Revista de Educación Matemática
Volumen 40, N° 2 (2025), páginas 39 – 64
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de investigación en Educación Matemática.

PENSAR Y REPENSAR LOS NÚMEROS REALES. INTERACCIÓN ENTRE LO COGNITIVO Y LO EPISTEMOLÓGICO

Virginia Montoro

Resumen. El número real es una de las ideas matemáticas más importantes y útiles. Ha sido clave en el desarrollo de la matemática y ha proporcionado herramientas esenciales para las ciencias naturales y la tecnología. Sin embargo, el número real fue a través de la historia de la matemática un concepto complejo y muy difícil de formalizar, entre otras cosas por estar íntimamente ligado al infinito actual. Si bien los lineamientos curriculares establecen que los y las estudiantes al finalizar la secundaria deben comprender este concepto, en la universidad se observa que no siempre se logra este objetivo. Describimos y analizamos las comprensiones que han construido estudiantes de secundaria y universitarios sobre los números reales, considerando la relación de éstas con el tipo de matemática estudiada (escolar, avanzada aplicada o teórica). Examinando la comprensión de aspectos clave de la noción de número real como la densidad, el orden, su relación con el infinito matemático y con la recta numérica. Se destaca la diversidad de ideas de los y las estudiantes y la importancia de considerarlas para mejorar la enseñanza. Planteamos que el número real es una construcción cultural que permite nuevas formas de pensamiento y comprensión del mundo, más allá del universo de objetos finitos y discretos.

abstract. The real number is one of the most important and useful mathematical ideas. It has been key in the development of mathematics and has provided essential tools for natural sciences and technology. However, the real number has been a complex concept throughout the history of mathematics and very difficult to formalize, among other things because it is closely linked to the actual infinity. Although curricular guidelines establish that students should understand this concept by the end of high school, at university it is observed that this objective is not always achieved. We describe and analyze the understandings that high school and university students have built about real numbers, considering their relationship with the type of mathematics studied (school, advanced applied or theoretical). Examining the understanding of key aspects of the notion of real number such as density, order, its relationship with mathematical infinity and with the number line. The diversity of ideas of

Palabras clave: Número real, Concepciones, Infinito.
Keywords: Real number, Conceptions, Infinity.

students and the importance of considering them to improve teaching is highlighted. We propose that the real number is a cultural construction that allows for new ways of thinking and understanding the world, beyond the universe of finite and discrete objects.

§1. Complejidad epistemológica, cognitiva y educativa de la noción de número real

La de número real es una de las ideas más útiles e importantes de la matemática, sobre ella se construye gran parte del desarrollo de esta ciencia y se la encuentra en el núcleo de la enseñanza matemática en las escuelas secundarias y en la universidad.

Los lineamientos curriculares (Ministerio de Educación de Río Negro, 2017) proponen que, al finalizar la escuela secundaria, los y las estudiantes comprendan el concepto de número real, manejen el sistema de representación decimal de los reales, puedan ordenarlos, representarlos sobre la recta y usarlos para resolver problemas. Este objetivo se constituye en un gran desafío para estudiantes y docentes de secundaria.

En los primeros años de la universidad, generalmente se espera que los y las estudiantes ya hayan internalizado esta noción numérica, pues resulta fundante para desarrollar estudios matemáticos más avanzados. Sin embargo, mostraremos como estas expectativas respecto a que al ingresar a la universidad la noción de número real sea una noción disponible en el estudiantado frecuentemente no son satisfechas y una buena cantidad de estudiantes ingresan a la universidad sin una comprensión cabal del número real, lo que dificulta su acceso a la matemática superior. Consideramos que el aprendizaje de los números reales actúa como un puente entre la educación matemática escolar y la educación matemática universitaria, marcando la transición de un *pensamiento matemático escolar* hacia un *pensamiento matemático avanzado* (Tall, 1991).

Sabemos que lo que aprenden los y las estudiantes no siempre coincide con lo que se les enseña formalmente. Ellos y ellas construyen sus propias comprensiones, ideas y estrategias, que pueden ser útiles en la vida cotidiana o suficientes para aprobar los exámenes, pero que no necesariamente coinciden con el conocimiento validado por la comunidad matemática. Estas comprensiones personales, denominadas *concepciones o comprensiones propias* pueden diferir en mayor o menor medida de los *conceptos*, validados por la comunidad académica y que suelen encontrarse en los libros. Generalmente las concepciones personales requieren de un trabajo específico para acercarse al conocimiento formal (Freudenthal, 1983; Sfard, 2010; Tall & Vinner, 1981; Vinner & Dreyfus, 1989).

