

RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN TAREAS DE OPTIMIZACIÓN

María Elena Irigoyen Carrillo, María Teresa González Astudillo y Angelina Alvarado Monroy

El objetivo de este estudio es identificar los niveles de razonamiento covariacional (NRC) en estudiantes preuniversitarios en México, así como la transición entre ellos al experimentar tareas de optimización de manera colaborativa. Los NRC se modificaron según las tareas, mostrando en varios casos un desarrollo notable. En este progreso influyeron la tecnología digital y el papel de la docente para promover la participación en colectivo y la conexión de ideas del grupo. Asimismo, las tareas y condiciones de resolución favorecieron el estudio de modelos dinámicos, el empleo de técnicas algebraicas y el uso de la derivada en problemas de optimización.

Términos clave: Optimización; Razonamiento covariacional; Tecnología; Trabajo colaborativo

Covariational Reasoning in Optimization Tasks

The aim of this study was to identify the levels of covariational reasoning (CRL) in pre-university students in Mexico, as well as the transitions between these levels while engaging in optimization tasks collaboratively. The CRL changed depending on the tasks, showing notable development in several cases. This progress was influenced by digital technology and the teacher's role in promoting group participation and connecting students' ideas. Likewise, the nature of the tasks and resolution conditions supported the study of dynamic models, the use of algebraic techniques, and the application of derivatives in optimization problems.

Keywords: Collaborative work; Covariational reasoning; Optimization; Technology

Raciocínio covariacional em tarefas de otimização

O objetivo deste estudo foi identificar os níveis de raciocínio covariacional (NRC) em estudantes pré-universitários no México, assim

como a transição entre esses níveis ao realizarem tarefas de otimização de forma colaborativa. Os NRC se modificaram conforme as tarefas, apresentando em vários casos um desenvolvimento notável. Esse progresso foi influenciado pela tecnologia digital e pelo papel da professora em promover a participação coletiva e a conexão das ideias do grupo. Da mesma forma, as tarefas e as condições de resolução favoreceram o estudo de modelos dinâmicos, o uso de técnicas algébricas e a aplicação da derivada em problemas de otimização.

Palavras-chave: Otimização; Raciocínio covariacional; Tecnologia; Trabalho colaborativo

En el ámbito escolar es posible generar una variedad de contextos interesantes para involucrar al estudiantado en la modelización de fenómenos y situaciones que requieran encontrar un valor óptimo. Los contextos son un medio para reflexionar sobre el aprendizaje de las matemáticas, la importancia y la oportunidad de la formalización, así como la interrelación entre la percepción intuitiva y la solución formal de un problema (Malaspina, 2007). Para esta autora, una manera de potenciar la habilidad de resolver problemas es mediante propuestas no rutinarias de optimización que permitan el desarrollo de la intuición hasta llegar a la generalización.

Los problemas de optimización han sido utilizados en diversos estudios (Aliprantris y Carmona, 2003; Blum y Borromeo, 2009; Campos y Estrada, 1999; Villegas et al., 2009) lo que ha permitido el análisis de situaciones que involucran la aplicación de conceptos de cálculo y otras áreas de la matemática. Esto ha generado la necesidad de favorecer la comprensión de la derivada partiendo de problemas no rutinarios de optimización, prestando atención a la coordinación de los valores de las variables involucradas. La coordinación simultánea de los cambios de una variable respecto a otra constituye lo que se denomina razonamiento covariacional. Destacamos que se pueden considerar diferentes niveles para su desarrollo (Carlson et al., 2003). Este tipo de razonamiento es esencial para la comprensión de la optimización, que puede abordarse desde ideas intuitivas y desarrollarse hasta el estudio de la derivada de una función.

De acuerdo con Villa-Ochoa et al. (2018), comprender la derivada en el contexto de fenómenos dinámicos implica desarrollar una sólida noción de relaciones funcionales. Para estos autores, esto requiere que el estudiantado sea capaz de coordinar los cambios en una variable mientras visualiza simultáneamente la tasa de variación instantánea de una función, lo que permite interpretar sus características dinámicas. En este sentido, Martínez-Miraval et al. (2023) expresaron que resulta fundamental indagar cómo el estudiantado desarrolla y aplica el razonamiento covariacional al abordar problemas de optimización de funciones.

La tecnología digital ha sido un mediador. en la exploración del razonamiento covariacional. Rueda y Parada (2016) caracterizaron las habilidades cognitivas de estudiantes universitarios asociadas a procesos de representación de fenómenos de variación que pueden potenciarse con la resolución de problemas de optimización mediados por tecnología digital. Aunado a esto, Martínez-Mirabal y García-Rodríguez (2022) analizaron el cambio en las acciones mentales asociadas con el razonamiento covariacional para aproximarse al concepto de integral definida. Estos autores destacan las ventajas del uso de software de geometría dinámica tanto en la modificación de los comportamientos ligados al razonamiento covariacional como en el tránsito entre sus diferentes niveles.

Del mismo modo, en Martínez-Miraval et al. (2023) se reconoce la importancia del uso de GeoGebra para abordar conceptos de cálculo. En su análisis señalaron que plantear un problema que involucra fenómenos de cambio relacionados con la derivada, invita a coordinar los cambios entre diversas cantidades, empleando diferentes objetos y herramientas, como deslizadores, fomentando con ello el desarrollo de habilidades de razonamiento covariacional.

Por otra parte, Ortega et al. (2019) y Arzarello et al. (2012) destacaron que, con el uso de la tecnología, el estudiantado presta atención a aspectos que normalmente se les dan de antemano, logrando generar conjeturas, validarlas y refutarlas, así como tomar decisiones. De igual forma, resaltaron la importancia del papel del profesorado para promover estas actuaciones en sus estudiantes.

Las investigaciones antes citadas dejan ver que, identificar la forma en que el estudiantado logra coordinar los cambios de una variable respecto a otra es esencial para entender los procesos usados en la resolución de problemas de optimización. Esta coordinación puede promoverse tanto de manera intuitiva, al observar el cambio, como mediante su interacción con la situación. Una investigación de esta índole implica el reconocimiento de las acciones mentales del estudiantado para analizar e interpretar sus producciones, incluyendo las representaciones, los comportamientos, las explicaciones y las justificaciones que ofrecen.

En respuesta a la problemática expresada, el objetivo de esta investigación es identificar los niveles de razonamiento covariacional (NRC) (Thompson y Carlson, 2017) exhibidos por estudiantes al resolver tareas de optimización y reflexionar cómo se transita entre ellos de acuerdo a los escenarios vividos. En este sentido, la pregunta a responder es: ¿qué NRC se reconocen en un grupo de estudiantes de nivel preuniversitario al resolver tareas de optimización y cómo se transita entre ellos de acuerdo a las condiciones de los escenarios en que las experimentan?

MARCO TEÓRICO

Para Thompson (1993), la variación y la covariación son necesarias para explicar el razonamiento del estudiantado que conceptualiza una situación

cuantitativamente y al mismo tiempo la visualiza como dinámica. La noción de covariación para Saldanha y Thompson (1998) sugiere una imagen simultánea de los valores de las dos variables de modo que, en la comprensión de una, se forma un objeto multiplicativo de las dos. Asimismo, conjeturaron que el razonamiento covariacional se desarrolla en diferentes etapas; inicialmente, una persona coordina los valores de dos cantidades —piensan en uno, luego en el otro, luego en el primero, luego en el segundo, y así sucesivamente—; posteriormente, las formas de covariación implican que entienda el tiempo como una magnitud continua, de manera que los valores de las dos cantidades persistan.

Carlson et al. (2002) proponen un marco que amplía el significado de los anteriores para analizar el razonamiento covariacional especificando niveles de acciones mentales que se vuelven más sofisticados con respecto a la coordinación de los valores de las cantidades.

