



Competencias en modelización matemática de docentes de secundaria quienes se están formando en Educación Matemática: un análisis a partir del abordaje en resolver situaciones problema

Mathematical Modelling Competencies of Prospective School Teachers in Mathematics Education: An Analysis Based on the Approach to Problem-Solving Situations

Habilidades de modelagem matemática de professores do ensino médio que estão se formando em Educação Matemática: uma análise baseada na abordagem de resolução de situações-problema.

Adriana Barquero-Ocampo¹, David Chaves-Montero¹, Jesennia Chavarría-Vásquez¹, Ronny Gamboa-Araya^{1,*}

Received: Sep/13/2024 • Accepted: Apr/8/2025 • Published: Nov/30/2025

Resumen

[Objetivo] El objetivo de la investigación fue determinar las competencias que muestra un grupo de docentes en formación en Enseñanza de la Matemática, de cuarto año de carrera en la Universidad Nacional, Costa Rica, en modelización matemática. **[Metodología]** Para ello, se efectuó un estudio de enfoque cualitativo, con 20 docentes de matemática en formación, durante el I ciclo 2022, en el cual, como parte de un programa formativo en modelización matemática, debieron resolver una serie de problemas. Se muestra lo realizado por las personas participantes para dos problemas específicos. **[Resultados]** El profesorado participante en formación mostró competencias para resolver problemas de modelización matemática, si aquellos poseen los datos necesarios y si su solución requiere un procedimiento específico. En situaciones-problema que implican investigar información, datos, realizar supuestos, entre otros, hecho que pudiese involucrar distintas soluciones, las personas participantes presentaron dificultades para su abordaje. **[Conclusiones]** El profesorado participante muestra capacidad para manejar y dar sentido a datos relevantes que resuelvan un problema de modelización matemática. Sin embargo, cuando este necesita un proceso indagatorio para obtener información o datos adicionales, se presentan dificultades para identificar aquellos que serían los más significativos a la hora de su resolución. La capacidad para la búsqueda informativa; vincular un modelo matemático con otra situación-problema o modelo conocido, así como validar la solución obtenida a un problema fueron acciones limitadas. Los resultados obtenidos

* Autor para correspondencia

Adriana Barquero-Ocampo, ✉ adriana.barquero.ocampo@est.una.ac.cr,  <https://orcid.org/0009-0005-2307-5077>

David Chaves-Montero, ✉ david.chaves.montero@est.una.ac.cr,  <https://orcid.org/0009-0001-0303-3081>

Jesennia Chavarría-Vásquez, ✉ jesennia.chavarria.vasquez@una.ac.cr,  <https://orcid.org/0000-0002-6112-1231>

Ronny Gamboa-Araya, ✉ ronny.gamboa.araya@una.ac.cr,  <https://orcid.org/0000-0002-9531-0372>

¹ Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.



podrían ser un indicador de que este tipo de actividades debe ser reforzado en el proceso de formación docente, para su uso como una estrategia didáctica del ejercicio profesional.

Palabra clave: formación docente; matemática; modelización; competencias; resolución de problemas.

Abstract

[Objective] The objective of the research was to determine the mathematical modeling competencies shown by a group of prospective teachers in Mathematics Teaching, in their fourth year of studies at the Universidad Nacional. **[Methodology]** For this purpose, a qualitative research was conducted with 20 prospective mathematics teachers during the first half of 2022, when they were required to solve a series of problems as part of a training program in mathematical modeling. The work done by the participants on two specific problems is presented. **[Results]** The participating prospective teachers demonstrated competencies in solving mathematical modeling problems when the situation presented has the necessary data and its solution requires a specific procedure. In situations that involved conducting research to gather additional information or data, and making assumptions, among other things, which could imply different solutions, the participants had difficulties in solving the problems. **[Conclusions]** The participants demonstrated their ability to handle and make sense of relevant data for solving mathematical modeling problems. However, when they needed to conduct research to gather additional information or data, they were unable to identify which data should be included in the problem-solving process. Their ability to search for information, connect a mathematical model with another problem situation or a known model, or validate the solution obtained for a problem, was limited. The results obtained could indicate that it is necessary to emphasize these types of activities in the teacher training programs, for their use as a teaching strategy in their professional practice.

Keywords: Teacher training; mathematics; modelling; competencies; problem solving.

Resumo

[Objetivo] O objetivo da pesquisa foi determinar as competências em modelagem matemática demonstradas por um grupo de professores em formação do quarto ano em Ensino de Matemática da Universidade Nacional da Costa Rica. **[Metodologia]** Para isso, foi realizado um estudo qualitativo com 20 professores de matemática em formação durante o primeiro ciclo de 2022, no qual, como parte de um programa formativo em modelagem matemática, eles tiveram que resolver uma série de problemas. É revelado o que participantes fizeram em dois problemas específicos. **[Resultados]** Os professores em formação participantes mostraram competência para resolver problemas de modelagem matemática, se tiverem os dados necessários e se a solução exigir um procedimento específico. Em situações-problema que envolvem investigar informações, dados, fazer suposições, entre outras, que poderiam envolver diferentes soluções, os participantes apresentaram dificuldades em abordá-las. **[Conclusões]** Os professores participantes demonstram a capacidade de lidar com dados relevantes e dar sentido a eles para resolver um problema de modelagem matemática. Entretanto, quando é necessário um processo investigativo para obter informações ou dados adicionais, surgem dificuldades para identificar aqueles que seriam os mais significativos para sua resolução. A capacidade para pesquisa informativa, vincular um modelo matemático a outra situação-problema ou modelo conhecido, bem como validar a solução obtida para um problema foram ações limitadas. Os resultados obtidos podem ser um indicador de que esse tipo de atividade deve ser reforçado no processo de formação de professores, a fim de ser usado como uma estratégia didática para a prática profissional.

Palavras-chave: formação de professores; matemática; modelagem; competências; resolução de problemas.



Introducción

En el 2012, con la puesta en ejecución de los Programas de Estudio de Matemática, el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) pretendió dar un nuevo enfoque a la enseñanza de la disciplina. El currículo tenía como “objetivo principal la búsqueda del fortalecimiento de mayores capacidades cognitivas para abordar los retos de una sociedad moderna, donde la información, el conocimiento y la demanda de mayores habilidades y capacidades mentales son invocadas con fuerza” (MEP, 2012, p. 13).

Esto implica, de acuerdo con el MEP (2012), que el profesorado debe ser un promotor de experiencias de aprendizaje con calidad, en las cuales el planteamiento y la resolución de problemas se consideran de las principales estrategias para el desarrollo de las capacidades pretendidas. Así, se prioriza el “trabajo con problemas asociados a los entornos reales, físicos, sociales y culturales, o que puedan ser imaginados de esa manera” (MEP, 2012, p. 13). Además, se indica que “Al colocarse en contextos reales, el planteo y resolución de problemas conlleva directamente a la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos” (MEP, 2012, p. 13).

Para el logro de lo indicado anteriormente, se considera que “La identificación, uso y construcción de modelos matemáticos es parte sustancial del enfoque que se propone trabajar con problemas en contextos reales. Los modelos emergen siempre que se deba acudir a la realidad” (MEP, 2012, p. 31). Así, se pretende que con la resolución de operaciones complejas y la modelización matemática se desarrollen en el estudiantado aptitudes para desempeñarse con éxito ante una situación-problema, lo que implica saber analizar y determinar tanto las

estrategias como los métodos más acordes para su abordaje, igual que su pertinencia y posible adecuación, con base en los resultados obtenidos (MEP, 2012).

Como puede observarse, se planteaba, desde la génesis de los Programas de Estudio de Matemática, todo un reto para el profesorado de la disciplina, que implicaba desarrollar habilidades en el planteamiento de problemas y el uso de la modelización matemática como táctica de enseñanza. Sin embargo, de acuerdo con el Programa Estado de la Nación [PEN] (2019), existen diferencias entre lo descrito en los Programas de Estudio de Matemática y la realidad, pues, al analizar las prácticas de una parte del profesorado de dicha rama de estudio, se determinó, entre otros aspectos, lo siguiente:

- a) La metodología de las lecciones de matemática no se basa en lo estipulado en los Programas de Estudio de Matemática, pues hay un predominio de las clases magistrales con poca participación del estudiantado y uso de la tecnología como un recurso didáctico.
- b) El papel del estudiantado es pasivo; en muchos casos, se limita a “recibir” los contenidos, prestar atención, resolver ejercicios matemáticos, trabajar individualmente, tomar apuntes o copiar información de la pizarra.
- c) Las actividades propuestas al estudiantado no propician la participación de este en el proceso de enseñanza y aprendizaje; además, estas no incentivan el desarrollo de habilidades superiores.
- d) La mayoría de las actividades de clases no fomentan los procesos matemáticos descritos en los Programas de Estudio de Matemática y tampoco contemplan la resolución de problemas como estrategia metodológica.



