Áreas y volúmenes mediante el uso del determinante

Rodriguez Leret, Manuel Adrián (manuel.rodriguezleret@ceu.es) San Pablo CEU y UCM

RESUMEN

El álgebra y la geometría van de la mano, especialmente después del surgimiento del plano cartesiano, motivado por los trabajos de Fermat (1601-1665) y Descartes (1596-1650). Este concepto facilitó la comprensión de los resultados de la geometría de Euclides mediante los sistemas de coordenadas y, posteriormente, el concepto de vector. La importancia es tal que la geometría y el álgebra revolucionó la física del siglo XX. En los institutos suele aparecer la noción de determinante como algo ajeno a una realidad práctica. Su presentación abstracta y como mera herramienta de cálculo en el álgebra matricial dificultan su completa comprensión. El principal enfoque de este artículo consiste en demostrar por qué los determinantes están relacionados con las áreas y volúmenes en función de la dimensión. Para ello se analizarán las obras de Lagrange (1736-1813) y la de Hermann Grassmann (1809-1877). Por otro lado, se utilizará la noción de determinante para dar una demostración de la Regla de Cramer y se propondrán ideas para poder aportar al aula. Recordemos que el cálculo de áreas se utiliza en el cálculo de los costes, ingresos y beneficios totales en relación con los respectivos marginales. Aunque dicha relación se comprende mejor con el cálculo integral, en ocasiones se puede abordar desde el punto de vista puramente geométrico aplicando álgebra lineal.

Palabras clave: [Determinante, área, volumen, tetraedro, Lagrange]
Área temática: [Geometría, Álgebra, Historia]

1 CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

En esta sección se comentarán algunos resultados importantes para el desarrollo del trabajo y que, en la medida de lo posible, faciliten la comprensión del mismo. La geometría analítica, desarrollada por Descartés y Fermat por separado, facilitó la comprensión de los textos de Euclides. El surgimiento de las coordenadas, permitió la descripción de los lugares geométricos mediante ecuaciones. De todas las proposiciones que nos interesan la que se va a utilizar es la Proposición I.35 que afirma lo siguiente:

Proposición 1. *Los paralelogramos que tienen la misma base y están contenidos en las mismas paralelas, tienen áreas iguales.*

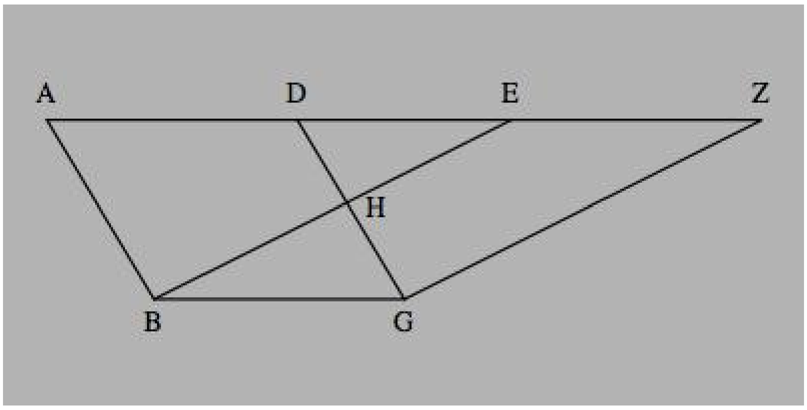


Figura 1: El resultado nos dice que los paralelogramos ABGD y EBGZ tienen el mismo área

Otro de los resultados importantes y, a la vez, olvidados que se van a utilizar es la fórmula de Herón:

Proposición 2. *Fórmula de Herón. Sean c, c' y c'' los lados de un triángulo. Entonces, siendo $s = \frac{c+c'+c''}{2}$ el cuadrado del área del triángulo es*

$$E^2 = s(s-c)(s-c')(s-c'')$$

De donde se deduce que

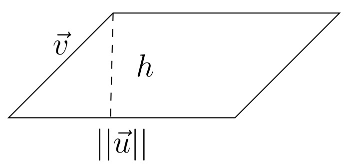
$$16E^2 = 4cc' - (c + c' - c'')^2$$

En un curso de geometría analítica esta aproximación al área de un triángulo no suele ser la más habitual. Lo más lógico es seguir considerando el área de un paralelogramo desde el punto de vista vectorial