De acuerdo con Thompson y Carlson (2017), el razonamiento covariacional se concibe como el proceso de “conceptualizar los valores de cantidades individuales como variables y luego conceptualizar dos o más cantidades como que varían simultáneamente” (p. 423). De su marco se destaca que, para que el estudiantado logre una comprensión profunda de la tasa de cambio, es fundamental que desarrollen un razonamiento covariacional. Este proceso también requiere de la construcción de otras conceptualizaciones, como la noción de razón, cociente, acumulación y proporcionalidad, que enriquecen la capacidad para analizar el cambio en distintos contextos.

Los niveles de razonamiento covariacional (NRC) propuestos por Thompson y Carlson (2017) ofrecen descripciones que permiten identificar y organizar cómo las y los estudiantes perciben y coordinan los cambios entre los valores de dos variables (Tabla 1).

Tabla 1

Principales NRC de acuerdo con Thompson y Carlson (2017)

NRC	La persona...
Sin coordinación	No tiene imagen de variables que varían juntas. Se centra en la variación de una u otra variable sin coordinación de valores.
Pre-coordinación de valores	Visualiza los valores de dos variables que cambian, pero de forma asíncrona: una variable cambia, luego la segunda variable cambia, luego la primera, y así sucesivamente. No anticipa la creación de pares de valores como objetos multiplicativos.
Coordinación fuerte de valores	Reconoce los valores de las variables que se modifican: "esta cantidad aumenta mientras que la otra disminuye". No se reconoce que los valores individuales de las cantidades cambian simultáneamente. Se imagina un vínculo suelto y no multiplicativo entre los cambios generales de los valores de dos cantidades.

Tabla 1
Principales NRC de acuerdo con Thompson y Carlson (2017)

NRC	La persona...
Coordinación de valores	Coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y) creando una colección discreta de pares (x, y).
Coordinación continua a tramos	Reconoce que los cambios en el valor de una variable ocurren simultáneamente con los cambios en el valor de otra, y visualiza que ambas varían de forma continua y gruesa.
Coordinación continua suave	Identifica que los aumentos o disminuciones en el valor de una variable ocurren simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, reconociendo que ambas varían continuamente.

Este marco permite describir distintos comportamientos asociados al razonamiento covariacional. En este contexto, individuos con diferentes niveles de sofisticación pueden manifestar comportamientos que reflejan un NRC. Thompson y Carlson (2017) enfatizaron la importancia de analizar cómo las personas perciben la variación de las cantidades y cómo establecen conexiones entre estos valores al considerar su significado en términos de covariación.

En la evolución del estudio del razonamiento covariacional, al igual que Thompson y Carlson (2017), Yu (2024) extendió el marco de covariación de Carlson et al. (2002) agregando dos categorías para el razonamiento de los estudiantes y una dimensión que describe la interpretación de una razón en cada nivel del marco.

En su investigación, Carlson et al. (2003) analizaron el desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes universitarios durante su participación en tareas de modelización. Estas actividades no solo favorecieron la comprensión de la relación entre cantidades variables, sino que también fortalecieron sus habilidades de razonamiento covariacional. Los autores refirieron que, sus explicaciones se centraron en determinar la razón de cambio en un punto, describiéndola como un objeto que se puede mover a lo largo de un dominio.

Carlson et al. (2003) también señalaron que la exploración informal puede comprometer la atención del estudiantado a la vez que brinda la oportunidad de darle significado a la situación transformando nociones específicas del contexto en modelos más generales; lo que podría sugerir una posible descripción del desarrollo que requieren para la formación de una imagen continua suave de la razón de cambio.

Kafetzopoulos y Psycharis (2022) reconocieron la importancia del diseño e implementación de tareas que promuevan la conceptualización de la función como una relación covariacional, a través de experiencias basadas en situaciones auténticas. En particular, subrayaron el papel fundamental de las distintas soluciones en la construcción del conocimiento, con especial énfasis en aquellas

que incorporan la interactividad de las herramientas digitales, lo que a su vez contribuye a una enseñanza más conectada con la realidad del estudiantado. Entre sus hallazgos, Kafetzopoulos y Psycharis (2022) identificaron la interdependencia de la covariación entre magnitudes, conceptualizaron la variación y la razón de cambio, y justificaron sus elecciones de variables dependientes e independientes. El uso de herramientas digitales facilitó este proceso, permitiendo una comprensión más abstracta de las relaciones funcionales.

Por su parte, Yu (2024) examinó la forma en que el estudiantado interpreta la razón de cambio. Sugiriendo que, atender a su cuantificación, ayuda a coordinar dos o más cantidades que varían de manera simultánea promoviendo el desarrollo de un razonamiento covariacional más sofisticado.

En este sentido, Martínez-Miraval et al. (2023) destacaron que las tareas de optimización que involucran la razón de cambio y fomentan la formulación de conjeturas y su validación, o que requieren técnicas de instrumentación complejas, promueven la activación de acciones mentales de orden superior, enriqueciendo así el aprendizaje matemático.

En línea con lo mencionado anteriormente, este estudio emplea tareas centradas en la optimización para explorar el desarrollo del razonamiento covariacional y analizar las acciones mentales que el estudiantado puede manifestar durante su proceso de resolución.

METODOLOGÍA

A continuación, se describe el diseño de las tareas empleadas, así como la población de estudio y la dinámica de trabajo seguida en la implementación. Además, se distinguen acciones mentales que una persona podría manifestar en el proceso de resolución de las tareas de optimización asociadas a los NRC (Thompson y Carlson, 2017). Dicha categorización se retoma en el apartado de resultados para hacer visible los NRC transitados y la evolución del grupo de estudiantes a través de los escenarios experimentados.

Diseño de la secuencia

Para esta investigación se ha considerado una secuencia de actividades centrada en nociones de optimización (Irigoyen et al., 2021), conformada por una actividad de calentamiento (AC), una actividad detonadora de modelos (ADM) y una actividad de extensión del modelo (AEM).

La AC titulada “El problema de la distancia más corta” aborda la resolución de un problema geométrico de optimización (Figura 1). En este, se busca determinar el camino más corto entre dos puntos situados en los extremos de un prisma rectangular.

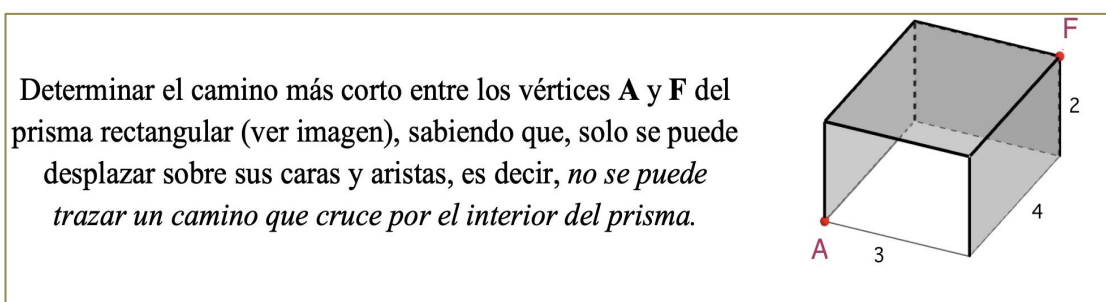


Figura 1. Actividad de Calentamiento (Irigoyen et al., 2021)

Inicialmente, se invita al estudiantado a abordar el problema de manera libre, utilizando las herramientas a su disposición. Posteriormente, para enriquecer el análisis, se introduce un manipulativo elaborado en GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/kaea5rpy>) con tres acciones controladas que incorporan elementos a la construcción del prisma rectangular para estudiar el problema desde diferentes perspectivas. Dichas acciones van desde la develación de puntos sobre tres de las aristas del prisma para formar caminos de A a F mediante la combinación de segmentos, hasta la incorporación de deslizadores para “desplegar” las caras del prisma en uno de los planos.

