Cómo referenciar este artículo / How to Reference this Article
Aguilar-Salinas, W. E., Fuentes-Lara, M., Martínez-Molina, A. D., Lizárraga-Osuna, N. (2025). Análisis de los resultados de un diagnóstico sobre el concepto de raíz usando las teorías APOE y de representaciones semióticas. *Foro de Educación*, 23(1), 105-125. doi: https://doi.org/10.14201/fde.23106

Análisis de los resultados de un diagnóstico sobre el concepto de raíz usando las teorías APOE y de representaciones semióticas

Analysis of the Results of a Test on the Concept of Roots Using the APOE and Semiotic Representations Theories

Wendolyn Elizabeth Aguilar-Salinas*
Universidad Autónoma de Baja California, México.
Email: aguilar.wendolyn@uabc.edu.mx

Maximiliano De las Fuentes-Lara
Universidad Autónoma de Baja California, México.
Email: maximilianofuentes@uabc.edu.mx

Ana Dolores Martínez-Molina
Universidad Autónoma de Baja California, México.
Email: ana.dolores.martinez.molina@uabc.edu.mx

Noemí Lizárraga-Osuna
Universidad Autónoma de Baja California, México.
Email: noemi.lizarraga.uabc.edu.mx

Recibido / Received: 16/02/2025
Aceptado / Accepted: 28/06/2025

Resumen: Este estudio examina la comprensión del concepto de raíz de funciones en estudiantes de ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, mediante las teorías de representaciones semióticas y APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Se evaluaron 176 estudiantes utilizando un instrumento de opción múltiple validado con un índice de confiabilidad KR-20 de 0.85. Los resultados indican que los estudiantes presentan competencias aceptables en conversiones congruentes entre registros semióticos, pero dificultades importantes en cambios incongruentes, especialmente al traducir representaciones gráficas a algebraicas. El índice de dificultad promedio fue de 0.53 y se identificaron tres perfiles de desempeño mediante análisis de conglomerados. Se concluye que fortalecer la habilidad de conversión semiótica y aplicar descomposición genética son claves para mejorar la comprensión del concepto de raíz.

Palabras clave: Instrumento de Medición, Conceptualización, Semiótica, Enseñanza Superior, Matemáticas.

Abstract: This study examines engineering students' understanding of the concept of function roots at the Autonomous University of Baja California, using the semiotic representation theory and the APOS theory (Action, Process, Object, Scheme). A validated multiple-choice instrument was administered to 176 students, showing a KR-20 reliability index of 0.85. Results indicate acceptable performance in congruent conversions between semiotic registers, but significant difficulties with incongruent ones, particularly in translating graphical to algebraic representations. The average difficulty index was 0.53, and three performance profiles were identified through cluster analysis. Findings suggest that enhancing semiotic conversion skills and applying genetic decomposition are key to improving conceptual understanding of roots.

Keywords: Measurement Instrument, Conceptualization, Semiotics, Higher Education, Mathematics.

1. Introducción

El concepto de raíz es fundamental en la formación de los ingenieros, pues sustenta la comprensión y resolución de ecuaciones, esenciales en áreas como análisis estructural, dinámica de sistemas y optimización. Aproximadamente el 20% de la carga curricular de ingeniería se compone de unidades de aprendizaje matemático como álgebra, cálculo y métodos numéricos, que establecen las bases teóricas para la práctica profesional.

Las raíces de polinomios, también conocidas como ceros o soluciones, son clave en el análisis de sistemas y la interpretación de resultados en disciplinas ingenieriles. Distintos estudios han abordado esta relevancia desde perspectivas históricas, tecnológicas y pedagógicas (Parraguez González et al., 2022; Ricaldi, 2019; Rodríguez y Sierra, 2012; Ruiz Álvarez, Palma Gómez y Mendoza Peñalba, 2022), destacando la utilidad de herramientas como GeoGebra o Excel para resolver ecuaciones y el valor de enfoques didácticos contextualizados para mejorar la comprensión matemática.

A pesar de estos avances, persisten dificultades en el tránsito entre distintos tipos de representaciones matemáticas. Estudios como los de Leyva et al. (2014) y Montiel Espinosa (2007) evidencian que los estudiantes tienen problemas para formular ecuaciones a partir de situaciones reales o para vincular gráficas con expresiones algebraicas. Estas deficiencias se acentúan en entornos educativos donde predomina un enfoque tradicional centrado en el cálculo mecánico, en detrimento de la comprensión conceptual (Didiş, Baş y Erbaş, 2011; Posadas y Godino, 2017).

Además, investigaciones sobre el aprendizaje de ecuaciones en secundaria y universidad revelan dificultades persistentes para reconocer estructuras algebraicas y relacionarlas con su representación gráfica (Gallardo Reyes y Núñez Palenius, 2018; Ochoviet y Oktaç, 2011). Algunas de estas limitaciones pueden atribuirse a obstáculos en la conversión de registros semióticos, como lo plantea Duval (2006a), o a construcciones incompletas en las etapas de desarrollo cognitivo según la teoría APOE.

Más recientemente, se ha señalado la utilidad de la descomposición genética como estrategia didáctica para entender conceptos como la derivada, la recta tangente o las ecuaciones diferenciales (Gutiérrez y Valdivé, 2012; Jaimes Contreras, Baquero Torres y Rey Perdomo, 2019; Orts Muñoz, Llinares Ciscar y Boigues Planes, 2017), lo que sugiere que un tratamiento más estructurado del concepto de raíz podría contribuir a superar las barreras identificadas en la enseñanza de las matemáticas en ingeniería.

En este contexto, se advierte una necesidad urgente de explorar enfoques pedagógicos alternativos que permitan una comprensión más profunda del concepto de raíz, superando las limitaciones del aprendizaje procedimental. Aunque existen avances en el uso de la teoría APOE y de las representaciones semióticas para analizar el pensamiento matemático, aún falta evidencia empírica que vincule ambas teorías para explicar las dificultades en la conversión entre distintos registros de representación en estudiantes de ingeniería.

Este estudio se propone responder la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo comprenden los estudiantes de ingeniería el concepto de raíz en función de las etapas de la teoría APOE y los tipos de cambio entre registros semióticos? Para ello, se diseñó un instrumento de medición confiable y válido que permite evaluar dichas competencias. El análisis de los resultados permite identificar perfiles de desempeño y establecer implicaciones pedagógicas para el fortalecimiento de la enseñanza del álgebra y del cálculo en la educación superior.

2. Marco teórico

Este capítulo desarrolla brevemente las teorías que forman la base del estudio, el cual se enfoca en el aprendizaje y la comprensión del concepto de raíz en estudiantes de ingeniería a nivel universitario. Se pretende examinar meticulosamente cómo estos estudiantes entienden este concepto crítico. La investigación se apoya en la teoría APOE y en la teoría de las representaciones semióticas, propuestas respectivamente por Arnon et al. (2014) y Duval en diversos trabajos desde 1993 hasta 2006. Ambas teorías ofrecen un marco teórico robusto que facilita una exploración exhaustiva del concepto de raíz, posibilitando así un análisis más rico de los procesos de aprendizaje en el ámbito de la educación en ingeniería.

2.1. Teoría de las representaciones semióticas

Para la teoría de las representaciones semióticas los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, consecuentemente para su estudio y tratamiento se requiere contar con representaciones de los mismos, estas representaciones externas a las que hacemos alusión pueden ser de carácter geométrico, algebraico y numérico del objeto, un registro de representación cuenta con reglas precisas de funcionamiento y es el medio para realizar la actividad matemática, en este sentido las representaciones permiten el acceso al objeto matemático. A través de los procesos de formación de una representación, tratamiento y conversión se permite exteriorizar las representaciones mentales de los individuos, motivando la retroalimentación y mejoramiento de las mismas.

En las matemáticas los procesos se presentan por dos tipos de transformaciones de representaciones, la actividad cognitiva de formación de una representación constituye una marca o conjunto de marcas perceptibles e identificables respecto de un objeto matemático y es indispensable para la comunicación, el tratamiento es la transformación de la representación dentro del mismo registro de representación, resolver una ecuación de segundo grado mediante la fórmula general es un ejemplo de una transformación interna, la conversión es la transformación de la representación en otra representación de un registro diferente al original pero que conserva su esencia, elaborar la gráfica de una función a partir de su expresión algebraica es un ejemplo de conversión, evidentemente estas posibilidades de transformación están sujetas a las reglas matemáticas (Duval, 2006a).

