



ENERO
2026

Vol. III, Núm. 1, pp. 045-056
ISSN: 3020-4925

$V - A + C = 2$: un recorrido por la fórmula de Euler

PAULO GONZÁLEZ OGANDO

La fórmula de Euler para poliedros, $V - A + C = 2$, es un resultado emblemático que enlaza la geometría clásica con la topología moderna. En este artículo, se revisa el contexto histórico en el que Euler enunció su teorema, se presenta su demostración original junto con las dificultades que planteaba y se comentan algunas pruebas posteriores. Además, se expone la generalización de la fórmula a superficies de mayor complejidad y a variedades de dimensión superior, destacando su conexión con la característica de Euler-Poincaré. Finalmente, se mencionan aplicaciones actuales que muestran cómo una identidad combinatoria sencilla se ha convertido en un invariante estructural de gran relevancia.

Palabras clave: Euler, poliedros, topología, característica de Euler, aplicaciones.

$V - E + F = 2$: A Journey Through Euler's Formula

Euler's formula for polyhedra, $V - E + F = 2$, is a landmark result that links classical geometry with modern topology. This article reviews the historical context in which Euler stated his theorem, presents his original proof together with the difficulties it entailed and discusses some subsequent demonstrations. It also outlines the generalization of the formula to more complex surfaces and higher-dimensional manifolds, emphasizing its connection with the Euler-Poincaré characteristic. Finally, it highlights current applications showing how a simple combinatorial identity has become a structural invariant of great significance.

Keywords: Euler, polyhedra, topology, Euler characteristic,

applications.

MSC2020: 01A50, 52B05, 52B10, 52B11.

La magia de contar caras, aristas y vértices

A primera vista, un cubo y una pirámide (figura 1) tienen algunas características en común, pero al mismo tiempo son figuras muy diferentes, sobre todo en lo concerniente a la cúspide de la pirámide. Sin embargo, ambas cumplen una sorprendente relación que fue descubierta en el siglo XVIII por el matemático suizo Leonhard Euler (1707 – 1783). Si se hace un recuento del número de vértices V , el número de aristas A y el número de caras C que tienen, al calcular con esas tres cantidades la combinación $V - A + C$ se obtiene un mismo número: el 2.

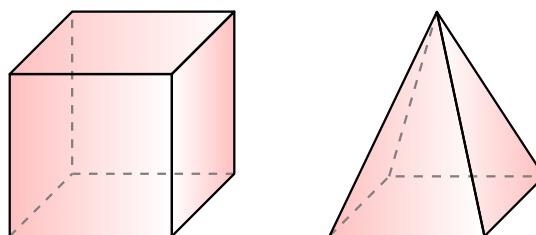


Figura 1. Hexaedro o cubo (izquierda) y pirámide cuadrangular (derecha).

Esta identidad, $V - A + C = 2$, aparece de forma

sorprendente en la geometría tridimensional; válida para cualquier poliedro convexo, es conocida como fórmula de Euler y constituye uno de los primeros resultados que anticipan la noción moderna de invariante topológico.

Aunque su enunciado puede verificarse de forma inmediata con ejemplos sencillos como los de la figura 1 (en el cubo, $V = 8$, $A = 12$, $C = 6$; en la pirámide, $V = 5$, $A = 8$, $C = 5$), el hecho de que se cumpla para todos los poliedros convexos, independientemente de su forma, tamaño o disposición en el espacio, convierte a esta fórmula en un resultado de gran profundidad y relevancia.

Euler lo publicó en 1758 en su obra *Elementa doctrinae solidorum*. Él mismo propuso una demostración que posteriormente sería corregida por otros matemáticos, debido a ciertos supuestos implícitos en relación con el concepto de convexidad. Desde entonces, la fórmula ha sido objeto de comentarios y de generalizaciones; hoy en día, se considera en topología algebraica como un caso particular de la característica de Euler-Poincaré.

En este artículo, se propone un acercamiento divulgativo a la fórmula de Euler. Se presentará el contexto histórico y matemático de la fórmula, se echará un vistazo a la demostración original de Euler y a las dificultades que esta presentaba, se mencionarán diversas correcciones y extensiones y se mostrará cómo una identidad tan sencilla conecta la geometría clásica con las ideas fundamentales de la topología moderna.

Contexto histórico

Como ya se ha dicho, fue en 1758 cuando Euler estableció, en su obra *Elementa doctrinae solidorum*, un resultado que indica la relación entre el número de caras C , el número de aristas A y el número de vértices V de un poliedro convexo sin agujeros:

$$V - A + C = 2. \quad (1)$$

Lo hizo sin incluir ninguna demostración; sería en su *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*, publicada ese mismo año¹, donde incorporaría un intento de prueba de la identidad.

Se trata de una fórmula bastante conocida en la actualidad, ya que esta relación geométrica es habitual en los libros de texto de la enseñanza secundaria, pero poca gente conoce su demostración original, en parte

porque la prueba que publicó Euler era defectuosa, y solo posteriormente otros matemáticos propusieron demostraciones más cortas y elementales, usando diferentes técnicas.

Pero antes de adentrarse en la fórmula, hay que dar un paso atrás en el tiempo. Previamente a Euler (una buena contextualización histórica, en la que se basa gran parte de este apartado, se encuentra en Kline, 1972), la geometría europea se fundamentaba principalmente en el legado euclidiano, con algunas aportaciones renacentistas de la perspectiva y la consiguiente geometría proyectiva. La clasificación de los poliedros regulares y semirregulares y los problemas métricos generaban mucha más atención que conceptos como el de superficie o el de conexión, todavía en pañales: por entonces, no existía aún la topología como una disciplina con entidad propia.

Alguna relación entre los elementos de un poliedro ya había sido establecida con antelación por René Descartes (1596 – 1650), en un manuscrito de 1630 (*De solidorum elementis*). No obstante, este manuscrito no se descubrió hasta 1860, es decir, 230 años más tarde, y durante ese tiempo solo se conocía una copia hecha por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) en 1676. En el manuscrito se incluía un tratamiento general de los poliedros, junto con algunos resultados generales válidos. Uno de ellos, desconocido hasta la publicación de la copia de Leibniz, se puede considerar análogo a la fórmula de Euler, dado que esta se puede interpretar hoy como un simple corolario. Sin embargo, tal resultado ha llevado a algunos matemáticos a dudar acerca de a quién pertenece la «paternidad» de dicha fórmula, si a Euler o a Descartes, lo que motivó a Pasquale Joseph Federico (1902 - 1982) a escribir un libro entero sobre esta cuestión (Federico, 1982).