La ADM plantea una situación contextualizada en la captación y reutilización de agua de lluvia. Dicha tarea tiene como finalidad que el estudiantado construya una propuesta que pueda generalizarse a otras situaciones y que sea reutilizable en una variedad de contextos. De este modo, expresan, prueban y refinan o revisan repetidamente sus propias formas de pensamiento, durante la creación de un modelo de depósito cilíndrico para recolectar cierta cantidad de agua (Figura 2).

¡Ayudemos a Carlos!

Carlos ha decidido emplear la forma cilíndrica para el diseño del depósito. Ayúdalo a determinar las dimensiones ideales del depósito de manera que éste pueda acumular aproximadamente dos mil litros de agua y requiera de la menor cantidad de material para su construcción. Haz una carta donde le expliques a detalle tu diseño y por qué le podría ser útil, además, sugiérele qué hacer en caso de que la capacidad de almacenamiento cambie, pues esto le ayudará a decidir qué dimensiones emplear en construcciones donde requiera mayor o menor capacidad de almacenamiento.

Figura 2. Actividad Detonadora de Modelos, ADM (Irigoyen et al., 2021)

Finalmente, la AEM se centra en la exploración de patrones y regularidades de las soluciones propuestas por el estudiantado durante la ADM. Su propósito es identificar conexiones y relaciones matemáticas, así como interpretar y traducir los resultados al mundo real, reflexionando sobre sus posibles generalizaciones. En

este estudio, dicha tarea se plantea dentro de un entorno de participación grupal, moderado por una docente, y apoyado en el uso de GeoGebra.

Descripción de la población y dinámica de implementación

La secuencia de actividades se implementó de manera virtual a lo largo de cuatro sesiones, estructuradas en ocho momentos y siguiendo diversas formas de trabajo (Tabla 2). En total participaron 26 estudiantes de nivel preuniversitario (bachillerato) en México, con edades de entre 17 y 18 años. Para ello, se conformaron ocho equipos identificados con las letras de la *A* a la *H*. Este grupo de estudiantes ya estaba familiarizado con el uso de GeoGebra, pues lo habían empleado en tareas previas dentro de sus clases. Además, habían cursado asignaturas en las que estudiaron temas de precálculo y cálculo, propios del plan de estudios de bachillerato. Una de las investigadoras de este estudio participó de manera activa en el proceso de implementación, mientras que las tres participaron de la recolección, el análisis y la triangulación de los datos.

Tabla 2

Organización de la implementación de la secuencia

Actividad	Momentos principales
AC, Sesión 1	M 1: Presentación de la AC. M 2: Resolución de la AC en equipos de tres o cuatro integrantes. M 2a: Resolución sin el uso del manipulativo. M 2b: Resolución con el uso del manipulativo. M 3: Socialización en plenaria de los resultados.
M, Sesiones 2 y 3	M 4: Presentación de la ADM. M 5: Resolución de la ADM en equipos, al igual que en la AC. M 6: Socialización en plenaria de los resultados.
AEM, Sesión 4	M 7: Exploración en plenaria de un modelo de solución de la ADM. M 8: Conversación y discusión en plenaria.

Los datos se recopilaron a partir de las videograbaciones de las sesiones y de las producciones escritas y digitales generadas por el estudiantado, quienes emplearon herramientas como editores de texto, hojas de cálculo y el software GeoGebra.

Análisis de datos

Para el análisis se recurrió al marco de Thompson y Carlson (2017) a fin de describir las posibles acciones mentales que una persona podría manifestar en los diferentes NRC de cada tarea de optimización. Después de la implementación, se

realizó la asignación de estos niveles mediante una triangulación entre las investigadoras de este estudio.

A continuación, se describen las acciones mentales asociadas a la AC (Tabla 3) y formuladas desde una interpretación de “El problema de la distancia más corta” (Figura 1) que consiste en encontrar la posición ideal de puntos en las aristas del prisma para formar caminos cortos de *A* a *F* mediante la unión de segmentos rectos ubicados sobre las caras (Figura 3).

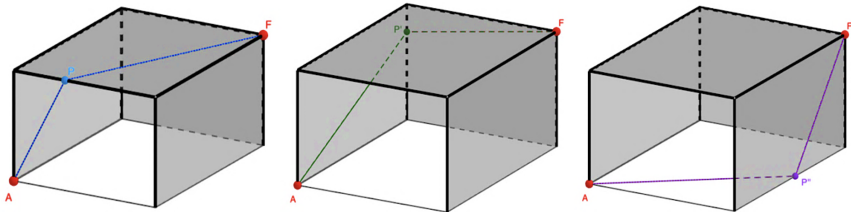


Figura 3. Caminos compuestos por la unión de segmentos sobre las caras del prisma

Tabla 3
NCR en la AC

NRC	Acciones
Sin coordinación	Reconocer que el punto de cruce se puede modificar, al igual que la longitud del camino formado, pero no hay intento de coordinarlas.
Pre-coordinación de valores	Notar que, al mover el punto sobre la arista, la longitud del camino cambia.
Coordinación fuerte de valores	Describir la covariación en función de cómo "la longitud del camino aumenta (o disminuye) a medida que la posición del punto de cruce se modifica".
Coordinación de valores	Centrar la atención en posiciones del punto de cruce particulares y en cómo se modifica la longitud del camino formado en esos casos.
Coordinación continua a tramos	Pensar que la longitud del camino formado incrementa (o disminuye) en ciertos tramos según donde se realice el cruce.
Coordinación continua suave	Imaginar que, al mover el punto de cruce sobre el segmento de manera suave, la longitud del camino formado varía también de manera suave, reconociendo que ambos varían en intervalos y de forma coordinada.

La descripción de las acciones mentales en los NRC de la ADM (Tabla 4) se construyeron a partir del análisis de dos escenarios en los que se involucran las

variables: 1) altura/radio y volumen del cilindro para satisfacer la restricción de volumen fijo y, 2) radio/altura y área del cilindro para minimizar su superficie.

Tabla 4
NRC en la ADM

NRC	Acciones
Sin coordinación	Reconocer que el volumen (área) del depósito aumenta o disminuye, o que el valor de la altura/radio varía, pero no haría el intento de coordinar el valor del radio/altura con el volumen (área).
Pre-coordinación de valores	Reconocer que, a medida que las dimensiones del depósito cambian el volumen (área) cambia.
Coordinación fuerte de valores	Describir que el volumen (área) aumenta o disminuye a medida que el radio/altura aumenta o disminuye.
Coordinación de valores	Centrarse en el cambio (aumento o disminución) del volumen (área) del depósito para ciertos valores de la altura o radio del depósito.
Coordinación continua a tramos	Reconocer que el volumen (área) cambia cuando la altura (o radio) del depósito incrementa o disminuye cierta cantidad, y entre valores sucesivos, sin pensar que el volumen cambia entre esos valores.
Coordinación continua suave	Identificar que tanto el volumen (área) como la altura/radio del depósito varían suavemente en ciertos intervalos y de forma coordinada.

RESULTADOS

En este apartado se da cuenta de los NRC por los que transitó el estudiantado al experimentar los escenarios de la secuencia de actividades. Dichos resultados se obtuvieron a partir de las acciones identificadas en sus procesos de resolución y modelos generados. Los resultados se han organizado siguiendo el orden de implementación de las actividades y se han enriquecido con la descripción de los procesos de resolución de algunos equipos que evidencian su desarrollo del razonamiento covariacional.

Implementación de la AC

En vista que la AC se desarrolló en dos escenarios diferentes, con y sin el uso de la tecnología, el análisis de los NRC se realizó con base en estas condiciones. A continuación, se da cuenta de los equipos que se ubicaron en cada NRC, en un ambiente sin el uso del manipulativo y se describen las acciones mentales identificadas (Tabla 5).