Proposición 3. *El área de un paralelogramo, dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es*

$$A_P = \sqrt{||\vec{u}||^2 \cdot ||v||^2 - \langle u, v\rangle^2} \tag{1}$$

***Demostración*:** Recordemos que la altura, dado un angulo θ, se puede medir de la siguiente forma:



$$h = ||\vec{v}|| \cdot sen(\theta)$$

Así el área del paralelogramo es

$$A_P = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||sen(\theta) \tag{2}$$

Elevando al cuadrado y aplicando la fórmula del producto escalar

$$
\begin{aligned}
A_P^2 = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 \cdot sen^2(\theta) = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2(1 - cos^2(\theta)) = \\
= ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 cos^2(\theta) = ||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - \langle u, v\rangle^2
\end{aligned} \tag{3}
$$

■

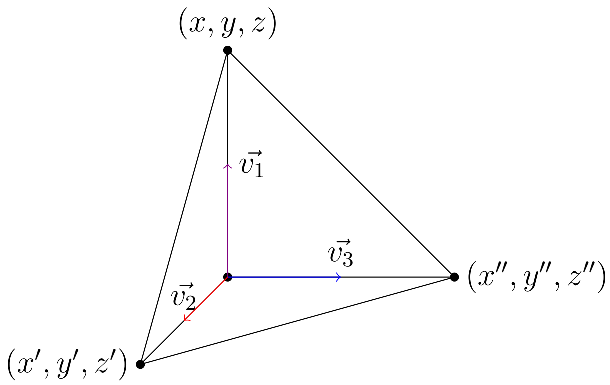
2 EL DETERMINANTE Y LA GEOMETRÍA: DESDE LAGRANGE HASTA GRASSMANN

Como se comentaba en la introducción, uno de los primeros matemáticos en relacionar el determinante con la geometría fue Lagrange. Lo hace mediante dos artículos publicados en 1773: "Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation" y "Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires".

Los dos trabajos se desarrollan en paralelo, pero con objetivos distintos. En "Problèmes sur les pyramides triangulaires" trata propiamente del cálculo del volumen de la pirámide de base triangular, mientras que en el trabajo "Problème du mouvement de rotation" trata de resolver algunos problemas de mecánica clásica utilizando como base el método del determinante [1].

Lagrange toma coordenadas afines centradas en el punto $O(0,0,0)$ de tal forma que la pirámide de base triangular quedaría definida mediante coordenadas (x,y,z), (x',y',z') y (x'',y'',z'').

[1] No se va a abordar en este trabajo, pero es interesante el hecho de que tomara este método para resolver los problemas aproximándose de alguna manera a la relación entre el producto exterior de formas diferenciables y el determinante



Al estar en coordenadas afines con centro en $O(0,0,0)$, se definen los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$. Calculando los módulos y productos escalares

$$\begin{array}{ll} ||\vec{v_1}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} & \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' \\ ||\vec{v_2}|| = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} & \langle \vec{v_2}, \vec{v_3} \rangle = x' \cdot x'' + y' \cdot y'' + z' \cdot z'' \\ ||\vec{v_3}|| = \sqrt{x''^2+y''^2+z''^2} & \langle \vec{v_1}, \vec{v_3} \rangle = x \cdot x'' + y \cdot y'' + z \cdot z'' \end{array} \tag{4}$$

El mismo Lagrange sustituye los resultados por a, a', a'', b, b' y b''

$$\begin{array}{ll} a = ||\vec{v_1}||^2 & b'' = \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle \\ a' = ||\vec{v_2}||^2 & b = \langle \vec{v_2}, \vec{v_3} \rangle \\ a'' = ||\vec{v_3}||^2 & b' = \langle \vec{v_1}, \vec{v_3} \rangle \end{array} \tag{5}$$

Lagrange, aunque no llega a expresar en ningún caso las coordenadas de forma matricial, sí que llega a calcular el cuadrado del determinante. Atendiendo al razonamiento que realiza en sus dos trabajos, define la matriz siguiente y su traspuesta[2].