Incluso, se señala que “Los profesores observados, independientemente de su grado de conocimiento del programa, no realizan actividades de resolución de problemas: solo un 1,3 % del tiempo se emplea en ese tipo de ejercicios” (PEN, 2019, p. 58).

Lo previo es una evidencia de que muchas personas docentes, en el ambiente áulico, no trabajan de una manera adecuada la resolución de problemas y los pasos necesarios para crear un modelo matemático, presentados en el Programa de Estudios de Matemática del MEP. Ello es coherente con lo indicado por [Pertamawati y Retnowati \(2019\)](#), quienes indican que las características de los problemas de la vida real o los laborales difieren de aquellos enfrentados en las matemáticas escolares. Se afirma que estas últimas no permiten, posteriormente, la resolución de situaciones-problema en la vida profesional o en la real.

[Kurniadi et al. \(2020\)](#) afirman que se ha producido una incomprensión por parte del futuro profesorado en la construcción de problemas de modelado matemático y que estas deficiencias se deben a la falta de aplicación práctica de los conocimientos existentes. Desde esta perspectiva, [Jacobs y Durandt \(2017\)](#) manifiestan que existe un claro desafío, el cual consiste en que las futuras personas docentes de matemática adquieran saberes y habilidades de modelización mientras se instruyen formalmente, hecho que les otorgue las competencias matemáticas requeridas y una pedagogía de modelización adecuada. El conocimiento y la experiencia en modelación del profesorado activo y en formación es indispensable, según [Hapizah y Mulyono \(2020\)](#), pues repercutirá en el uso de aquella para la resolución de situaciones-problema de sus estudiantes.

Sin embargo, se dice que una parte del profesorado de matemática no está

capacitada para tratar con problemas matemáticos en contextos reales, además de desconocer ejemplos sobre cuáles de esos problemas son los adecuados para aplicarlos con sus discentes, lo que deja ver la necesidad de formar en modelización matemática ([Borromeo, 2018](#)).

Un factor que contribuye a lo descrito antes es la poca experiencia que en lo profesional, o en su proceso de formación, ha tenido el profesorado con respecto a resolver problemas y usar la modelización matemática. Sobre este punto en particular, [Salett y Hein \(2004\)](#) indican que el principal conflicto está en la formación del profesorado, pues, durante esta, rara vez se orienta acerca de la modelización matemática y cómo utilizar tal procedimiento en la enseñanza formal. “Para los alumnos que tuvieron una vivencia de enseñanza en los moldes tradicionales, la resistencia a la modelación es significativa, ya que este método requiere más empeño en los estudios, la investigación y la interpretación del contexto” ([Salett y Hein, 2004, p. 122](#)).

Debido a lo dicho, surge la interrogante, relacionada con el profesorado en formación, en cuanto a si contará con las competencias necesarias para desarrollar las habilidades del estudiantado en modelización matemática. Por lo tanto, se llevó a cabo una investigación, cuyo objetivo fue determinar las competencias que muestra un grupo de docentes en formación en Enseñanza de la Matemática, en modelización matemática, de cuarto año de carrera, en la Universidad Nacional, Costa Rica.

Lo planteado implica volver la mirada hacia la formación de quienes ser convertirán en profesionales en la materia abordada; en particular, porque utilizar la modelización matemática en la fase inicial de las personas que se están formando ayuda al desarrollo tanto del pensamiento como de la actuación



docente, además de que se amplían los conocimientos didácticos (Mora-Zuluaga y Ortiz-Buitrago, 2015). De esta forma, el profesorado de matemática en proceso de formación, una vez que haya concluido sus estudios, contará con las herramientas necesarias para aplicar sus saberes y competencias en esta área con sus estudiantes.

En este artículo, se reportan los resultados de la investigación realizada para determinar las competencias que muestra el profesorado en formación en Enseñanza de la Matemática, de cuarto año de carrera, de la Universidad Nacional (UNA), Costa Rica, en cuanto a modelización matemática. El trabajo se debe a que, en los años previos de estudio, estas y estos profesores en formación han ido desarrollando ciertos conocimientos y habilidades relacionadas con esta área. Por ejemplo, el Plan de Estudios de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática (BLEM), UNA (2017), contempla entre las competencias matemáticas que desea desenvolver en la futura persona profesional las siguientes: “M2. Ser capaz de formular problemas en lenguaje matemático durante su actividad como estudiante para fortalecer sus estructuras de pensamiento” (UNA, 2017, p. 62), “M4. Construir e interpretar modelos matemáticos a partir de situaciones reales para reconocer la importancia de la matemática en la vida cotidiana” (UNA, 2017, p. 62) y “M5. Aplicar los conocimientos sobre Resolución de Problemas en contextos multidisciplinarios para mayor comprensión de su importancia en otras áreas científicas y sociales” (UNA, 2017, p. 62). Estas competencias se contemplan en áreas disciplinares tales como álgebra, análisis, geometría, teoría de números, métodos numéricos, probabilidad y estadística. Inclusive, se consideran en el nivel pedagógico, en cursos

de currículum, evaluación y didáctica, así como en investigación.

La necesidad de que el estudiantado de secundaria cuente con conocimientos sólidos en modelización matemática, lo cual les permita enfrentar situaciones-problema de la vida real, a través de la creación de modelos matemáticos, se traduce en una necesidad de formación por parte del profesorado en esta área. Por ello, los resultados pretenden reflexionar en torno a la formación que están recibiendo las futuras personas docentes de matemática, relacionada con los procesos de modelización matemática.

Marco teórico

En este apartado, se va a contextualizar la modelización matemática. Partiendo del concepto de lo que es un modelo matemático, se va a definir lo que es modelización matemática, el proceso que se lleva a cabo y el desarrollo de competencias en aquella.

Modelización matemática

Antes de abordar la definición de modelización matemática, es importante contemplar un concepto relacionado con esta, el de modelo matemático. “Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión” (Salett y Hein, 2004, p. 106). Por su parte, Blomhøj (2008) lo define como “una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones, por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática” (p. 21).

Con base en las definiciones anteriores, y de manera general, podemos decir que un modelo matemático es una representación matemática de un fenómeno real, el cual describe y analiza las relaciones



presentes en él, a partir de las características del contexto en el que se presenta, con el propósito de resolver un problema asociado a este, o bien predecir posibles soluciones.

Como se señaló, aunado al concepto de modelo matemático, existe otro que se ha desarrollado desde la década de los noventa. Hace alusión a la modelización matemática. En este sentido, se indica que el proceso mediante el cual se construyen modelos matemáticos se ha denominado modelización matemática (Ríos, 1995; Swetz y Hartzler, 1991; Villa-Ochoa, 2007).

La modelización matemática pretende resolver situaciones reales, en las que se admiten varias soluciones, haciendo uso de herramientas matemáticas, según el contexto y las condiciones dadas (Ortiz *et al.*, 2010; Ramos-Rodríguez *et al.*, 2014).

Aunque existen varias definiciones para la modelización matemática, la mayoría de estas se relacionan entre sí, pues implican la traducción de problemas o situaciones de contextos reales a un lenguaje matemático, el cual ayude a explicar o representar de cierta forma el fenómeno en cuestión.

El proceso de modelización matemática corresponde a todo el camino que se debe recorrer, de forma implícita o explícita, para establecer un ligamen entre un concepto matemático y el contexto real, con el fin de plantear, posteriormente, el modelo matemático, tomando en cuenta que el proceso se va a efectuar de manera cíclica, con las reflexiones y los análisis necesarios; así,

es posible ejecutar cambios en el modelo, si fueran requeridos (Blomhøj 2008).

A lo largo de los años, se han definido distintos procesos de modelización matemática. Estos, como indica Borromeo (2006), son diferentes, dependen de varias direcciones y de las aproximaciones sobre cómo la modelización es entendida.

La construcción de un modelo implica comprender y analizar la situación dada, según el contexto real, y expresar matemáticamente las relaciones que se observan en él. Acorde con Blum (2015), esto implica un proceso de entendimiento del fenómeno; su simplificación o estructuración; matematizar las relaciones entre las variables o cantidades; trabajo matemático con base en conocimientos disciplinares; la interpretación, validación y presentación de los resultados; y el análisis de posibles conexiones con otras situaciones o modelos. Este procedimiento, llamado ciclo de modelización, Blum (2015) lo resume en siete pasos presentes en la siguiente figura (figura 1).