Tabla 5

NRC en la AC previo al uso del manipulativo en GeoGebra

NRC	Equipos	Acciones
Coordinación fuerte de valores	C, E y F	Reconocen que se puede formar un camino ubicando el punto de cruce en uno de los extremos de una arista. No intentan elaborar nuevos caminos con longitud menor.
Coordinación de valores	A, G y H	Emplean posiciones específicas del punto de cruce sobre la arista (en sus extremos o su punto medio) para elaborar distintos caminos. Posteriormente, comparan sus longitudes para identificar el de menor longitud.
Coordinación continua a tramos	B y D	Proponen una forma para visualizar el problema en dos dimensiones e identifican nuevos caminos de menor longitud al “mover” de posición el punto de cruce para formar un camino en línea recta.

Las acciones identificadas con el uso del manipulativo evidencian la progresión de algunos equipos en sus NRC (Tabla 6). Específicamente los equipos de estaban en un nivel de coordinación fuerte de valores transitaron hasta la coordinación de valores o continua a tramos.

Tabla 6

NRC en la AC con el uso del manipulativo en GeoGebra

NRC	Equipos	Acciones
Coordinación de valores	C y F	Ponen a prueba los caminos ya identificados y/o buscan nuevos caminos de A a F conformados por la unión de segmentos y, posteriormente, seleccionan aquel de menor longitud.
Coordinación continua a tramos	A, B, D, E, G y H	Identifican la posición del punto de cruce sobre una de las aristas para obtener un camino de menor longitud en el plano formando la hipotenusa de un triángulo rectángulo con extremos A y F .

Para algunos equipos, como el C, el manipulativo fue empleado únicamente como un medio de validación de sus soluciones. Mientras que, para equipos como A, D y E, su exploración fue primordial para identificar nuevas relaciones y caminos de menor longitud, favoreciendo así otras formas de razonamiento covariacional. A continuación, se describe parte de sus procesos de resolución a fin de visibilizar la transición por algunos NRC.

El equipo A, previo al uso del manipulativo, construyó diversos caminos para llegar de A a F . Primeramente, trazaron caminos conformados por tres aristas, enseguida, caminos formados por la unión de una arista y la diagonal de una de las caras y, luego, un camino conformado por segmentos sobre las caras con cruce en el punto medio de una de las aristas. Posteriormente, con el uso del manipulativo, reconocieron nuevos caminos sobre las caras, identificando en qué tramos de las aristas debían ubicarse los puntos de cruce para obtener caminos óptimos (Figura 4). Su conclusión fue que el camino más corto se forma cuando el punto de cruce sobre una de las aristas genera un camino recto (en el desarrollo plano del prisma) de extremo a extremo. Dicho proceso permitió visualizar una movilización desde la coordinación de valores a la coordinación continua a tramos a partir del uso del manipulativo.

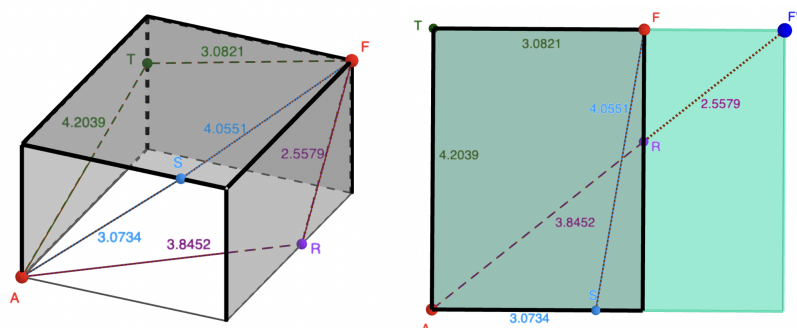


Figura 4. Ejemplos de caminos propuestos por el equipo A a partir del manipulativo

En el equipo D, por su parte, de manera previa al uso del manipulativo, notaron que el camino entre A y F debería estar conformado por segmentos rectos. Proponiendo así desde un camino conformado por la unión de una arista y la diagonal de una de las caras (Figuras 5a y 5b) hasta un único camino recto entre los extremos (Figura 5c).

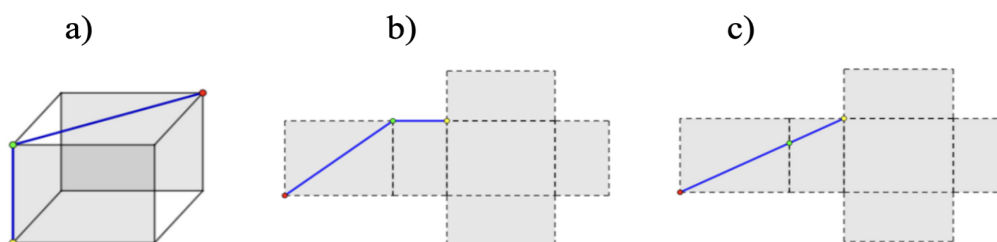


Figura 5. Primeros caminos esbozados en el prisma por el equipo D

Más aún, con la exploración del manipulativo, identificaron nuevos caminos trazados en otras caras del prisma, determinando caminos de menor longitud y las posiciones del punto de cruce sobre las aristas para conformarlos.

Por su parte en el equipo E, previo al uso del manipulativo, plantearon un único camino de A a F conformado por la unión de una arista y la diagonal. Las primeras

acciones del uso del manipulativo los motivó a explorar y proponer caminos en otras caras del prisma, realizando un análisis similar a los equipos A y D. Sus actuaciones informaron la movilización desde un nivel de coordinación fuerte de valores a un nivel de coordinación continua a tramos.

Implementación de la ADM

A continuación, se describen las acciones realizadas por los equipos y los NRC identificados durante la resolución de la ADM (Tabla 7).

Tabla 7

NRC reconocidas en la ADM

NRC	Equipos	Acciones
Coordinación fuerte de valores (volumen/área)	A y D	Proponen diferentes valores para el radio y la altura del depósito para satisfacer la restricción del volumen dado y comparan sus áreas para encontrar el de menor superficie. Además, construyen modelos dinámicos para representar las dimensiones de los depósitos y comprobar resultados, reconociendo que la cara lateral de los cilindros se modifica al incrementar o decrementar el valor del radio.
Coordinación de valores (volumen/área)	B, C y E	Proponen diferentes diseños de depósitos con la capacidad indicada, haciendo uso de la fórmula del volumen de un cilindro, e identifican el de menor área. Reconocen que la altura y diámetro de sus depósitos es algo que modifica su superficie y que los valores de los radios de los diseños varían de forma sucesiva.
Coordinación continua a tramos (volumen/área)	F	Formula expresiones algebraicas y funciones para representar el volumen y el área de los depósitos para graficarlos y encontrar las dimensiones ideales con la capacidad indicada.
Coordinación continua suave (volumen/área)	G y H	Formulan una función para representar el área de los depósitos, y, posteriormente, emplean técnicas de derivación para encontrar el valor del radio óptimo que minimiza la superficie.

Todos los equipos se encuentran en un nivel entre la coordinación fuerte de valores y la continua suave, con una mayor incidencia en el nivel de coordinación de valores (Tabla 7). Del mismo modo que en la AC, a continuación, se destacan procesos seguidos por algunos equipos para evidenciar las acciones mentales en relación a los NRC.

El equipo D, ubicado en el nivel de coordinación fuerte de valores, elaboró diversos diseños de depósitos con la capacidad indicada para comparar sus áreas y

determinar el de menor superficie. Para ello emplearon el desarrollo plano del depósito en GeoGebra con los parámetros radio y altura, ambos independientes (Figura 6a). En su construcción, el ancho de la cara lateral y el área de la tapa del cilindro variaban en función del radio mientras que el largo de la cara se modificaba en función de la altura. Para construir los posibles depósitos, el equipo optó por manipular ambos parámetros para satisfacer el volumen requerido y organizó los datos en una tabla para identificar el de menor superficie (Figura 6b).