Para este referente teórico la operación de conversión se logra si no se confunde el objeto matemático con alguna de sus representaciones y en consecuencia el conocimiento matemático es transferible a contextos diferentes de estudio, sin embargo esta transformación es compleja y está relacionada con la congruencia, la cual depende de la dirección de los registros involucrados, no presenta la misma dificultad elaborar la gráfica a partir de una expresión algebraica que determinar la expresión algebraica a partir de la representación gráfica, en una dirección la actividad puede ser congruente y no congruente en otra. Esta teoría de representaciones semióticas provee de las herramientas conceptuales para analizar la flexibilidad del uso de los distintos registros de representación y su papel en la comprensión de nociones matemáticas (Trigueros y Martínez-Planell, 2010).

Los cambios congruentes e incongruentes entre los registros semióticos, son conceptos provenientes también de la teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval, cualquier conversión puede ser congruente o no congruente y dependen de su dirección entre los registros, cuando una conversión es congruente la representación del registro de partida es transparente o de fácil transición a la representación del registro objetivo. Pasar de una expresión algebraica cuadrática a una representación tabular, donde existe una relación clara y directa entre la evaluación de la expresión y las ordenadas calculadas, se puede considerar como un cambio congruente. Mientras que un ejemplo de un cambio incongruente sería pasar de una representación gráfica como una circunferencia a una expresión algebraica que representa esa misma circunferencia, en esta actividad los cambios no son intuitivos o directos, la distinción entre cambios congruentes e incongruentes es fundamental para la educación matemática, ya que señala áreas donde los estudiantes pueden necesitar apoyo adicional.

2.2. Teoría APOE

La teoría APOE es un modelo teórico del aprendizaje matemático centrado en cómo los estudiantes construyen su comprensión de los conceptos a través de una evolución cognitiva que incluye las etapas de Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Esta secuencia representa una progresión desde la ejecución mecánica hasta la organización abstracta del conocimiento (Arnon et al., 2014; Asiala et al., 1996).

En este estudio, APOE no se describe de manera exhaustiva, sino que se emplea como herramienta para clasificar el nivel de comprensión matemática de los estudiantes a partir del tipo de tarea que enfrentan en el instrumento de diagnóstico. Así, las tareas que implican ejecutar pasos guiados corresponden a la etapa de acción; aquellas que revelan interiorización y patrones procedimentales pertenecen a la etapa de proceso; cuando el estudiante reconoce entidades matemáticas completas, como la raíz de una función, se considera que ha llegado al nivel de objeto; y finalmente, cuando articula distintos conocimientos y representaciones para resolver problemas complejos, se sitúa en la etapa de esquema.

Esta teoría es útil para el análisis didáctico porque permite identificar qué tan profundas o fragmentadas son las construcciones mentales que los estudiantes han desarrollado en torno al concepto de raíz. En particular, cuando se combina con la teoría de representaciones semióticas de Duval, resulta posible examinar si los estudiantes operan dentro de un mismo registro (tratamiento) o entre registros distintos (conversión), y si dichos cambios son congruentes o incongruentes.

La Tabla 1 resume esta interrelación entre los componentes de ambas teorías, incluyendo ejemplos educativos contextualizados.

Tabla 1: Relación entre etapas de la teoría APOE, actividad cognitiva y tipo de cambio semiótico.

Etapa APOE	Actividad cognitiva (Duval)	Tipo de cambio semiótico	Ejemplo educativo en raíces de funciones
Acción	Formación de representación	No aplica	Sustituir un número en una función para verificar si es raíz.
Proceso	Tratamiento	Congruente	Aplicar el teorema del factor para obtener las raíces.
Objeto	Tratamiento / Conversión	Congruente	Reconocer las raíces a partir de la factorización de la función.
Esquema	Conversión	Incongruente	Resolver un problema contextual que requiere modelar algebraicamente y graficar la situación para encontrar las raíces.

Foro de Educación, v. 23, n. 1, enero-junio / january - june 2025, pp. 105-125.
e-ISSN: 1698-7802

En síntesis, la teoría APOE permite clasificar el tipo de comprensión que subyace a cada tarea matemática, desde la ejecución mecánica hasta la organización estructurada del conocimiento en esquemas. Su integración con la teoría de representaciones semióticas fortalece el análisis al considerar no solo el contenido matemático, sino también la naturaleza de las operaciones mentales que los estudiantes realizan al movilizar distintas representaciones. Esta articulación teórica constituye el fundamento para el análisis de los reactivos diagnósticos, permitiendo identificar patrones de desempeño y niveles de comprensión que no serían evidentes desde una única perspectiva teórica.

3. Metodología

La investigación es de corte cuantitativo y está motivada para llevar a cabo un análisis de calidad técnica del diagnóstico y de los reactivos que la componen, por lo que se considera un estudio de tipo descriptivo, de manera adicional se considera exploratorio en virtud de los posibles hallazgos respecto de los alcances de la comprensión sobre el concepto de raíz con que cuentan los estudiantes de ingeniería y que son parte fundamental de su desempeño en los cursos de matemáticas y su formación en el campo de la ingeniería.

3.1. Sujetos

En esta investigación participaron de manera voluntaria estudiantes de tercero y cuarto semestre de los programas educativos de ingeniería ofrecidos en la Facultad de Ingeniería Mexicali (FIM) de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC). La muestra incluyó la participación de 176 estudiantes, seleccionados de manera aleatoria de una población total de 600. La participación de los estudiantes fue voluntaria, sin incentivos ni consecuencias académicas, por lo que se tomaron medidas para minimizar posibles sesgos. Se les explicó el propósito diagnóstico del instrumento, asegurándoles que los resultados serían confidenciales y usados únicamente con fines de mejora educativa. Solo se incluyeron estudiantes que ya habían acreditado las asignaturas de Álgebra, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Métodos Numéricos. Como criterio de exclusión, se descartaron aquellos cuestionarios con respuestas incompletas o inconsistentes. Para fomentar la motivación y la honestidad en las respuestas, el diagnóstico se aplicó en un ambiente controlado, supervisado por docentes, en sesiones presenciales programadas dentro del horario regular de clases.

3.2. Método

Con el propósito de determinar los conocimientos de los estudiantes en relación al concepto de raíz se diseñó un instrumento de medición basado en el modelo de Nitko (1994) para desarrollar exámenes orientados por el currículo. Dicho modelo se complementa por la metodología para la construcción de test criteriales de Popham (1990) y con aportaciones metodológicas y operativas de Contreras y Backhoff (2004). El instrumento está compuesto por 20 reactivos y es de opción múltiple ya que se pide al estudiante elegir de entre 4 respuestas la que es correcta, cada reactivo es independiente toda vez que contiene la información necesaria para plantearlo y responderlo, el instrumento es criterial, ya que tiene el propósito de evaluar el aprendizaje informando que puede hacer o no el examinado. A pesar de que el instrumento de medición es de opción múltiple se solicitó a todos los estudiantes las evidencias que argumentan sus respectivas respuestas, con el propósito de indagar de manera más profunda sobre sus procedimientos y complementar esta investigación.

Por de la importancia de los resultados derivados de la aplicación del instrumento de medición se considera necesario realizar un análisis de calidad del mismo a partir de la determinación de la confiabilidad, validez de contenido y los índices de dificultad y discriminación (Carmines y Zeller, 1987; García y Vilanova, 2008; Prieto y Delgado, 2010). En este estudio, se hicieron los cálculos del coeficiente Kuder-Richardson (KR-20) y el método de mitades partidas. El análisis de confiabilidad mediante el coeficiente KR-20 se basa en una única aplicación del instrumento y se aplica especialmente cuando los reactivos se evalúan de manera dicotómica y tienen distintos niveles de dificultad (Corral, 2009). Por otro lado, el cálculo de la confiabilidad a través del método de mitades partidas implica dividir el instrumento en dos conjuntos de ítems o reactivos, como pares e impares, estos conjuntos se consideran pruebas paralelas y se utiliza el coeficiente de consistencia interna con la fórmula de Spearman-Brown para determinar la confiabilidad (Reidl-Martínez, 2013). La correlación fuerte entre las puntuaciones de ambas mitades indica que el instrumento es confiable y mantiene una consistencia interna sólida.