[2]Sería interesante analizar cómo Lagrange utiliza las transformaciones lineales, no se abordará en este trabajo

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} \tag{6}$$

De esta forma,

$$|A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A|^2 \tag{7}$$

Cuya expresión es la siguiente

$$|A|^2 = (xy'z'' + yz'x'' + x'y''z - zy'x'' - xz'y'' - yx'z'')^2 \tag{8}$$

Completando cuadrados se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} |A|^2 = {} & (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x'^2 + y'^2 + z'^2) \cdot (x''^2 + y''^2 + z''^2) - \\ & 2(xx' + yy' + zz')(xx'' + yy'' + zz'')(x'x'' + y'y'' + z'z'') - \\ & (x^2 + y^2 + z^2)(x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 - (x'^2 + y^{`2} + z^{`2})(xx'' + y'y'' + z'z'')^2 - \\ & (x''^2 + y''^2 + z''^2)(xx' + yy' + zz')^2 \end{aligned} \tag{9}$$

De hecho, se puede escribir el resultado del determinante de la siguiente manera

$$|A|^2 = a \cdot a' \cdot a'' - 2 \cdot b'' \cdot b' \cdot b - a \cdot b^2 - a' \cdot b'^2 - a'' \cdot b''^2 \tag{10}$$

Paralelamente desarrolla la expresión de $|A|$ usando la fórmula de Laplace

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = x\xi + y\eta + z\zeta \tag{11}$$

Siendo ξ, η y ζ los siguientes determinantes:

$$\xi = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}; \eta = \begin{vmatrix} x'' & z'' \\ x' & z' \end{vmatrix}; \zeta = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \tag{12}$$

[3]

Será importante tener en cuenta que, independientemente del desarrollo de Laplace que se escoja, el resultado es el mismo:

$$\xi = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}; \xi' = \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y & z \end{vmatrix}; \xi'' = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = x\xi + x'\xi' + x''\xi'' \tag{13}$$

De forma análoga

$$|A| = y\eta + y'\eta' + y''\eta''; |A| = z\zeta + z'\zeta' + z''\zeta'' \tag{14}$$

2.1 EL ÁREA Y EL DETERMINANTE

El primer objetivo de Lagrange fue encontrar la relación del determinante con el área del paralelogramo y el área del triángulo. Expresando (1) con las magnitudes definidas en (5)

$$A_{P_1}^2 = aa' - b''^2 \quad A_{P_2}^2 = aa'' - b'^2 \quad A_{P_3}^2 = a'a'' - b^2 \tag{15}$$

[3]Hay que fijarse que en el segundo término, Lagrange ha cambiado la orientación. La regla de Laplace es anterior a este trabajo y seguramente lo conocía. Quizás temía que el área pudiera quedar negativa...

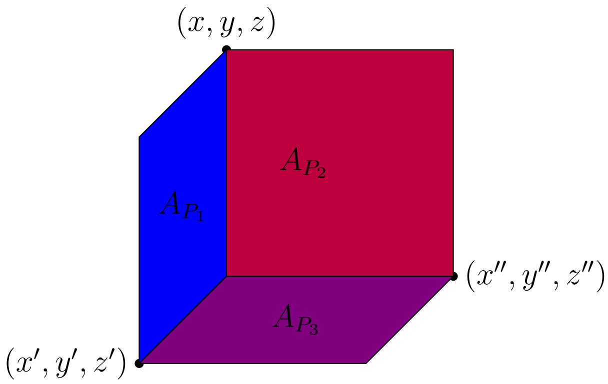


Figura 2: Los paralelogramos en los que se va a cortar el tetraedro para formar estudiar el área del triángulo