A partir de la figura 1, se observa que el primer paso consiste en comprender la situación planteada; el segundo, en simplificar la situación real, al generar supuestos y estructurar las condiciones del problema, lo

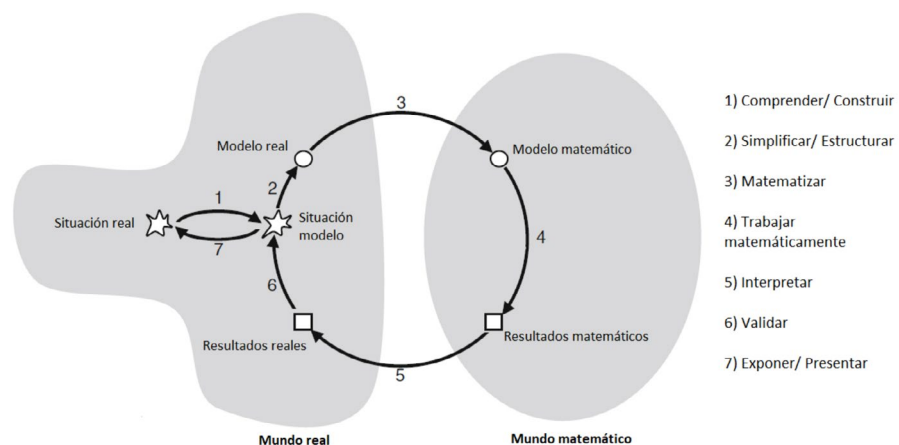


Figura 1. *Siete pasos del ciclo de modelización según Blum (2015)*
 Fuente: Blum (2015).



que se conoce como modelo real. Posteriormente, a partir de este último, se matematiza la situación planteada y se produce un modelo matemático (tercer paso), el cual se trabaja para obtener resultados que brinden solución al problema (cuarto paso). Luego se interpretan dichos resultados (quinto paso) y se validan con la situación real (sexto paso), de manera que se garantice que el modelo matemático obtenido soluciona la situación real original y, finalmente, se presenta el modelo (séptimo paso).

Si el modelo matemático obtenido no soluciona satisfactoriamente la situación real, se reinicia el ciclo de modelización, de manera que se permita afinar mejor el modelo matemático, o bien plantear uno nuevo.

Aymerich y Albarracín (2016) indican que “en este modelo se puede observar la diferenciación entre el dominio matemático y el dominio real, distinguiendo entre los modelos situados en la realidad de la abstracción que se elabora al pasar al dominio matemático” (p. 9). Es decir, la modelización matemática va más allá de únicamente hallar la respuesta a un determinado problema. Se deben ejecutar distintos procesos para llegar a una solución adecuada; además, hacer un análisis reflexivo en cada uno de ellos.

Blomhøj (2008) establece que “existe un proceso de modelización detrás de todo modelo matemático” (p. 23); esto significa que tal modelo no es la razón de ser en sí mismo, sino que, a partir de una situación real, se lleva a cabo un proceso resolutorio y una de las etapas es, precisamente, la construcción del modelo matemático. Al respecto, Blomhøj (2008) establece una serie de pasos que se deben llevar a cabo: a) formulación del problema; b) sistematización de los datos del problema; c) traducción de los objetos del problema y sus relaciones con

el lenguaje matemático; d) uso de métodos matemáticos para obtener resultados y conclusiones; e) interpretación de los resultados y conclusiones, considerando el contexto y las condiciones del problema inicial; f) evaluación de la validez del modelo.

Por lo tanto, crear un modelo matemático implica un proceso que incluye desde traducir la situación real, establecer supuestos, relaciones y construcción de un modelo, hasta validarlo, en términos de la problemática real. Para ello, se requiere una serie de habilidades matemáticas que permitan solucionar la situación planteada desde la realidad.

Desarrollo de competencias en modelización matemática

Como se indicó anteriormente, la modelización matemática implica un proceso de traducción de la realidad para establecer relaciones entre las distintas partes u objetos de esta, con miras a que, por medio de saberes y procedimientos matemáticos, se logre comprender mejor dicha situación y se solucionen problemas asociados a ella. Esto requiere una serie de competencias o habilidades por parte de quienes realizan procesos de modelización matemática.

Al respecto, Niss *et al.* (2007) definen competencias en modelización matemática como la capacidad o habilidad para identificar las preguntas, las variables, las relaciones o los supuestos relevantes en una situación dada del mundo real, traducirlas en términos matemáticos e interpretar y validar la solución resultante del problema. Además, las personas autoras incluyen, como parte de estas competencias, la capacidad de analizar o comparar modelos dados, mediante la investigación de suposiciones realizadas, verificando las propiedades y el alcance de un modelo dado, entre otros aspectos.



Por su parte, Kaiser y Brand (2015) definen competencias en modelización matemática como el poder de analizar fundamentos y propiedades de modelos existentes, hecho que posibilita evaluar tanto su alcance como su validez. Mediante modelos matemáticos existentes, se puede decodificar e interpretar elementos de una determinada situación real por modelar.

En este sentido, Greefrath (2020) señala que la capacidad para realizar el proceso de modelización puede considerarse una competencia específica de modelado y propone, como parte de las cualidades, la construcción y simplificación del modelo, la matematización, el trabajo matemático, la interpretación de los resultados y la validación de dicho modelo. Por su parte, MaaB (2006) indica que tanto el entendimiento como la definición de las competencias y habilidades de modelización matemática están estrechamente relacionados con el proceso de modelado, por lo que las competencias en modelización matemática incluyen aptitudes para ejecutar los procesos de modelado de manera apropiada.

MaaB (2006), además, hace referencia a un trabajo, no publicado, de Blum y Kaiser, en 1997, en el que se detalla una serie de competencias y subcompetencias relacionadas con el proceso de modelización matemática.

- *Competencias para comprender el problema real y establecer un modelo basado en la situación-problema:* hacer suposiciones y simplificar el problema; reconocer magnitudes, cantidades o datos que influyen en la situación, denotar e identificar variables clave; construir relaciones entre las variables; buscar información disponible y diferenciar entre datos relevantes e irrelevantes.

- *Competencias para construir un modelo matemático del modelo real:* matematizar cantidades relevantes y sus relaciones; simplificar las cantidades pertinentes y sus relaciones, si es necesario, y reducir tanto su número como su complejidad; elegir notaciones matemáticas apropiadas y representar situaciones gráficamente.
- *Competencias para resolver preguntas matemáticas dentro del modelo matemático:* utilizar estrategias heurísticas como dividir el problema en partes, establecer relaciones con problemas similares o análogos, reformular el problema, verlo desde una perspectiva forma diferente; variar las cantidades o los datos disponibles, o incluir otra información relevante; utilizar conocimiento matemático para resolver el problema.
- *Competencias para interpretar resultados matemáticos en una situación real:* interpretar resultados matemáticos en contextos extramatemáticos; generalizar soluciones que fueron halladas para un problema o contexto particular; analizar soluciones a un problema utilizando un lenguaje matemático apropiado y comunicarlas en forma adecuada.
- *Competencias para validar la solución:* comprobar y analizar críticamente las soluciones encontradas; revisar algunas partes del modelo o repasar el proceso de modelado para comprobar si las soluciones se ajustan al problema planteado; analizar otras formas de resolver el problema y si existen más soluciones posibles; revisar el proceso de modelización efectuado, para identificar variantes y oportunidades de mejora.



Acebo-Gutiérrez y Rodríguez-Gallegos (2021), por su parte, tomaron como referencia cuatro fases o dimensiones de la modelación matemática: formulación, resolución, interpretación y validación. Para cada una de ellas, establecieron las competencias requeridas:

- *Formulación*: identificar el problema o situación del mundo real; identificar las partes o datos relevantes del problema para su solución.
- *Resolución*: determinar variables y parámetros para construir un modelo matemático; generar un modelo matemático para representar el problema; realizar cálculos y resolver el modelo matemático.
- *Interpretación*: formular explicaciones; realizar supuestos y reconocer limitaciones.
- *Validación*: contrastar los resultados con la realidad; analizar otras formas de resolver el problema o de obtener las soluciones existentes de maneras distintas.

Para desarrollar conocimientos y competencias relacionadas con la modelización matemática, es importante que el profesorado en formación inicial y la persona ya graduada continúe mejorando y reflexionando sobre estos procesos. Es así como Zaldívar *et al.* (2017) subrayan que “es necesario un trabajo de reflexión sobre la práctica que permita al docente valorar los beneficios de la modelación, reconocer las dificultades de su implementación y modificar sus concepciones respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas” (p. 89).

Por ello, va a existir una necesidad, en la formación del profesorado, de incorporar herramientas que integren el conocimiento matemático del estudiantado con la realidad

y su contexto, así como aquellas que desarrollen competencias sobre la resolución de problemas, el razonamiento matemático y la toma de decisiones (Mata y Gallard, 2020). Para lo anterior, asimismo, se debe considerar que existen diferentes estrategias de enseñanza, las cuales dependen del concepto y de la visión desenvueltos en la formación inicial (Mora y Ortiz, 2012).

Metodología

Tipo de investigación. Este estudio se apoyó en un paradigma de tipo naturalista, ya que “postula una realidad dependiente de los significados que los sujetos le atribuyen y construida a partir de esos significados” (Rodríguez, 2003, p. 28). En este sentido, se consideró el enfoque cualitativo, el cual se basa en la acción de las personas con respecto a la función práctica, donde la persona investigadora describirá y comprenderá lo que es único y particular de la persona en investigación (Rodríguez, 2003).

Fuentes informativas. Las personas participantes de la investigación fueron 20 docentes de matemática en formación inicial, del grado de Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática, en el plan de estudios BLEM-2017, con quienes se desarrolló el módulo de modelización matemática.

