APROXIMACIÓN HISTÓRICA A LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS DESDE MEDIADOS DEL SIGLO XIX A COMIENZOS DE SIGLO XX

JAVIER ORTIZ

I.E.S. “Quintiliano”, Calahorra (La Rioja)

Introducción de las funciones elípticas en los currícula docentes

Dada la utilidad de las funciones elípticas deben ser introducidas en los currícula docentes de las enseñanzas universitarias y técnicas. En éstas últimas tardaron más en introducirlas en sus currícula. Jacobi fue el primero en explicar las funciones elípticas en sus clases universitarias, fue profesor de la Universidad de Königsberg desde 1827 hasta 1844, después de publicar su trabajo *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* en 1829. Esta publicación junto con la de Abel *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* dieron un gran impulso al estudio de las funciones elípticas¹. Más tarde, en la universidad de Münster, Gudermann dio un curso sobre funciones elípticas. En 1839 asistió, a este curso, como alumno Weierstrass, quien en 1856 fue nombrado catedrático del Instituto Politécnico de Berlín y en 1864 alcanzó la titularidad de una cátedra de la universidad de la misma ciudad. Y cabe suponer que en ambas instituciones impartiese lecciones sobre funciones elípticas.

Pero en 1847, en la *École Polytechnique* de París, Liouville dio un curso llamado *Leçons sur les Fonctions doublement périodiques*² de las que las funciones elípticas son un caso particular. Esta es la primera vez que aparecen las funciones elípticas en los currícula de la escuela, aunque Liouville ya llevaba tiempo como profesor, y quizás las introdujese en sus clases con anterioridad. Otro que compaginó la docencia en la escuela y el trabajo con las funciones elípticas fue Legendre, luego también pudo impartir alguna lección sobre la materia.

La lógica indica que los cursos de análisis es el lugar más indicado para incluir la temática que nos ocupa. El curso de análisis de la escuela se divide en promociones pares e impares. Y cada profesor estaba dos años con cada promoción. Así Liouville fue el encargado de las promociones impares, su primera promoción fue la de 1837. La siguiente promoción, de 1838, tuvo como profesor a Sturm. Mientras que Liouville siguió como profesor hasta 1849, Sturm fue sustituido por Duhamel en 1840 como profesor de las promociones pares. Éste pasó a ser el responsable de las promociones impares a partir de 1851 y hasta 1867. Su última promoción par

¹ Ver [ORTIZ, 2001].

² Estas lecciones las recogieron C. W. Borchardt y F. Joachimsthal e aparecen impresas en 1880 en el tomo LXXXVIII del *Journal du Crelle* [LORIA, 1982, p. 912].

fue la de 1852, ya que Bertrand se ocupó de ellas desde la de 1854 hasta la de 1892. Hermite irrumpió en las promociones impares en 1869, hasta que en 1875 Jordan le sustituyó. Jordan estuvo con ellas hasta 1893 [GISPERT, 1994, p. 214].

Sin embargo, las funciones elípticas, como tales, no aparecen de forma oficial en la *École Polytechnique* hasta el programa de 1875 de Bertrand. Aunque oficiosamente las introdujo en sus clases de primer curso desde mediados de la década de los 60. Cuando incluyó la Teoría de las funciones elípticas en un suplemento de una reedición del curso de análisis de la *École Polytechnique* de Duhamel [GISPERT, 1994, p. 183]. Y se mantendrían dentro de los programas de la escuela hasta 1909 [GISPERT, 1994, p. 193].

En Italia, el profesor de cálculo diferencial e integral de la universidad de Pavia Felice Casorati se basó en sus lecciones libres de análisis superior de los años académicos 1866 y 1867 para, en 1868, publicar *Teorica delle funzioni di variabili complesse* [CASORATI, 1868, p. vii]. Y en estos cursos trató las funciones elípticas, aunque muy ligeramente. Ernesto Pascal, otro profesor universitario, escribió una teoría sobre éstas. Y en el prefacio, fechado en octubre de 1895, nos dice que este libro recoge las lecciones de la primera parte del curso de análisis superior que el dio en la universidad de Pavia durante el año académico 1894-1895.

En España la introducción fue algo más tardía. En el programa de 1885 para el Ingreso en la Escuela especial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos es la primera vez en que las funciones elípticas son nombradas explícitamente, dentro del epígrafe Segunda parte de Cálculo del apartado de Teorías Diversas [MARTÍNEZ, 1999, p. 525]. Para la que se recomienda estudiar el tratado de *Cálculo infinitesimal* de Duhamel (la edición revisada y anotada por Bertrand a finales de la década de 1860 [MARTÍNEZ, 1999, p. 536]), excepto para el Cálculo de variaciones, el de probabilidades y la teoría de funciones elípticas. Para estas últimas, concretamente, serviría la Memoria de Manuel Pardo [MARTÍNEZ, 1999, p. 537]. Pero las funciones elípticas estuvieron muy poco tiempo incluidas, desaparecen en el programa de 1896 [MARTÍNEZ, 1999, p. 539].

Pero también se divulgaron las funciones elípticas mediante cursos realizados en distintas entidades. Las más significativas son los que impartió Echegaray en el Ateneo de Madrid durante los cursos académicos 1898-1899, 1899-1900 y 1900-1901 [VILLACORTA, 1985, p. 291 y siguientes]. Y en 1902 Clariana Ricart dio una serie de conferencias públicas referentes a *Las funciones elípticas* en la Real Academia de Barcelona. Y, en 1906-1907, Esteban Terradas e Illa explicó un curso de funciones elípticas en la Universidad de Zaragoza [ORTIZ, 2001].