Se puede tomar la cara de la pirámide formada por los vectores $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$. El cuadrado del área del paralelogramo correspondiente será

$$\alpha = a' \cdot a'' - b^2 \tag{16}$$

Proposición 4. $\alpha = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$

***Demostración*:** Se desarrollan las expresiones correspondientes a los determinantes:

$$\xi^2 = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 = (y'z''-y''z')^2; \eta^2 = \begin{vmatrix} x'' & z'' \\ x' & z' \end{vmatrix}^2 = (x''z'-x'z'')^2; \zeta^2 = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 = (x'y''-y'x'')^2$$

Por otro lado se procede a desarrollar α:

$$\alpha = a'a'' - b^2$$
$$\alpha = (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2$$
$$\alpha = (x'y'' - y'x'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (y'z'' - y''z')^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

■

Se pueden establecer relaciones similares para cada una de las caras a partir de la 4

$$\alpha = a'a'' - b^2 \quad \alpha' = aa' - b''^2 \quad \alpha'' = aa'' - b'^2 \tag{17}$$

Considerando que los ángulos entre los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ son rectos, el determinante (10) da como resultado $|A|^2 = 1$. En base a la proposición 4 y a la condición impuesta :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x\xi + y\eta + z\zeta = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \xi; y = \eta; z = \zeta(18)$$

En conclusión, aplicando (18) en (10)

$$|A|^2 = \alpha \Leftrightarrow |A| = \sqrt{\alpha} \Rightarrow A_T = \frac{1}{2}|A| \tag{19}$$

Con esto ya estaría demostrado que el determinante, haciendo un arreglo en el desarrollo de Laplace, está relacionado con el área del paralelogramo. Es importante este arreglo, considerar un eje constante, porque sino no habría relación entre la dimensión de la figura y el determinante asociado. Siendo conscientes de que se trabaja en coordenadas afines; lo lógico es utilizar la siguiente expresión para el área del triángulo:

$$A_T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = \zeta + \zeta' + \zeta'' \tag{20}$$

2.2 EL DETERMINANTE Y EL VOLUMEN DEL TETRAEDRO

Para determinar el volumen del tetraedro, lo primero que hay que hallar es la altura. Para ello, Lagrange vuelve a utilizar las coordenadas, esta vez de los planos de las distintas caras

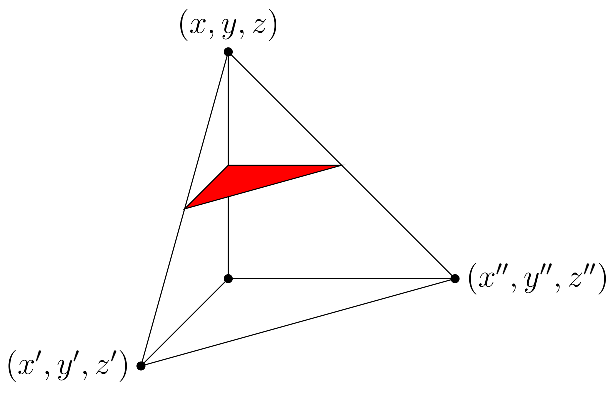


Figura 3: Se pretende calcular la altura entre el plano marcado en rojo y la base del tetraedro

Con ecuaciones $z = l + mx + ny$; $z' = l + mx' + ny'$ y $z'' = l + mx'' + ny''$. Resulta que, tomando sistemas de ecuaciones dos a dos:

$$\begin{aligned} z' - z &= m(x' - x) + n(y' - y) \\ z'' - z &= m(x'' - x) + n(y'' - y) \end{aligned} \tag{21}$$

Resolviendo la expresión (21) y sustituyendo en las expresiones (12), (13) y (14)

$$m = -\frac{\xi + \xi' + \xi''}{\zeta + \zeta' + \zeta''}; n = -\frac{\eta + \eta' + \eta''}{\zeta + \zeta' + \zeta''} \tag{22}$$

Así

$$l = z - mx - ny \Leftrightarrow l = \frac{z(\zeta + \zeta' + \zeta'') + y(\eta + \eta' + \eta'') + x(\xi + \xi' + \xi'')}{\zeta + \zeta' + \zeta''}$$

