité de Jordan)}$$

$$x(yx) = (xy)x \quad \text{(La fléxibilité)}$$

pour tout x, y dans A.

Si A est une $\mathbb{K}$–algèbre de Jordan non commutative, alors le $\mathbb{K}$–espace vectoriel A doté du nouveau produit $a.b := 1/2(ab+ba)$, est une $\mathbb{K}$–algèbre de Jordan (i.e., une $\mathbb{K}$–algèbre commutative vérifiant l'identité de Jordan) notée A^+.

Soient a et b deux éléments d'une algèbre de Jordan non commutative A, on montre que les deux applications D_a et $D_{a,b}$, définies par

$$D_a(x) := [a,x] = ax - xa \quad , \quad D_{a,b}(x) := (a,x,b) = (ax)b - a(xb) \ ,$$

sont des dérivations de l'algèbre de Jordan A^+ [5, pp. 34–35], [6, p. 146].

THÉORÈME. *Soit A une algèbre (non nécéssairement associative) de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Si A est sans éléments non nuls de carré nul, alors $Der(A) = 0$.*

La démonstration de ce résultat repose sur le lemme suivant.

LEMME. [1, Lemma 1] *Soit B une algèbre (non nécéssairement associative) sur un corps de caractéristique nulle. Si B est sans éléments non nuls de carré nul, alors 0 est la seule dérivation nilpotente de B.*

Démonstration. Supposons que D soit une dérivation de B nilpotente d'indice de nilpotence n strictement supérieur à 1. Si $a \in B$ tel que $D^{n-1}a \neq 0$, on aura

$$D^{2n-2}(a^2) = \sum_{j=0}^{2n-2} \binom{2n-2}{j} D^{2n-2-j}(a) D^j(a) .$$

Comme n est strictement supérieur à 1 et la caractéristique du corps de base est nulle, on en déduit que $D^{n-1}(a) D^{n-1}(a) = 0$, ce qui contredit le fait que B est sans éléments non nuls de carré nul. ∎

Démonstration du Théorème. Soit D une dérivation de A, si λ est une valeur propre de D, alors il existe un élément non nul x de A tel que $Dx = \lambda x$, donc $Dx^2 = Dx.x + x.Dx = 2\lambda x^2$. Comme A est sans éléments de carré nul, il en résulte que 2λ est une valeur propre de D. Ainsi, pour tout entier non nul n, $2^n \lambda$ est aussi une valeur propre de D. La caractéristique du corps de base etant nulle, on en déduit que 0 est l'unique valeur propre de D et à fortiori D est nilpotente. Le lemme précédent nous permet de conclure. ∎

Lorsque l'algèbre est à puissances associatives (en particulier, de Jordan non commutative), la carence d'éléments non nuls de carré nul équivaut à la carence d'éléments nilpotents.

COROLLAIRE. *Soit A une algèbre de Jordan non commmutative de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle $\mathbb{K}$. Si A est sans éléments nilpotents, alors A est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration. Soient $a,b \in A$. Comme la carence d'éléments nilpotents est présérvée lorsqu'on passe à l'algèbre de Jordan A^+, le théorème précédent nous permet d'affirmer que $D_a = 0$ et $D_{a,b} = 0$. Il s'ensuit que A est associative et commutative. ∎

REMERCIEMENTS

Nous remercions le professeur Angel Rodríguez Palacios pour les suggéstions apportées à la présentation de ce papier.

BIBLIOGRAPHIE

1. BENKART, G.M. AND OSBORN, M., The derivation algebra of a real division algebra, *Amer. Jour. Math.* **103** (6) (1981), 1135–1150.
2. BENSLIMANE, M., FERNÁNDEZ LÓPEZ, A., GARCÍA RUS, E. AND KAIDI, A., Noncommutative Jordan Normed Algebras containing minimal ideals an without nilpotent elements, *Algebra, Groups and Geometries* **6** (1989), 353–360.
3. FERNÁNDEZ LÓPEZ, A. AND GARCÍA RUS, E.,Banach algebras wich are direct sum of division algebras, *Jour. Australian Math. Soc.* **44** Serie A (1988), 143–145.
4. JACOBSON, N., "Structure of rings", A.M.S. Colloquim Publications 37 (1964).
5. JACOBSON, N.,"Structure and representations of Jordan algebras", A.M.S. Colloquim Publications 39 (1968).
6. SCHAFER, R.D., "An introduction to nonassociative algebras", Academic Press, New York–London, 1966.