EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. 7, Núm. 2–3, 110 – 113 (1992)

Stabilisation Faible d'un Système Bilinéaire Dissipatif en Dimension Infinie

BOUSLOUS, H.[1], BOUNABAT, A.[1] AND HAMMOURI, H.[2]

[1] *Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Sémlalia, Univ. Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc*
[2] *Lab. d'Automatique et de Génie des Procédés, Univ. Claude Bernard, Lyon I, Lyon, France*

AMS *Subject Class.* (1980): 93D15, 34D20, 58F10 *Received January* 11, 1993

1. INTRODUCTION

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ séparable, de dimension infinie et dont le produit scalaire et la norme sont notés respectivement par: $<\cdot,\cdot>$ et $\|\cdot\|$.

On considère, sur H, le système bilinéaire donné par:

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = A\psi + u(B\psi + b) \qquad t \geqslant 0 \\ \\ \psi(0) = \psi_0; \qquad u(t) = -<b,\psi(t)> \end{cases}$$

avec A et B vérifiant les hypothèses ci–dessous:

(H_1) A est un opérateur linéaire, dissipatif et fermé de H dans H telle que $\overline{D(A)} = H$, $D(A) = D(A^*)$ et A^* dissipatif. $D(A)$ et A^* désignent respectivement le domaine et l'adjoint de A.

(H_2) B est un opérateur de H dans H linéaire, borné et anti–adjoint.

On dit que ψ est une solution faible de (S) si elle est solution de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}<\psi(t),\varphi> = <\psi(t),A^*\varphi> + <f(\psi(t)),\varphi>, \ \ \forall\varphi\in D(A^*), \text{ p.p. } t\in]0,T[$$

où $f(v) = -<b,v>(Bv+b)$, et on montre (cf. [3]) que sous les hypothèses (H_1) et (H_2) le système (S) admet une solution faible unique donnée par:

$$\psi(t) = e^{At}\psi_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(\psi(s))\,\mathrm{d}s, \ \ \forall t\in[0,T]$$

En utilisant le principe d'invariance de LaSalle [2], on montre que, sous une condition de contrôlabilité, le système est faiblement stabilisable (i.e., $\psi(t) \xrightarrow{\omega} 0$ quand $t \longrightarrow \infty$) dès que la condition initiale est dans le domaine de A, où $\xrightarrow{\omega}$ désigne la convergence faible dans H.

Ce travail est une généralisation de [1] qui traite le cas où A est anti-adjoint.

Le but principal, donc, de cet article est d'établir le résultat suivant:

THÉORÈME 1.1. *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *si:*

i) $\psi_0 \in D(A)$,

ii) $b \in D((A^*)^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

iii) le sous-espace engendré par $\{b, A^*b, \ldots, (A^*)^k b, \ldots\}$ *est dense dans* H.

Alors $\psi(t) \xrightarrow{\omega} 0$ *quand* $t \longrightarrow \infty$.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Pour cette démonstration on a besoin des lemmes suivants:

LEMME 2.1. *La solution de* (S) *est bornée dans* H.

Preuve. Soit

$$v(t) = \frac{1}{2}\|\psi(t)\|^2.$$

Comme $\psi_0 \in D(A)$ alors les solutions faible et forte de (S) coïncident et on a:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = <\psi(t), \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}(t)> = <\psi(t), A\psi(t)> - (<b,\psi(t)>)^2 \leqslant 0$$

de plus $v(t) \geqslant 0$, $\forall t$, donc $v(t)$ est bornée. ∎

LEMME 2.2.

$$\lim_{t \to \infty} <b, \psi(t)> = 0.$$

Preuve.

$$v(t) = v(0) + \int_0^t <\psi(s), A\psi(s)> \mathrm{d}s - \int_0^t (<b,\psi(s)>)^2 \mathrm{d}s,$$

comme $<\psi(s), A\psi(s)> \leqslant 0$ et $-(<b,\psi(s)>)^2 \leqslant 0$, $\forall s$.