El enunciado de la proposición 6 del manuscrito de Descartes es, básicamente, que $P = 2F + 2S - 4$, donde P es el número de ángulos planos, F el número de caras y S el número de ángulos sólidos (que vienen a ser los vértices). Para ver la equivalencia con la fórmula de Euler, hay que introducir la noción de arista de un poliedro (que Descartes no tenía) y eliminar de la consideración los ángulos planos (algo que Descartes no llega a mencionar). Con esto, otra de las afirmaciones de Descartes en ese manuscrito se puede expresar hoy como $P = 2A$, donde A es el número de aristas. De ahí se llega inmediatamente, con la nomenclatura actual y en castellano, a la fórmula (1) o, equivalentemente, a $V + C = A + 2$.

En todo caso, tal y como asegura Federico:

¹ Ambas accesibles en línea en <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/>.

«Descartes no revela, como algunos sostienen o afirman, el teorema de Euler en sí, ni verbalmente ni mediante fórmulas. Tampoco hay ninguna indicación en el manuscrito de que Descartes conociera o pudiera haber conocido dicho teorema.» (Federico, 1982, p. 3)

Además, parece ser que Euler llegó a la fórmula por un camino diferente al de Descartes, sin basarse en el trabajo de este, sino a partir de consideraciones sobre descomposición y modificación de poliedros. Con todo, se hace necesario consignar a Descartes como precursor en el establecimiento de relaciones entre diferentes tipos de ángulos y número de caras para los poliedros tridimensionales.

La segunda mitad del siglo XVIII fue un periodo de intensa actividad científica. La determinación de la forma de la Tierra enfrentaba a newtonianos y cartesianos, y expediciones como la de Maupertuis a Laponia o la de La Condamine al Ecuador buscaban medir su achatamiento. La mecánica celeste vivía una edad de oro, refinando la teoría newtoniana y abordando problemas como el de los tres cuerpos. La astronomía y la cartografía se beneficiaban de nuevas técnicas de observación y cálculo. En lo tocante a la geometría tridimensional, matemáticos como los hermanos Bernoulli o Alexis Clairaut (1713 – 1765) habían trabajado también con problemas relacionados con poliedros y curvas espaciales, aunque sin formular una relación combinatoria general. En este contexto, un resultado como la fórmula de Euler se enmarca en una época donde el análisis de la forma y la estructura de los cuerpos estaba íntimamente ligado a la física y a la ingeniería.

Suizo de nacimiento (vino al mundo cerca de la ciudad de Basilea), Euler desarrolló una parte significativa de su carrera en la Academia de Ciencias de Rusia, en San Petersburgo, a lo largo de dos etapas distintas. Sin embargo, en la década de los cincuenta, cuando enuncia por primera vez su fórmula para poliedros convexos, Euler residía en Berlín, donde entre 1741 y 1766 trabajó en la Academia de Berlín, un puesto que le había ofrecido Federico el Grande de Prusia. Para 1758 Euler era ya, probablemente, el matemático más influyente de Europa, con reconocimiento pleno, un prestigio internacional consolidado y un historial de contribuciones que abarcaba prácticamente todas las áreas de las matemáticas de aquel entonces.

Uno de los motivos de su enorme reputación era su inusual productividad, incluso para los estándares del siglo XVIII, una época que desconocía la hiperespecialización actual. Su actividad científica abarcó

teoría de números, cálculo, ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y analítica, series, teoría de grafos, mecánica celeste, óptica, cartografía, hidráulica o astronomía, entre otros campos. Se calcula que sus obras completas ocuparían cerca de ochenta volúmenes, y su ritmo de trabajo era legendario: redactaba centenares de páginas cada año y mantenía correspondencia regular con los principales científicos de Europa. Esta combinación de amplitud temática, profundidad técnica y capacidad de comunicación lo situó en el epicentro de la actividad matemática y física de su tiempo.

En resumen, su capacidad para conectar problemas geométricos con aplicaciones físicas, junto con un talento excepcional para sistematizar resultados, le permitieron formular y difundir la identidad que lleva su nombre, aun cuando su primera demostración no alcanzara los estándares de rigor que se exigirían posteriormente, hecho que la llevaría a ser objeto de puntualizaciones y correcciones.

La demostración original de Euler

En lo tocante a la demostración que Euler dio para su famosa fórmula, dos artículos son relevantes, los ya mencionados brevemente en el apartado anterior. Ambos fueron publicados en 1758 al ser incluidos en las actas de la Academia de San Petersburgo. Sin embargo, uno y otro existían ya con anterioridad, y Euler había mencionado el resultado en su correspondencia con Christian Goldbach (1690 – 1764). En el primero, *Elementa doctrinae solidorum*, ofrecía algunos resultados generales y enunciaba su teorema, y data del 25 de noviembre de 1750. El segundo, *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*, era el que presentaba demostraciones, y data del 9 de septiembre de 1751.

En el primero, el propio Euler confesaba que no había encontrado aún una demostración definitiva, al tiempo que afirmaba la validez de la fórmula para todos los tipos de sólidos que podía considerar: pirámides, cuerpos en forma de cuña (aquellos similares a las pirámides, pero cuya cúspide es un segmento en vez de un punto), prismas, prismoides (aquellos similares a los prismas, pero con bases de diferente número de lados), combinaciones de los anteriores unidas por las bases y los poliedros regulares.

En realidad, no fue la senda de la demostración la que llevó a Euler al teorema. Entonces, ¿qué camino le llevó hasta él? Euler intentó estudiar los poliedros, y para hacerlo con claridad habría que saber enumerar-

los o, al menos, clasificarlos en familias homogéneas y posteriormente determinarlos. Por eso habría buscado Euler entre las numerosas magnitudes asociadas a un poliedro (número de vértices, aristas, caras, área de las caras, longitud de las aristas, ángulos de las caras, ángulos diedros, etc.) cuáles pueden considerarse principales porque determinan a las demás (véase Lebesgue, 1924, p. 317).

Así, el interés principal que Euler tenía en la fórmula era su uso para clasificar poliedros. Aunque había descubierto una propiedad para todos los poliedros convexos, él no pensó en ella como un invariante bajo transformaciones continuas, ni definió una clase de poliedros para la cual la relación se conservaba (Kline, 1972, p. 1163).