El índice de dificultad (ID) está relacionado con la proporción de estudiantes que responden correctamente a un reactivo y se calcula siguiendo la metodología de Crocker y Algina (1986). Se obtiene al determinar la proporción de examinados que han contestado el reactivo correctamente. De acuerdo con las recomendaciones de Ding et al. (2006), se considera óptimo que el ID de los reactivos y el promedio de dificultad estén dentro del rango de 0.20 a 0.90.

El índice de discriminación (IDC) de un reactivo tiene el propósito de discernir entre los estudiantes que obtuvieron calificaciones destacadas en la prueba y aquellos que obtuvieron puntuaciones más bajas. Este indicador se relaciona con la alta probabilidad de que los estudiantes con un rendimiento sobresaliente en la prueba respondan correctamente al reactivo, mientras que los estudiantes con un desempeño deficiente tendrán menos probabilidad de responder correctamente. Según Contreras y Backhoff (2004) un valor discriminativo del reactivo se considera adecuado si es mayor que 0.2.

Como parte de este análisis, se ha incluido el desarrollo de perfiles de reactivos, que complementa la evaluación de los instrumentos. Para esta tarea, se aplicó la técnica conocida como análisis de conglomerados. Los datos numéricos obtenidos de la administración del instrumento de medición se sometieron a un análisis utilizando los criterios ya declarados. Para llevar a cabo este análisis, se utilizó el software IBM SPSS Statistics 23 y la hoja de cálculo Excel. Estos programas permitieron obtener datos psicométricos clave para cada reactivo, incluyendo índices de dificultad y discriminación.

4. Resultados y discusión

En este capítulo se presenta el análisis de calidad del instrumento de medición diagnóstico y un análisis de conglomerados con los resultados recolectados de la aplicación del instrumento a estudiantes de ingeniería en conjunto con los marcos

Foro de Educación, v. 23, n. 1, enero-junio / january - june 2025, pp. 105-125.
e-ISSN: 1698-7802

teóricos establecidos, se describen las dificultades enfrentadas por los estudiantes y se describen áreas de oportunidad para mejorar el aprendizaje del concepto de raíces de funciones.

4.1. Análisis de calidad del instrumento de medición diagnóstico

El instrumento de medición fue diseñado para evaluar el nivel de comprensión del concepto de raíz desde la perspectiva de las teorías de representaciones semióticas particularmente de los registros de representación inicial, final, actividad cognitiva y APOE. El proceso de validación del instrumento se basó en la revisión de cada reactivo mediante una plantilla que contiene los siguientes criterios: (1) Relevancia al programa de la asignatura de álgebra o métodos numéricos, (2) dificultad adecuada para estudiantes de ingeniería, (3) independencia del reactivo, (4) claridad en la redacción del reactivo y las preguntas planteadas, (5) inclusión de situaciones comprensibles para estudiantes de ingeniería, (6) proporciona toda la información necesaria para responder, (7) claridad y nitidez de imágenes, gráficos, tablas y expresiones algebraicas, (8) uso de vocabulario común en el reactivo, (9) falta de orientación o revelación explícita de la respuesta (10) unificación de la extensión de las respuestas, (11) plausibilidad de las opciones de respuesta y (12) presencia de una única respuesta correcta.

Este proceso se llevó a cabo mediante el juicio de expertos, como se recomienda en Coronata y Alsina (2014), de garantizó la validez de contenido al contar con la participación de cinco jueces expertos, profesores con al menos cinco años de experiencia en la enseñanza de álgebra y métodos numéricos, quienes calificaron los criterios en cada reactivo en una escala de cinco niveles: 0 muy en desacuerdo, 1 en desacuerdo, 2 ni de acuerdo ni en desacuerdo, 3 de acuerdo y 4 muy de acuerdo. Este proceso aseguró que el instrumento fuera válido y apropiado para su uso en el contexto de estudiantes de ingeniería. Con la información proporcionada por los jueces se calculó el Coeficiente de Validez de Contenido (CVC) de acuerdo a Pedrosa, Suárez-Álvarez y García-Cueto (2014), el promedio del CVC obtenido es (media ± desviación estándar), con un valor mínimo de 0.83, el cual se considera aceptable por los especialistas (Gempp Fuentealba, 2006; Pedrosa et al., 2014; Urrutia Egaña et al., 2014).

La aplicación del instrumento de medición se realizó en las instalaciones de la FIM de la UABC durante el ciclo lectivo 2023-2. Este instrumento se administró a una muestra representativa de 176 estudiantes, seleccionados de una población total de 600 estudiantes que ya habían completado los cursos de álgebra y métodos numéricos en los programas de ingeniería. La confiabilidad del instrumento se evaluó utilizando dos métodos diferentes: el coeficiente KR-20, que dio como resultado $r=0.85$, y el método de mitades partidas, que arrojó un valor de $r=0.86$. Estos valores se consideran aceptables según estándares previamente establecidos (Contreras y Backhoff, 2004; Ding et al., 2006; Muñoz Cantero y Mato Vázquez, 2008). Además, se calculó el coeficiente delta de Ferguson, que mide el poder de discriminación de toda la prueba, este coeficiente con un rango de [0,1] obtuvo un valor de 0.91 en el instrumento, lo que cumple con el criterio establecido (Ding et al., 2006; Engelhardt, 2009).

En los 20 reactivos que conforman el instrumento de medición, se observó que tanto el índice de dificultad individual como el promedio general se encuentran dentro del rango recomendado de 0.20 a 0.90, según lo establecido por Ding et al. (2006). En particular, el promedio obtenido fue de 0.53 ± 0.22, lo cual indica un nivel adecuado de dificultad. Esta medida, expresada como media y desviación estándar, cumple con los criterios propuestos.

En cuanto al IDC se observa que el 80% de los reactivos exhiben una discriminación excelente, el 15% muestra una buena discriminación, y únicamente el 5% tiene una discriminación considerada regular. El índice promedio de discriminación se sitúa en 0.49 ± 0.10 (media ± desviación estándar), lo cual se clasifica como excelente, ya que supera el umbral de 0.40. El valor mínimo encontrado para la discriminación fue de 0.23, lo que confirma que todos los reactivos cumplen satisfactoriamente con este importante indicador psicométrico, de acuerdo con las pautas de Contreras y Backhoff (2004).

4.2. Análisis de los resultados de la aplicación del diagnóstico

El análisis de calidad previamente presentado, brinda la capacidad de ofrecer una evaluación rigurosa y precisa del desempeño estudiantil en la evaluación. Para dilucidar las correlaciones entre la dificultad de los reactivos, los registros de representación inicial (RI), final (RF) y la actividad cognitiva preponderante formación de una representación, tratamiento y conversión, y las diversas etapas por las cuales los estudiantes navegan hacia la comprensión del concepto de raíz—acción, proceso, objeto y esquema—, se procedió a la construcción de una tabla clasificatoria (Tabla 2). Esta clasificación abarcó los 20 reactivos que componen el instrumento de evaluación, asignando categorías específicas para los registros de representación (1 lenguaje natural, 2 algebraico, 3 gráfico, y 4 numérico), para las actividades cognitivas (1 formación de una representación, 2 tratamiento y 3 conversión), para los cambios (1 congruente y 2 incongruente) y para los enfoques de acercamiento al concepto de raíz a través de las etapas propuestas por la teoría APOE (1 acción, 2 proceso, 3 objeto y 4 esquema).

En todos los casos la representación y etapa asignada es la considerada como preponderante en cada uno de los 20 reactivos, por esta razón es que no aparece en la tabla de clasificación la etapa de acción y la formación de una representación. Este procedimiento metodológico permite un análisis profundo de los resultados, facilitando la identificación de áreas clave para la intervención educativa y el refuerzo académico.

Tabla 2: Clasificación de los reactivos.