Concluyendo que

$$l = \frac{|A|}{\zeta + \zeta' + \zeta''} \tag{23}$$

Por otro lado, el vector normal del plano $z = l + mx + ny \Rightarrow z - mx - nx = l$ es $N = (-m, -n, 1)$ con lo que las proyecciones normales en las 3 direcciones serán

$$\vec{s} = \frac{-ml}{1 + m^2 + n^2}; \vec{t} = \frac{-nl}{1 + m^2 + n^2}; \vec{u} = \frac{l}{1 + m^2 + n^2} \tag{24}$$

Calculando la altura con 24

$$h = \sqrt{u^2 + t^2 + l^2} = \sqrt{\frac{l^2(1 + m^2 + n^2)}{(1 + m^2 + n^2)^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} \tag{25}$$

Concluyendo que

$$h = \frac{|A|}{\sqrt{(\xi + \xi' + \xi'')^2 + (\eta + \eta' + \eta'')^2 + (\zeta + \zeta' + \zeta'')^2}} \tag{26}$$

Denotando β β' y β'' a los siguientes términos

$$\beta = \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' \quad \beta' = \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' \quad \beta'' = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' \tag{27}$$

La expresión anterior queda de la siguiente manera usando la Proposición 4

$$h = \frac{|A|}{\sqrt{\alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta''}} \Rightarrow h = \frac{A}{K} \tag{28}$$

Haciendo uso del Teorema de Herón (2), sabiendo que los lados c, c' y c'' son respectivamente y aplicando el Teorema del Coseno:

$$4E^2 = (a' + a'' - 2b)(a + a'' - 2b') - (a'' - b - b' + b'')^2 = \alpha + \alpha' + \alpha'' + 2\beta + 2\beta' + 2\beta'' \Rightarrow E = \frac{K}{2}$$

Concluyendo de esta forma que el volumen del tetraedro es

$$V = \frac{E \cdot h}{3} = \frac{1}{3}\frac{K \cdot |A|}{2 \cdot K} = \frac{1}{6}|A| \tag{29}$$

Hay que tener cuidado con qué matriz se está utilizando en cada caso. Aunque se le ha llamado igual, lo cierto es que se está utilizando otro determinante distinto a (20)

$$V_T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{30}$$

Las fórmulas de áreas y volúmenes se pueden generalizar para mayor dimensión. Siguiendo los desarrollos de matrices de Cayley-Menger se puede obtener una fórmula general. Aquí se va a tomar como referencia el texto de (Klein, 1908/1933)

$$L = \frac{1}{1!}\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} ; A_T = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} ; V_T = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$V_T(n) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & \dots & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \dots & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

2.3 GRASSMANN Y MCLAURIN-CRAMER: ALGUNAS INTERPRETACIONES DEL DETERMINANTE

La notación con la que algunos libros de texto se suelen referir al cálculo del volumen de un paralepípedo o de un tetraedro es la de *producto mixto*. Esto puede generar confusión en los estudiantes. ¿Es lo mismo que antes? ¿Es algo diferente? La verdad es que no.

En el libro “Die Ausdehnungslehre” (Grassmann pp 87-88, 1844/1994) se discute el significado del producto vectorial y el área de los paralelogramos. Aplicando la Proposición I.35 del libro de Euclides (ver 1) Grassmann llega a la misma conclusión que (2)

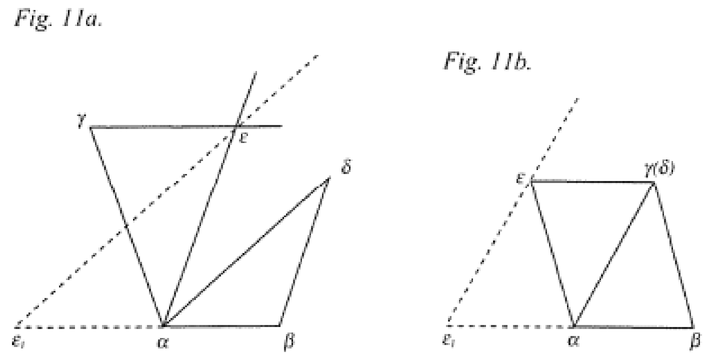


Figura 4: La construcción del paralelogramo por Grassmann (Fig 11b).