En relación con lo comentado anteriormente, hay que reconocer a Euler como el primero en introducir el concepto de *arista* y darle un nombre, el latino *acies*. Sin embargo, en vez de *cara* utilizaba un término usual por entonces, *hedra*, y seguía denominando como *ángulo sólido* a lo que hoy llamamos *vértice*, aunque realmente sí se refería a la punta 0-dimensional (el vértice), no a la región 3-dimensional que encierran las caras, que sería lo que hoy conocemos por ángulo sólido: la región espacial delimitada por tres o más semirrectas concurrentes (véase Richeson, 2008, p. 64).

Aunque en sus primeros acercamientos a los poliedros trató de establecer una analogía con las figuras planas, pronto abandonó ese enfoque, que resultaba poco provechoso. Lo más probable es que llegase a su fórmula por inducción. Euler incluyó más proposiciones en su *Elementa doctrinae solidorum*, entre ellas dos para la suma R de los ángulos planos de todas las caras poligonales de un poliedro, la primera en términos de aristas y caras, la segunda en términos del número de ángulos sólidos (Euler usaba las palabras completas *ángulos rectos*, aquí se expresa como Δ):

$$R = 4(A - C)\Delta, \quad (2)$$

$$R = 4(V - 2)\Delta. \quad (3)$$

Para la identidad (2) dio una demostración sencilla y directa, mientras que para la (3) no dio ninguna, sino que la derivó de (1) y (2). Sería en el segundo artículo en el que incluiría pruebas tanto para la fórmula de la suma de ángulos (3) como para la fórmula de los poliedros (1). Demostraciones independientes una de la otra, aunque basadas en una misma técnica: un proceso en el que se van recortando pirámides triangulares para eliminar los vértices del poliedro, uno de cada

vez, hasta obtener una única pirámide triangular. A lo largo del proceso, analiza cuántas caras y aristas quedan tras cada eliminación y estudia los distintos casos que se pueden dar.

El procedimiento no es para nada simple. Aquí, en aras de una mayor claridad, tan solo se va a hacer un resumen de este método empleado por Euler, tal y como se explica en Samelson (1996). Una explicación más completa, que también incluye el uso de este mismo procedimiento para llegar a la fórmula de la suma de los ángulos, se puede encontrar en Francese y Richeson (2007).

La demostración se realiza por inducción en el número de vértices. La idea principal es que, dado un poliedro convexo P , se corta una parte que contiene un vértice O elegido de tal manera que el poliedro resultante P' tenga exactamente todos los vértices de P excepto O y, después, se estudia la variación en el cómputo $V - A + C$ y en la suma de los ángulos de los dos poliedros.

Una vez elegido O , las aristas que parten de él lo conectan con otros vértices $A, B, \dots, F$ dispuestos de forma ordenada en un circuito alrededor de O (figura 2). Dicho circuito $A \dots FA$ no tiene por qué ser plano; para manejarlo, Euler propone introducir suficientes diagonales del tipo AC que subdividan la región en triángulos, que a su vez formarán una superficie delimitada por el circuito. Sobre cada uno de esos triángulos se erige un tetraedro con vértice común en O , que es el que se elimina del sólido inicial.

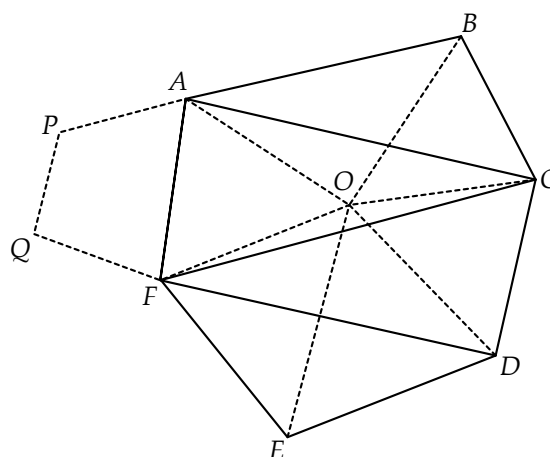


Figura 2. Parte superior de un poliedro. El vértice O es el que se va a eliminar, B, C, D, E, F son los vértices adyacentes a O (Francese & Richeson, 2007, p. 289).

El proceso se repite para todos los triángulos incidentes en O . Se empieza por $OABC$, se sigue con el que tiene AC por lado de la base y así sucesivamente hasta que todos han sido eliminados. De esta forma,

se obtiene un poliedro P' con un vértice menos que el original P , en el que los triángulos del tipo OAB han sido sustituidos por otros del tipo ABC . Euler comprueba que este proceso no modifica el resultado de $V - A + C$, y la iteración termina con una simple pirámide triangular, para la cual la identidad (1) es obviamente cierta, ya que en dicha pirámide se tienen $V = 4$, $A = 6$ y $C = 4$.

Las dificultades y el fallo en su prueba

En su demostración, Euler asume que los poliedros eran sólidos y convexos, es decir, asume sin indicarlo que el teorema se refería a superficies homeomorfas a la 2-esfera. Aunque no llega a establecer su convexidad, la asume en todo momento desde el principio, ya que considera que el poliedro puede descansar en cualquiera de sus caras, y es algo que se puede inferir a partir de los detalles de su demostración, dado que en todos los pasos explica el proceso de descomposición mediante poliedros convexos (véase Francese & Richeson, 2007, p. 288).

Euler aseguraba que se puede eliminar un vértice cualquiera cortando una pirámide en cualquier paso de la descomposición. Pero lo hizo sin proporcionar una estrategia para hacerlo en un poliedro cualquiera, sino que su explicación se reducía a un poliedro concreto, con lo que carecía de generalidad suficiente. Es aquí donde falla su demostración, ya en su primer paso, puesto que no fue lo suficientemente cuidadoso como para mantener la convexidad a lo largo del proceso de descomposición del poliedro: puede ocurrir que, en algún paso, al eliminar un vértice aparezca un poliedro no convexo; su método no garantizaba la convexidad del sólido resultante.

Sucede que el vértice elegido para ser eliminado puede estar en una posición tal que los vértices ve-

cinós formen una figura no convexa, o que el plano de alguno de los triángulos añadidos en el proceso atraviese el interior del poliedro. En estos casos, al recortar el vértice y reconstruir las caras adyacentes, el sólido resultante puede presentar caras reentrantes o incluso auto-intersecciones, dejando de ser convexo. En todo caso, las dificultades relacionadas con la prueba de Euler emergen precisamente de este aspecto: una posible falta de convexidad.