En este proceso se observó cómo el equipo reconoció que el volumen y área de los depósitos se modificaron al incrementar (o decrementar) las variables de radio y/o altura, sin identificar una relación de covariación entre ambas variables.

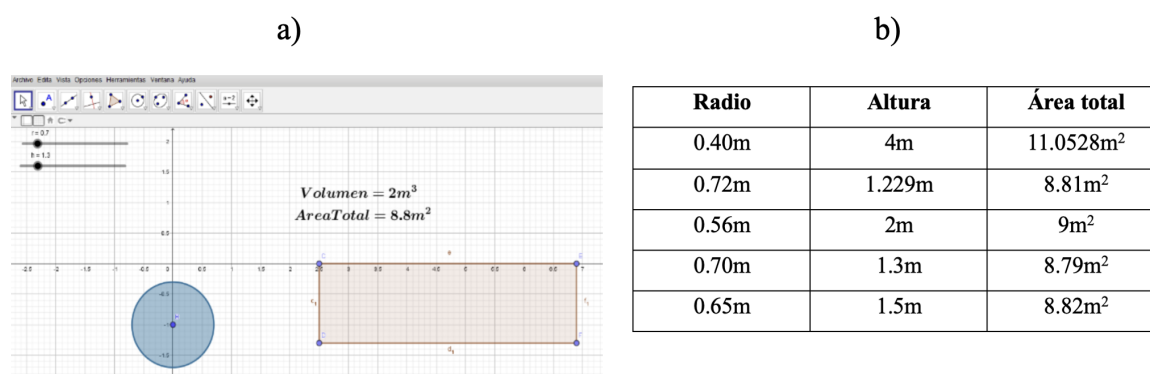


Figura 6. Modelo en GeoGebra y representación de las dimensiones de los diseños del equipo D

Por su parte, el equipo C, quien en principio propuso diversos diseños de depósitos con una misma capacidad para determinar el de menor área (Figura 7), reconoció una relación de covariación entre el radio y la altura de los cilindros con la restricción del volumen fijo, manifestando así un NRC de coordinación de valores. Cabe señalar que, en su análisis, consideraron diferentes valores del radio como 0,25 m, 0,5 m y 1 m, obteniendo así, una propuesta de depósito de área mínima.

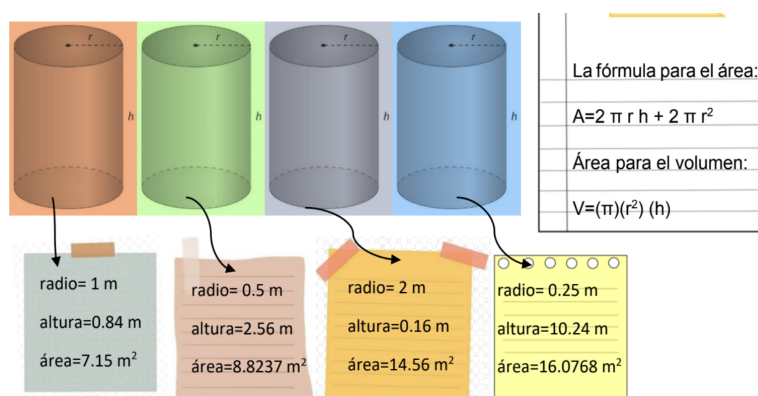


Figura 7. Primeras aproximaciones de los diseños del depósito

Por otro lado, el equipo F, quien se ubicó en un nivel de coordinación de valores a tramos, propuso encontrar las medidas del depósito con un volumen de 2000 l y

de menor área a partir de funciones y sus gráficas. Para ello, graficaron en GeoGebra las funciones $V = \pi r^2 h$ y $A = 2\pi r^2 + 2\pi hr$ siendo r el radio de la base y h la altura del cilindro (Figura 8). En su construcción se puede visualizar cómo relacionaron las dimensiones del volumen de los depósitos con su área a través de intersecciones y proyecciones en los ejes del plano, así como el tramo en el que se encuentra el valor óptimo del área al variar h .

A partir de su análisis, propusieron $h = 107,5 \text{ cm}$ y $r = 54,4 \text{ cm}$ como valores óptimos. Más aún, hicieron notar que su propuesta se podía adaptar a cualquier “volumen deseado” modificando el valor $y = 2000$. Dicha construcción permite reflexionar sobre cómo GeoGebra resultó útil para identificar el tramo (señalado con el rastro) en el que podría ubicarse el valor óptimo del área.

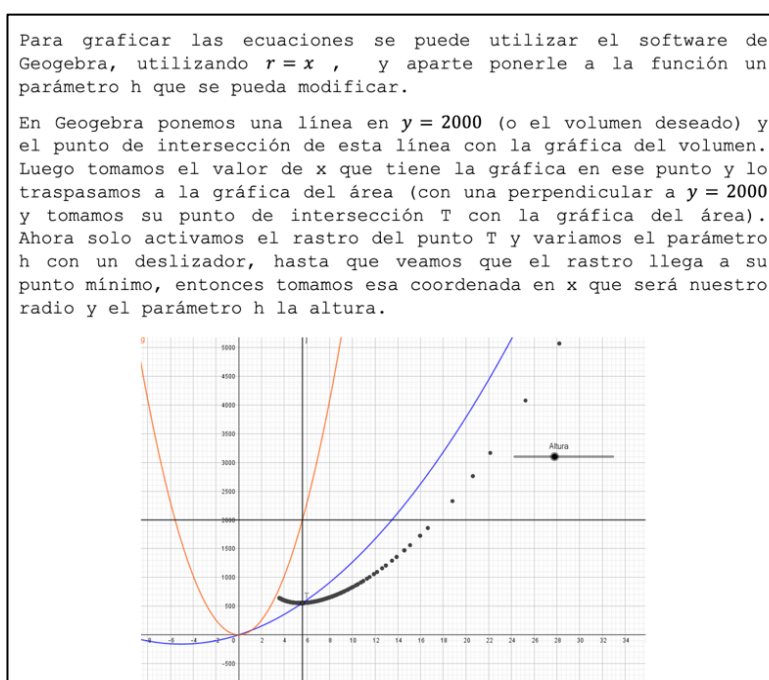


Figura 8. Extracto de carta del equipo F

Por su parte, el equipo G formuló una función para determinar el área de los depósitos a partir del valor del radio. El hecho de que hayan propuesto una expresión para determinar el área del depósito y sustituir el valor de su altura en términos del radio, hace visible su comprensión de la dependencia simultánea entre variables. En cierto momento de su análisis, al representar gráficamente la función $A(r)$ junto con la recta tangente en un punto de dicha función, el equipo observó que la pendiente de la tangente variaba y que el área alcanzaba su valor mínimo cuando la recta era paralela al eje X . Asimismo, señalaron que al igualar $A'(r)$ a cero, se obtenía el valor óptimo del radio, el cual podían determinar al despejarlo de la ecuación resultante.

Su solución ejemplifica el tipo de acciones que una persona podría desarrollar en un nivel de coordinación suave de valores, al hacer uso de técnicas de derivación para encontrar el radio que optimiza el valor de la superficie (Figura 9).

4. Sustituimos h en la fórmula del Área (A):	El denominador tiene que ser diferente de 0
$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{2}{\pi r^2}$	$r^2 \neq 0$
$A = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}$ o $A = 2\pi r^2 + 4r^{-1}$	6. En el numerador hay que despejar r^3 :
Puedes utilizar cualquiera de las dos anteriores	$4\pi r^3 - 4 = 0$
5. Derivamos e igualamos a 0:	$r^3 = \frac{4}{4\pi}$
$A'(r) = 4\pi r - \frac{4}{r^2} = 0$	Y encontramos r :
$= A'(r) = \frac{4\pi r^3 - 4}{r^2} = 0$	$r = \sqrt[3]{\frac{4}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0.682$

Figura 9. Extracto de carta (equipo G)

Implementación de la AEM

La solución en GeoGebra, elaborada por el equipo F, se exploró de manera grupal como parte de la AEM. Su análisis y refinamiento favoreció el reconocimiento de nuevas conexiones con las soluciones de otros equipos, así como la transición entre diferentes NRC desde un espacio de colaboración. Enseguida, se describen las acciones mentales identificadas a partir de las intervenciones del estudiantado, las cuales se dieron con el acompañamiento de una facilitadora (Tabla 8).

