Sección de Problemas

por Diego A. Sulca

Todos los años, en el mes de agosto, se realiza la Competencia Interuniversitaria de Matemática Argentina (CIMA). Se trata de una competencia abierta a todos los estudiantes universitarios del país, de cualquier carrera de grado. Su objetivo es fomentar el pensamiento creativo mediante la propuesta de problemas que se apartan en cierta medida de la currícula, continuando así con el espíritu de las olimpíadas de matemática. Un aspecto importante es que se compite en equipos de dos integrantes, lo que promueve la discusión y el trabajo colaborativo.

Este año se realizó el pasado 27 de agosto. Los siguientes son versiones simplificadas de algunos de los problemas propuestos. La versión original estará disponible en https://sites.google.com/site/competenciacima/.

Problema 1. Se lanzan tres dados con forma de tetraedro regular, cada uno de los cuales tiene en sus caras los números del 1 al 4. El resultado es la suma los números de las caras que quedaron apoyadas en la mesa. Se hace lo mismo pero ahora con dos dados usuales y se calcula el resultado. Para cada número s en $\{3, 4, \ldots, 12\}$, determinar con qué tipo de dados es más probable obtener s como resultado.

Problema 2. Un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ se dice *amigable* si $f(p)$ es un número entero para todo número primo p, positivo o negativo.

Se dice que $f(x)$ es *muy bueno* si $f(n)$ es un número entero para todo número entero n.

1. Probar que existe un polinomio amigable de grado ≤ 3 que no sea muy bueno.
2. ¿Es posible encontrar un polinomio amigable de grado 1 o 2 que no sea muy bueno?

Problema 3. En cada punto (a, b) del plano con coordenadas enteras se asigna un número real $f(a, b) \in \mathbb{R}$. Supongamos que, para todo cuadrado cuyos vértices tienen coordenadas enteras (no necesariamente alineado con los ejes), la suma de los valores de f en sus vértices es cero. Probar que entonces $f(a, b) = 0$ para todo $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

SOLUCIONES

Solución 1. Sea a_s la probabilidad de que al tirar 3 dados con forma de tetraedro el resultado sea s y b_s la probabilidad de que al tirar dos dados usuales el resultado sea s. Entonces

$$a_s = \frac{\#\{(x,y,z) \in \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\} \,:\, x+y+z=s\}}{4 \cdot 4 \cdot 4},$$
$$b_s = \frac{\#\{(u,v) \in \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \,:\, u+v=s\}}{6 \cdot 6}.$$

Un cálculo rápido da $a_5 = \frac{3}{32}$, $a_6 = \frac{5}{32}$, $a_7 = \frac{3}{16}$, mientras que $b_5 = \frac{4}{36}$, $b_6 = \frac{5}{36}$ y $b_7 = \frac{6}{36}$. Comparando se ve que $a_5 < b_5$, $a_6 > b_6$ y $a_7 > b_7$. Por lo tanto, para $s = 5$ es más probable obtenerlo con dados usuales, y para $s = 6, 7$ es más probable con dados tetraédricos. Te dejamos de tarea hacer la cuenta con los demás números s.

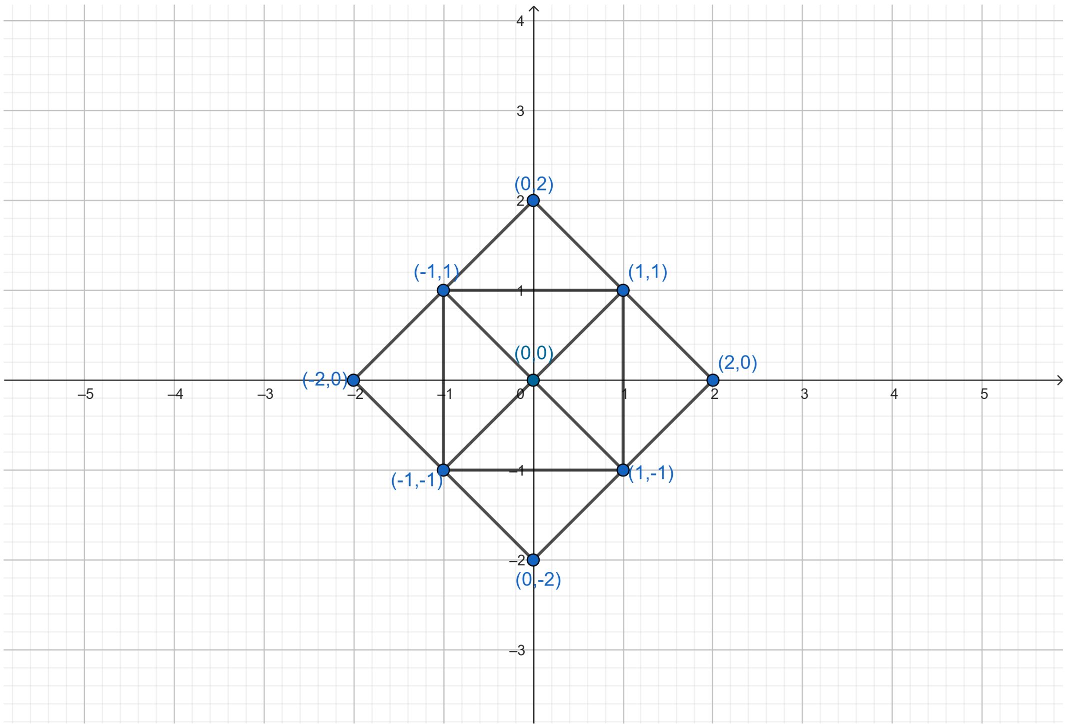
Solución 2.