En la parte derecha de la figura 3 puede verse un ejemplo de estas posibilidades, la que es la gran traba para la demostración de Euler. Henri Lebesgue (1875 – 1941) escribió que «esta demostración es inaceptable, y las objeciones que pueden plantearse en su contra parecen, a primera vista, muy serias» (véase Lebesgue, 1924, p. 323). Básicamente, la criticó por su falta de rigor, ya apuntando que es posible que el procedimiento propuesto por Euler resulte en algún paso en poliedros degenerados que no son topológicamente esferas. Por ejemplo, en la parte central de la figura 4 se puede ver cómo el método de Euler conduce a un cuerpo que consiste en dos pirámides que se unen solo a lo largo de una arista.

Los ejemplos anteriores, aunque presentan dificultades, ofrecen en realidad la posibilidad de tomar una descomposición alternativa que sí resulta ser un poliedro convexo. Esto lleva a pensar que la demostración de Euler no está más allá de toda esperanza: con un poco de cuidado se puede reparar su argumento. A lo largo de los años se han dado varias demostraciones basadas en diferentes razonamientos, pero es posible introducir una pequeña corrección en la prueba de Euler para que esta constituya realmente una buena demostración de la fórmula para poliedros convexos.

Pero, incluso si son todos los poliedros convexos los que se tienen en cuenta, asoma otra sutileza: el

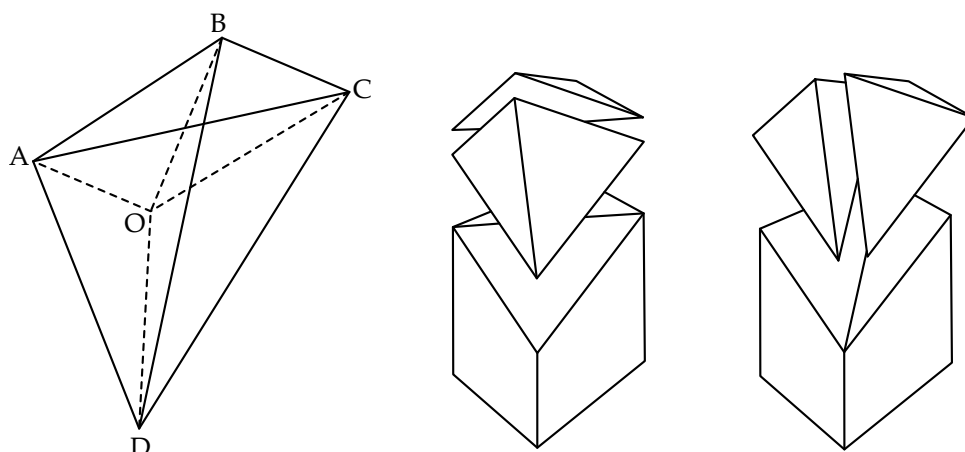


Figura 3. Eliminar el vértice O podría resultar un poliedro convexo (centro) o no (derecha) (Francese & Richeson, 2007, p. 293).

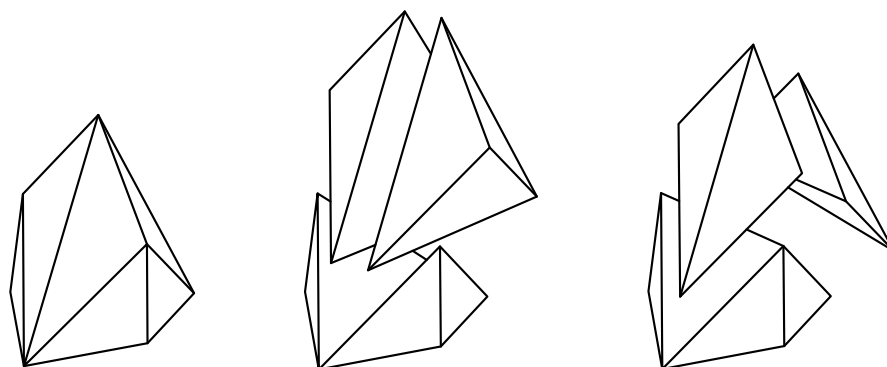


Figura 4. Eliminar un vértice O podría resultar un poliedro degenerado (centro) o no (derecha) (Francese & Richeson, 2007, p. 293).

proceso de recortar esquinas no es único. Si el vértice tiene orden mayor que tres, las diagonales $A \dots FA$ pueden recorrerse de formas diferentes. En particular, si O tiene orden cuatro, existen exactamente dos posibilidades; y, si los cuatro puntos no son coplanarios, una de ellas resulta un poliedro no convexo. Lo más importante es que resulta posible mantener la demostración de Euler para poliedros convexos sin más que introducir una pequeña corrección en su método a la hora de ir eliminando pirámides.

La siguiente pregunta sería: ¿se puede rehacer su prueba para poliedros no convexos? Siempre y cuando sean homeomorfos a la 2-esfera, claro, porque de otra forma la fórmula no es correcta (un contraejemplo es el de la figura 5). Pues bien, la respuesta es que no, dado que en ese caso puede ocurrir que no sea posible eliminar un vértice arbitrario.

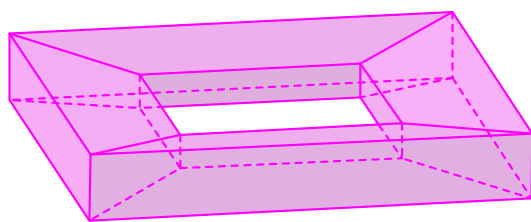


Figura 5. Este poliedro no verifica la fórmula clásica de Euler, debido al agujero que presenta: $V = 16$, $A = 32$, $C = 16$. Puede visualizarse de forma dinámica en la url <https://www.geogebra.org/m/xarismng>.

Básicamente, lo que sucede es que existen poliedros que no se pueden reducir mediante el método de Euler. Es posible encontrar ejemplos de esto (véase Francese & Richeson, 2007, p. 295), de los que se ofrece uno en la figura 6. En él, el problema viene dado porque hay vértices que no es posible eliminar por ser hendiduras o estar situados en concavidades, incluso aunque el resto de vértices sí puedan ser recortados mediante pirámides. En este tipo de ejemplos, llega un momento en el que el procedimiento se bloquea y

resulta imposible continuar con la reducción.