Llamando $\vec{u}$ al vector del segmento $\overline{\alpha\beta}$ y $\vec{w}$ al vector del segmento $\overline{\epsilon_1\alpha}$ es fácil deducir que $\vec{w} = -\vec{u}$. Denotando como $\vec{v}$ el vector de $\overline{\alpha\gamma}$ entonces se cumple, por I.35 de Euclides

$$||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot sen(\theta) = ||\vec{w}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot sen(\alpha) \tag{31}$$

La relación entre θ y α se ve analizando cómo son los siguientes productos

$$\left.\begin{array}{c} \vec{w} \cdot \vec{v} \cdot sen(\alpha) = -\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot sen(\alpha) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} \cdot sen(\theta) \end{array}\right\} \Rightarrow sen(\theta) = -sen(\alpha) \Leftrightarrow sen(\theta) = sen(0-\alpha) \tag{32}$$

Lo que representa un cambio de orientación. El producto definido es el conocido *producto vectorial*

$$\begin{array}{c} \vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} \cdot sen(\alpha) \\ ||\vec{u} \times \vec{v}|| = A_P \end{array} \tag{33}$$

El conocido como producto mixto, no deja de ser el determinante de 3 vectores. Al igual que se ha visto en (29) el volumen será

$$V_T = \frac{1}{3}||\vec{w}|| \cdot ||\vec{u} \times \vec{v}|| = \frac{1}{3}h \cdot A_P \tag{34}$$

Como sabemos esto corresponde al determinante de los 3 vectores $\vec{w}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que denotaremos como $|A|$

$$V_T = \frac{1}{3}\frac{det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}{2} \Leftrightarrow V_T = \frac{1}{6}|A| \tag{35}$$

Además se ha demostrado otra propiedad conocida del producto vectorial

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \tag{36}$$

El resultado hay que comprenderlo en el contexto de la geometría vectorial. Al otorgar una dirección y un sentido al vector, la información que nos aporta el producto vectorial respecto al área es la orientación. Si el vector normal va hacia arriba, la orientación es *positiva.* Si el vector normal va hacia bajo, la orientación es *negativa.* De esta forma advertía Grassmann sobre la interpretación geométrica que había demostrado:

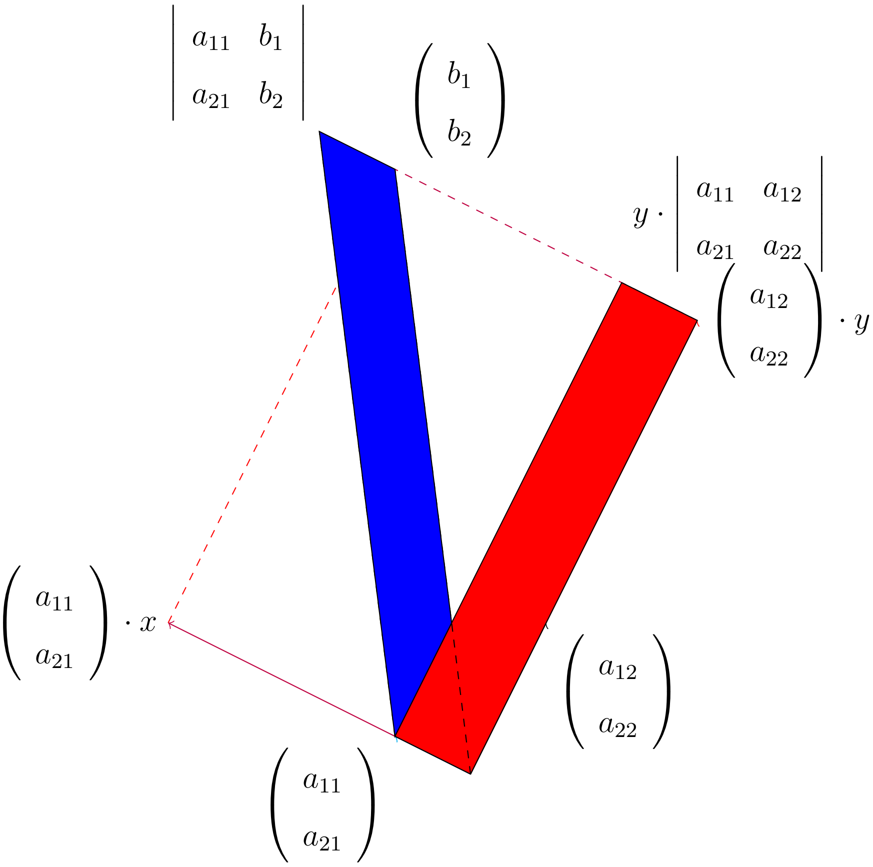
> "La discusión presentada aquí no contradice la descripción del rectángulo como el producto de la longitud de sus lados, ***siempre que se consideren únicamente las longitudes de sus lados***[...] Más bien, ***el paralelogramo es esencialmente un producto de sus lados en el sentido que la permutación de sus factores solo puede ocurrir con un cambio de signo asociado***".
>
> (Grassmann, 1844/1994 p.88)