Las personas participantes debieron cumplir con 2 criterios:

- a) Matrícula: estar matriculadas en el I ciclo, 2022, en los cursos MAC 417 Didáctica de la Estadística y Probabilidad y MAC 418 Didáctica del Álgebra y el Análisis. Al estar incluidas en las didácticas, se garantizó que el profesorado en formación ya había aprobado cursos como: Análisis, Geometría, Estadística y Probabilidad, entre otros.



Con el propósito de realizar una valoración general de las competencias que los futuros docentes adquirieron en el desarrollo del plan de estudios, la razón de criterio fue garantizar que hubieran aprobado diferentes cursos del plan de estudios, en los cuales se abordan habilidades necesarias para la modelización matemática.

- b) Aceptación: el futuro profesorado debió haber completado un formulario de inscripción voluntaria al módulo de formación complementaria, respecto a modelización matemática, mediante el cual se comprometió a asistir a todas las sesiones del módulo y completar todos los instrumentos de recolección informativa que se le solicitó llenar durante su participación.

Técnicas e instrumentos de recolección. *Encuesta.* Como menciona Bernal (2010), la encuesta se utiliza con el fin de obtener información a través de un cuestionario o un conjunto de preguntas. A partir de 2 cuestionarios (25 y 36 ítems, respectivamente) aplicados a las personas participantes, se obtuvo información relevante relacionada con los conocimientos y habilidades en modelización que estas presentaban.

Como parte de los cuestionarios y con base en preguntas abiertas, a las personas docentes en formación se les solicitó resolver problemas de modelización matemática. El análisis de cómo resolvieron 2 de estos problemas se presenta en este documento.

Para asegurar la validez de los cuestionarios, se consideraron los criterios establecidos por Ñaupas *et al.* (2014). Se utilizaron 2 métodos de validación: primero, el juicio de personas expertas en la temática, de acuerdo con una guía de validación; segundo, se elaboró un plan piloto con docentes en formación

de la Escuela de Matemática, quienes se encontraban cursando el nivel de licenciatura, en el 2022. Ambos instrumentos iniciaron con el consentimiento informado, en el que se indicó el propósito investigativo, con la garantía de los criterios de confidencialidad respectivos.

Análisis documental. Bernal (2010) nos indica que esta técnica se basa en fichas o registros, ya sea bibliográficos o escritos, que tienen como fin principal analizar materiales/documentos escritos teóricos o de producción.

En este trabajo, documentos por analizar fueron las resoluciones a los problemas (producción) realizadas por el profesorado en formación. Lo que se pretendió determinar, a través de estas actividades efectuadas durante la implementación del módulo, fue aquellas competencias que las personas participantes en la investigación presentaron en cuanto a modelización: conceptos, características, fases, ejemplos, entre otros aspectos.

La ficha para el análisis documental fue validada por medio del juicio de personas expertos en educación matemática.

Proceso de recolección informativa. Esta dinámica fue durante el desarrollo de un módulo formativo sobre modelización matemática. En la sesión 3, el profesorado en formación trabajó en 2 situaciones de modelización matemática. La actividad se completó fuera de la sesión y la semana siguiente las personas docentes tuvieron que compartir las soluciones de los problemas.

Categorías de análisis. Se establecieron las siguientes categorías, partiendo de los 7 pasos del ciclo de modelización de Blum (2015) y lo señalado por MaaB (2006), Blomhøj (2008) y Acebo-Gutiérrez y Rodríguez-Gallegos (2021). Es importante destacar que estas categorías de análisis fueron validadas por medio del juicio experto en educación matemática, así como en matemática pura y aplicada.



Tabla 1. *Categorías de análisis para los procesos de solución del profesorado*

Categoría de análisis: conocimiento matemático		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Definiciones y propiedades	Manifiesta conocimiento sobre las definiciones o propiedades de los conceptos matemáticos abordados y los refiere en la construcción del modelo matemático.	1 No refiere a definiciones o propiedades matemáticas en la resolución del problema. 2 Utiliza algunas definiciones o propiedades matemáticas, pero de forma incorrecta, en la resolución del problema. 3 Utiliza, de forma adecuada, solo algunas de las definiciones o propiedades matemáticas requeridas en la resolución del problema. 4 Refiere, de forma adecuada, a las definiciones o propiedades matemáticas requeridas en la resolución del problema.
Representaciones	Utiliza representaciones, construidas por los diversos sistemas, que permiten expresar un determinado concepto matemático (notaciones, reglas y convenios que expresan determinados aspectos y propiedades de un concepto).	1 No refiere a representaciones en la resolución del problema. 2 Utiliza algunas representaciones, pero de forma incorrecta, en la resolución del problema. 3 Utiliza, de forma adecuada, solo algunas de las representaciones requeridas en la resolución del problema. 4 Refiere, de forma adecuada, a las representaciones requeridas en la resolución del problema.
Categoría de análisis: modelo real		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Datos	Un dato es información objetiva sin proporcionar juicios de valor o interpretaciones, el cual se extrae del texto del problema, o bien que la persona modelizadora establece <i>a priori</i> y que puede utilizar o no en su solución.	1 Ninguno de los datos del problema es considerado relevante. 2 Toma algunos datos del problema como relevantes cuando no lo son. 3 Identifica solo algunos de los datos relevantes del problema. 4 Identifica todos los datos relevantes del problema.
Variables	La variable es un literal que se supone cambia de valor. Es decir, un argumento (conjunto de valores de dominio de una función) o un parámetro (un valor sobre el que dependen otros valores).	1 No enlista variables ni parámetros relevantes para construir el modelo. 2 Enlista variables y parámetros, pero no todos son relevantes para construir el modelo. 3 Todos los parámetros y variables que enlista son relevantes, pero faltan otros que también lo son. 4 Enlista todas las variables y parámetros relevantes para construir el modelo matemático.
Patrones	Tendencias, regularidades, similitudes o afinidades que se establecen entre los datos de un problema.	1 No reconoce ningún patrón en los datos. 2 Reconoce que existen características afines en los datos, pero no identifica el patrón. 3 Identifica parcialmente cuál es la relación de los datos o un cierto patrón. 4 Identifica el patrón en los datos.



Categoría de análisis: modelo matemático		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Relación entre cantidades y variables	Establece matemáticamente las relaciones entre las cantidades y variables interrelacionadas, así como las relaciones entre ellas.	1 No expresa matemáticamente la relación entre todas las variables y datos involucrados. 2 La relación establecida entre las variables y datos es incorrecta. 3 Expresa matemáticamente la relación entre algunas variables y datos, pero no considera todos los implicados. 4 Expresa matemáticamente la relación entre todas las variables y datos involucrados.
Relaciones/criterio	Expresa matemáticamente el modelo que describe la situación-problema.	1 No expresa matemáticamente un modelo. 2 Expresa un modelo, pero presenta errores. 3 Expresa un modelo, pero no incluye todas las variables o datos del problema. 4 Expresa matemáticamente, de forma correcta, el modelo que describe la situación problema.
Categoría de análisis: coherencia en el proceso de modelización		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Coherencia entre el modelo real y el modelo matemático	Existe coherencia entre el modelo real y el modelo matemático, en cuanto a los datos de estos, las relaciones entre variables, entre otros.	1 No posee coherencia entre el modelo real y el modelo matemático. 2 El modelo matemático incluyó variables y datos que no fueron considerados en el modelo real. 3 No todos los datos y variables del modelo real fueron considerados en el modelo matemático, a pesar de ser relevantes. 4 Posee coherencia entre el modelo real y el modelo matemático.
Categoría de análisis: establece conexiones con otros problemas		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Conexión con otros modelos o problemas similares	Realiza conexiones con otros modelos o problemas matemáticos.	1 No realiza conexiones con otros modelos o problemas matemáticos. 2 Establece conexiones con otros tipos de problemas, pero que no guardan relación. 3 Establece únicamente conexiones con problemas similares. 4 Realiza conexiones con otros modelos o problemas matemáticos.
Categoría de análisis: interpreta los resultados matemáticos obtenidos con el problema real		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Generalización	Generaliza los resultados obtenidos con la situación-problema planteada.	1 No generaliza los datos obtenidos. 2 El resultado obtenido del modelo propuesto lo contrasta con la situación real. 3 Identifica restricciones para una posible generalización. 4 Generaliza los datos obtenidos.
Categoría de análisis: valida la solución		
Subcategorías	Definición	Nivel en el que considera se ubica
Análisis de las soluciones	Revisa si las soluciones concuerdan con la situación del problema real.	1 No revisa las soluciones dadas con la situación real. 2 Revisa las soluciones dadas con la situación real, pero no toma acciones posteriores. 3 Revisa las soluciones dadas con la situación y toma acciones posteriores. 4 Revisa las soluciones dadas con la situación real y verifica que cumplen todas las condiciones.
Inicia nuevamente el proceso de modelado	Vuelve a iniciar el proceso de modelado, si las soluciones no concuerdan con la situación del problema real.	