Por continuar con el siglo XX, cuando decayeron las funciones elípticas de los currícula docentes, aun se impartían cursos y conferencias en distintos lugares del

mundo. De dichos eventos, a España llegaban noticias gracias a la RSME³ en sus secciones Crónica y Varia.

En el V Congreso Internacional de Matemáticos en Cambridge (sección 1ª.- aritmética, álgebra, análisis), que se celebró entre el 22 y el 28 de agosto de 1912, M. M. U. Wilkinson expuso un trabajo con el título *Elliptic and allied functions: suggestions for reform in notation and didactical method* [*RSME, II*, 51]. El profesor F. d'Arcais impartió el curso *Funciones de variable compleja. Funciones elípticas. Ecuaciones integrales* [*RSME, V*, 103] en la universidad de Padua, en el año académico 1915-1916. Cálculo diferencial e integral. *Funciones elípticas* [*RSME, V*, 105] era como titulaba G. Faber al curso que dio, durante el semestre invernal del mismo año, en la universidad de Estrasburgo. En esta misma universidad Villat dedicaba dos sesiones semanales, del semestre de verano del curso 1919-1920, para las *Funciones elípticas, con aplicación a la Física* [*RMHA, I(1)*, 227]. En la universidad de Pavía, F. Gerbaldi se hizo cargo de dos cursos:

Funciones elípticas en 1915-1916 [*RSME, V*, 104] y

Funciones de variable compleja y funciones elípticas en 1918-1919 [*RMHA, I(1)*, 50].

En este último curso otras universidades italianas también abordaban el tema. En la de Mesina, el profesor Calapso daba el curso *Funciones elípticas* [*RMHA, I(1)*, 50], y el profesor Cipolla titulaba *Funciones elípticas. Aplicaciones diversas al curso que daba en Catania* [*RMHA, I(1)*, 50]. También en 1918-1919, R. D. Carmichael en la Universidad de Illinois (Urbana, III) impartió su *Funciones elípticas* [*RMHA, I(1)*, 51].

³ En este trabajo se exponen todos los cursos, conferencias y concursos a premios que se anuncian tanto en la RSME (*Revista de la Sociedad Matemática Española*) como en la RMHA (*Revista Matemática Hispano-Americana*) durante el primer tercio del siglo XX. Estas revistas no convivieron pues la RSME emite su primer número en 1911 y deja de publicarse en abril de 1917 cuando andaban por el sexto tomo. La RMHA se empieza a publicar en 1919 y continúa en la actualidad, pero yo me he limitado a estudiar sus dos primeras series (ya que son las que abarcan los años expuestos a estudio) que llegan hasta 1936. También he estudiado los tres cuadernos existentes en la hemeroteca de Facultad de Ciencias (edificio de Matemáticas) de la Universidad de Zaragoza del Suplemento a la RSME escritos por el presidente de la Sociedad Matemática Española, Zoel García de Galdeano, en 1917. Pero sólo he tenido éxito en la RSME. Tener en cuenta que ambas revistas, sobre todo en la RMHA, hacen constar que se evitan escribir, por cuestión de espacio y brevedad, los cursos también convocados pero que se refieren a temas de matemáticas generales y que dan los profesores no numerarios. Por lo que cabe esperar que se programasen más cursos pero no se hicieran públicos en España.

Además se publican las convocatorias de dos concursos para trabajos que versen sobre las funciones elípticas. Ambos con 500 liras de premio. La Real Accademia di Bologna (classe di Scienze Fische) propone trabajos sobre El desarrollo orgánico de la teoría de funciones elípticas y los varios puntos de vista desde los cuales ha sido tratada esta teoría desde fin del siglo XVIII hasta nuestros días, y el plazo de entrega lo cierra el 31 de diciembre de 1912 [RSME, I, 140]. Y la Real Accademia de Ciencias del Instituto de Bologna (M. el Dr. Adolfo Merlani) da hasta el 31 de diciembre de 1916 [RSME, V, 102] para la entrega de trabajos cuya temática sea o El desarrollo orgánico de la teoría de funciones elípticas y los varios puntos de vista desde los cuales ha sido tratada esta teoría desde fin del siglo XVIII hasta nuestros días o Examen histórico-crítico de las diversas definiciones de la integral definida dadas desde el comienzo del siglo XX para sustituir a la definición clásica⁴.

Análisis de libros y manuales sobre funciones elípticas

Ya que he citado varias figuras dedicadas a la enseñanza de las funciones elípticas voy a analizar como abordan algunos de ellos el tratamiento de éstas en sus publicaciones. Lo separaré por países. Y empezaré por las publicaciones españolas.

España

Aunque no he podido encontrar la citada memoria de Pardo si que voy a deshuesar el *Origen y propiedades fundamentales de las funciones elípticas* del doctor en Ciencias fisico-matemáticas José Rius y Casas, publicada en 1889. Y hablaré someramente de la tesis doctoral que en 1903 presentó Guillermo Ciriaco Saéz Muñoz con el título de *Teoría elemental de las funciones elípticas e idea de sus aplicaciones*. Que son las únicas obras que he encontrado⁵.

“No es mi ánimo desarrollar un trabajo completo de dichas funciones. A esta no pequeña labor pienso dedicarme con más detención de la que he empleado en la presente Memoria, si el público científico la acoge benévolaemente. En ella no hago más que indicar las propiedades más importantes de una teoría que siendo hoy tema favorito de los matemáticos, es todavía bastante ignorada en nuestra España” [RÍUS, 1889, p. 6]. Esta es la intención con la que el Rius escribe estas 101 páginas.