Reactivo	RI	RF	AC	C	APOE	Indicador de logro	ID
1	3	4	3	1	3	Identificar una raíz real en una representación gráfica lineal.	0.76
2	2	4	2	1	2	Calcular la raíz a partir de una representación algebraica lineal.	0.80
3	3	4	3	1	3	Identificar las raíces reales en una representación gráfica cuadrática.	0.89
4	4	4	3	1	3	Determinar la cantidad de raíces reales a partir de una representación tabular.	0.32
5	3	4	3	1	3	Determinar la cantidad de raíces a partir de una representación gráfica cuadrática.	0.44
6	2	4	2	1	2	Determinar la cantidad de raíces reales a partir de una representación algebraica cuadrática.	0.52
7	3	4	3	1	3	Determinar la cantidad de raíces reales e imaginarias a partir de una representación gráfica cúbica.	0.75
8	2	4	3	1	2	Determinar la cantidad de raíces reales a partir de una representación gráfica cúbica.	0.49
9	2	4	3	1	2	Determinar el intervalo de una función cuadrática dentro del cual existe al menos una raíz real.	0.53

Foro de Educación, v. 23, n. 1, enero-junio / january - june 2025, pp. 105-125.
e-ISSN: 1698-7802

Reactivo	RI	RF	AC	C	APOE	Indicador de logro	ID
10	3	4	3	1	3	Identificar las raíces reales en una representación gráfica cúbica con raíz doble.	0.33
11	2	2	2	1	2	Determinar los factores de la función a partir de sus raíces	0.82
12	2	4	2	1	3	Determinar las raíces de la función a partir de sus factores	0.39
13	2	4	2	1	3	Identificar la cantidad de raíces reales en una representación gráfica de tipo polinomial con raíz doble.	0.52
14	4	3	2	1	3	Determinar la cantidad de raíces reales a partir de una representación gráfica hasta de grado 4.	0.25
15	1	3	3	2	4	Resolver enunciados de problemas que involucran cálculo de raíces reales para su solución.	0.24
16	1	2	3	2	4	Resolver enunciados de problemas que involucran cálculo de raíces reales para su solución.	0.39
17	2	2	2	2	2	Determinar las raíces imaginarias de una función a partir de su representación algebraica.	0.56
18	2	2	2	2	3	Determinar la función algebraica a partir de sus raíces imaginarias.	0.43
19	3	3	3	2	4	Identificar en el sistema de coordenadas las raíces complejas a partir de una representación gráfica de la función cuadrática.	0.20
20	2	4	2	1	4	Calcular todas las raíces de una función de cuarto grado.	0.40

Se toma como ejemplo el reactivo 8 (Figura 1) del instrumento de medición diagnóstico para describir las justificaciones de su clasificación de acuerdo a la teoría de las representaciones y APOE.

Figura 1: Reactivo 8 del instrumento de medición diagnóstico.

8. Dada la función $f(x) = -x^3 + 1$. ¿Cuál es el número de raíces reales que tiene?

A)0 B)1 C)2 D)3

En este reactivo se solicita a los estudiantes identificar el número de raíces reales de una función cúbica y se presenta inicialmente en formato algebraico. Dicha tarea implica una actividad cognitiva dominante de conversión dentro de la teoría de representaciones semióticas de Duval, aunque en el proceso de resolución no requiere necesariamente un cambio entre diferentes formatos de representación (como de algebraico a gráfico). Los estudiantes deben interpretar y manipular la expresión algebraica para deducir propiedades fundamentales de la función, como las raíces, particularmente el número de raíces reales. Esto representa un cambio congruente, ya que la tarea se mantiene coherente dentro del mismo registro simbólico y no requiere reinterpretaciones que alteren la representación fundamental del concepto matemático.

Según el modelo APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas), este problema se clasifica principalmente en la etapa de Proceso. Los estudiantes aplican procedimientos establecidos para evaluar cómo el grado y la estructura de la función polinómica afectan el número de raíces posibles. Aunque se involucran acciones básicas de manipulación algebraica y se aborda el concepto de raíces como objetos matemáticos, el enfoque está en utilizar el conocimiento de la teoría de funciones para realizar evaluaciones específicas.

Aunque visualizar la función mediante una representación gráfica es una estrategia alternativa y válida que algunos estudiantes podrían preferir para resolver este reactivo, el uso de un procedimiento gráfico implica principalmente la etapa de

Proceso, lo anterior requiere una comprensión conceptual de cómo se relacionan las características algebraicas de la función con su representación gráfica y cómo estas características influyen en el comportamiento de la función, incluyendo la ubicación y el número de sus raíces.

Con la información de la tabla 1 se realizó un análisis de conglomerados de k-medias (Bausela Herreras, 2005; Castejón et al., 2016; Dixson, Worrell y Mello, 2017; Gonçalves, Niemivirta y Lemos, 2017), este análisis es un tipo de clasificación de datos que se lleva a cabo mediante la agrupación de los elementos analizados, el objetivo primordial de este tipo de análisis es el de clasificar n objetos en k (k > 1) grupos, llamadas agrupaciones, mediante la utilización de p (p > 0) variables. El tipo de clasificación es de K-medias, por ser una herramienta diseñada para asignar casos a un número fijo de grupos, los resultados fueron 3 perfiles (Tabla 3) que se describen a continuación.

Tabla 3: Centros de agrupaciones finales.

Indicadores / Conglomerados	1	2	3
Registro de representación inicial	3.14	2.00	1.33
Registro de representación final	3.57	3.50	2.33
Actividad Cognitiva	3.00	2.10	2.67
Cambio (congruente / incongruente)	1.14	1.10	2.00
APOE	3.14	2.50	3.67
Índice de dificultad	0.53	0.52	0.35
Cantidad de reactivos	7	10	3
Reactivos	1, 3, 4, 5, 7, 10, 19	2, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 20	15, 16, 18

Además de los valores numéricos obtenidos en los centros de agrupación (Tabla 2), se construyó una síntesis interpretativa que permite caracterizar cada conglomerado desde una perspectiva didáctica y cognitiva. La Tabla 4 presenta de manera resumida los perfiles resultantes del análisis de conglomerados, especificando para cada uno las etapas predominantes según la teoría APOE, el tipo de cambio semiótico implicado, la actividad cognitiva asociada (tratamiento o conversión), el índice de dificultad promedio (ID) y los reactivos correspondientes. Esta sistematización permite identificar las diferencias sustantivas entre los perfiles y facilita su análisis comparativo.

Tabla 4: Indicadores clave de cada conglomerado.

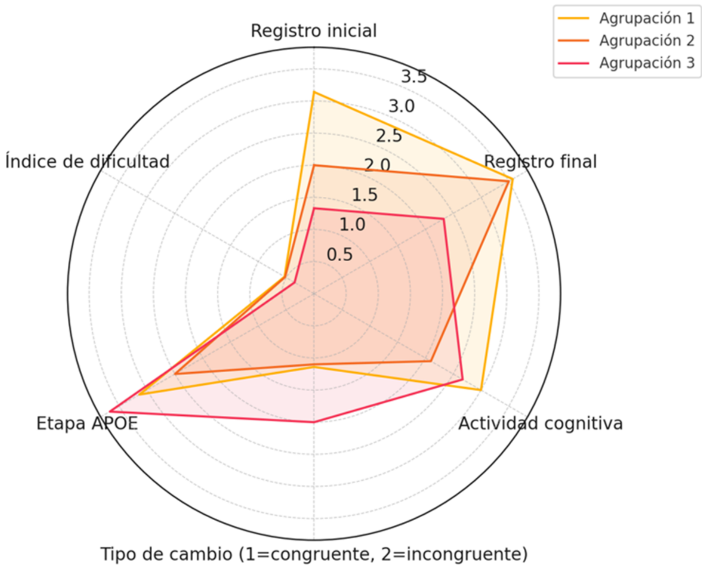
Perfil (Conglomerado)	Etapas APOE predominantes	Tipo de cambio	Actividad cognitiva	ID promedio	Reactivos asociados
1	Objeto	Congruente	Conversión	0.53	1, 3, 4, 5, 7, 10, 19
2	Proceso - Objeto	Congruente	Tratamiento	0.52	2, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 20
3	Esquema	Incongruente	Conversión	0.35	15, 16, 18

Para continuar con la caracterización cuantitativa de las agrupaciones obtenidas, se elaboró una visualización integrada a través de un gráfico de radar. Esta representación permite comparar de forma simultánea las tres agrupaciones en relación con seis indicadores clave: registro de representación inicial, registro final, tipo de actividad cognitiva (según Duval), tipo de cambio semiótico (congruente o incongruente), etapa cognitiva predominante (según APOE) e índice de dificultad (ID)

Foro de Educación, v. 23, n. 1, enero-junio / january - june 2025, pp. 105-125.
e-ISSN: 1698-7802

promedio. La Figura 2 muestra que la Agrupación 3 se diferencia notablemente de las otras dos por presentar los valores más bajos en ID, indicando mayor dificultad, y por involucrar conversiones incongruentes y tareas de alto nivel cognitivo, propias de la etapa de esquema. Esta comparación visual refuerza la utilidad del análisis de conglomerados para identificar perfiles diferenciados de desempeño estudiantil.