1. Veamos que $f(x) = \frac{(x(x-4)-1)(x-2)}{4}$ es amigable, pero no muy bueno. En efecto, $f(x)$ es entero para cualquier x impar, pues en tal caso se tiene $4|x^2-1$ y por lo tanto $4|x(x-4)-1$. Además $f(2) = 0$ y $f(-2) = -11$. Luego $f(p)$ es entero para todo primo positivo o negativo. Sin embargo, $f(0) = \frac{1}{2}$.
2. Veamos ahora que si $f(x)$ es un polinomio amigable de grado 1 o 2 entonces $f(x)$ es muy bueno.

   Supongamos que $f(x) = ax + b$ es amigable. Evaluando en 2 y 3, obtenemos que $2a + b$ y $3a + b$ son enteros, por lo tanto su diferencia $a = (3a+b) - (2a+b)$ también es entero. Como $2a+b$ es entero, deducimos que b es entero. Así, $a, b \in \mathbb{Z}$ y $f(x)$ es necesariamente muy bueno.

   Supongamos ahora que $f(x) = ax^2 + bx + c$ es amigable. Evaluando en 2 y 3 obtenemos que $4a + 2b + c$ y $9a + 3b + c$ son enteros, y por lo tanto también lo es la diferencia $5a + b$. De manera similar, evaluando en -2 y -3 obtenemos que $4a - 2b + c$ y $9a - 3b + c$ son enteros, por lo tanto la diferencia $5a - b$ también lo es. Deducimos que $2b = (5a + b) - (5a - b)$ y $10a = (5a + b) + (5a - b)$ son enteros. Luego $4a + c = (4a + 2b + c) - 2b$ es entero. Evaluando en 5 obtenemos que $25a + 5b + c$ es entero, y restándole $10a + 4b$, se tiene que $5a + b + c$ es entero. Pero ya sabíamos que $5a + b$ era entero, por lo que c es entero. Y como $4a + c$ era entero, sale entonces que $4a$ es entero, y combinando esto con el hecho de que $5a + b$ es entero llegamos a que $a + b$ es entero. Luego, o bien $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$, en cuyo caso es muy bueno, o bien $f(x) = g(x) + \frac{x(x+1)}{2}$, con $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, en cuyo caso también es muy bueno.

Solución 3. Basta probar que $f(0,0) = 0$ pues luego repetiríamos la misma prueba para cualquier otro punto.



Llamamos $X = f(-1,-1)$, $Y = f(-1,1)$, $Z = f(1,1)$, $W = f(0,0)$. Notar que U, V, W son los valores de f en 3 de los vértices de un cuadrado. El otro vértice es $(1,-1)$ y se tiene $f(1,-1) = -X - Y - Z$. Calculamos $f(-2,0) = -X - Y - W$, $f(0,2) = -Y - Z - W$, $f(0,-2) = -X - W - (-X - Y - Z) = -W + Y + Z$. Calculamos finalmente $f(2,0)$ mirando el cuadrado de vértices $(0,0), (1,1), (1,-1), (2,0)$. Obtenemos $f(2,0) = -W - Z - (-X - Y - Z) = -W + X + Y$. Pero verificando la condición en el cuadrado de vértices $(0,-2), (-2,0), (0,2), (2,0)$ obtenemos $-W + Y + Z + (-Y - W - X) + (-Y - W - Z) + (-W + X + Y) = 0$. Simplificando obtenemos $-4W = 0$, y luego $W = 0$.