En la introducción, también, da una visión somera de la inversión de las integrales elípticas. Utiliza para ello el ejemplo de la función logaritmo neperiano. Después empieza el despiece del tema en los siguientes capítulos:

- I. Integrales elípticas
- II. Funciones elípticas
- III. Fórmulas de adición

⁴ Por lo que cabe suponer que el premio de 1912 quedó exento, ya que lo vuelven a convocar cuatro años más tarde.

⁵ Para conocer los artículos publicados ver [ORTIZ, 2001].

- IV. Integrales elípticas completas
- V. Argumentos imaginarios
- VI. Doble periodicidad
- VII. Casos particulares
- VIII. Definiciones geométricas
- IX. La función p
- X. Multiplicación del argumento

En el primero define las integrales elípticas como “los tipos más sencillos á que pueden reducirse las expresiones de la forma $V = \int F(x,y)dx$, en donde F representa una función racional de x é y , y ésta es un radical tal como

$$y = \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E},$$

en el cual son coeficientes constantes.” [RÍUS, 1889, p. 7]. Y después empieza a hacer consideraciones para simplificar esta integral. Para simplificar el radical descompone el polinomio en factores, efectúa cambios de variables, multiplica o divide por factores adecuados y hace ciertas consideraciones para evitar que aparezcan ceros en el radicando (ya que estos serían polos de la función integrando) para llegar a lo que llama forma canónica del polinomio subradical, es decir, a $y = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$. O lo que es lo mismo, las integrales a estudiar son de la forma $\int F\left(x, \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right)dx$ [RÍUS, 1889, p. 7-10].

Pero también simplifica la función F teniendo en cuenta que es racional. Empieza considerando esta función como cociente de dos funciones enteras. Para mediante operaciones similares a las anteriores, procedimientos de análisis algebraicos e integraciones de los resultados obtenidos llegar a la siguiente conclusión: la integral anterior se descompone en otras correspondientes a una de estas dos formas

$$u = \int \frac{x^{2n}}{y} dx, \text{ siendo } n \text{ un número entero, y } v = \int \frac{dx}{(x^2 - \alpha^2)^p y}, \text{ donde } p \text{ es un número}$$

entero [RÍUS, 1889, p. 11-13]. Y la primera de ellas, a su vez, puede reducirse a otras dos

$$\int \frac{dx}{y}, \int \frac{x^2 dx}{y} \text{ [RÍUS, 1889, p. 13]. Y la segunda se puede reducir en función}$$

de las últimas integrales y de $\int \frac{dx}{(x^2 - \alpha^2)y}$ [RÍUS, 1889, p. 14-15]. En definitiva,

los tres tipos integrales elípticas irreducibles son:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int \frac{dx}{(1-ax^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

y si se toman 0 y x como límites de integración resultan las integrales elípticas de primera, segunda y tercera especie respectivamente. Y para acabar este capítulo

menciona la notación de Legendre efectuando el cambio $x = \text{sen } \varphi$ [RÍUS, 1889, p. 16].

Se fija sólo en la de primera especie, por ser la más importante, y en su forma de Legendre $u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi}}$, para comenzar el segundo capítulo. Considera a φ como una función de u , que llama amplitud y denota por $\varphi = \text{amu}$. Por consiguiente $x = \text{sen } \varphi = \text{sen } \text{amu}$, y se denomina seno de la amplitud de u . Análogamente se tienen el coseno de la amplitud y la delta de la amplitud de u , respectivamente $\sqrt{1 - x^2} = \text{cos } \varphi = \text{cos } \text{amu}$, $\sqrt{1 - k^2 x^2} = \Delta \text{amu}$.

Ya están definidas las tres funciones elípticas con la notación de Jacobi, que Gudermann simplificó con $\text{sn } u$, $\text{cn } u$ y $\text{dn } u$ respectivamente [RÍUS, 1889, p. 17-18]. También define el argumento, considerando u como función inversa $u = \text{arg } \text{am } \varphi$. La relación existente entre las constantes módulo k y la módulo complementario k' , $k^2 + k'^2 = 1$. Y a partir de aquí empieza deducir las relaciones fundamentales de las funciones elípticas de un mismo argumento y de sus derivadas [RÍUS, 1889, p. 19]. Muestra los valores de la integral elíptica cuando el argumento es negativo, cuando $x = 0$ y cuando $x = 1$. En este último caso la denomina integral completa, designada por K , y da sus relaciones fundamentales [RÍUS, 1889, p. 19-20].

Los últimos párrafos aprovechan estas consideraciones, y otras más generales, para demostrar que la función $\text{sn } u$ es par, continua y holomorfa excepto para los polos y meromorfa en toda extensión del plano [RÍUS, 1889, p. 20-23].

Las fórmulas de adición se dejan para el tercer capítulo. Parte de la ecuación de tercer grado $\varphi(x) = x^2(a + x^2) - b^2(1 - x^2)(1 - k^2 x^2) = 0$ [RÍUS, 1889, p. 23] para, tras diversas y tediosas operaciones, llegar a las fórmulas de “los valores de las funciones elípticas de la suma de dos argumentos en función de las de estos mismos argumentos” [RÍUS, 1889, p. 31]. Que son más fácil de recordar de la forma

$$\text{sn}(u + v) = \frac{\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v + \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v},$$

y otras análogas para la resta de argumentos, la semisuma y semidiferencia de funciones elípticas de los argumentos $u + v$ y $u - v$, para el argumento en función de su mitad y para $2K$ ⁶.