Nota: Fuente propia de la investigación.



Técnicas de análisis de la información. En esta línea, la técnica por utilizar fue el análisis de contenido. [Sánchez et al. \(2021\)](#) indican que “este tipo de análisis es una técnica de interpretación y comprensión de textos escritos, orales, filmados, fotográficos, transcripciones de entrevistas y observaciones, discursos, documentos, es decir, todo tipo de registro teniendo en cuenta el contexto en el que se produce” (p. 12). Es decir, todas aquellas respuestas, procedimientos, dudas, opiniones fueron recolectados de forma escrita y oral, para, posteriormente, analizarlos. Este examen de contenido se basó en las categorías establecidas. La información fue organizada y clasificada a través de un análisis cualitativo.

Técnica de validez de la información. Con la finalidad de garantizar la validez de la información, se empleó la técnica de triangulación metodológica, para efectuar un contraste de datos obtenidos en los distintos instrumentos de recolección. Según [Cisterna \(2005\)](#), “se puede concebir como la acción de reunión y cruce dialéctico de la información pertinente al objeto de estudio que surge a partir de una investigación y que es obtenida por medio de los instrumentos correspondientes, a partir de la cual se obtienen los resultados del estudio” (p. 68).

Análisis y resultados

Con el propósito de caracterizar el nivel de las competencias de docentes en formación en el área resolutoria de problemas de modelización matemática, se plantearon algunos problemas a parte de la población del IV nivel de la carrera Enseñanza de la Matemática, impartida por la Universidad Nacional, Costa Rica. En total, participaron 20 docentes de matemática en formación. Es importante aclarar que para los problemas

propuestos no todas las personas participantes presentaron abordajes con soluciones; en algunos casos, porque decidieron no resolver y, en otros, porque no encontraron estrategias sobre cómo abordarlos.

El análisis realizado para los problemas planteados fue dirigido a aquellos casos en los que se hizo algún tipo de planteamiento. Para registrar la solución, al profesorado se le solicitó indicar los pasos que siguió a la hora de resolver el problema, los supuestos o condiciones que fueron contemplados, otras preguntas que se podrían plantear a partir de los datos obtenidos, consideraciones adicionales que se le podrían hacer al problema y otras situaciones-problema diseñadas a partir del problema dado.

El primer problema propuesto a las personas participantes fue el siguiente, adaptado de [Stewart \(1999\)](#):

¿Qué medidas debe tener una lata de refresco de 710 ml para que su fabricación sea lo más barata posible? Compare el resultado con las dimensiones de alguna lata de bebida que se comercie a nivel nacional y que tenga la misma capacidad. Realice hipótesis de las razones por las cuales hay diferencia, en caso de encontrarlas.

El planteamiento implica el uso de funciones, derivación de funciones y un proceso de optimización, en el cual, a partir de la solución obtenida, se requiere un proceso indagatorio para comparar y realizar las hipótesis solicitadas. La situación se vincula con un contexto real.

Del total de docentes en formación participantes, 18 intentaron distintas estrategias de solución (2 no ejecutaron ningún proceso resolutorio). En términos generales, el problema era del conocimiento de la mayoría del profesorado, así como las técnicas para resolver. Sin embargo, al momento de descifrarlas, cometieron errores u omitieron



aspectos importantes; particularmente, solo una de las personas participantes trató de comparar los resultados obtenidos con el prototipo de lata que circula en el nivel nacional, lo cual era parte del problema.

Conocimiento matemático

Con respecto al uso de definiciones, propiedades o representaciones matemáticas en la construcción del modelo matemático, se destaca, en cuanto a las primeras, el uso y mención del cilindro, su altura, área lateral, área basal, volumen, radio y circunferencia. En cuanto a las propiedades, se utilizan área y volumen de dicho cuerpo geométrico.

Con respecto al nivel alcanzado de conocimientos matemáticos, 2 docentes en formación se ubicaron en 1, dado que no se refirieron a definiciones o propiedades matemáticas para resolver el problema; 4 personas se localizaron en 2, puesto que utilizaron algunas definiciones o propiedades, pero presentaron errores en ellas. Por ejemplo, 1 persona participante planteó lo siguiente:

Se indica la fórmula del área lateral de la lata de la forma: $2\pi r + 2h$

Por otro lado, se indica el área del cilindro de la forma: $2\pi rh$

En 3, se encontraron 12 participantes, pues, aunque hacen referencia a definiciones o propiedades de forma adecuada, no citan la totalidad requerida de aquellas. Por ejemplo, alguien hizo alusión a la necesidad de utilizar la fórmula del área total del cilindro, pero no menciona la atinencia de usar el volumen.

Modelo real

Con respecto al modelo real, específicamente al manejo de datos, 3 personas se colocaron en 1, dado que no se refleja un uso

o simplificación de los aportados. Por ejemplo, 1 estudiante indica: “además de considerar el precio, es necesario el costo de fabricación”, pero no identifica los datos relevantes.

En 2, se ubicó 1 docente en formación, quien interpreta incorrectamente los datos al momento de plantear la función por optimizar. En concreto, plantea la siguiente igualdad: $2\pi rh + 2\pi r = 710$ (se intenta igualar un área con un volumen); e indica que “se podría derivar y con ello optimizar la fórmula del área total del cilindro en función de la altura y el radio”. No obstante, está utilizando la fórmula del área e igualándola al volumen dado o requerido.

Al continuar con el análisis del nivel mostrado por las personas participantes en este problema, 1 docente en formación se ubicó en 3, pues, a pesar de que considera “el área de un cilindro circular recto y el volumen del cilindro”, en el análisis y uso de los datos no contempla el volumen en la resolución.

En cuanto al nivel 4 en este problema, 13 docentes en formación se posicionaron en él, porque utilizaron el volumen del cilindro, tanto en su fórmula como el dato de los 710 ml y el perímetro del cilindro. Sin embargo, en el manejo de dichos datos, algunas personas cometieron errores como considerar el perímetro del cilindro bajo la fórmula $P = 2\pi r + 2a$, donde r y a corresponden al radio y a la altura del cilindro (figura 2).

$\text{Volumen} = 710 \text{ ml.} \quad \text{y} \quad A_b = \pi r^2$
 $V = A_b \times h = 710 \rightarrow V = \pi r^2 \times h = 710$
 - Con la fórmula del volumen despejar una de las variables.
 $\pi r^2 \times h = 710 \Rightarrow h = \frac{710}{\pi r^2} \quad \text{y} \quad h = a$
 $P = 2\pi r + 2a$
 $P = 2\pi r + 2\left(\frac{710}{\pi r^2}\right)$
 $P = 2\pi r + \frac{1420}{r^2}$
 $1420 r^{-2}$
 $P' = 2\pi - 2840 r^{-3}$
 $P' = 2\pi - \frac{2840}{r^3}$
 $\frac{2\pi r^3 - 2840}{r^3} = 0$
 $2\pi r^3 = 2840$
 $r^3 = 1420$

Figura 2. Relación matemática establecida por un participante



En el modelo real, pero en lo que corresponde a la identificación de variables, 4 personas se ubicaron en 1, pues no identificaron variables ni parámetros para la construcción del modelo. Sin embargo, 14 participantes determinaron todas las variables y parámetros requeridos para el modelo matemático, aunque con algunos errores matemáticos en su uso. Por ejemplo, 1 persona identifica la altura y el radio del cilindro, así como establece la fórmula del volumen y el área, pero instaura como área del cilindro la siguiente: $2\pi r + 2h$

Finalmente, en cuanto al reconocimiento de patrones y planteamiento de supuestos, 4 participantes se colocaron en 1, no reconocieron ningún patrón en los datos; 3 personas, en 2, para lo cual reconocen que existen ciertas características comunes, pero no logran identificar el patrón; 2 docentes en formación identifican parcialmente la relación de los datos; y 9 se localizan en 4, puesto que identificaron el patrón en los datos, lo cual les permitió plantear adecuadamente la función para realizar el proceso de optimización.

Modelo matemático

Al analizar el modelo matemático generado por las personas participantes, respecto al establecimiento de relaciones entre cantidades y variables, 6 docentes en formación no lograron expresar el enlace entre variables y datos involucrados (nivel 1); 1 persona establece un asocie, pero este es incorrecto (nivel 2), tal como se evidencia en la figura 3.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow 710 = \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow h = \frac{710}{\pi r^2}$$

$$A_T = A_B + A_L$$

$$\Rightarrow 710 = 2\pi r + 2\pi r h$$

$$= 2\pi r \left(1 + \frac{710}{\pi r^2}\right)$$

$$= 2\pi r \left(\frac{\pi r^2 + 710}{\pi r^2}\right)$$

$$= \frac{2(\pi r^2 + 710)}{r}$$

Figura 3. Relación matemática establecida por un participante

Adicionalmente, 2 futuras personas docentes expresaron una relación, pero no consideraron todas las variables o datos implicados (nivel 3). Por ejemplo, en la figura 4 se muestra cómo 1 persona participante, al establecer las vinculaciones entre las variables y datos del problema, no involucra el volumen de la lata.

$$A = 710$$

$$A_{\text{lat}} h = 710$$

$$2\pi r h + 2\pi r = 710$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r (h + 1) = 710$$

se podría derivar y con ello optimizar la fórmula del área total del cilindro en función de la altura y el radio, respectivamente.