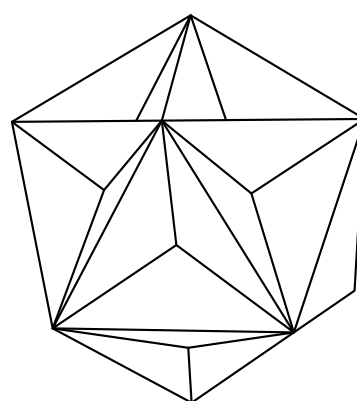


Figura 6. Contraejemplo al método de Euler (Francese & Richeson, 2007, p.295).

Otras demostraciones posteriores

Las críticas que se pueden poner a la prueba de Euler no invalidan la validez de su fórmula para poliedros convexos; tan solo se pone de manifiesto que su demostración original no cubre todos los casos posibles. Con posterioridad a su obra se han ido proponiendo pruebas alternativas, algunas de ellas incluso más breves y elementales, tratando de evitar los problemas de falta de generalidad derivados de las dificultades en el tratamiento de la convexidad. Se mencionarán un par de ellas, elegidas en base a la gran relevancia histórica de los matemáticos que las propusieron, y otra que pretende completar la demostración pero manteniendo su mismo enfoque.

Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) demostró la fórmula de Euler de forma mucho más sencilla y limitada específicamente a poliedros convexos; lo hizo considerando polígonos esféricos (véase la demostración en Legendre, 1794, pp. 228-229).

Su demostración se basa en proyectar los vértices y las aristas del poliedro sobre la superficie de una esfera unitaria con centro en el interior del poliedro,

desde el centro de la esfera. Así, la superficie de la esfera se divide en polígonos esféricos que se corresponden con las caras del poliedro: para cada cara, hay un polígono esférico con el mismo número de lados y ángulos, dispuestos en el mismo orden.

Para cada uno de esos polígonos, su área a es $a = s - 2n\Delta + 4\Delta$ (la obtención de esta fórmula puede verse en Federico, 1982, p. 39), siendo s la suma de sus ángulos y n el número de lados. Al considerar el área de todos los polígonos esféricos, hay C expresiones como esa, por lo que la suma de los términos 4Δ del miembro derecho resulta $4C\Delta$.

Por otro lado, la suma de los términos en el miembro izquierdo totaliza el área de la esfera: 8Δ .

La suma de los términos s del miembro derecho es la suma de todos los ángulos de los polígonos; estos ángulos rodean V puntos de la esfera sin espacios ni superposiciones y, como la suma de los ángulos alrededor de un punto de la esfera es 4Δ , dicha suma es igual a $4V\Delta$.

La suma de los términos con n del miembro derecho es el doble de la suma de todos los lados de todos los polígonos, que es igual al doble de la suma de las aristas del poliedro y, por lo tanto, a $4A$, ya que una misma arista sirve de lado para dos caras.

El resultado de todos estos sumandos es, en consecuencia, $8\Delta = 4V\Delta - 4A\Delta + 4C\Delta$ o, simplificando, $V - A + C = 2$.

El texto de Legendre se hizo popular y vio numerosas ediciones, siendo traducido a varios idiomas. Contribuyó mucho a la difusión de la fórmula de Euler, gracias a su demostración tan simple. Henri Lebesgue la cita diciendo que «*esta es la primera demostración rigurosa del teorema de Euler*» (Lebesgue, 1924, pp. 315-316), al tiempo que afirma que en su época está tendiendo a desaparecer, reemplazada por pruebas aún más directas y de indiscutible interés. Dice de ella que a menudo se la critica por ser artificial, por recurrir a conceptos ajenos a la materia y por aplicarse únicamente a poliedros convexos, y Lebesgue procede a realizar un alegato punto por punto en favor de la demostración de Legendre.

Otro ilustre matemático, Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), estableció en 1811 un teorema más general que el de Euler (Cauchy, 1813): si se descompone un poliedro en tantos otros como se encuentren, tomando los vértices de su interior, sea P el número de nuevos poliedros así formados. Entonces

$$V + C = A + P + 1, \quad (4)$$

es decir, la suma formada por el número de vértices y el de caras excederá en una unidad a la suma formada por el número de aristas y el de poliedros. La fórmula de Euler es un caso particular de este resultado, sin más que tomar todos los poliedros reducidos a uno solo, con $P = 1$.

De la identidad (4), Cauchy deduce un segundo resultado, este relativo a la geometría plana. Al reducir todos los poliedros a uno solo, si se destruye tomando una de sus caras como base y trasladando todos los demás vértices a esta cara sin modificar su número, se obtendrá una figura plana compuesta por varios polígonos encerrados dentro de un contorno dado. Es decir, que se elimina el interior de una cara y se estira la figura resultante en un plano. Dicho proceso lleva a un poliedro en el que

$$V - A + C = 1. \quad (5)$$

Cauchy asegura que se podría demostrar el teorema general (4) y los otros dos, (5) y (1), como corolarios. Pero, para comprender mejor el espíritu de esta demostración, comenzó demostrando la expresión (5), algo que hizo triangulando la figura y luego contando los cambios a medida que se eliminan los triángulos uno por uno. Tras culminar esa prueba, explica que se puede derivar la fórmula de Euler (1) como una consecuencia inmediata de $V - A + C = 1$ si, al eliminar una de las caras de la superficie del poliedro, las caras restantes, cuyo número será $C - 1$, pueden considerarse como una secuencia de polígonos encerrados en el contorno de la cara eliminada; en consecuencia, se tienen V , A y $C - 1$, y aplicar (5) nos lleva directamente a la fórmula de Euler.

Al igual que pasó con la demostración de Euler, matemáticos posteriores también consideraron esta demostración de Cauchy como inadecuada, ya que supone que todo poliedro convexo cerrado es homeomorfo a una esfera. Sin embargo, la prueba sí fue aceptada en su momento por sus contemporáneos del siglo XIX (Kline, 1972, p. 1163).

La principal laguna en el argumento de Euler radicaba en que no hay garantía de que su técnica para eliminar un vértice de un poliedro convexo resulte a su vez en un nuevo poliedro que sea también convexo. En la actualidad, el concepto clave para «arreglar» la demostración de Euler es la envolvente convexa. Hans Samelson opina que «*el hecho de que Euler no pensara en esta elección sugiere que no estaba pensando en poliedros convexos. Pero, de nuevo, el concepto de envolvente convexa probablemente no existía en su época*»

(véase Samelson, 1996, p. 380).