⁶ Estas fórmulas son análogas a las existentes para las funciones trigonométricas.

Pese a haber definido ya la integral elíptica completa, vuelve a retomarlas en el capítulo cuarto. La correspondiente al módulo k será

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F(k)$$

y existe otra análoga para el módulo complementario [RÍUS, 1889, p. 33-34]. Que en la notación de Legendre será

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad [\text{RÍUS, 1889, p. 35}].$$

Considerando el desarrollo en serie, convergente, del integrando por la fórmula del binomio, se tiene una suma de integrales conocidas que nos llevan a

$$K = F(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \quad [\text{RÍUS, 1889, p. 36}].$$

Continúa determinando en todos los casos la integral elíptica completa para el módulo, y análogamente, lo hace con el módulo complementario. Todos estos valores están calculados cuando el límite superior de integración es 1, es decir, cuando se anula el radical $\sqrt{1-x^2}$. Luego será conveniente estudiar el caso en el que $\sqrt{1-k^2x^2}$ se anule, o sea, cuando el límite superior sea $\frac{1}{k}$. Y, dependiendo de los valores finales de los radicandos, se obtiene

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = k \pm ik' \quad [\text{RÍUS, 1889, p. 45}].$$

Y se concluye que $\operatorname{sn}(K \pm iK') = \frac{1}{k}$, $\operatorname{cn}(K \pm iK') = \mp \frac{ik'}{k}$, $\operatorname{dn}(K \pm iK') = 0$ [RÍUS, 1889, p. 45].

El siguiente capítulo es un formulario de las funciones elípticas de un argumento imaginario en función de otras de argumentos reales. Esto le facilita demostrar la doble periodicidad en el capítulo sexto.

	Periodos
sn	$4K$ $2i K'$
cn	$4K$ $4i K'$
dn	$2K$ $4i K'$

[RÍUS, 1889, p. 57]. Aunque también demuestra esta importantísima propiedad, gracias al teorema de Cauchy [RÍUS, 1889, p. 58], partiendo de las definiciones de las funciones elípticas. Los cuatro últimos párrafos de este capítulo los dedica a la representación gráfica de las funciones elípticas. Y aprovecha estas gráficas para representar los ceros y los polos de éstas [RÍUS, 1889, p. 66-67].

Con todo lo establecido a estas alturas del libro se puede observar la gran analogía existente entre las funciones elípticas y las circulares, como que “el papel que en la teoría que aquí estudiamos desempeña la integral completa K es idéntico al que en Trigonometría ejerce la cantidad $\frac{\pi}{2}$ ” [RÍUS, 1889, p. 68]. Lo que “parece indicar que las funciones elípticas son una generalización de las funciones circulares” [RÍUS, 1889, p. 68]. Y también le permite emplear el capítulo séptimo para ver algunos casos particulares en que las funciones elípticas degeneran en las circulares y en la hiperbólicas⁷.

En el capítulo octavo aborda las funciones elípticas y sus definiciones geométricas⁸. Para el noveno capítulo abandona la vertiente geométrica para atacar a la función p . Se toma la integral $U = \int F(x, y)dx$, en donde representa F una función racional de x é y , y esta un radical tal como $y = \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$. Y sin que el polinomio subradical “deje de ser de tercer grado, se puede simplificar, haciendo que desaparezca el término en x^2 ” [RÍUS, 1889, p. 80], de manera que este nuevo polinomio tenga tres raíces que suman cero. Para llegar a la función

$$pu = -\frac{1+k^2}{3\lambda} + \frac{1}{\lambda sn^2 \frac{u}{\sqrt{\lambda}}}$$

⁷ Aunque no las nombra explícitamente. Usa la notación exponencial de éstas.

⁸ Cuestión en la que no entro, por necesidades de espacio, y la pospongo para trabajos posteriores.

donde λ es una cantidad constante [RÍUS, 1889, p. 82]. Y junto con las tres raíces citadas anteriormente nos lleva a las relaciones

$$sn^2 \frac{u}{\sqrt{\lambda}} = \frac{e_1 - e_3}{pu - e_3}, \quad cn^2 \frac{u}{\sqrt{\lambda}} = \frac{pu - e_1}{pu - e_3} \quad \text{y} \quad dn^2 \frac{u}{\sqrt{\lambda}} = \frac{pu - e_2}{pu - e_3} \quad [\text{RÍUS, 1889, p. 83}].$$

Que permiten definir pu valiéndose de la integral definida

$$u = \int_y^\infty \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - my - n}},$$

siendo m y n los parámetros determinados por estas relaciones de las raíces

$$e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\frac{1}{4} m, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} n \quad \text{y} \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad [\text{RÍUS, 1889, p. 84}].$$

De donde parte para estudiar las derivadas de pu (la primera derivada será el radical del denominador del integrando con signo distinto al que tenga al principio de la integración [RÍUS, 1889, p. 85]), y demuestra la paridad y la doble periodicidad⁹ de pu , y encuentra la fórmula para la adición de los argumentos, los ceros y los polos.

Para esto se ha basado en $sn u$, pero “mediante las mismas relaciones, y una vez conocidas las propiedades fundamentales de la nueva función, se pueden investigar para ésta directamente las demás, y deducir de ellas las correspondientes á las funciones elípticas” [RÍUS, 1889, p. 91]. De aquí la importancia de la nueva función, y un ejemplo de esto es el problema de la multiplicación del argumento por un número entero. Que una vez resuelto para pu , lo será para las tres funciones elípticas. Y con el planteamiento y resolución de este problema, en el último capítulo, finaliza el libro.