Figura 2: Comparación de las agrupaciones mediante gráfico de radar.

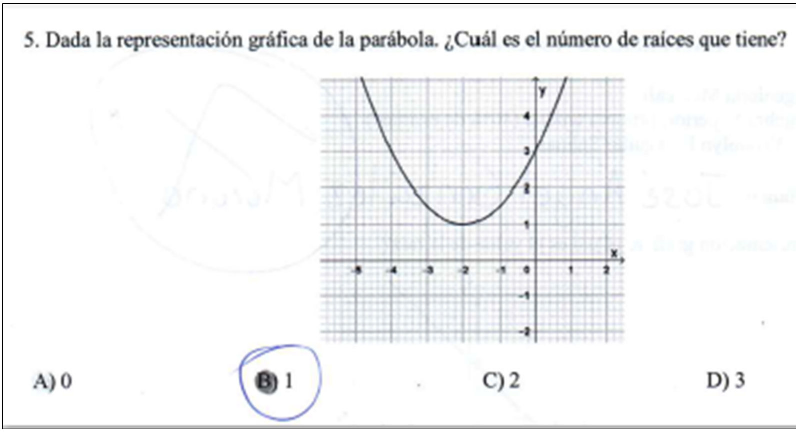


La representación gráfica de las agrupaciones permite observar diferencias sustanciales entre ellas en términos de nivel cognitivo, tipo de representación y dificultad. A continuación, se presenta una descripción detallada de cada agrupación, considerando tanto los valores promedio de sus indicadores como los reactivos específicos que las conforman. Este análisis busca profundizar en las características de los estudiantes agrupados en cada perfil, identificando patrones de desempeño y posibles implicaciones pedagógicas.

Agrupación 1. Este conjunto está integrado por 7 reactivos y se distingue por un índice de dificultad promedio de 0.53, estos reactivos son percibidos como de dificultad media por los estudiantes, este conjunto tiene un registro de representación inicial de 3.14, lo que indica que los reactivos pueden comenzar con representaciones semióticas que combinan elementos gráficos y numéricos, mientras que los registros finales son del mismo estilo. La actividad cognitiva promedio de 3.00 y la fase de APOE de 3.14 sugieren que los reactivos requieren una combinación de conversión y objeto en donde los estudiantes necesitan manipular la información dentro de un registro de representación y también transformar esa información a otro registro. Los reactivos que caen en este conjunto requieren que los estudiantes apliquen conocimientos matemáticos para abordar problemas que son directos, con una transición entre representaciones que los estudiantes encuentran directamente relacionadas y son típicamente enseñadas en su educación matemática.

El reactivo 5 del diagnóstico (Figura 3) forma parte de esta agrupación, en este reactivo se solicita el número de raíces que tiene una parábola representada gráficamente, lo cual requiere que los estudiantes interpreten una representación gráfica y lleguen a una conclusión numérica sobre la cantidad de raíces. Dado que el problema comienza con un registro gráfico y solicita una respuesta en un formato numérico, el cambio entre estos registros implica una conversión de la información visual (la forma y características de la parábola) a un conocimiento específico (la cantidad de raíces). Este cambio puede considerarse congruente si se considera que la interpretación de gráficas es una habilidad fundamental en matemáticas y que la transición de información gráfica a conclusiones numéricas sobre características específicas de la función (como las raíces) es una práctica directa y común en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ingeniería.

Figura 3: Respuesta de un estudiante al reactivo 5 del instrumento de medición diagnóstico.

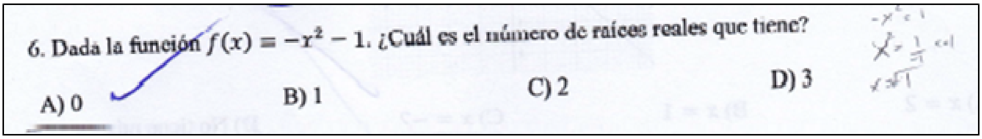


En este caso el estudiante ha seleccionado la opción B, indicando que la parábola representada gráficamente tiene 1 raíz, es posible que el estudiante se haya confundido con la intersección con el eje y, pensando que ésta representa una de las raíces de la función. Según las teorías APOE y de representaciones, este error podría surgir de una comprensión insuficiente en la etapa de objeto, donde el estudiante debe reconocer que una raíz real de una parábola se manifiesta como el punto o puntos donde la curva intercepta el eje x o se cumple que los valores de x hacen cero la ecuación. En la etapa de objeto el estudiante entiende que una parábola tiene siempre dos raíces, las cuales pueden ser reales o complejas conjugadas, dependiendo de la posición de la parábola en relación con el eje x. Si se considera la representación semiótica, el estudiante podría haberse centrado incorrectamente en un punto de la parábola sin considerar toda la gráfica, lo que reflejaría un error en la interpretación visual y la conversión de la representación gráfica a una comprensión de las raíces de la función. La teoría APOE sugiere que la habilidad para pasar de una acción (dibujar la parábola) a un proceso (identificar puntos de intersección con el eje x) y finalmente conceptualizar estas intersecciones como raíces (objeto) puede no estar completamente desarrollada.

Foro de Educación, v. 23, n. 1, enero-junio / january - june 2025, pp. 105-125.
e-ISSN: 1698-7802

Agrupación 2. Este conjunto integrado por 10 reactivos, con un registro de representación inicial 2.00, indica un enfoque en reactivos que comienzan con representaciones algebraicas. Los estudiantes, en estos casos, se enfrentan a la tarea de trabajar inicialmente en un registro algebraico para finalizar en un registro gráfico o numérico, los cambios se caracterizan por ser preponderantemente congruentes. Con respecto a la teoría APOE, el clúster muestra una puntuación de 2.50, lo cual significa que estos reactivos están evaluando la comprensión de los estudiantes en las etapas de proceso y objeto, donde el enfoque está en la realización de operaciones matemáticas y la aplicación automatizada de procedimientos. La actividad cognitiva con un valor de 2.10 respalda esta interpretación, indicando una demanda de habilidades de tratamiento donde los estudiantes operan dentro de una representación algebraica. Un ejemplo representativo de esta agrupación es el reactivo 6, tal como se muestra en la figura 4.

Figura 4: Respuesta de un estudiante al reactivo 6 del instrumento de medición diagnóstico.


6. Dada la función $f(x) = -x^2 - 1$. ¿Cuál es el número de raíces reales que tiene?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

El reactivo 6 requiere que los estudiantes determinen la cantidad de raíces reales a partir de una representación algebraica cuadrática. Este reactivo comienza con una representación algebraica y pide a los estudiantes llegar a una conclusión numérica. La transición aquí no implica necesariamente un cambio entre diferentes formas o sistemas de representación (como pasar de una representación algebraica a una gráfica o viceversa), sino más bien un análisis dentro del mismo sistema algebraico para extraer información específica en forma numérica. Dado este contexto, el cambio implicado en el reactivo 6 se puede considerar congruente porque se mantiene dentro de la esfera de manipulación algebraica, aunque el objetivo final sea obtener un resultado numérico. Aunque no es el único camino para llegar a la solución, la congruencia en este caso se refiere a la capacidad de aplicar conocimientos y técnicas algebraicas para analizar y resolver la ecuación cuadrática, un proceso que se espera sea familiar para los estudiantes de ingeniería que han estudiado álgebra y métodos numéricos. No se requiere necesariamente que los estudiantes cambien radicalmente el modo de pensar o aplicar conocimientos fuera del contexto algebraico al que inicialmente se presentó el problema, lo que podría introducir la complejidad de un cambio incongruente entre registros semióticos.