Figura 4. Relación matemática establecida por un participante

Las restantes 9 personas docentes en formación lograron expresar matemáticamente y de manera adecuada la relación matemática, establecieron no solo el ligamen entre el volumen y el área del cilindro, sino que encontraron la función por optimizar (nivel 4).



Coherencia en el proceso de modelización

Dado que 6 de las personas participantes no expresaron matemáticamente la relación entre todas las variables y datos del problema, se ubicaron en el nivel 1; 4 plantearon 1 relación de forma matemática entre los elementos del problema, pero de manera incompleta (nivel 3).

Por su parte, el modelo propuesto por las 9 personas participantes, guarda coherencia con el proceso de modelización empleado y se adapta a las condiciones del problema.

Conexiones con otros problemas

Ninguna de las personas participantes ejecutó conexiones de este problema con otros conocidos por ellas o modelos matemáticos

que fueran de su conocimiento. Todas las personas participantes se ubicaron en el nivel 1.

Interpretación de los resultados matemáticos y solución validada

En este problema, 9 personas lograron expresar matemáticamente y de manera adecuada la relación hallada. Sin embargo, solo 1 persona docente en formación contrastó lo obtenido con el modelo real; efectuó hipótesis sobre la no utilización de la forma de la lata que optimiza el material usado, tal como se evidencia en la figura 5.

En la tabla 2, se muestra un resumen de la ubicación de las personas que participaron en resolver este problema, respecto al nivel de competencia en modelización matemática.

Para las latas tener una forma más compacta y barato entre más esférica sea, mejor, pero las empresas no usan dicha forma debido a otros factores como: tener un producto más atractivo, que se ajuste mejor a la mano, por lo que se busca o se usa una proporción donde la altura sea el doble del 8 veces mayor al radio.

Figura 5. Interpretación de resultados establecida por un participante

Tabla 2. Cantidad de docentes en formación por nivel mostrado de competencia en modelización matemática

Categoría de análisis	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Conocimiento matemático	2	4	12	0
Modelo real: datos	3	1	1	13
Modelo real: variables	4	0	0	14
Modelo real: patrones	4	3	2	9
Modelo matemático: relaciones	6	1	2	9
Modelo matemático: criterio	6	1	2	9
Coherencia en el proceso de modelización	6	0	3	9
Conexiones con otros problemas	18	0	0	0
Interpretación de resultados	17	0	0	1
Validez de la solución	17	0	0	1

Fuente: Elaboración propia.



Tal como se desprende de la tabla, en este problema, las personas participantes mostraron un adecuado nivel de competencia en modelización matemática, reflejado cuando al menos 9 estudiantes se ubicaron en el nivel 4 en los distintos rubros. Esta situación puede deberse a la naturaleza del problema, puesto que es cerrado y no abierto. Sin embargo, no evidencian competencias para interpretar y validar los resultados obtenidos o conexiones con otros problemas.

Otro de los problemas planteados a las personas participantes fue (adaptado de Guerrero (2016)):

Los cambios climáticos traen consigo problemas a los países en los que la energía eléctrica se deriva de la energía hidráulica, tal es el caso de Costa Rica, que se ha visto afectado en los últimos tiempos por estos cambios. Podría usted calcular

- a) *¿Cuánta energía eléctrica se consume diariamente en su hogar por artefacto eléctrico?*
- b) *¿Qué artefactos eléctricos tienen un impacto mayor en la factura eléctrica de su hogar? (Podría elaborar una tabla donde, por artefacto eléctrico, en la que se indique cantidad de estos en su hogar, capacidad de en watts por hora, horas de uso diario, consumo total de watts por día, costo por día, entre otros).*
- c) *¿De qué manera puede generar un plan de ahorro de energía para reducir el consumo de energía eléctrica? Determine el impacto de ese plan de ahorro (utilice la información generada en la pregunta anterior).*
- d) *¿Se podrá utilizar este plan en otros hogares?*

Lo propuesto implicaba el uso de funciones y aproximaciones, donde los datos están ausentes del problema, por lo que involucra un proceso de investigación previo al de solución y posterior, a partir de los resultados por obtener. Además, representa una situación vinculada con un contexto real, familiar, ambiental y social.

Del total de docentes en formación que participaron, solamente 7 personas intentaron alguna estrategia solucionadora (13 no realizaron ningún proceso de resolución). Las personas restantes no presentaron una solución o se limitaron a realizar ciertas hipótesis, pero sin datos al respecto.

Conocimiento matemático

Con respecto al uso de definiciones, propiedades o representaciones matemáticas en la construcción del modelo matemático, se destaca que estas se aplicaron en un nivel muy básico. En todos los procesos de solución, se muestra la información se sistematizó respecto a la cantidad de artefactos eléctricos, horas de uso y consumo de electricidad por día. Además, algunas personas aplicaron propiedades de aritmética básica.

En cuanto a los niveles determinados para las competencias, 4 personas se ubicaron en 1 de competencia, es decir, no hicieron referencia a definiciones o propiedades matemáticas. Por otra parte, 3 participantes se colocaron en 3, ya que utilizaron algunas propiedades matemáticas en forma adecuada, pero no todas las que se requerían para plantear una solución al problema.

Por ejemplo, en la figura 6, se muestra una tabla en la que 1 participante sistematiza la información de su grupo familiar y hace un cálculo para aproximar el consumo de electricidad por día. Procesos similares fueron realizados por las otras participantes posicionadas en este nivel.



a)	Horas por día de uso	Watts por día
Cocina	2h	14000
2 Televisores	8h	1120
Microondas	1h	1000
Refrigeradora	24h	4560
Parlante	6h	1140
Freidora	2h	1000
4 Cargar Celulares	4h	240
Centro de lavado	8h	3000
Play Station	5h	550
2 Computador	12h	3600
Coffee Maker	1/2h	450
Ducha	1h	8000
10 Bombillos	10h	100
Albanico	15h	1050
Total	100.5h	39.810

Figura 6. Sistematización de datos realizada por una persona docente en formación para resolver el problema planteado

Con respecto al conocimiento matemático, se puede mencionar que la solución del problema requería otros conocimientos que no fueron empleados por el profesorado. Lo que muestran las personas participantes se limitó a la aplicación de algunos conocimientos básicos, pero no profundizaron en el proceso resolutorio.

Modelo real

Con respecto al modelo real, específicamente, al uso de datos, todas las personas participantes que sistematizaron información utilizaron aspectos de su contexto familiar (como se observa en la figura 6). Sin embargo, en algunos casos, estos fueron insuficientes o incompletos, pues, por ejemplo, como se aprecia en la figura 7, falta información sobre otros artefactos eléctricos.

	Cantidad	Horas de uso	Consumo diario
Refrigeradora	1	24	28800 w/h
Ducha	2	1	8000 w/h
Cocina eléctrica	1	30	4000 w/h

Figura 7. Sistematización de datos realizada por una persona docente en formación para resolver el problema planteado

Con base en las resoluciones dadas por las personas participantes y el uso de datos, todas ellas (7) se ubicaron en el nivel 3, pues, aunque identificaron aspectos relevantes para resolver el problema, estos no fueron suficientes.

Un detalle por considerar es que, para resolver el problema, se debía tomar en cuenta información como el costo diario del consumo de energía por artefacto eléctrico o investigar si había diferentes tarifas, según franja horaria o compañía que brinda el servicio. Solamente 2 docentes en formación hacen referencia a la necesidad de conocer el costo, pero no lo calculan. En la figura 8, se presenta lo realizado por 1 persona participante.

Electrodoméstico	Cantidad	Capacidad Watts hora	Horas de uso diario	Costo diario
Refrigeradora	1	290	24	
Lavadora	1	385	1	
Olla a presión	1	700	0.5	
Bombillas	5	75	4	

Figura 8. Sistematización de datos realizada por un estudiante para resolver el problema planteado



Con respecto al uso de variables, solo 1 participante identifica, simboliza y define posibles variables para la resolución del problema: potencia, tiempo y energía consumida (figura 9). La futura persona docente utiliza estas variables en la posterior construcción de una tabla. Sin embargo, fue el único procedimiento que realizó.

$$\text{Potencia del artefacto eléctrico (W)} \times \text{Tiempo que está prendido el artefacto (horas)} = \text{Energía Consumida por el artefacto (kWh)}$$

Artefacto	Cantidad	Potencia Capacidad (w)	horas	Consumo total kWh
Refrigeradora	1	150	24	3,6 kWh
Cocina Eléctrica	1	220	6	1,32 kWh
televisor	1	90	1	0,09 kWh
Centro de Scaudo	1	240	2	0,48 kWh

Figura 9. Variables identificadas por una estudiante para resolver el problema planteado

Con respecto a la identificación de variables, todas las personas participantes se localizaron en el nivel 3, dado que reconocen algunas relevantes para construir el modelo, pero faltan otras que también lo son.