Mejor dicho, las últimas letras de este libro son: “Véndese esta obrita al precio de 4 pesetas en las principales librerías de Madrid y Barcelona” [RÍUS, 1889, p. 104].

Convendría analizar los cursos de Echegaray en el Ateneo pero ni él ni el Ateneo publicaron el curso *Estudio de las funciones elípticas*; sin embargo, Juan González Piedra, un alumno del curso impartido en 1898-1899, publicó, en 1898 un resumen de las lecciones de este año que tituló *Teoría de las funciones elípticas. Extracto de las conferencias dadas por D. José Echegaray en el Ateneo de Madrid en la Revista de Obras Públicas*¹⁰. Este extracto es incompleto ya que se detiene al

⁹ Los dos periodos son 2ω y $2\omega'$, donde $\omega = K\sqrt{\lambda}$ y $\omega' = iK'\sqrt{\lambda}$ [RÍUS, 1889, p. 89].

¹⁰ Ver [GONZÁLEZ, 1898].

obtener, tras una larga serie de transformaciones, la forma general de una integral elíptica y decir que la integración de ésta depende del conocimiento de las tres especies de funciones elípticas. Pero remite a posteriores capítulos el estudio de estas tres integrales¹¹. Al curso del siguiente año asistió Luis Octavio de Toledo y, en 1932, escribió un artículo titulado *Recuerdos de unas conferencias* publicado en la *Revista Matemática Hispano-Americana*. Ya que se desvanece su esperanza de ver publicadas esas lecciones y lamenta no poder dar más que una ligera idea.

Así que tendré que pasar, aunque sea ligerísimamente, al trabajo de Saéz. Comienza su tesis dando la definición geométrica de las funciones elípticas¹². Obteniendo $sn.u$, $cn.u$ y $dn.u$ [SÁEZ, 1903, p. 6]. De éstas sale también $p.u$. Todo esto es real pero se puede extender a los números complejos. Para estudiar las funciones $p.u$ y derivada, $sn.u$, $cn.u$ y $dn.u$, sus propiedades, variaciones y calcularlas se decanta por considerarlas con argumentos puramente imaginarios y complejos [SÁEZ, 1903, p. 9]. Para acabar sus tesis escribe la siguiente conclusión [SÁEZ, 1903, p. 82]:

“Terminadas estas cuartillas, que contienen lo más elemental de la «Teoría de las funciones elípticas», y creyendo estar muy lejos de conseguir el fin que me propuse, solo me resta solicitar de nuevo la benevolencia del Tribunal, sin la que, estos pobres y mal trazados renglones serían insuficientes para verificar con fruto el ejercicio del grado de Doctor”.

La respuesta del tribunal fue la de darle la calificación de sobresaliente. Francisco P. de Rojas presidía el tribunal, de secretario estaba Cecilio Jiménez Rueda y como vocales José Andrés Irueste, José M. Villafañe y Luis Octavio de Toledo.

Francia

De este país comentaré las publicaciones de algunos cursos de análisis de algunos profesores de la Escuela Politécnica.

Empezaré por la publicación, de 1870, de Bertrand *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Este volumen es la continuación del *Traité de Calcul différentiel* publicado en 1864, y está dedicado al cálculo integral. Bertrand divide su tratado en tres libros. Las integrales definidas e indefinidas las incluye en el primero, sus aplicaciones y desarrollos los deja para el segundo y el último libro lo ocupa con la teoría de las funciones elípticas. Aunque ya las toca, un poco (partiendo de la inversión de las integrales elípticas), en el tercer y cuarto capítulo del primer libro.

¹¹ Yo no conozco, por el momento, la publicación de dichos capítulos.

¹² Ya que tampoco he tocado este tema cuando lo trataba Rius en su libro, aquí tampoco lo haré. Quedando así, sin analizar la obra de Saéz pero posponiéndolo también para postreros estudios.

Las 152 páginas del tercer libro están subdivididas en siete capítulos más una sección para las tablas numéricas, que son debidas a Fédor Thoman [BERTRAND, 1870, p. xii]. Con el siguiente índice¹³ [BERTRAND, 1870, p. viii-x]:

- I. Teoremas relativos a la adición de las integrales.
- II. Doble periodicidad de las funciones elípticas.
- III. Multiplicación y división del argumento.
- IV. Expresión de las funciones bajo forma de productos.
- V. Funciones $H(x)$ y $\Theta(x)$ de Jacobi.
- VI. Transformación de las funciones elípticas.
- VII. Cálculos numéricos.
Tablas de las funciones elípticas.

Jordan dedica el capítulo VI de la segunda parte de su *Cours d'analys de l'École Polytechnique*¹⁴, titulada "Calculo integral. Integrales definidas e indefinidas", al estudio de los principios de la teoría de las funciones de una variable imaginaria, donde reserva el epígrafe IV para las funciones doblemente periódicas. En el siguiente capítulo, el último del libro, se abordan las funciones elípticas en cinco epígrafes. Aunque ya dedica 16 páginas, en el cuarto epígrafe del primer capítulo "Integrales indefinidas", a las fórmulas de reducción y a la reducción de las integrales elípticas e hiperelípticas.