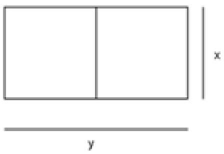
Agrupación 3. Los 3 reactivos de este grupo representan de los mayores desafíos para los estudiantes, este conjunto destaca por tener el índice de dificultad más bajo (0.35), estos reactivos inician con problemas planteados en lenguaje natural, lo que exige que los estudiantes traduzcan situaciones del mundo real o descripciones verbales en representaciones matemáticas. La actividad cognitiva predominante en estos reactivos es la conversión, con un valor asignado de 2.67, lo que significa que los estudiantes deben ser proficientes al transformar estas descripciones en formulaciones algebraicas o gráficas para resolver los problemas. La necesidad de esta conversión refleja la naturaleza compleja de las tareas, que requieren no solo manipulación dentro de un solo registro sino también un traspaso entre diferentes registros de representación.

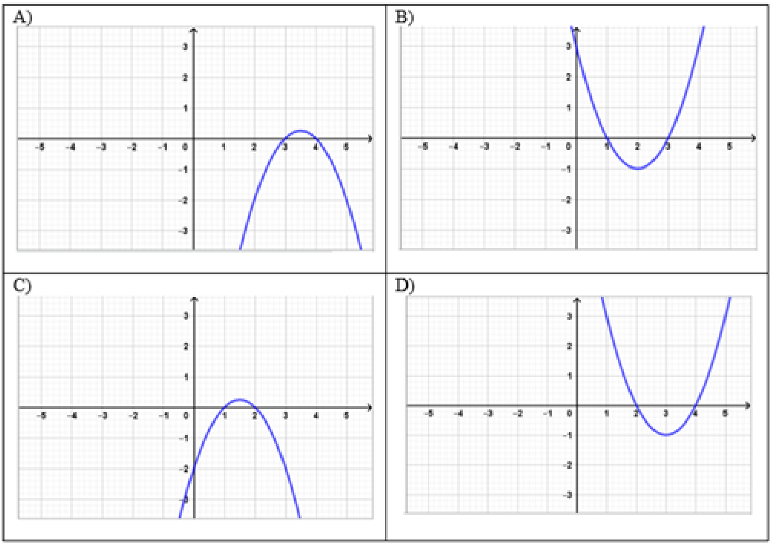
Además, estos reactivos apuntan a la etapa de esquema dentro de la teoría APOE, lo que demanda a los estudiantes que apliquen una comprensión abstracta y generalizada de los conceptos matemáticos. Con una puntuación de 3.67 en APOE, se hace evidente que los problemas permiten evaluar la capacidad de los estudiantes de reconocer y trabajar con los conceptos matemáticos de una manera integrada, demostrando así una comprensión profunda, se adiciona el involucramiento de una transición que requiere un reajuste en el pensamiento o en el abordaje del problema (cambios incongruentes). Esta combinación de alta demanda de conversión de representaciones, incongruencia y la profundidad de comprensión requerida por la etapa de esquema justifica el nivel de dificultad que se percibe en esta agrupación. La dificultad en la conversión entre registros semióticos puede ser una fuente de incomprensión matemática, lo que sugiere que mejorar estas habilidades podría ser clave para fortalecer la comprensión de conceptos matemáticos (Duval, 2006a) como el de raíces de funciones.

En esta agrupación se ejemplifica con el reactivo 15 (figura 5), en el cual se solicita resolver un problema práctico en lenguaje natural para encontrar las dimensiones posibles de dos corrales adyacentes rectangulares, dados una cantidad fija de valla y un área total específica.

Figura 5: Reactivo 15 del instrumento de medición diagnóstico.

15. Un granjero dispone de 21 metros de valla para delimitar dos corrales adyacentes rectangulares (como lo muestra la figura contigua) ¿Cuál es la representación gráfica de la función $f(x)$ tal que sus raíces corresponden a las posibles dimensiones de la medida x de manera que el área sea de 18 metros cuadrados?





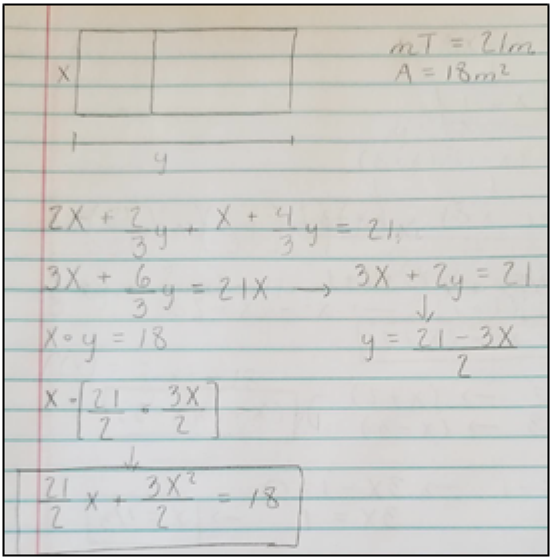
La interpretación del problema y la identificación de las variables involucradas podría verse como una acción inicial, aunque la pregunta es más conceptual y no implica una manipulación física directa. La etapa de proceso implica reconocer y aplicar procedimientos matemáticos para formular una ecuación que modele la situación descrita. Los estudiantes deben comprender cómo las restricciones dadas (longitud total de la valla y área deseada de los corrales) se traducen en una función matemática cuyas raíces proporcionarán las soluciones al problema. Los conceptos matemáticos aquí, incluyendo la función f(x), las restricciones del problema, y las raíces de la función, son tratados como objetos matemáticos abstractos. Esta etapa se enfoca en la conceptualización de la relación entre la ecuación, la gráfica y las dimensiones físicas de los corrales como objetos matemáticos que pueden ser analizados y comprendidos. Los estudiantes deben aplicar un esquema de conocimientos para interpretar las gráficas y seleccionar la que representa correctamente la solución al problema basándose en las raíces de la función. La necesidad de aplicar procedimientos matemáticos para formular y resolver el problema, y luego interpretar las soluciones en el contexto de gráficas, refleja una combinación de estas etapas, con un énfasis particular en esquema debido a la integración y aplicación flexible del conocimiento matemático en la resolución del problema. La dificultad que se refleja en este problema también está asociada a la conversión del lenguaje natural al algebraico, en la que interviene tanto la competencia de la capacidad para manejar estructuras sintácticas en lenguaje verbal y la capacidad para movilizar mentalmente conceptos matemáticos que están implícitos en los enunciados verbales (Soneira Calvo, Souto Salorio y Tarrío Tobar, 2017).

En este reactivo 15, dado que se requiere la conversión de un problema descriptivo en lenguaje natural a una formulación que involucra el cálculo de raíces reales y su solución a través de representaciones algebraicas y consecuentemente gráficas, este proceso podría interpretarse como moderadamente incongruente. La incongruencia puede surgir de la complejidad de traducir un problema del mundo real a una expresión matemática precisa, lo que exige una comprensión profunda tanto del contexto del problema como de los conceptos matemáticos involucrados.

En el contexto de la teoría APOE, la respuesta de un estudiante (figura 6) mostró una acción efectiva al establecer el sistema de ecuaciones y al intentar procesar estas ecuaciones para resolver el sistema. Sin embargo, en el proceso, el estudiante omitió el signo negativo en el término cuadrático, un error que afectó el desarrollo posterior de la solución. Esto indica una desconexión entre la comprensión del objeto matemático (en este caso, las ecuaciones que representan el área y el perímetro) y la capacidad de manipular correctamente este objeto para llegar a un esquema adecuado, que sería una expresión cuadrática que pudiera ser resuelta para encontrar las dimensiones que satisfacen ambas condiciones. El esquema que el estudiante intentó aplicar era el de la relación entre el perímetro y el área del rectángulo, pero la ejecución inexacta de la sustitución llevó a una representación final incorrecta, que no reflejó la verdadera naturaleza cuadrática del problema. Esta representación final errónea impidió al estudiante llegar a las raíces de la función, que son las soluciones al problema.