Antes de esbozar esta nueva demostración, hay que aclarar que la envolvente convexa de un conjunto de puntos X es el conjunto convexo más pequeño que contiene a X . Dado que la intersección de dos conjuntos convexos es también convexa, se puede construir la envolvente convexa de X sin más que tomar la intersección de todos los conjuntos convexos que lo contienen. En particular, un poliedro es convexo si y solo si es la envolvente convexa de sus vértices.

Tal y como se explica en Francese y Richeson (2007), la idea para reparar el argumento de Euler, sin renunciar a su espíritu inductivo, consiste en escoger de forma única las diagonales del tipo AC para que resulte un poliedro P' convexo. Para ello, se introduce la envolvente convexa en el proceso de eliminación de vértices.

En lugar de proceder de forma directa, se considera la envolvente convexa de P una vez retirado el vértice O elegido y las aristas incidentes, es decir, que debería definirse P' como el límite de la envolvente convexa de todos los vértices de P , excepto el vértice elegido O . Al reconstruir las caras adyacentes siguiendo este método, se garantiza que el sólido intermedio P' es de nuevo convexo y homeomorfo a la 2-esfera.

Con esta precaución, el método inductivo ya funciona: en cada paso, V disminuye en 1, mientras que A y C cambian de tal forma que la cantidad $V - A + C$ permanece constante. Iterando, se llega a una pirámide triangular, el caso base donde la fórmula se comprueba fácilmente. De esta forma, se logra que perviva el procedimiento original de Euler.

En definitiva, las distintas estrategias que se han ido desarrollando a lo largo de los siglos muestran la gran riqueza del teorema establecido por Euler. Más allá de su sencillez aparente, es claro que se trata de una fórmula que se sostiene en principios profundos: estamos ante un resultado que conecta varias ramas de las matemáticas, anticipando su relevancia como germen de la topología moderna.

Hoy en día, existen muchas otras demostraciones para la fórmula de Euler, pero estas páginas no son suficientes para consignarlas todas. El lector interesado puede acudir a la página web <https://ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>, de David Eppstein (n. 1963), donde encontrará nada más y nada menos que 21 pruebas diferentes. Las técnicas que recoge son muy variadas y suponen un buen paseo por la geometría y la topología.

Generalización de la fórmula de Euler

La identidad (1) es válida para cualquier poliedro convexo. Pero si relajamos la condición de convexidad y admitimos poliedros con agujeros, como el de la figura 5, la fórmula de Euler ya no tiene por qué cumplirse.

Para encarar ese tipo de sólidos es necesario introducir la noción de género g de una superficie, que mide, de manera intuitiva, el número de «agujeros» que presenta. Así, la esfera y cualquier superficie homeomorfa a ella, como los poliedros convexos, tienen género $g = 0$. Un toro y la figura 5 tienen género $g = 1$, un poliedro con dos agujeros tendrá género $g = 2$.

La definición de género permite generalizar la fórmula de Euler a la identidad

$$V - A + C = 2 - 2g. \quad (6)$$

Podemos comprobar que la fórmula (6) se cumple para algunos ejemplos sencillos. Los de la figura 1 son poliedros convexos, homeomorfos a la esfera, por lo que $g = 0$ y $V - A + C = 2$ (respectivamente, $8 - 12 + 6 = 2$ y $5 - 8 + 5 = 2$). El de la figura 5 tiene un agujero y por tanto $V - A + C = 16 - 32 + 16 = 0$, ya que $2 - 2g = 2 - 2 \cdot 1 = 0$.

Estos ejemplos evidencian que la fórmula de Euler no es un mero resultado geométrico para poliedros convexos, sino la manifestación de una propiedad topológica más general para todo tipo de superficies: el invariante $\chi = V - A + C$. Denominado *característica de Euler*, es un número que se define para describir la forma o la estructura de una clase de espacios topológicos.

Este invariante no atañe solo a poliedros, ya que puede generalizarse a cualquier superficie compacta como la esfera, el toro, el bi-toro, etc., que surja al deformar de forma continua un poliedro, de forma análoga a lo expuesto por Legendre en su demostración de la fórmula de Euler. Así, se puede comprobar fácilmente que la esfera tiene $g = 0$; el toro, $g = 1$; el bi-toro, $g = 2$, etc.

Por otra parte, la fórmula de Euler también se puede generalizar a superficies de dimensión arbitraria, en lo que se conoce como la característica de Euler-Poincaré. Esto se debe a los trabajos de Henri Poincaré (1854 – 1912) a finales del siglo XIX, concretamente en su obra *Analysis Situs* de 1895.

Poincaré estableció (véase Poincaré, 1895, pp. 85-99) una generalización a variedades cerradas arbitrarias

de cualquier dimensión p . Dada una descomposición de una variedad M en complejos simpliciales con α_i el número de símlices de dimensión i , estudió la suma alternada de todos ellos, con la que ya habían trabajado antes que él tanto Cauchy como Ludwig Schläfli (1814 – 1895):

$$N = \alpha_p - \alpha_{p-1} + \dots + (-1)^p \alpha_0. \quad (7)$$

Un poliedro ordinario es, de hecho, una variedad bidimensional cerrada M , que se puede subdividir en un cierto número de variedades v_2 , que son las caras. Esas caras están delimitadas por un cierto número de variedades v_1 , que son las aristas, que a su vez están delimitadas por un cierto número de variedades v_0 , que son los vértices.

Se puede aplicar la identidad (7) en algunos ejemplos sencillos: un segmento de recta tiene solo dos puntos extremos v_0 , y por tanto $\alpha_0 = 2$; un polígono tiene tantos vértices v_0 como lados v_1 , por tanto $\alpha_0 = \alpha_1$ y en consecuencia $\alpha_0 - \alpha_1 = 0$; un poliedro convexo cumple la fórmula de Euler, y se tiene $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$; un politopo ordinario cumple que $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$, etc.

Poincaré demostró que N no depende de la descomposición poliédrica elegida, sino que depende solo de los números de Betti² de la variedad, por lo que es, de hecho, un invariante de homología. Y demostró también que, en general, para toda variedad cerrada y orientable de dimensión p impar, N vale siempre 0. Además, en el caso de la esfera S^p , se cumple que N es 0 si p es impar y N es 2 si p es par. Al considerar los poliedros ordinarios se está en este último caso, por lo que se tiene $N = 2$, es decir, se llega a la fórmula de Euler. A ese número N es al que hoy se le llama «característica de Euler-Poincaré».