Pero volveré sobre los epígrafes del capítulo VII. El primero versa sobre las integrales de las funciones algebraicas: diversos valores de la integral de una función algebraica y su aplicación a la integral elíptica de primera especie, el teorema de Abel y su aplicación a la integral elíptica. En el segundo da la definición de los tres tipos de funciones elípticas, las primeras propiedades de las funciones elípticas como que son meromorfas y doblemente periódicas. Calcula los ceros y los polos de las tres funciones, así como los periodos elípticos y sus propiedades. Estudia la adicción y multiplicación de los argumentos, también el caso del módulo real positivo y menor que la unidad. Además resuelve las ecuaciones $sn u = sn \alpha$, $cn u = cn \alpha$ y $dn u = dn \alpha$ y calcula los valores del seno y coseno elíptico con la suma de los semiperiodos. En el tercero se ocupa de los desarrollos de las funciones elípticas mediante la serie de Maclaurin, Fourier y fracciones. Asimismo da las expresiones de las funciones elípticas por las funciones θ , las relaciones entre éstas y da una nueva demostración de las fórmulas de adicción. La transformación se aborda en el cuarto epígrafe enunciando el problema y simplificándolo. Se hace la transformación del primer grado y la repite para las funciones θ . Hace la división del primer y segundo periodo por 2 y por un número impar. También estudia la

¹³ Sólo enumero los capítulos omitiendo los distintos epígrafes de éstos.

¹⁴ Publicado en 1883.

multiplicación y división del argumento y la ecuación modular. Para acabar con el último epígrafe viendo las integrales de segunda y tercera especie y la relación entre sus periodos.

La primera edición del curso de Sturm, publicada por E. Prouhet, de este curso es de 1857. Y hasta 1895 las matemáticas evolucionaron así que hay teorías que se quedan fuera de este curso por una cuestión temporal. Entre ellas se encuentran las funciones elípticas, por lo tanto es necesaria la inclusión de un apéndice que las trate. Y el geómetra H. Laurent fue el encargado de escribir un anexo sobre la teoría de éstas, que se encuentra al final del segundo volumen. Que no sólo servirá para satisfacer las exigencias del programa sino que también será útil para aquellos que quieran explorar la inmensa carrera abierta por los trabajos de Abel, Jacobi, Cauchy, Hermite y Weierstrass [STURM, 1895, I, p. xiii-xiv].

En la segunda lección, del primer volumen de las lecciones complementarias hechas por A. de Saint-Germain, aparece un párrafo dedicado a las integrales y funciones elípticas. Donde se limita a definir las integrales elípticas diciendo que son los tres tipos de integrales a los que se reducen las trascendentes introducidas por la integración de la diferencial de una función que contiene la raíz cuadrada de un polígono de tercer o cuarto grado. También justifica el nombre de elípticas a la relación de

$$s = \int_0^x dx \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} = u - k^2u_1,$$

llamada por Legendre integral de segunda especie, y la elipse [STURM, 1895, I, p. 557].

También las muestra tras el cambio de variable $x = \sin \varphi$ y nombra la notación de Gudermann de las funciones elípticas. Además demuestra el caso particular en el que la integral de tercera especie puede ser reducida en función de las otras dos [STURM, 1895, I, p. 558]. Para acabar remitiendo al citado apéndice de Laurent.

La segunda nota del segundo volumen, escrita por Despeyrous, están dedicadas a las funciones elípticas [STURM, 1895, II, p. 342]. En estas cuatro escasas páginas se demuestra la fórmula fundamental de la teoría de las funciones elípticas usando la analogía con la fórmula fundamental de las funciones circulares

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

La intención del trabajo de Laurent, según el autor, no es la de suplir la lectura de las grandes obras que grandes maestros han escrito sobre el tema sino que es la de facilitar un resumen de las propiedades y las aplicaciones a la geometría y a la mecánica de las funciones elípticas, cubriendo la ausencia de tratado, propiamente

dicho, sobre esta rama del análisis. Todo aquel que quiera profundizar en el tema deberá leer a Jacobi, Abel, Legendre y Briot y Bouquet [STURM, 1895, II, p. 467].

En el prefacio de su curso Humbert avisa de los posibles reproches que puede recibir el libro por parte de los distintos “gremios” de científicos. Dice que los ingenieros pueden encontrar superfluos el capítulo consagrado a las funciones elípticas [HUMBERT, 1904, p. vii]. También cuenta que ha reducido al mínimo la teoría pura para poder dedicar más tiempo a las aplicaciones. Y que se ha guiado por los tratados de Briot y Bouquet y de Jordan, y por el punto de vista de Cauchy, Weierstrass y Hermite. Aclarando que ha adoptado la notación de Weierstrass para las funciones elípticas y que los ejercicios del final del libro familiarizaran al lector con el empleo de éstas [HUMBERT, 1904, p. ix]. La segunda parte del libro está dedicada a las funciones analíticas y elípticas, dos capítulos para las primeras y los tres últimos para las segundas. El capítulo tercero es para las funciones elípticas, bajo la óptica de Weierstrass, el cuarto a sus aplicaciones y el quinto para los cálculos numéricos.

En el apartado teórico da las primeras definiciones y teoremas de las funciones elípticas y sus periodos. Para pasar a presentar las funciones fundamentales de Weierstrass: ζu , $\wp u$ y σu . Muestra diversas expresiones de una función elíptica, las relaciones entre $\wp u$ y su derivada, las fórmulas de adición y define $\wp u$ por medio de los invariantes, estudiando los periodos en función de éstos. Hay un epígrafe dedicado a las funciones $\sqrt{\wp u - e_\alpha}$ y snu .

