EXTRACTA MATHEMATICAE 2, n.2, 56-58 (1987)

SUR LE THEOREME PRINCIPAL DE WEDDERBURN

Angel Rodriguez Palacios
Faculté des Sciences
Granada-Espagne.

Amine Kaidi
Faculté des Sciences
Rabat-Maroc.

Khalid Bouhya
Faculté des Sciences.1.
Casablanca-Maroc.

1. (1.1) Soit A une K-algèbre associative de dimension finie de radical de Jacobson R(A) telle que B=A/R(A) soit séparable (ie, $B_L=B\otimes L$ est semi simple pour toute extension L de K). Le theoreme principal de Wedderburn assure l'existence d'une sous algèbre S de A isomorphe à B telle que $A=S\oplus R(A)$ (voir |2|).

(1.2) Soit A une K-algèbre de Jordan unitaire. La somme de tous les idéaux quasi inversibles de A est un idéal quasi inversible de A appellé radical de Jacobson-McCrimmon de A et est noté R(A) (voir |3| et |10|).

De même que dans le cas associatif on a un theoreme principal de Wedderburn pour les algèbres de Jordan (voir |7|).

(1.3) Une C-algèbre est dite normée si l'espace vectoriel sous jacent est normé et, $\|ab\| \leq \|a\|\ \|b\|\ \forall a,b \in A$. - Elle est dite complète si l'espace normé A est un Banach. Si A est une C-algèbre de Jordan normée complète alors R(A) est un idéal fermé (voir |6|). Et par suite A/R(A) est une algèbre de Jordan normée complète sans radical. Pour plus de détails sur les algèbres de Jordan normées complètes voir |6|.

Soit A une C-algèbre associative (resp. de Jordan) unitaire, si a est un élément de A, on note $Sp_A(a)$ l'ensemble des éléments λ de C tels que $a - \lambda 1$ non inversible. On dit que A est à spectre fini si $Sp_A(a)$ est fini, $\forall a \in A$.

2. Dans |7| on trouve un exemple d'une algèbre locale artinienne qui ne possède pas la décomposition de Wedderburn.

THEOREME: Une algèbre artinienne unitaire possède la décomposition de Wdderburn si et seulement si elle est isomorphe à une somme directe finie d'algèbres de matrices sur des algèbres artiniennes locales qui possèdent la dite décomposition.

Pour la demonstration on montre que si A artinienne et se décompose alors $A=A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_r$ où les A_i sont des algèbres artiniennes qui se décomposent et les $A_i/R(A_i)$ sont simples. Puis on montre que si A est artinienne et se décompose et A/R(A) est simple alors A est isomorphe à M(L) où L est artinienne locale et se décompose. La réciproque est triviale.

3. Feldman |1|, montre que si A est une algèbre de Banach sur C unitaire et A/R(A) est de dimension finie, alors il existe une sous algèbre de Banach S de A qui est homéomorphe à A/R(A) et $A=S\oplus R(A)$. On a un résultat analogue pour les algèbres de Jordan.

THEOREME: Soit A une C-algèbre de Jordan normée compléte unitaire telle que A/R(A) soit de dimension finie sur C, alors il existe une sous algèbre fermée S de A homéomorphe à A/R(A) telle que $A=S\oplus R(A)$.

Pour la demonstration on utilise les mêmes téchniques que celles utilisées par Penico en dimension finie dans |7|. On réduit le problème au cas où A/R(A) est simple. La structure des C-algèbres de Jordan simples de dimensions finies etant entierement déterminée par le théoreme de structure d'Albert (voir |3|). Et nous avons montré le résultat dans chaque cas. La demonstration de Penico nous a facilité la tache.

4. Soit A une C-algèbre de Banach à spectre fini alors A/R(A) est semi simple à spectre fini, donc de dimension finie (voir |4|). Et par suite possède la décomposition topologique de Wedderburn. Pour les algèbres de Jordan on a pas un résultat analogue. Si V est un C-espace de Banach, et f une forme bilinéaire symétrique continue, l'espace vectoriel CxV muni du produit: $(\alpha,x)(\mu,y)=(\alpha\mu+f(x,y),\mu x+\alpha y)$, est une C-algèbre de Jordan normée compléte, la norme est définie par: $\|(\alpha,x)\|=|\alpha|+\|x\|$. Cette algèbre est notée J(V,f). On montre facilement que J(V,f) est à spectre fini et $R(J(V,f))=\{x\in V/\ f(x,y)=0\ \forall y\in V\}$, et possède la décomposition topologique de Wedderburn si et seulement si R(J(V,f)) est supplémenté topologiquement dans V.

On considère l'espace de Banach ℓ^1 des suites complexes sommables, alors il existe un sous espace de Banach y de ℓ^1 de dimension infinie tel que ℓ^1/Y soit isomorphe à ℓ^2 (l'espace des suites complexes a carrés sommables) (voir |5|). Si $X=(x_n)_n$ et $Z=(z_n)_n$ sont deux éléments de ℓ^2

on pose $h(X,Z)= \sum x_n \ z_n$, alors h est une forme C-bilineai re symétrique continue sur ^{2}.

Si X et Z appartiennet à ℓ^1, on pose $f(X,Z)=h(\dot{X},\dot{Z})$ où $\dot{X}$ et $\dot{Z}$ désignent les classes de X et Z modulo le sous espa ce de Banach Y de ℓ^1. On montre aisement que f est une forme C-bilineaire continue sur ℓ^1.

THEOREME: <u>$J(\ell^1,f)$ est une C-algèbre normée compléte à spec tre fini qui ne possède pas la décomposition topologique de Wedderburn.</u>

En effet on a $R(J(\ell^1,f))=Y$ n'est pas supplémenté topologiquement dans ℓ^1. Sinon, son supplémentaire sera isomorphe à ℓ^1 (Du fait qu'un sous espace de Banach de ℓ^1 de dimension infinie supplémenté topologiquement dans ℓ^1 lui est isomorphe. (voir |5|)). Ce qui ne peut avoir lieu car un supplémentaire topologique de Y est isomorphe à ℓ^2

REFERENCES

1. C. Feldman:"The Wedderburn principal theorem in Banach algebras". Proc.Amer.Math.Soc.2.(1951).pp.771-777.
2. G. Hochschild:"The cohomology groups of an associative algebra". Ann. of Math. 46(1945). pp. 58-68.
3. N. Jacobson:"Structure and representation of Jordan al gebras". Amer. Math. Soc. Providence. (1968).
4. I. Kaplansky:"Ring insomorphismes of Banach algebras".- Canad. Jour. Math. 6. (1954). pp. 374-381.
5. J. Lindenstrauss & L. Tzafriri:"Classical Banach spaces I". Berlin Heidelberg. Springer Verlag (1977).
6. J. Martinez Moreno:"Sobre algebras de Jordan normadas - completas". Tesis Doct. Univer. Granada. nº149(1977).
7. A.J. Penico:"The Wedderburn principal theorem for Jor-- dan algebras". Trans. Amer. Math.Soc. 70(1951)404-421.
8. R. Vidal:"Contre exemple non commutatif dans la théorie des anneaux de Cohen". C.R.A.S. Tome 248(4 Avril 1977), Série A. pp. 791-794.
9. D. Zelinsky:"Raising indempotents". Duke.Math.Journ. 21 (1954). pp. 315-322.
10. K.A. Zhevlacov&A.M. Slinko&I.P. Shestakov&A.I. Shirshov :"Rings that are nearly associative". Academic Press - (1982).

A.M.S. Subject Classification (1980)

16 A 35, 17 C 65