La interpretación que Poincaré hizo de esta característica fue la de un invariante topológico fundamental. Si la característica de Euler es un invariante topológico para superficies, la característica de Euler-Poincaré lo es para variedades de dimensión n . De este modo, lo que comenzó como una identidad combinatoria en el marco de la geometría sólida del siglo XVIII se reveló como un principio estructural en la topología moderna. El tránsito desde el enunciado elemental $V - A + C = 2$ hasta sus generalizaciones es una

muestra paradigmática de cómo un resultado aparentemente modesto puede convertirse en una pieza central de una disciplina entera.

Algunas aplicaciones actuales

Aunque hace ya 275 años que Euler hizo la primera referencia a la fórmula, su vigencia se mantiene plenamente en la actualidad, encontrando utilidad en campos muy diversos de las matemáticas y de las ciencias aplicadas. Porque, como se ha ido viendo, la identidad $V - A + C = 2$ (y sus generalizaciones) no es tan solo una relación combinatoria, sino algo mucho más fuerte: un invariante topológico que se preserva bajo deformaciones continuas. Es este carácter estructural el que la convierte en una poderosa herramienta que desfila no solo por la geometría y la topología, sino también por la informática, la física, la química o la biología.

En el campo de la topología, es fundamental en el teorema de clasificación de superficies compactas: la característica de Euler-Poincaré determina, junto con la orientabilidad, a qué tipo de superficie pertenece un objeto dado (esfera, toro, plano proyectivo, etc.). Así, la fórmula permite distinguir superficies aparentemente semejantes pero topológicamente distintas, y constituye una aproximación preliminar al lenguaje más sofisticado de los números de Betti y de la homología simplicial (para más información, véase por ejemplo Gallier & Xu, 2013).

En geometría computacional y modelado digital, la característica de Euler desempeña un papel crucial, ya que sirve como criterio de consistencia en modelos tridimensionales. Los programas de diseño asistido por ordenador (CAD), impresión 3D o simulaciones en realidad virtual utilizan objetos poligonales, y hacen uso de la fórmula de Euler al realizar análisis en la construcción de mallas para garantizar que los modelos 3D tengan una topología correcta³.

Una malla poligonal está formada por un conjunto de vértices, aristas y caras, generalmente triangulares o cuadrangulares, que discretizan la superficie de un objeto. La característica de Euler actúa aquí como un invariante topológico: si el modelo digital representa un objeto homeomorfo a la esfera, debe cumplirse que $\chi = 2$. Cualquier desviación de este valor suele

² Son objetos topológicos que Poincaré demostró que eran invariantes, y que él mismo utilizó para extender la fórmula poliédrica a espacios de dimensiones superiores. De manera informal, el número de Betti es el número máximo de cortes que se pueden realizar sin separar una superficie en dos piezas separadas (véase Gardner, 1984, pp. 9-10). Formalmente, el n -ésimo número de Betti es el rango del n -ésimo grupo de homología de un espacio topológico. Por ejemplo el número de Betti de una esfera es 0, el del plano proyectivo, un cilindro o una cinta de Möbius es 1 y el del toro o la botella de Klein es 2.

³ Una introducción rápida y sencilla del uso de la fórmula de Euler en geometría computacional se encuentra en <https://www.numberanalytics.com/blog/euler-characteristic-polyhedra-to-tda>.

indicar la presencia de defectos o errores en la malla, tales como aristas compartidas por más de dos caras, agujeros en la superficie que generan bordes abiertos, caras degeneradas (colapsadas o mal orientadas) o superficies auto-intersecantes que rompen la estructura.

Cambiando de tipo de aplicación, en teoría de grafos la relación de Euler se aplica al estudio de grafos embebidos en la esfera o en el plano. Todo grafo conexo y planar cumple la identidad $V - A + C = 2$, donde C se interpreta como el número de regiones en que el grafo divide la superficie. Dos viejos problemas, ya clásicos, relacionados con la planaridad pueden resolverse mediante la fórmula de Euler (véase Hudson, 2004, pp. 30-37).

El primero de los problemas lo planteó August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) en 1840 de la siguiente forma: un rey con cinco hijos indica en su testamento que, tras su muerte, se dividirán el reino en cinco regiones, de modo que cada región comparta una línea fronteriza con cada una de las otras cuatro. La solución del problema se reduce al estudio de la planaridad del grafo completo K_5 obtenido al conectar cinco vértices de todas las maneras posibles (figura 7), dado que la cuestión se puede reformular, en el contexto de la teoría de grafos, como la búsqueda de una carretera que conecte la ciudad capital de cada uno de los cinco hijos con las capitales de todos los demás, de tal manera que no se crucen dos carreteras.

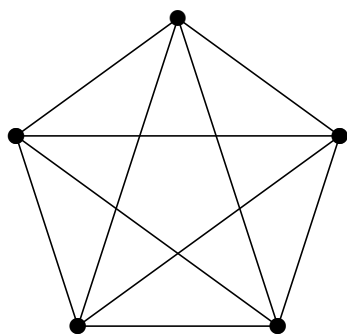


Figura 7. Grafo K_5 .

El segundo problema lo consignó Henry Ernest Dudeney (1857 – 1930) en el libro *Amusements in Mathematics*⁴: el acertijo consiste en conectar agua, gas y electricidad, desde A, G, E, a cada una de las tres casas X, Y, Z, sin que ninguna tubería se cruce⁵. La solución de este problema se reduce al estudio de la planaridad del grafo bipartito completo $K_{3,3}$ (figura 8), obtenido al conectar cada uno de tres vértices

independientes con cada uno de otros tres vértices independientes. Pues bien, resulta que este grafo no es planar, y por tanto no existe ninguna solución sin cruces.

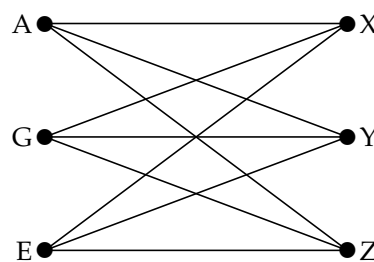


Figura 8. Grafo $K_{3,3}$.

La imposibilidad de ambos acertijos se demuestra echando mano, precisamente, de la fórmula de Euler. La importancia de estos dos problemas de planaridad no es anecdótica, ya que resultan especialmente significativos en la caracterización de los grafos planares que lograría Kazimierz Kuratowski (1896 – 1980) a finales de la década de 1920: un grafo es planar si y solo si no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 o $K_{3,3}$.