Por otra parte, solo 1 docente en formación se ubica en 3 con respecto a la definición de variables; las otras personas participantes se posicionaron en 1, pues, aunque identifican variables relevantes, no las definen explícitamente según el contexto del problema.

Aunado a lo anterior, como ya se indicó, aunque 3 personas participantes identificaron que se debe calcular el costo diario (lo que sería un supuesto para la resolución del problema), no se profundiza en ello y no lo asumen como una variable en el problema, que depende de otros datos por obtener o recolectar. Solo 1 persona participante, cuyo proceso inicial de resolución se muestra en la figura 8, expresa la relación entre

las variables que identificó y lo enuncia mediante operaciones matemáticas.

En este caso, referente a los supuestos para la resolución del problema, 4 participantes se situaron en 1, pues no identificaron ningún patrón o ligamen entre las variables, mientras que 3 se instalaron en 3, al reconocer parcialmente relaciones entre las variables.

En general, las personas participantes consideran datos de relevancia para el problema (aunque incompletos), identifican algunas variables, pero no las definen y, aunque reconocen que existe “algún tipo de relación” entre los datos, no la expresan de modo explícito, como un comportamiento o patrón por considerar.

Modelo matemático

Según el procedimiento realizado por las personas docentes en formación, a la hora de resolver problemas, ninguna de ellas planteó un modelo matemático para determinar, entre otros aspectos, el consumo de energía total, el costo de este y el impacto que un plan de ahorro tendría para el grupo familiar. En otras palabras, ninguna persona participante logró establecer las relaciones entre las cantidades y variables interrelacionadas, ni las expresó matemáticamente, por lo que todas se ubicaron en el nivel 1, con respecto a lo planteado acerca de un modelo matemático.

Los argumentos expresados por las personas participantes, ante las preguntas planteadas, se basaron en la observación de los datos de una tabla, identificar el artefacto que tenía más consumo de electricidad y sugerir un menor uso (figura 10).

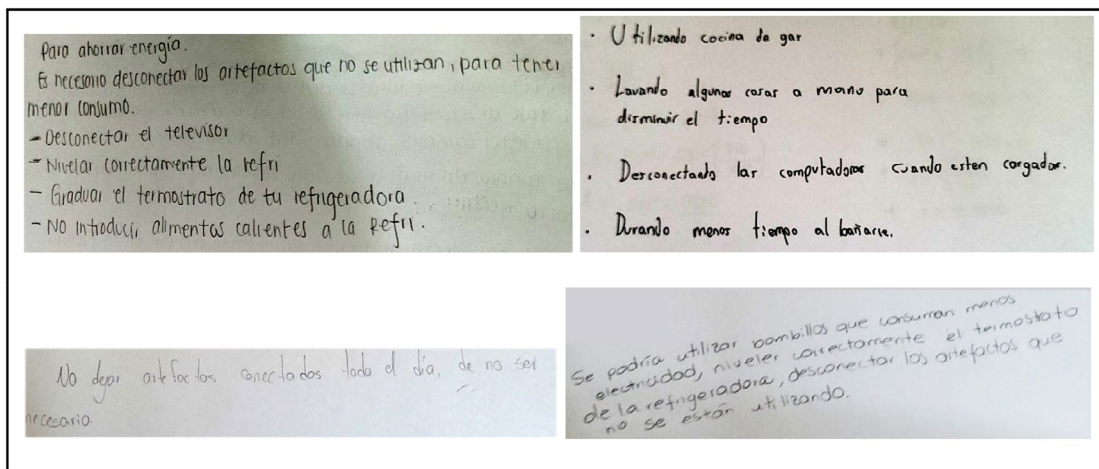


Figura 10. Respuestas dadas por personas participantes sobre medidas para disminuir el consumo de energía

Las respuestas brindadas por las personas participantes, sobre acciones para disminuir el consumo de energía y, por ende, el costo económico de esta para el grupo familiar, se basaron en acciones conocidas por la mayoría de la población, pero que no responden directamente a lo solicitado, en el sentido de cuál es más efectiva y del impacto que esto puede tener para dicho grupo familiar (huella económica y de ahorro de energía). Lo anterior podría depender de muchos factores como la cantidad de personas que habitan en la misma casa, característica del grupo familiar, horas de uso de cada artefacto, cantidad de artefactos, entre otros.

Aunque las respuestas son válidas, constituyen actos comunes cuyo alcance no se analizó con base en el contexto de cada persona ni por medio de un modelo matemático que apoyara sus argumentos. Tampoco se profundizó en cuáles de las acciones mencionadas tenían más impacto para el grupo familiar.

En este problema, el comportamiento de las personas docentes en formación, alrededor de los distintos rubros, estuvo en un nivel 1, en cuanto a la generación del modelo matemático; en lo que respecta al

conocimiento matemático y modelo real, estuvo ubicado en 3.

Coherencia en el proceso de modelización

Dado que ninguna de las personas participantes realizó un modelo matemático, este aspecto relacionado con la coherencia en el proceso de modelización no se pudo valorar. Como ya se indicó, aunque en algunos casos se identificaron ciertos datos y variables, no se establecieron las relaciones entre estos. Todas las personas participantes se ubicaron en 1.

Conexiones con otros problemas

Ninguna de las personas participantes realizó conexiones de este problema con otros que supieran o modelos matemáticos que fueran de su conocimiento. Todas las personas participantes se localizaron en 1.

Interpretación de los resultados matemáticos y validez de la solución

Debido a la ausencia en el planteamiento de un modelo matemático, la información aportada por las personas



participantes no se generaliza, revisa o valida con base en dicho modelo o su contexto. Tampoco se analiza si lo expresado se puede aplicar a otros contextos o grupos familiares ni cuáles aspectos se deberían considerar para ello. Todas las personas participantes se ubicaron en el nivel 1.

Incluso, las ideas expresadas con respecto a las posibles acciones para disminuir el consumo de energía carecen de análisis en cuanto a su contexto particular de familia. En este sentido, no se observa la interpretación de los resultados o revisión de lo planteado con base en la formulación de las situaciones planteadas.

En la tabla 3, se muestra un resumen del profesorado en formación, respecto al nivel de competencia en modelización matemática.

Discusión de resultados y conclusiones

Con base en los procesos de solución mostrados por las personas participantes, se puede señalar que estas poseen los conocimientos matemáticos requeridos para resolver los problemas propuestos. Sin embargo, no los aplicaron en forma adecuada, pues se limitaron a un uso básico, sin profundizar

en definiciones o propiedades, especialmente en problemas abiertos, en los cuales no se brindaban datos específicos.

Las personas participantes muestran capacidad para manejar y dar sentido a datos relevantes para la resolución del problema. Sin embargo, no en todos los casos consideran la totalidad de aquellos que deben ser incluidos en el proceso resolutorio. Aunado a lo anterior, su capacidad para la búsqueda informativa fue limitada, pues no profundizaron en datos requeridos que implicaban indagación, en coherencia con lo planteado en las investigaciones de Hein y Biembengut (2006) y Plaza (2016).

La capacidad para determinar y definir tanto variables como parámetros que describen las relaciones a partir de los datos generados, según un problema, fue limitada en los procesos de resolución; incluso las personas participantes, en su mayoría, las incluían sin definir las de previo. Aunque reconocen la existencia de patrones en los datos, estos no se hacen explícitos ni se representan matemáticamente; el resultado es similar al obtenido por Plaza (2016). En esta línea, tampoco se hace diferencia entre la información que se utilizará a la hora de solucionar el problema, la pertinente y aquella que se

Tabla 3. *Cantidad de docentes en formación por nivel de competencia en modelización matemática mostrado*

Categoría de análisis	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Conocimiento matemático	4	0	3	0
Modelo real: datos	0	0	7	0
Modelo real: variables	6	0	1	0
Modelo real: patrones	4	0	3	0
Modelo matemático: relaciones	7	0	0	0
Modelo matemático: criterio	7	0	0	0
Coherencia en el proceso de modelización	7	0	0	0
Conexiones con otros problemas	7	0	0	0
Interpretación de resultados	7	0	0	0
Validez de la solución	7	0	0	0

Nota: Fuente propia de la investigación.



podría exceptuar. Lo anterior podría deberse al poco desarrollo de competencias cuando se formalizan y sistematizan los datos, no por falta de conocimiento matemático.

Se presentaron dificultades para configurar un modelo matemático que represente un sistema y vincule las variables significativas; esto en problemas abiertos, pues, en el cerrado, las personas participantes sí lograron determinar la relación matemática y, por tanto, un modelo matemático. No obstante, hubo una ausencia por parte de las personas docentes en formación cuando se interpretaron los resultados, en contraste con el modelo real o la situación real planteada.