Comienza las aplicaciones con varios métodos para el cálculo de las integrales elípticas. También estudia el teorema de Poncelet para aplicarlo al péndulo y al arco de la lemniscata. Y otras como la ley del movimiento del péndulo simple y las cúbicas planas. Y resaltar los cálculos numéricos que hace con la función θ .

Todo lo anterior son cursos de la escuela, es decir para las enseñanzas técnicas pero también se enseñan las funciones elípticas en las universidades. El profesor de matemáticas de la Universidad de Burdeos, J. Hoüel, se somete a los límites del programa para licenciados en ciencias matemáticas [HOÜEL, 1878-81, I, p. xiv] para publicar, desde 1878 hasta 1881, los cuatro tomos del *Cours de Calcul Infinitesimal*. En este tratado reproduce gran parte sus lecciones que ya fueron publicadas, con una tirada muy pequeña, en 1871 y en 1872 [HOÜEL, 1878-81, I, p. v]. El libro está dividido en seis libros pero el que reclama mi atención es el sexto *Théorie des fonctions d'une variable complexe. Applications a la théorie des fonctions elliptiques* y sus cuatro capítulos.

Aquí dedica los tres primeros a la teoría de las funciones uniformes, su aplicación (desarrollos en series periódicas, descomposición en fracciones simples, en productos infinitos, etc.) y a las funciones multiformes. Y en el capítulo cuarto estudia, con algunos ejemplos simples, las funciones que surgen de la inversión de las

integrales elípticas. Tras estas nociones aborda la reducción de las integrales elípticas a las tres formas canónicas de Legendre, usando un método indicado por Weierstrass, y demuestra sus principales propiedades. También desarrolla las consecuencias del teorema de adición y expone los casos más simples de las fórmulas de transformación de las integrales de primera especie, con su aplicación al cálculo numérico de estas integrales. Establece, siguiendo los pasos de E. Weyr, la sinectividad de la función inversa de la integral elíptica de primera especie. Estudia la doble periodicidad para pasar a la expresión de las funciones elípticas mediante los dobles productos de Abel y por los productos simples de Abel y de Jacobi, que se transforman en las funciones ϑ . Y, con éstas, indica el medio de expresar las integrales de tercera especie enviándonos, para más detalles, a la obra¹⁵ que él publicó en 1866 [HOÜEL, 1878-81, I, p. xiii-xiv]. En resumen, 140 páginas para las funciones elípticas repartidos en diez párrafos [HOÜEL, 1878-81, IV, p. 306]:

- I. Reducción de las integrales elípticas a las tres formas normales.
- II. Propiedades de las funciones elípticas.
- III. Descomposición de las funciones elípticas en series de fracciones simples.
- IV. Desarrollo de las funciones elípticas en productos infinitos. Funciones Θ .
- V. Desarrollo de los productos infinitos Θ en series trigonométricas. Funciones ϑ .
- VI. Desarrollo de las funciones elípticas en series de funciones periódicas.
- VII. Transformación de Landen. Cálculo numérico de las integrales elípticas de primera especie.
- VIII. De las integrales elípticas de segunda especie.
- IX. De las integrales elípticas de tercera especie.
- X. Tabla de funciones elípticas.

Italia

Casorati solamente menciona las funciones elípticas en la sección introductoria *Notizie Storiche*, donde da una visión histórica de la evolución de éstas.

La obra de Pascal, *Teoría delle Funzioni ellittiche*, se basa sobretudo en las elegantes funciones theta (ϑ) de Jacobi, que las expone como un apéndice de la teoría de las funciones elípticas. Sigue los pasos de Jacobi en las lecciones de *Theorie der elliptischen Functionen aus den eigenshaften der Thetareihen abgeleitet* donde se fundamentan las funciones de Legendre sobre las funciones theta. Pero no se para en la obra de Jacobi sino que prosigue su estudio con las recientes novedades, es decir las nuevas funciones introducidas por Weierstrass en el campo de las fun-

¹⁵ *Recueil de formules et de Tables numériques.*

ciones elípticas. Donde dice que ha tenido serias dificultades pero que ha intentado superarlas del modo más simple que ha encontrado. Para abordar este nuevo punto de vista ha seguido el *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* escrito por Halphen, aunque en algunos casos los procedimientos tomados por el autor no le parecen lo suficientemente elegantes para ser seguidos y toma los caminos que a él le parecen más naturales [PASCAL, 1896, p. iii-v].

El libro está dividido en los siguientes seis capítulos:

- I. Le funionzi ϑ di Jacobi.
- II. Le funzioni ellittiche di Legendre.
- III. Le quattro funzioni σ di Weierstrass.
- IV. La funzione $p(u)$ di Weierstrass.
- V. Integrali ellittici di 1^a, 2^a, 3^a specie.
- VI. Espressioni delle funzioni ellittiche. Quando si prende per forma fondamentale una binaria biquadratica qualunque.

De los consiguientes párrafos de estos capítulos resaltaré solamente uno del capítulo quinto donde trata la función Q de Klein ya que en ningún otro curso la he visto tratada como tal.

En 1898 Pascal escribe *Repertorio matematiche superiori*, un *vademecum* de la matemática [PASCAL, 1898, p. xiii-xv]. Ya que en el extranjero ya existen obras de estas características, dos en Alemania¹⁶, y, sin embargo, Italia no posee ninguna. De este repertorio sólo me fijaré en los capítulos donde se incluyen las funciones elípticas que se hallan en el primer tomo, el dedicado al análisis. En el séptimo, titulado cálculo integral, aparece un párrafo en el que se hace una introducción a las integrales elípticas. Tras su inversión se llega a las funciones elípticas que se mencionan en el decimosexto capítulo, donde se invierten 54 páginas para su estudio. Aunque se pueden ver las funciones doblemente periódicas, la generalización de las funciones elípticas, en un párrafo del capítulo decimocuarto.