Tabla 8

NRC reconocidas en la AEM

NRC	Acciones
Coordinación fuerte de valores	Reconocen que, al variar la altura y radio del depósito cilíndrico, su volumen y área se modifican. No se identifica la relación entre el radio y la altura del depósito.
Coordinación de valores	Identifican diferentes depósitos con un volumen de 2000 litros. De los casos, seleccionan aquellos con las dimensiones que les generan un área de menor superficie.
Coordinación continua a tramos	Reconocen un intervalo de valores posibles del radio donde se podría ubicar el radio óptimo del depósito. Más aún, notan un comportamiento cuadrático de dichos valores.
Coordinación continua suave	Proponen la función del área del depósito e identifican la altura y radio óptimo del depósito. Lo comprueban empleando métodos de derivación y cálculo de mínimos.

A continuación, se describe parte de la experimentación, a fin de evidenciar la evolución de las acciones desde un nivel de coordinación fuerte de valores hasta un nivel de coordinación continua. Específicamente, en la siguiente sección, se

hacen visibles las trayectorias del razonamiento covariacional de los equipos y se hace explícito el NRC más sofisticado identificado en la AEM.

En un inicio, con la interpretación y análisis del modelo del equipo F, se reflexionó sobre la graficación de funciones g y f para expresar el área y volumen del depósito cilíndrico (Figura 10a). En su construcción, la altura del depósito se concretó mediante un deslizador; al variar su valor, el volumen del depósito (para $x=\text{radio}$) también variaba. Así pues, al ubicar el valor del radio para una capacidad de 2000 l, se podía obtener el área del cilindro con la intersección de la recta i ($y=2000$) y la gráfica de la función f (punto T).

Algunas de las preguntas que planteó la facilitadora en este análisis fueron: ¿qué representan las gráficas y qué sucede con ellas cuando se mueve el deslizador? ¿qué representa el punto T ?, ¿por qué se marcó esa intersección? En su interpretación, el equipo F señaló aspectos como:

Integrante equipo F: El deslizador es la altura del cilindro, que lo pusimos aparte porque como son dos variables, el radio y la altura, pues no podíamos hacer una función de dos variables en GeoGebra.

Integrante equipo F: El punto T es donde el cilindro tiene un volumen de 2000 l, y en ese mismo valor de x (el radio) se calcula el área que tendría el cilindro [...] además nos dice el área que tendría el cilindro para los valores de esta altura [manipula el deslizador]

Dichas intervenciones muestran que no les fue posible encontrar una relación funcional para coordinar ambas variables (radio y área) de manera continua. Sin embargo, sí lograron determinar las dimensiones del depósito, las cuales, desde su análisis, optimizan la superficie. En esas circunstancias, un estudiante del equipo comentó:

Integrante equipo F: Nos dimos cuenta, al comparar con nuestros compañeros que lo hicieron con cálculo, que nuestros valores son diferentes [...] y no supimos por qué.

Ante esta situación, la facilitadora motivó un análisis del proceso de construcción del modelo en GeoGebra, promoviendo así su mejora.

En el refinamiento del modelo de manera grupal se identificaron relaciones con otros modelos y se realizaron ajustes al modelo del equipo F. Particularmente se reconocieron conexiones con la solución del equipo D, quien propuso un desarrollo plano dinámico del depósito, apoyado de GeoGebra, y con los equipos G y H, quienes recurrieron al uso técnicas del cálculo diferencial para encontrar valores óptimos. Dicho análisis permitió establecer que la diferencia entre los resultados se debía a un planteamiento inconsistente de una expresión algebraica.

La manipulación de las funciones g y f favoreció el reconocimiento de diferentes dimensiones de depósitos de 2000 l. El rastro del punto T (al variar el deslizador), que se percibió con un comportamiento parabólico (Figura 10b), permitió determinar un intervalo de valores del radio en donde podría ubicarse el

valor óptimo. Con la representación gráfica de la función p del área del depósito (Figura 10c), propuesta por varios equipos, entre ellos el G, se promovió el análisis de nuevas relaciones y coincidencias matemáticas.

Esta exploración permitió establecer relaciones de covariación entre las variables radio y altura con la restricción del volumen fijo. El hecho de que p coincidiera con el rastro del punto T , motivó al grupo a establecer explicaciones y justificaciones matemáticas. En este escenario, algunas de las preguntas planteadas por la facilitadora fueron: ¿tienen alguna idea de porqué se da esta coincidencia?, ¿cómo fue que se determinó la función objetivo (p)? Tanto el equipo A como el F expresaron que la función graficada correspondía al área del cilindro de volumen dado. Más aún, el equipo F reconoció que la recta y , equivalía a la restricción del volumen fijo.

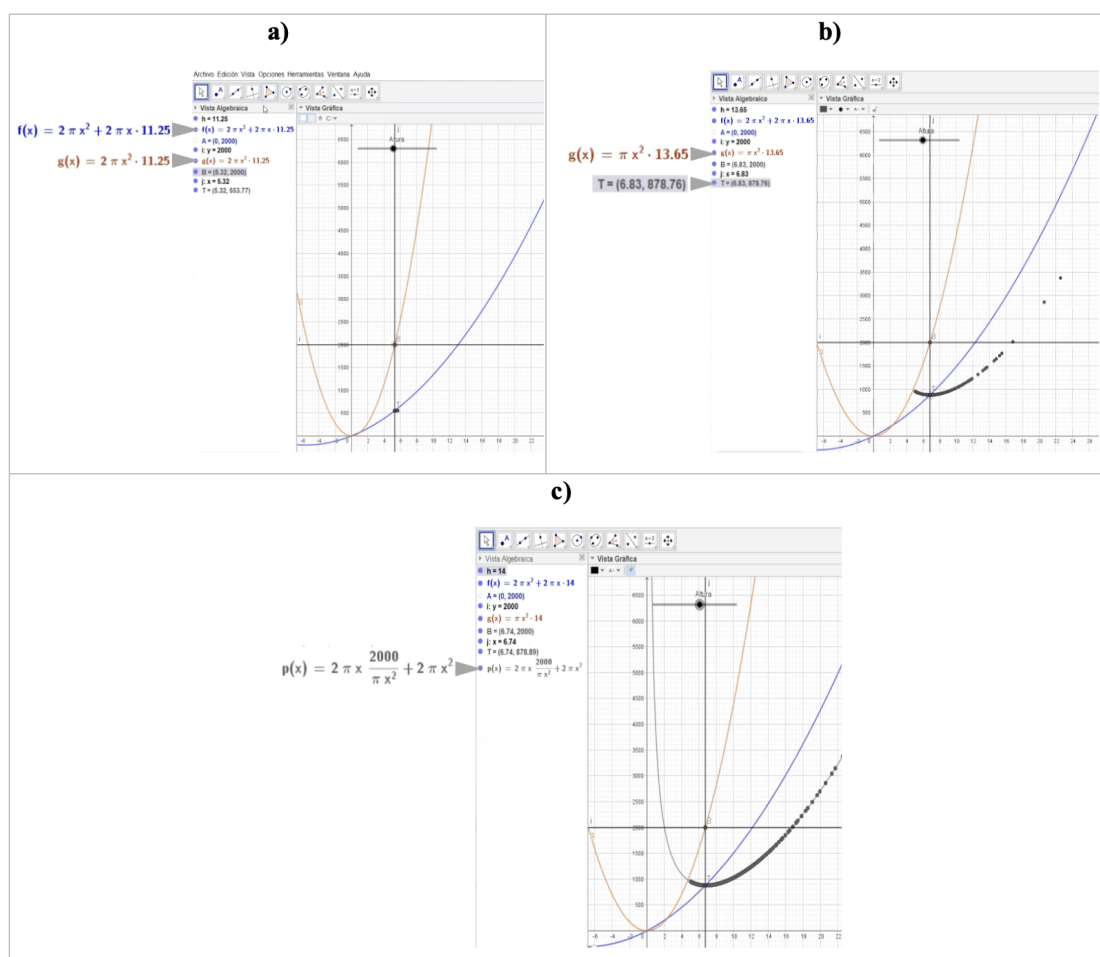


Figura 10. AEM: Evolución de la construcción en GeoGebra a nivel grupal (parte I)