El profesorado en formación presentó ausencia de un proceso validador de resultados y del establecimiento de conexiones con otros problemas o modelos matemáticos. Situaciones-problema abiertas, en las cuales los datos no están dados, al parecer, no son familiares en el proceso de formación docente y, por ende, las personas participantes no tienen desarrolladas capacidades para enfrentarse a ellas.

Lo mostrado por las personas docentes en formación podría ser un indicador de que en su proceso profesional no se incluyen suficientes actividades orientadas al planeamiento y a la resolución de dinámicas de modelización matemática; tampoco al uso de esta como un recurso para la enseñanza de la disciplina en el nivel de la educación secundaria.

A partir de los resultados obtenidos y en relación con las competencias planteadas por MaaB (2006), se puede concluir que el profesorado en formación participante de la investigación muestra competencias para comprender el problema real y establecer un modelo real basado en la situación-problema, dado que logró realizar suposiciones, simplificar el problema, reconocer datos y

variables relevantes para su resolución. No obstante, en lo que refiere a las competencias para construir un modelo matemático, presenta dificultades, a la hora de identificar restricciones y supuestos propiamente matemáticos que permitan el diseño del modelo. Esto coincide con Plaza (2016), en las complejidades encontradas para la clasificación de parámetros, identificación de variables, entre otros.

Respecto a las competencias para interpretar resultados matemáticos en una situación real, el profesorado en formación no evidencia haber analizado las soluciones o haberlas generalizado. Ello puede deberse a lo estipulado por Plaza (2016) respecto a la poca experiencia en resolver problemas de modelización en los procesos formativos previos, lo que provoca obstáculos al realizar esos procedimientos de modelización.

Finalmente, en relación con las competencias para validar las soluciones, no se comprobó que las personas participantes hayan podido revisar el modelo matemático encontrado con la situación original. Por lo tanto, no hubo un chequeo del proceso de modelización, con el fin de identificar variantes y oportunidades de mejora para el modelo planteado.

Financiamiento

Universidad Nacional, Costa Rica.
SIA 052-20.

Consentimiento informado

Las autoras y los autores declaran que las personas participantes en este estudio fueron informadas sobre el tratamiento de la información.



Conflicto de intereses

Las personas autoras declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de las personas autoras

Todas las personas autoras afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

El porcentaje total de contribuciones a la conceptualización, elaboración y corrección de este artículo fue el siguiente: A. B. O. 25 %, D. C. M. 25 %, J. C. V. 25 % y R. G. A. 25 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

El autor correspondiente [R. G. A.] proporcionará los datos que respaldan los resultados de este estudio, si se le solicita razonablemente.

Preprint

Una versión preprint de este artículo fue depositada en el repositorio de la Universidad Nacional (<https://hdl.handle.net/11056/28859>).

Referencias

- Acebo-Gutiérrez, C. J., Rodríguez-Gallegos, R. (2021). Diseño y validación de rúbrica para la evaluación de modelación matemática en alumnos de secundaria. *Revista Científica*, 40(1), 13-29. <https://doi.org/10.14483/23448350.16068>
- Aymerich, A. y Albarracín, L. (2016). Complejidad en el proceso de modelización de una tarea estadística. *Modelling in Science Education and Learning*, 9(2), 6-23. <https://riunet.upv.es/bitstream/>

[handle/10251/69660/4121-15761-1-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://hdl.handle/10251/69660/4121-15761-1-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

- Bernal, C. (2010). *Metodología de la investigación* (tercera edición). Pearson Educación.
- Blomhøj, M. (2008). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. *Revista De Educación Matemática*, 23(2). <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10419>
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Borromeo, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria*, 14(1), 61-71. <https://www.redalyc.org/pdf/299/29900107.pdf>
- Greefrath, G. (2020). Competencia en modelización matemática. Selección de desarrollos actuales de investigación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (17), 38-51. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.303>
- Guerrero, F. (2016). Errores matemáticos en la resolución de problemas de modelización matemática. Caso: Estudiantes del primer año de educación media. *Revista Ciencias de la Educación*, 26, 47, 93-1136. <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/47/art06.pdf>
- Hapizah, Y. y Mulyono, B. (2020). Mathematical modelling skills of prospective mathematics teachers in problem-solving. *Journal of Physics: Conf. Series* 1480, 1-6. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1480/1/012003>
- Hein, N. y Biembengut, M. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. *Memorias del V Festival Internacional de Matemática*, 1-25. <https://d9.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-2-Hein.pdf>



- Jacobs, G. J. y Durandt, R. (2017). Attitudes of pre-service mathematics teachers towards modelling: a South African inquiry. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(1), 61-84. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00604a>
- Kaiser, G. y Brand, S. (2015). Modelling Competencies: Past Development and Further Perspectives. En G. Stillman, W. Blum, y M. Biembengud (eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 129-150). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_10
- Kurniadi, E., Darmawijoyo W. y Pratiwi, D. (2020). Developing a learning design of mathematical modelling courses on understanding basic concept of mathematical modelling. *Journal of Physics: Conf. Series* 1480, 1-8. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1480/1/012033>
- MaaB, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
- Mata, P. y Gallart, C. (2020). Formación del profesorado en modelización: primeros pasos de una profesora novel. *Modelling in Science Education and Learning*, 13(2), 43-56. <https://doi.org/10.4995/msel.2020.13945>
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programa de Estudio de Matemática I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. San José, Costa Rica. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf>
- Mora, A. y Ortiz, J. (2012). Formación de profesores de matemáticas y la modelización en ambientes tecnológicos. *Revista ciencia de la educación*, 22(39), 183-206. <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/n39/art09.pdf>
- Mora-Zuluaga, A. y Ortiz-Buitrago, J. (2015). Capacidades didácticas en el diseño de tareas con modelación matemática en la formación inicial de profesores. *Perspectiva Educacional, Formación de Profesores*, 54(1), 110-130. <https://www.redalyc.org/pdf/3333/333333042008.pdf>
- Niss, M., Blum, M. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En *Modelling and Applications in Mathematics Education*. Springer. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/17710>
- Ñaupas, H., Mejía, E., Novoa, E. y Villagómez, A. (2014). *Metodología de la investigación cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis* (4.ª ed.). Ediciones de la U. <https://edicionesdelau.com/producto/metodologia-de-la-investigacion-cuantitativa-cualitativa-y-redaccion-de-la-tesis-5a-edicion/>
- Ortiz, J., Rico, L. y Castro, M. (2010). Realidad y perspectiva didáctica de futuros profesores de matemáticas a partir de una situación problema. *Zona próxima*, (13), 80-91. <https://www.redalyc.org/pdf/853/85317326006.pdf>
- Pertamawati, L. y Retnowati, E. (2019). Model-Eliciting Activities: Engaging students to make sense of the world. *Journal of Physics: Conf. Series* 1200, 2-9. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1200/1/012003>
- Plaza, L. F. (2016). Obstáculos presentes en modelación matemática. Caso ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros. *Revista Científica*, 25(2), 176-187. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=504373194003>
- Programa Estado de la Nación. (2019). *Resumen del Séptimo Estado de la Educación. PEN*. <https://estadonacion.or.cr/wp-content/uploads/2019/08/Estado-Educacio%C8%81n-RESUMEN-2019-WEB.pdf>
- Ramos-Rodríguez, E., Flores, P. y Ponte, J. P. (2014). Análisis didáctico para estudiar la reflexión de profesores sobre modelización en álgebra. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compañá, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 135-143). Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM. <https://core.ac.uk/download/pdf/33251965.pdf>
- Ríos, S. (1995). *Modelización*. Alianza Editorial.
- Rodríguez, J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Investigación Educativa*, 7(12), 23-40. <https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/8177>
- Salett, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40516206.pdf>



- Sánchez, M., Fernández, M. y Díaz, J. (2021). Técnicas e instrumentos de recolección de información: análisis y procesamiento realizado por el investigador cualitativo. *Uisrael*, 8(1), 1-16. <https://doi.org/10.35290/rcui.v8n1.2021.400>
- Stewart, J. (1999). *Cálculo. Conceptos y contextos. International*. Thomson Editores.
- Swetz, F. y Hartzler, J. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum. A resource guide of classroom exercises*. NCTM.
- Universidad Nacional. (2017). *Plan de estudios de la Carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática*. Heredia, Costa Rica. <https://www.matematica.una.ac.cr/index.php/plan-blem-2017-cc>
- Villa-Ochoa, J. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. *TecnoLógicas*, (19), 63-85. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=344234312004>
- Zaldívar, J., Quiroz, S. y Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 8(15), 87-110. <http://www.scielo.org.mx/pdf/ierediech/v8n15/2448-8550-iere-diech-8-15-87.pdf>



Competencias en modelización matemática de docentes de secundaria quienes se están formando en Educación Matemática: un análisis a partir del abordaje en resolver situaciones problema (Adriana Barquero-Ocampo • David Chaves-Montero • Jesennia Chavarría-Vásquez • Ronny Gamboa-Araya) Uniciencia is protected by Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported (CC BY-NC-ND 3.0)