Utilizando estas observaciones se puede obtener una demostración geométrica de la Regla de Mclaurin-Cramer, conocida como Regla de Cramer pero que dedujo antes Mclaurin (Hedman, 1999). Un sistema de ecuaciones se puede entender como una combinación lineal de vectores

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Razonando en términos de áreas, el determinante representa el área encerrada entre esos dos vectores. Aplicando la proposición I.35 de "Los elementos" de Euclides, podemos llegar a la conclusión de que los paralelogramos que comparten la misma base y están a la misma altura son iguales. Lo que estamos calculando, mediante la Regla de McLaurin-Cramer, es la proporción entre las áreas encerradas usando los determinantes. No es casualidad que se traslade todo el potencial del análisis geométrico a la resolución algebraica, de igual forma que no es casualidad que el álgebra sirva como método de resolución de problemas en geometría.

Así se obtiene que los elementos x e y son, geométricamente, las proporciones entre las áreas:



$$x \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

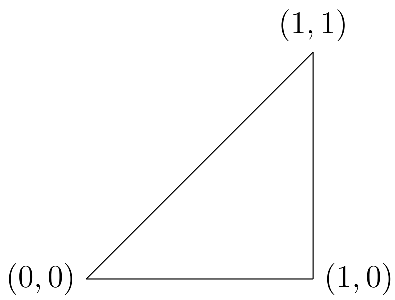
$$y \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Recordemos que el método de Cramer-Mclaurin es especialmente interesante en el caso de que tratemos con el equilibrio general de n artículos. Definiendo las funciones de cantidad demandada $Q_{d_i}(P_1, \ldots, P_n)$ y cantidad ofertada $Q_{s_i}(P_1, \ldots, P_n)$ de tal forma que el equilibrio $Q_{s_i} = Q_{d_i}$ forma un sistema de n ecuaciones y n incógnitas (Chiang, 2006).

3 Visualización del concepto de determinante

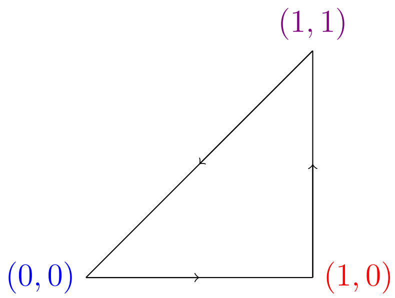
En esta parte se expondrán algunos ejemplos que se pueden utilizar de forma didáctica en el aula. La interpretación que se puede dar a lo descrito anteriormente es que el determinante nos da información sobre las áreas y volúmenes *en función de la orientación.*

Siguiendo el planteamiento expuesto, tomamos un triángulo de base 1 y altura 1:



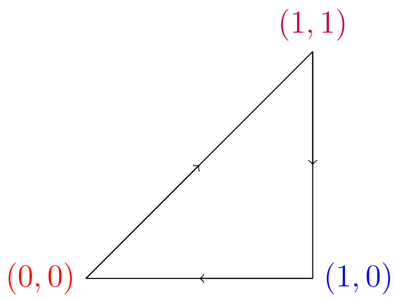
Considerando la orientación positiva del triángulo

Calculamos el área de este triángulo:



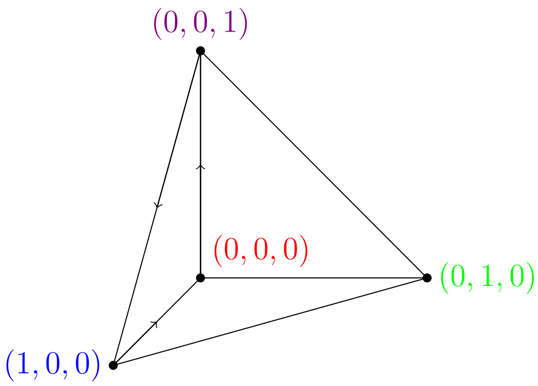
$$A_T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \tag{37}$$

Tomando otra orientación, el área será negativa



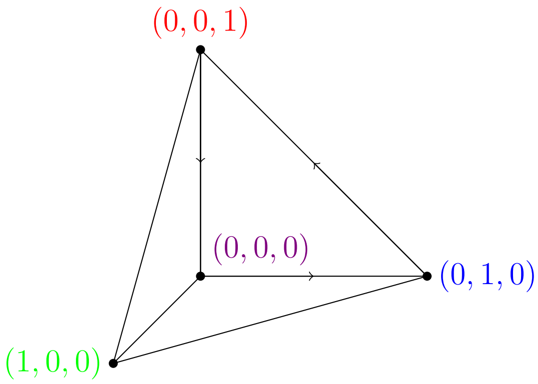
$$A_T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \tag{38}$$

Formando tetraedros de forma similar a lo que se ha hecho con los triángulos



$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} \tag{39}$$

Cambiando el sentido



$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \tag{40}$$

4 CONCLUSIONES

Se ha conseguido mostrar la relación entre el área, volumen y las distintas formas de determinante. Así mismo, se ha interpretado el signo del área o volumen como la orientación de la figura. De cara a la práctica en el aula es de vital importancia debido a la confusión que genera el hecho de ver "áreas negativas" o "volumenes negativos". Finalmente se han elaborado algunos ejemplos visuales que puedan aclarar este tipo de dificultades y permitan entender el papel de la orientación. Para futuros trabajos, además de elaborar más materiales, se puede valorar tomar otras figuras como referencia a la hora de abordar esta cuestión. Por ejemplo, lo más sencillo sería pensar en la relación del triángulo con la circunferencia.

5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- EUCLIDES.(1991) "Elementos" Libros I-IV. Editorial Gredos. Madrid.
- LAGRANGE J. L (1773). "Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélèratrice".Oeuvres de Lagrange Volume 3, pp. 579–618.
- LAGRANGE J. L (1773). "Solutions analytiques de quelques Problèmes sur les pyramides triangulaires".Oeuvres de Lagrange Volume 3 pp. 661–694.
- GRASSMANN. H. (1994). " A new branch of mathematics. The Ausdehnungslehre of 1844 and other works". (KANNENBERG. LL.C, trad)(Traducido de la obra original de 1844) Open Court. USA.

- KLEIN F. (1933) "Matemática Elemental desde un punto de vista superior". Volumen 2 . (ARAUJO. R., trad) (Traducido de la obra original de 1908)

- BOYER, C. B. (1986). "Historia de las matemáticas" (Martínez, M., trad) Alianza editorial.

- HEDMAN, B. (1999). "An earlier date for "Cramer's Rule"" Historia Mathematica 26 (pp 365-368)

- CHIANG, A. (2006). "Métodos fundamentales de economía matemática". McGraw-Hill (4ª Edición)