La teoría de las funciones elípticas la divide en siete párrafos:

1. Las ϑ di Jacobi.
2. Las funciones elípticas de Legendre.
3. Las cuatro funciones σ de Weierstrass.
4. La función p de Weierstrass.

¹⁶ Cita LÁSKA (1888-1889-1894) *Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik*. Braunschweig y HAGEN *Synopsis der höheren Mathematik*. Berlin [PASCAL, 1898, p. xiv-xv].

5. Las funciones racionales p y p' .
6. Teoría de las transformaciones de las funciones elípticas.
7. Sobre la multiplicación del argumento en las funciones elípticas. Multiplicación compleja.

Y las últimas cuatro páginas están reservadas para una breve reseña histórica y un elenco bibliográfico para los interesados en profundizar sobre las funciones elípticas. Recomienda las obras de Casorati¹⁷ y de Enneper¹⁸ para los detalles históricos [PASCAL, 1898, p. 455-6]. Y los principales tratados que nombra son el mismo de Enneper, el de Briot y Bouquet de 1875, la traducción de Brioschi de 1880 del de Cayley, el escrito por Königsberger en 1874, el de 1892 de Greenhill y el de Halphen de 1886¹⁹, que ya utilizó para sus lecciones universitarias anteriormente citadas y al cual critica. Y entre los más recientes enumera el de la pareja Tannery y Molk de 1893, el de 1895 de Krause, el que al alimón publicaron Appel y Lacour en 1897 y la *Teoría delle funzioni ellittiche* que el mismo escribió en 1896 [PASCAL, 1898, p. 456].

Bibliografía

- BERTRAND, J. (1870) *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Gauthier-Villars, Paris.
- CASORATI, F. (1868) “Notizie storiche” In: CASORATI, F. (1868) *Teorica delle funzioni di variabili complesse*. Fratelli Fusi, Pavia.
- DUHAMEL, J.M.C. (1860) *Éléments de calcul infinitésimal. Tomo I*. Mallet-Bachelier, Paris.
- DUHAMEL, J.M.C. (1864) *Éléments de calcul infinitésimal. Tomo II*. Mallet-Bachelier, Paris.
- GISPERT, H. (1994) “De Bertrand à Hadamard: quel enseignement d’analyse pour les polytechniciens?”. En: BELHOSTE, B., DAHAN DALMEDICO, A., PICON, A. (1994) *La formation polytechnicienne 1794-1994*. DUNOD, Paris. 181-215.
- GONZÁLEZ PIEDRA, J. (1898) “Teoría de las funciones elípticas. Extracto de las conferencias dadas por D. José Echegaray en el Ateneo de Madrid”. En: *Revista de Obras Públicas*, XLVI, 16-7, 75-6, 84-5, 94, 383-5, 391-3.
- HOÜEL, J. (1878-81) *Cours de Calcul Infinitesimal*. Gauthier-Villars, Paris.
- HUMBERT, G. (1904) *Cours d’analyse professée a l’école polytechnique. Tome II*. Gauthier-Villars, Paris.

¹⁷ Se refiere a [CASORATI, 1868].

¹⁸ ENNEPER (1890) *Elliptic Function*. Halle.

¹⁹ Notar que Halphen publicó un tratado, que quedó incompleto por su repentina muerte, dividido en tres tomos. Pascal sólo cita el primero de ellos, ya que el segundo salió en 1888 y en 1891 vio la luz el tercero.

- JORDAN, C. (1883) *Cours d'analys de l'École Polytechnique*. Tome deuxième. Gauthier-Villars, París.
- LORIA, G. (1982) *Storia delle Matematiche dall'alba della civilrà al tramonto del secolo XIX*. Cisalpino-Goliardica, Modena. Segunda edición.
- MARTÍNEZ GARCÍA, M. A. (1999) *Las matemáticas en los planes de estudios de los ingenieros civiles en España en el siglo XIX*. Universidad de Zaragoza, Facultad de Ciencias. Tesis doctoral.
- OCTAVIO DE TOLEDO, L. (1932) "Recuerdos de unas conferencias". In: *Revista Matemática Hispano-Americana*, 2ª serie, 7, 59-63.
- ORTIZ, J. (2001) "Introducción histórica a las funciones elípticas". En: Elena Ausejo y Mª Carmen Beltrán (eds.) *Innovación tecnológica e iniciativa individual*. Zaragoza., Cuadernos del SEHCTAR, nº 14. (En prensa).
- PASCAL, E. (1896) *Teoría delle Funzioni ellittiche*. Ulrico Hoepli editore-librajo della Real Casa, Milano.
- PASCAL, E. (1898) *Repertorio matematiche superiori (Definizioni-Formele-Teoremi-Cenni bibliografici) I. Analisi*. Ulrico Hoepli editore-librajo della Real Casa, Milano.
- SÁEZ MUÑOZ, G. (1903) *Teoría elemental de las funciones elípticas e idea de sus aplicaciones*. Imprenta de Fortanet, Madrid. Tesis doctoral.
- STURM, Ch. (1895) *Cours d' analyse de l' école polytechnique. Vol. I y II*. Gauthier-Villars, París.