En el mundo de la química también tiene cabida la fórmula de Euler, con el objetivo de estudiar estructuras atómicas. Por ejemplo, en Schwerdtfeger *et al.* (2015) resulta una herramienta central para caracterizar las estructuras de los fullerenos. En general, los fullerenos son moléculas huecas, con forma de jaula y simetría pseudoesférica, que constan únicamente de caras pentagonales y hexagonales, lo que da como resultado un poliedro trivalente convexo con exactamente tres aristas (enlaces) que unen cada vértice ocupado por carbono.

Usando la fórmula de Euler, junto con la condición de que todos los vértices tienen grado 3, Schwerdtfeger *et al.* obtienen que cualquier fullereno debe contener exactamente 12 pentágonos, independientemente del número de hexágonos. En dicho artículo, también estudian qué tipos de fulleroides (una generalización de los fullerenos que permite un tamaño arbitrario para sus caras) están permitidos, y si pueden teselar una esfera o un toro solo con heptágonos, o solo con pentágonos y heptágonos. Se basan en un argumento que utiliza la característica de Euler-Poincaré para superficies orientables para llegar a la conclusión de que la respuesta es, respectivamente, no para heptágonos y sí para pentágonos y heptágonos.

Estas aplicaciones muestran la sorprendente ver-

⁴ El lector puede conseguir una copia de dominio público en <https://www.gutenberg.org/ebooks/16713>.

⁵ Este problema se puede plantear de otras formas equivalentes, por ejemplo como un enredo amoroso: <https://is.gd/NrIqMO>.

satidad de la fórmula de Euler y su generalización como invariante topológico. Se trata, sin embargo, de una muestra parcial, ya que para una recopilación completa estas páginas se quedan cortas. Pero la fórmula aparece también en otros campos muy diversos: en biología, se emplea en el estudio de redes neuronales y estructuras reticulares de proteínas; en geología y cristalografía, ayuda a clasificar poliedros de coordinación y redes cristalinas; en geografía y cartografía, es clave en el análisis de mapas y en algoritmos de división planar de regiones, etc.

Conclusiones

La fórmula de Euler para poliedros convexos tiene un enunciado muy sencillo, e igualmente es sencilla su comprobación en el caso de poliedros simples como los regulares o prismas y pirámides. Sin embargo, esa aparente sencillez encierra una gran profundidad en sus consecuencias, habiéndose situado como el punto de partida para una nueva forma de enfocar la geometría: la topología, que desde entonces se ha desarrollado enormemente hasta convertirse en una disciplina con entidad propia.

No se trata tan solo de una relación combinatoria entre vértices, aristas y caras; tenemos que ser capaces de ver más allá y entender la estructura global de las superficies. Euler abrió el camino que llevaría a la característica de Euler a consolidarse como un invariante topológico fundamental que permite clasificar fácilmente superficies y variedades. Al sintetizar la información esencial de un poliedro, ha servido para fundamentar teorías más avanzadas como la homología y la cohomología.

Es por ello que la importancia histórica de este resultado no puede subestimarse. De un teorema geométrico enunciado en el siglo XVIII se ha llegado al desarrollo de toda una rama de las matemáticas, con conexiones profundas con ciencias como la física, la informática o las ciencias naturales. La fórmula de Euler es un símbolo del avance de las matemáticas y las ciencias modernas, donde un resultado en apariencia inocente acaba encontrando un amplio abanico de aplicaciones insospechadas.

Este último aspecto permite terminar con una reflexión general: a veces, ideas sorprendentemente simples (en este caso, contar vértices, aristas y caras) pueden desencadenar auténticas revoluciones conceptuales, y la belleza de las matemáticas no tiene por qué estar radicada en su complejidad, sino todo

lo contrario: en la universalidad de lo elemental.

Referencias bibliográficas

- Cauchy, A. L. (1813). Recherches sur les polyèdres: premier mémoire. *Journal de l'École polytechnique*, 9, 68-86. Consultado el 1-9-2025, en <https://is.gd/81X2o0>
- Federico, P. J. (1982). *Descartes on polyhedra: A study of the «De solidorum elementis»*. Springer-Verlag.
- Francesse, C. & Richeson, D. (2007). The flaw in Euler's proof of his polyhedral formula. *The American Mathematical Monthly*, 114(4), 286-296. Consultado el 1-9-2025, en <https://www.jstor.org/stable/27642192>
- Gallier, J. & Xu, D. (2013). *A guide to the classification theorem for compact surfaces*. Springer-Verlag.
- Gardner, M. (1984). *The sixth book of mathematical games from Scientific American*. University of Chicago Press.
- Hudson, R. A. (2004). *Planar graphs: A historical perspective* [Tesis de maestría, University of Louisville]. Consultado el 1-9-2025, en <https://is.gd/qvyu1K>
- Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.
- Lebesgue, H. (1924). Remarques sur les deux premières démonstrations du théorème d'Euler relatif aux polyèdres. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 52, 315-336. Consultado el 1-9-2025, en <https://is.gd/2BIaBO>
- Legendre, A.-M. (1794). *Éléments de géométrie*. Firmin Didot. Consultado el 1-9-2025, en <https://is.gd/VY6uw9>
- Poincaré, H. (1895). Analysis Situs. *Journal de l'École polytechnique*, 2(2), 1-123. Consultado el 1-9-2025, en <https://is.gd/bXIsoV>
- Richeson, D. (2008). *Euler's gem: The polyhedron formula and the birth of topology*. Princeton University Press.
- Samelson, H. (1996). In defense of Euler. *L'Enseignement Mathématique*, 42(2), 377-382. Consultado el 1-9-2025, en <https://is.gd/8XPXwC>
- Schwerdtfeger, P., Wirz, L. N. & Avery, J. (2015). The topology of fullerenes. *WIREs Computational Molecular Science*, 5(1), 96-145. Consultado el 1-9-2025, en <https://is.gd/S7vbb8>



Paulo González Ogando (Pontevedra, sep. 1982)

Licenciado en Matemáticas por la Universidade de Santiago de Compostela (USC). Tras más de 15 años de experiencia docente en las aulas de secundaria, aún no se ha cansado de enseñar matemáticas y sigue transmitiendo día a día su amor por esta disciplina. Es autor de una docena de artículos de divulgación y didáctica, así como de los libros *Bocados Matemáticos* (edicións Xerais, 2022) y *Matemáticas y Deporte* (Los Libros de la Catarata, 2022).

✉ paulo@paulo.gal

📍 I.E.S. Johan Carballeira (Bueu, Pontevedra)