Alors d'après le lemme 2.1 on a la convergence de $\int_0^\infty (<b,\psi(s)>)^2 \mathrm{d}s$; de plus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}<b,\psi(t)>$ est borné, d'où le resultat. ∎

On définit maintenant l'ensemble ω-limite suivant:

$$\Gamma(\psi_0) = \{\psi^* \in H : \exists t_n \longrightarrow \infty : \psi(t_n) \xrightarrow{\omega} \psi^*\}.$$

On remarque que $\Gamma(\psi_0) \subseteq b^\perp$ (où $b^\perp$ désigne l'orthogonal de b) et la démonstration du théorème se limite à prouver que $\Gamma(\psi_0) = \{0\}$.

LEMME 2.3. $\Gamma(\psi_0)$ *est positivement invariant par* e^{At}, $\forall t \geqslant 0$.

Preuve. Soit $\psi^* \in \Gamma(\psi_0)$ et $t_n \longrightarrow \infty$: $\psi(t_n) \xrightarrow{\omega} \psi^*$.
Soit $t \geqslant 0$.

$$\psi(t+t_n) = e^{tA}\psi(t_n) - \int_0^t e^{(t-s)A} <b, \psi(s+t_n)> (B\psi(s+t_n)+b)\,\mathrm{d}s$$

on a

$$|<\psi(t+t_n),\varphi> - <e^{tA}\psi^*,\varphi>| \leqslant |<\psi(t+t_n),\varphi> - <e^{tA}\psi(t_n),\varphi>| +$$
$$|<e^{tA}\psi(t_n),\varphi> - <e^{tA}\psi^*,\varphi>|.$$

De plus

$$|<\psi(t+t_n),\varphi> - <e^{tA}\psi(t_n),\varphi>| \leqslant C\int_0^t |<b,\psi(s+t_n)>|\,\mathrm{d}s$$

et $|<b,\psi(s+t_n)>| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, donc il existe $(s_n) \longrightarrow \infty$ telle que $\psi(s_n) \xrightarrow{\omega} e^{tA}\psi^*$. ▮

Démonstration du théorème: Soit $\psi^* \in \Gamma(\psi_0)$. Par définition on a:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} <e^{At}\psi^*, b> = <e^{tA}\psi^*, (A^*)^m b>, \quad \forall t \geqslant 0, \ \forall m \in \mathbb{N},$$

donc pour $t=0$ on aura:

$$<\psi^*, (A^*)^m b> = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

et par suite $\psi^* = 0$, ce qui prouve que $\Gamma(\psi_0)$ est réduit à $\{0\}$ et par conséquent $\psi(t) \xrightarrow{\omega} 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$. ▮

3. EXAMPLE

Considérons le système suivant:

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{\psi}(x,t) = (\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2})\,\psi(x,t) + u(t)\left[\sin(x)\psi(t,-x) + \exp\left[-\dfrac{x^2}{2}\right]\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0 \\ \psi(0) = \psi_0 \end{cases}$$

Soient

$$H = L^2(\mathbb{R}) = \left\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x < \infty\right\},$$

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$D(A) = \{f \in H^2(\mathbb{R}) : f(x) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x}f(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } |x| \longrightarrow \infty\},$$

$$A^* = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$B : H \longrightarrow H$$

défini par:

$$Bf(x) = -\sin(x) f(-x), \quad f \in H,$$

et

$$b(x) = \exp(-x^2/2).$$

On vérifie facilement que les hypothèses du théorème 1.1 sont vérifiées et donc (S) est stabilisé par

$$u(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)\, \psi(x,t)\, \mathrm{d}x, \quad \forall t \geqslant 0$$

où $\psi(x,t)$ est la solution faible de (S).

4. CONCLUSION

L'hypthèse $\psi_0 \in D(A)$ assure la bornitude de la solution du système dans H. Le cas où ψ_0 est quelconque dans H reste à faire.

REFERENCES

1. BOUNABAT, A. AND GAUTHIER, J.P., Weak stabilizability of infinite dimensional nonlinear systems, *Appl. Math. Lett.* 4(1) (1991), 95–98.
2. LASALLE, Stability theory for ordinary differential equations, *Journ. of Diff. Equations* 4 (1968).
3. PAZY, A., "Semi-Groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations", Springer-Verlag, New York, 1983.