La implicación de estos errores en la representación y el proceso matemático resalta la importancia de la precisión en el álgebra y la habilidad de conectar correctamente las representaciones y las operaciones matemáticas. Para corregir estos errores y alinearse mejor con las teorías de representación y APOE, el estudiante necesita revisar y reforzar las habilidades en la manipulación algebraica y en el establecimiento de conexiones entre las diferentes representaciones matemáticas del problema.

Figura 6: Respuesta de un estudiante al reactivo 15 del instrumento de medición diagnóstico.



Este análisis de conglomerados proporciona una visión detallada de la dificultad que los estudiantes experimentan con ciertos reactivos matemáticos, tomando como referencia las teorías de representación semiótica y APOE. Al examinar los registros de representación inicial y final, se observa que los reactivos que inician con un lenguaje más natural y se mueven hacia representaciones más abstractas, como las algebraicas o numéricas, tienden a ser más desafiantes, lo que Duval (2006b) sugiere que es debido a la complejidad inherente en la conversión de representaciones. Por otra parte, los reactivos que se mantienen dentro de un mismo tipo de representación suelen ser más accesibles, ya que los estudiantes no necesitan reinterpretar la información en diferentes formatos.

De esta evaluación realizada se detecta la alineación estrecha entre las tareas que realizan los estudiantes en cuanto a la actividad cognitiva de conversión entre diferentes registros semióticos y la generalización y abstracción del conocimiento matemático representada por la etapa de esquema de APOE. Un análisis adicional (ANOVA) llevado a cabo con los valores de los índices de dificultad de los reactivos en cuanto a procesos, objetos y esquema, mostró un valor F de 3.793 con una significancia de 0.043. Este resultado estadísticamente significativo confirma que el tipo de enfoque conceptual tiene un impacto notable en la dificultad de los reactivos. La prueba de Tukey proporcionó un análisis más detallado de las diferencias entre los grupos, particularmente se encontró que el índice de dificultad promedio de los reactivos del diagnóstico clasificados como de Esquema (0.29) son significativamente más difíciles que aquellos clasificados como Proceso (0.62) y Objeto (0.50). Esta diferencia indica que los reactivos clasificados como Esquema, que integran conceptos más abstractos y requieren una mayor integración cognitiva, presentan retos adicionales para los estudiantes.

Los resultados también indican que la transición y los cambios incongruentes entre diferentes registros en cuanto al concepto de raíz representan un reto importante para los estudiantes, una conclusión que encuentra respaldo en la obra de Duval (2006a), quien argumenta que la habilidad para manejar estos cambios es esencial para el aprendizaje matemático efectivo, mientras que Sfard (1991) explica como los cambios incongruentes pueden representar un obstáculo significativo si los estudiantes no están bien preparados para manejarlos.

En conjunto, los hallazgos de este estudio aportan elementos novedosos al evidenciar que las mayores dificultades en la comprensión del concepto de raíz no solo se relacionan con el nivel de abstracción requerido, sino con la naturaleza del cambio semiótico implicado. La identificación de agrupaciones diferenciadas según etapas APOE, tipo de actividad cognitiva y tipo de cambio semiótico constituye una aportación relevante para el análisis del pensamiento matemático en estudiantes de ingeniería. En particular, la asociación estadísticamente significativa entre la etapa cognitiva de esquema y los mayores índices de dificultad sugiere la necesidad de replantear los enfoques de enseñanza cuando se busca promover una comprensión profunda y flexible de los conceptos matemáticos. Esta perspectiva integradora representa una contribución original al campo, al combinar sistemáticamente dos marcos teóricos para caracterizar el desempeño estudiantil en un tema clave del currículo de matemáticas.

4.3. Limitaciones y líneas futuras de investigación

Este estudio presenta ciertas limitaciones que deben considerarse al interpretar sus resultados. En primer lugar, los participantes pertenecen exclusivamente a la Facultad de Ingeniería Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California, lo cual restringe la generalización de los hallazgos a otros contextos institucionales o programas educativos con diferentes enfoques curriculares. Asimismo, aunque se procuró una muestra aleatoria, la naturaleza voluntaria de la participación puede haber introducido sesgos relacionados con el nivel de motivación de los estudiantes. Otra limitación se refiere al alcance del instrumento, centrado en reactivos de opción múltiple, lo cual, si bien permite evaluaciones masivas, puede limitar la exploración de estrategias de resolución abiertas o espontáneas que también revelan comprensión conceptual.

Futuras investigaciones podrían extender el estudio a otras disciplinas, como ciencias básicas, economía o ciencias de la salud, donde el concepto de raíz también es relevante, para comparar patrones de dificultad. Además, sería valioso diseñar intervenciones pedagógicas basadas en los perfiles detectados, integrando actividades de conversión semiótica, resolución de problemas contextualizados y uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra. Evaluar el impacto de dichas estrategias a mediano plazo puede ofrecer evidencia sobre su efectividad para mejorar la comprensión del concepto de raíz y otros conceptos clave del pensamiento matemático universitario.

5. Conclusiones

Los resultados obtenidos en este estudio permiten concluir que la comprensión del concepto de raíz por parte de los estudiantes de ingeniería presenta diferencias significativas en función del tipo de tarea, la representación semiótica implicada y la etapa cognitiva desde la cual se aborda el problema. La articulación entre la teoría de representaciones semióticas de Duval y la teoría APOE posibilitó clasificar los reactivos con base en indicadores cognitivos y estructurales, y permitió identificar tres agrupaciones con patrones diferenciados de desempeño.

Un hallazgo particularmente relevante fue la identificación de una agrupación de reactivos caracterizada por conversiones incongruentes entre registros, actividad de tipo conversión y ubicación en la etapa de esquema según APOE. Esta agrupación presentó el índice de dificultad más bajo (0.35), lo cual sugiere que las tareas que implican mayor reorganización conceptual y conexión entre registros verbales, algebraicos y gráficos representan un desafío importante para los estudiantes.

En términos pedagógicos, los resultados evidencian la necesidad de diseñar propuestas didácticas que promuevan la progresión desde la acción hacia el esquema, favoreciendo el desarrollo de estructuras cognitivas complejas. Se recomienda implementar estrategias basadas en la descomposición genética, el trabajo con tareas que exijan conversión semiótica entre representaciones y el uso intencionado de tecnologías como GeoGebra, que permitan a los estudiantes explorar activamente el concepto de raíz desde diferentes perspectivas.

Finalmente, este estudio aporta una vía metodológica para el análisis del desempeño estudiantil mediante la integración de marcos teóricos complementarios, lo cual puede ser replicado en el abordaje de otros conceptos matemáticos clave en la formación de ingenieros. Las futuras investigaciones podrían centrarse en evaluar el impacto de intervenciones diseñadas en función de los perfiles cognitivos detectados y en ampliar el análisis a otras disciplinas o contextos educativos.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., et al. (2014). From Piaget's Theory to APOS Theory: Reflective Abstraction in Learning Mathematics and the Historical Development of APOS Theory. En I. Arnon, J. Cottrill, E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa Fuentes, M. Trigueros, y K. Weller (Eds.), *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education* (pp. 5-15). Springer New York. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6_2

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En *Research in Collegiate Mathematics Education II. CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 1-32). Providence, RI: American Mathematical Society. Recuperado de https://people.math.wisc.edu/~rwilson/Courses/Math903/APOS-Overview.pdf

Bausela Herreras, E. (2005). SPSS: Un instrumento de análisis de datos cuantitativos. *Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales, 2*(4), pp. 62-69. Recuperado de https://orientacionalainvestigacion.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/09/spss_bausela_herreras.pdf

Bazaldua Merino, S. (2007). *Acercamiento gráfico a los ceros de la función polinomio y a las raíces de la ecuación polinomio. Una experiencia con estudiantes universitarios* [Master's thesis, CICATA, IPN, México]. Recuperado de http://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/11700

Carmines, E. y Zeller, R. (1987). *Reliability and Validity Assessment*. USA: Sage.

Castejón, J. L., Gilar, R., Miñano, P. y González, M. (2016). Latent class cluster analysis in exploring different profiles of gifted and talented students. *Learning and Individual Differences, 50*, pp. 166-174. doi: https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.08.003

Contreras, L. y Backhoff, E. (2004). Metodología para elaborar exámenes criteriales alineados al currículo. En S. Castañeda (Ed.), *Educación aprendizaje y cognición, teoría en la práctica* (pp. 155-174). Manual Moderno.