Finalmente, para profundizar en el modelo de manera grupal, se analizó la representación gráfica de la derivada de la función. Para ello, se representó gráficamente la derivada de la función del área y se calculó la intersección con el

eje X de las abscisas (Figura 11a). Además de trazar la recta tangente a un punto de la función p (que modela el área del depósito en función de la altura) para observar el comportamiento de la pendiente de la recta tangente, particularmente cuando esta se hace cero (Figura 11b). Dicha situación permitió darle un significado al uso de la derivada para determinar, en este caso, el área mínima del depósito.

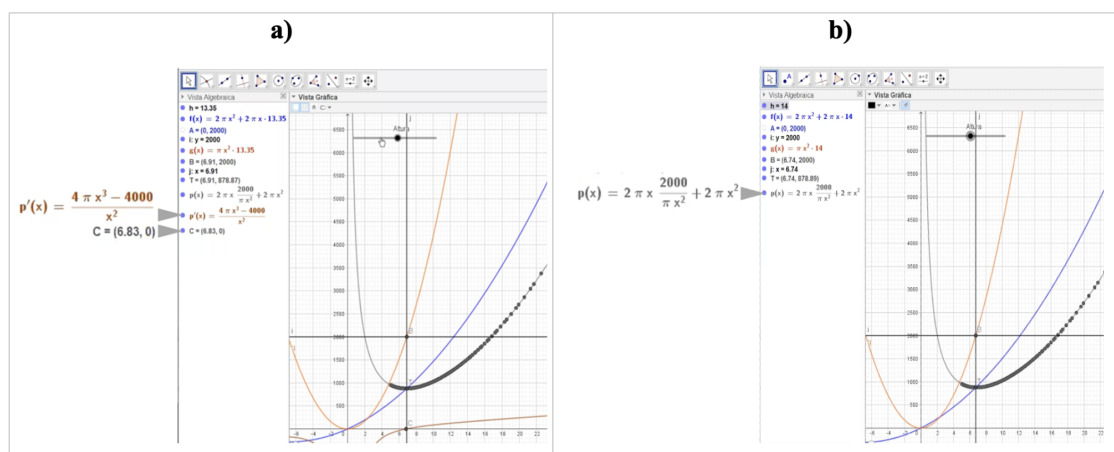


Figura 11. AEM: Evolución de la construcción grupal en GeoGebra (parte II)

Trayectorias de razonamiento covariacional

Con el análisis de la implementación de la secuencia, se logró ubicar a los equipos participantes en diferentes NRC de acuerdo a la tarea de optimización que experimentaron (Figura 12). Se reconoce que su comportamiento no ha sido lineal, pues las condiciones del espacio en que resolvieron las tareas influyeron de manera importante. Particularmente se puede observar cómo los equipos B, C, F y G transitaban por diferentes niveles, logrando un movimiento hacia un NRC superior. Por su parte, los equipos A, D, E y H se movilizaban hacia niveles superiores e inferiores, su comportamiento no fue siempre creciente.

Todos los equipos, en la AC, se mantuvieron igual o se movilizaban a un NRC superior, en relación con los dos escenarios vividos: sin el uso y con el uso de la tecnología. Equipos como A, D y H, evidenciaron un NRC inferior en la ADM en comparación con la AC y la AEM. Más aún, se puede observar que todos los equipos transitaban a un nivel superior o se mantuvieron igual al pasar de la ADM a la AEM; la mitad de los equipos evidenciaron acciones mentales vinculadas con un nivel de coordinación continua suave.

En estas circunstancias, se puede reflexionar sobre la manera en que la tecnología digital y el trabajo en colaboración promueve oportunidades de exploración para favorecer el razonamiento covariacional.



Nota: S-C: sin coordinación, P-C-V: pre-coordinación de variables, C-F-V: coordinación fuerte de valores, C-V: coordinación de valores, C-C-T: coordinación continua a tramos, C-C-S: coordinación continua suave.

Figura 12. Trayectorias de los equipos a lo largo de la SDM en función de los NRC

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se responde a la pregunta ¿qué NRC se reconocen en los equipos al resolver las tareas de optimización propuestas y cómo transitan entre ellos de

acuerdo con las condiciones de los escenarios en que las experimentan? Para ello, se describieron un conjunto de acciones mentales que una persona podría manifestar en cada una de las tareas y se organizaron en correspondencia con los NRC propuestos por Thompson y Carlson (2017). Las tareas se experimentaron con un grupo de 26 estudiantes del nivel preuniversitario, en México, organizados en ocho equipos. Se identificaron las acciones mentales desde su razonamiento covariacional; ubicando a los equipos en algún NRC por cada tarea. Esto permitió visualizar el tránsito entre los niveles a lo largo de la secuencia.

Los NRC de los equipos se modificaron de acuerdo a las tareas y en seis de los ocho equipos fue notable su desarrollo al pasar a un nivel más sofisticado, llegando tres de los equipos hasta la coordinación continua suave. Se observó que no todos los equipos reportaban siempre un progreso. Esto sugiere que un NRC no necesariamente se mantiene al abordar otra tarea, en ocasiones se regresa a un nivel previo o se salta hacia otros posteriores (Figura 12).

En el trayecto que siguieron los equipos se destaca que el diseño de la secuencia (Irigoyen et al., 2021) favoreció el desarrollo del razonamiento covariacional, al promover que compartieran y evaluaran repetidamente sus formas de pensar. En el proceso, comunicaron sus ideas, intercambiaron retroalimentación, describieron la relación entre el modelo generado y la situación de optimización, y ajustaron su propuesta hasta alcanzar una respuesta razonable, tal como lo sugieren Lesh y Doerr (2003) para este tipo de tareas. En estas circunstancias, el entorno dinámico permitió manipular y verificar si las dimensiones del depósito eran las más adecuadas.

Tanto el diseño de las actividades como las acciones para determinar el trayecto en los NRC informaron de las debilidades y fortalezas del estudiantado, que fueron los elementos que sirvieron a las investigadoras para planear la intervención grupal de tal manera que se llegara a institucionalizar el conocimiento.

En los estudios de Arzarello et al. (2012) y Ortega et al. (2019), la comprensión de la covariación requiere de representaciones dinámicas que ayuden a buscar y expresar la regularidad en los razonamientos repetidos. Esto sugiere que, para su desarrollo, los escenarios sean enriquecidos con tecnología. En la experiencia reportada en este artículo, el uso de GeoGebra y las interacciones entre los equipos promovieron el avance en los NRC al provocar la reflexión sobre las acciones realizadas. En la AC, el uso del manipulativo favoreció el avance en los NRC exhibidos haciendo visible el principio de autoevaluación propio del diseño de la secuencia (Irigoyen et al., 2021), que apoyó el pensamiento independiente del estudiantado, así como su habilidad para tomar decisiones informadas. Este hallazgo es consistente con los resultados que Ortega et al. (2019) informaron en su experimento de enseñanza con tecnología y modelización.