Coronata, C. y Alsina, Á. (2014). Evaluation of the Mathematical Processes in the Practices of Teaching and Learning in Childhood Education. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 141*, pp. 1320-1323. doi: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.05.227

Corral, Y. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos para la recolección de datos. *Revista ciencias de la educación,* (33), pp. 228-247. Recuperado de https://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/n33/art12.pdf

Crocker, L. y Algina, J. (1986). *Introduction to Classical and Modern Test Theory*. Editorial Cengage Learning.

Didiş, M., Baş, S. y Erbaş, A. (2011). Students' Reasoning in Quadratic Equations with One Unknown. En *The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7)* (pp. 479-489). Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/266414702

Ding, L., Chabay, R., Sherwood, B. y Beichner, R. (2006). Evaluating an electricity and magnetism assessment tool: Brief electricity and magnetism assessment. *Physical Review Special Topics—Physics Education Research, 2*(1), pp. 010105. doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.2.010105

Dixson, D. D., Worrell, F. C. y Mello, Z. (2017). Profiles of hope: How clusters of hope relate to school variables. *Learning and Individual Differences, 59*, pp. 55-64. doi: https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.08.011

Duval, R. (1993). *Registros de representaciones semióticas y funcionamiento cognoscitivo del pensamiento*. Traducción: Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (2006a). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), pp. 103-131. doi: https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2006b). Quelle Sémiotique Pour L'Analyse de L'Activité et des productions mathématiques. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(4), pp. 45-81. Recuperado de https://relime.org/index.php/relime/article/view/467

Engelhardt, P. V. (2009). An Introduction to Classical Test Theory as Applied to Conceptual Multiple-choice Tests. *Getting Started in PER, 2*(1), pp. 1-40. Recuperado de http://cper.pbworks.com/w/file/fetch/50844451/Classica%20Conceptual%20TestTheory.pdf

Gallardo Reyes, M. d. R. y Núñez Palenius, G. E. (2018). Actividades de aprendizaje para la solución de ecuaciones que involucran expresiones con radicales. *Revista AMIUTEM, 4*(1), pp. 90-98. Recuperado de https://revista.amiutem.edu.mx/index.php/relecamiutem/article/view/73

García, M. y Vilanova, S. (2008). Las representacio¬nes sobre el aprendizaje de los alumnos de pro¬fesorado. Diseño y validación de un instrumento para analizar concepciones implícitas sobre el aprendizaje en profesores de matemática en formación. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 3*(2), pp. 27-35. doi: https://doi.org/10.54343/reiec.v3i2.340

Gempp Fuentealba, R. (2006). El error estándar de medida y la puntuación verdadera de los tests psicológicos: Algunas recomendaciones prácticas. *Terapia Psicológica, 24*(2), pp. 117-130. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/785/78524201.pdf

Gonçalves, T., Niemivirta, M. y Lemos, M. S. (2017). Identification of students' multiple achievement and social goal profiles and analysis of their stability and adaptability. *Learning and Individual Differences, 54*, pp. 149-159. doi: https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.01.019

Gutiérrez, L. y Valdivé, C. (2012). Una descomposición genética del concepto derivada. *Gestión y Gerencia, 6*(3), pp. 104-122. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5305449.pdf

Jaimes Contreras, L. A., Baquero Torres, E. R. y Rey Perdomo, M. M. (2019). Ecuaciones diferenciales y teoría APOS: Un estudio de los sistemas masa resorte. *Acta Latinoamericana de Investigación Educativa, 32*(1), pp. 344-353. Recuperado de https://repositorio.escuelaing.edu.co/handle/001/1686

Leyva, A. A., Carreño, M. A., Sandoval, J. A., Estrada, I. y Carreño, M. (2014). TONOMET: Alternativa de apoyo para una asignatura de métodos numéricos, para el aprendizaje significativo en el cálculo de raíces de ecuaciones no lineales. *Revista Colombiana de Computación, 15*(2), pp. 100-115. Recuperado de https://revistas.unab.edu.co/index.php/rcc/article/view/2488

Muñoz Cantero, J. M. y Mato Vázquez, M. D. (2008). Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en alumnos de ESO. *Revista de Investigación Educativa, 26*(1), pp. 209-226. Recuperado de https://revistas.um.es/rie/article/view/94181

Nitko, A. (1994). *A Model for Curriculum-Driven Criterion-Referenced and Norm-Referenced National Examinations for Certification and Selection of Students*. Conferencia Internacional sobre Evaluación y Medición Educativas de la Asociación para el Estudio de la Evaluación Educativa (ASSESA), Pretoria, Sudáfrica. Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED377200.pdf

Ochoviet, C. y Oktaç, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria. *Educación matemática, 23*(3), pp. 91-121. Recuperado de https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v23n3/v23n3a5.pdf

Orts Muñoz, A., Llinares Ciscar, S. y Boigues Planes, F. J. (2017). Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta tangente. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (10), pp. 111-134. doi: https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.164

Parraguez González, M., Roa-Fuentes, S., Jiménez Alarcón, R. y Betancur Sánchez, A. (2022). Estructuras y mecanismos mentales que desde una perspectiva geométrica modelan y articulan el aprendizaje del valor y vector propio en R^2.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 25(1), pp. 63-92. doi: https://doi.org/10.12802/relime.22.2513

Pedrosa, I., Suárez-Álvarez, J. y García-Cueto, E. (2014). Evidencias sobre la Validez de Contenido: Avances Teóricos y Métodos para su Estimación. *Acción Psicológica, 10*(2), pp. 3-18. doi: https://doi.org/10.5944/ap.10.2.11820

Popham, J. (1990). *Modern Educational Measurement: A Practitioner's Perspective*. Allyn and Bacon, MA.

Posadas, P. y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae: Revista de Investigación en Didácticas Específicas, 1*, pp. 77-96. Recuperado de https://revistes.ub.edu/index.php/didacticae/article/view/18092

Prieto, G. y Delgado, A. R. (2010). Fiabilidad y Validez. *Papeles del Psicólogo, 3*(1), pp. 67-74. Recuperado de https://papelesdelpsicologo.es/pdf/1797.pdf

Reidl-Martínez, L. M. (2013). Confiabilidad en la medición. *Investigación en Educación Médica, 2*(6), pp. 107-111. doi: https://doi.org/10.1016/S2007-5057(13)72695-4

Ricaldi, M. L. (2019). Aproximaciones a un Modelo Praxeológico de Referencia para el Aprendizaje del Álgebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(1), pp. 210-220. Recuperado de https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1153581/Ricaldi2019Aproximaciones.pdf

Rodríguez, F. M. y Sierra, M. (2012). Lagrange y la resolución de ecuaciones numéricas: Perspectiva histórica epistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 25*, pp. 209-215. Recuperado de https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1210350/RodriguezLagrangeALME2012.pdf

Ruiz Álvarez, O. A., Palma Gómez, E. d. J. y Mendoza Peñalba, C. G. (2022). Excel y GeoGebra para el cálculo de raíces de ecuaciones no lineales mediante el método de Newton-Raphson: Una experiencia en un curso de Cálculo Diferencial. *Revista Científica Tecnológica, 5*(2), pp. 38-47. Recuperado de https://revistas.unan.edu.ni/index.php/ReVTec/article/view/3664

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), pp. 1-36. doi: https://doi.org/10.1007/BF00302715

Soneira Calvo, C., Souto Salorio, M. J. y Tarrío Tobar, A. D. (2017). Distintas competencias en el proceso de conversión del lenguaje natural al algebraico. *Revista Portuguesa De Educação, 30*(2), pp. 89-110. doi: https://doi.org/10.21814/rpe.10096

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*(1), pp. 3-19. doi: https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Urrutia Egaña, M., Barrios Araya, S., Gutiérrez Núñez, M. y Mayorga Camus, M. (2014). Métodos óptimos para determinar validez de contenido. *Educación médica superior, 28*(3), pp. 547-558. Recuperado de http://scielo.sld.cu/pdf/ems/v28n3/ems14314.pdf