En la ADM de esta experiencia aquellos equipos que utilizaron la tecnología, especialmente GeoGebra, lograron construir modelos más elaborados y con esto alcanzaron los NRC más altos en comparación con los equipos que no la usaron.

De forma similar, Kafetzopoulos y Psycharis (2022) compartieron que, a través de las tareas de modelización, el estudiantado identificó la interdependencia de las cantidades covariantes mediante la experimentación con manipulativos en GeoGebra, estableciendo correlaciones entre los cambios de una magnitud en relación con la otra y centrando su atención en los valores covariantes.

La tecnología influyó en el desarrollo del razonamiento covariacional durante las discusiones grupales, al facilitar la extensión y el refinamiento de las ideas. Particularmente durante la AEM, los equipos lograron ampliar la conexión entre los modelos dinámicos y las técnicas algebraicas y de derivación, favoreciendo la transición entre varios NRC.

En el proceso, se distinguió el papel de la facilitadora para: promover las actuaciones de estudiantes; conectar las distintas representaciones; y, revisar sus formas de pensamiento, promoviendo que identificaran y aprovecharan la estructura matemática emergente para brindar sentido y utilizar el concepto de la derivada en una situación de optimización. Al igual que en Arzarello et al. (2012) y en Martínez-Miraval et al. (2023), en esta experiencia el uso de GeoGebra permitió el paso de representaciones estáticas a dinámicas y viceversa, apoyando la génesis de conjeturas, su validación o refutación, junto con la elección de variables independientes y dependientes. Más aún, igual que en Martínez-Miraval et al. (2023) las tareas de optimización aquí experimentadas fueron un medio para desarrollar el razonamiento covariacional.

Este estudio aporta un ejemplo que se aleja de la enseñanza habitual del cálculo centrada en el formalismo y detalla los elementos que permitieron favorecer la comprensión de la derivada desde problemas no rutinarios de optimización, esto desde la promoción de espacios de exploración que facilitan la coordinación de los valores de las variables involucradas. Sería interesante investigar qué es lo que provoca que el estudiantado retroceda en sus NRC al involucrarse en una tarea, lo cual requeriría un análisis más profundo de los procesos seguidos.

REFERENCIAS

- Aliprantis, C. D. y Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: a models and modeling perspective. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 255-264). Lawrence Erlbaum Associates.
- Arzarello, F., Ferrara, F. y Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: The role of dynamic representations. *Teaching mathematics and its applications. International Journal of the IMA*, 31(1), 20-30. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrr027>
- Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Carlson, M., Larsen, S. y Lesh, R. (2003). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practice. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 465-478). Lawrence Erlbaum Associates.
- Campos, M. A. y Estrada, J. (1999). Representaciones matemáticas de estudiantes pre-universitarios en la resolución de un problema de optimización. *Educación Matemática*, 11(2) 30-50.
- Doerr, H. (2016). Designing sequences of model development tasks. En C. Hirsch y A. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-206). National Council of Teachers of Mathematics.
- Drijvers, P. (2020). Instrumentación Corporeizada: combinando diferentes puntos de vista sobre el uso de la tecnología digital en la educación matemática. En G. C. Flores y F. Ugarte (Eds.), *X Congreso internacional sobre enseñanza de las matemáticas. Actas CIEM* (pp. 19-43) Fondo Editorial PUCP.
- Irigoyen, M. E., Alvarado, A. y González, M. T. (2021). Diseño de una experiencia de modelización en una situación de optimización. *Cuadrante*, 30(1), 242-266. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23593>
- Kafetzopoulos, G.-I. y Psycharis, G. (2022). Conceptualization of function as a covariational relationship between two quantities through modeling tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 67, 100993. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100993>
- Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H., Post, T. y Zawojewsky, J. (2003). Model development sequences. En R. Lesh, y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-58). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. y Doerr, H. (2003). Foundations of a model and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates.
- Malaspina, U. (2002) Optimización matemática. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 43-48). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(3), 365-399.
- Martínez-Miraval, M. y García-Rodríguez, M. (2002). Razonamiento covariacional de estudiantes universitarios en un acercamiento al concepto de

- integral definida mediante sumas de Riemann. *Formación Universitaria*, 15(4), 105-118. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105>
- Martínez-Miraval, M. A., García-Cuéllar, D. J. y García- Rodríguez, M. L. (2023). Razonamiento covariacional y técnicas instrumentadas en la resolución de un problema de optimización mediado por GeoGebra. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 12(1), 56-81. <https://doi.org/10.17583/redimat.11419>
- Ortega, M., Puig, L. y Albarracín, L. (2019). The influence of technology on the mathematical modelling of physical phenomena. En G. A. Stillman y J. P. Brown (Eds.), *Lines of inquiry in mathematical modelling research in education* (pp. 161-178). Springer.
- Rueda, J. y Parada, S. E. (2016). Razonamiento covariacional en situaciones de optimización modeladas por ambientes de geometría dinámica. *Unipluriversidad*, 16(1), 51-63. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.326184>
- Saldanha, L. A. y Thompson, P. W. (1998). Rethinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S. B. Berenson y W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the annual meeting of the psychology of mathematics education North America* (pp. 298-304). North Carolina State University.
- Thompson, P. W. (1993) Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 25(3), 165-208. <https://doi.org/10.1007/BF01273861>
- Thompson, P. y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.
- Villegas, J., Castro, E. y Gutiérrez, J. (2009) Representaciones en resolución de problemas: Un estudio de caso con problemas de optimización. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 279-308.
- Yu, F. (2024). Extending the covariation framework: Connecting covariational reasoning to students' interpretation of rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101122. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101122>

María Elena Irigoyen Carrillo
Universidad de Salamanca, España
elena.irigoyen@usal.es

María Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca, España
maite@usal.es

Angelina Alvarado Monroy
Universidad Juárez del Estado de
Durango, México
aalvarado@ujed.mx

Recibido: junio de 2024. Aceptado: julio de 2025
doi: 10.30827/pna.v20i1.31016



ISSN: 1887-3987

COVARIATIONAL REASONING IN OPTIMIZATION TASKS

María Elena Irigoyen Carrillo, María Teresa González Astudillo and Angelina Alvarado Monroy

In the classroom, it is possible to generate a variety of interesting contexts to engage students in modeling situations that require finding optimal values. One way to enhance their problem-solving skills is through non-routine optimization problems that promote progress between intuition and generalization (Malaspina, 2002). In this scenario, covariational reasoning (CR) is essential for understanding optimization ideas. The way students coordinate changes in one variable with respect to another is crucial for their development.

The research question is what levels of covariational reasoning (LCR) are recognized in Mexican pre-university students when solving optimization tasks and how these levels are modified according to the tasks experienced?

In order to recognize the LCR exhibited by students distributed in small groups and as the whole group, the framework of Thompson and Carlson (2017) and the Sequence of Model Development Task (SMD) proposed by Authors (2021) have been used. The SMD is enriched with the use of GeoGebra and consists of three activities: Warm-up Activity (WA), Model-Eliciting Activity (MEA), and Model-Exploration Activity (MXA).

The WA consisted of determining the shortest path between two points on the faces of a rectangular prism of specific dimensions. The MEA and MXA were contextualized in an environmental care situation, specifically on the collection and reuse of rainwater, where the task was to build a cylindrical tank with certain requirements. In the MXA, patterns and regularities are analyzed for obtaining generalizable models.

The mental actions manifested by the small groups allowed us to place them in different LCR when experiencing the SDM, showing a non-linear evolution. In six out of eight small groups, their development was notable as they moved to a more sophisticated LCR, with three small groups reaching a smooth continuous coordination level during the MXA when studying functional relationships. The way in which the whole group made sense of the results facilitated the connection between multiple representations and dynamic models supported by using the first and second derivative of the function. Along their journey, they related the optimization situation with the mathematics language continually, made predictions, and validated the accuracy of their solutions. In this experience, the influence of GeoGebra and Excel on the development of CR was a means to extend and refine the models.