Entendemos que las concepciones o comprensiones que los y las estudiantes han construido a lo largo de su formación son el punto de partida para nuevos aprendizajes. Para que el aprendizaje sea significativo (Ausubel et al., 1978), es fundamental interactuar con estas ideas, enriqueciéndolas o modificándolas cuando sea necesario. Sin embargo, cuando estas concepciones se alejan demasiado de los conceptos matemáticos formales, pueden convertirse en un obstáculo importante para el aprendizaje (Pozo & Scheuer, 1999; Vosniadou, 2008).

> *Un ejemplo*: Si en una clase se presenta la igualdad:
>
> $$0,99999\ldots\ \text{(infinitos nueves)} = 0.\hat{9} = 1$$
>
> es común que surjan dudas entre los y las estudiantes, tales como:
> ¿Cuántos nueves hacen que sean "infinitos"? ¿Es simplemente una cantidad enorme o algo más? ¿Es ésta realmente una cantidad?
> Este número con infinitos decimales ¿es realmente un número?
> ¿*Puedo* agregar tantos nueves como quiera o *deben* incorporarse en un proceso sin fin?
> ¿Los infinitos nueves están presentes simultáneamente?
> Si agrego más y más nueves, ¿voy reduciendo la distancia - ¿en una recta? - al 1 en un proceso infinito? ¿Me acerco sin nunca alcanzarlo?
> ¿Es posible que los infinitos nueves estén presentes al mismo tiempo? y, en ese caso, ¿el número realmente llegue a ser 1? Si todos los nueves están presentes, ¿pueden "encapsularse" en 1? ¿Cómo puede caber un número infinito de elementos dentro de 1?

Estas preguntas reflejan la complejidad de las representaciones de los números reales, del concepto de infinito y la dificultad de aceptar ciertas ideas matemáticas que desafían la intuición.

1.1. Un poco de historia. Históricamente, la de número real ha sido una noción especialmente compleja y difícil de determinar, principalmente debido a su estrecha relación con el concepto de *infinito actual*, es decir, la existencia simultánea de infinitos elementos. Esta idea resulta contraintuitiva y, durante más de veinte siglos, no fue aceptada ni formalizada por la comunidad matemática.

Desde la antigüedad, *el infinito potencial* - en un sentido casi etimológico, concebido como un proceso sin fin - fue ampliamente aceptado. Sin embargo, *el infinito actual*, que implica la existencia de conjuntos infinitos acabados, fue visto como paradójico y contradictorio hasta que, a principios del siglo XX, fue formalizado a través de la obra de G. Cantor, que concibió la teoría de conjuntos abstractos, considerando conjuntos *actualmente infinitos* y estableció una aritmética transfinita.

Los pitagóricos, en la antigua Grecia, anticiparon la existencia de los números irracionales al descubrir magnitudes inconmensurables. Aun así, durante más de dos mil años, las matemáticas se desarrollaron aplicando las reglas operacionales de la aritmética sin distinguir entre distintos conjuntos numéricos ni preocuparse demasiado por su fundamentación teórica.

En el siglo XIX, los matemáticos reconocieron que las propiedades algebraicas y de orden no eran suficientes para diferenciar esencialmente a los números racionales de los reales. Esto llevó al desarrollo de diversas definiciones constructivas de los números reales, todas ellas de gran complejidad semiótica y basadas en la aceptación del infinito actual. Fue recién a finales de este siglo cuando se definió axiomáticamente el conjunto de los números reales, a partir de la explícita aceptación de los conjuntos infinitos.

Desde el siglo XX, los números reales son concebidos como elementos de un conjunto con estructura de *cuerpo ordenado y completo*. Si bien los axiomas de cuerpo, orden y densidad (la propiedad de que entre dos números reales siempre hay un número racional) se cumplen tanto para racionales como para reales, la característica distintiva de los números reales es el axioma de completitud, que puede enunciarse: *en un subconjunto de números reales (no vacío), acotado superiormente, existe un número real que representa la menor de esas cotas superiores.* En otras palabras, la existencia de los irracionales como números reales debe establecerse de manera axiomática.

Sin embargo, sabemos que, para la vida cotidiana y los cálculos comerciales o experimentales, los números racionales suelen ser suficientes. De hecho, la complejidad cognitiva del número real radica, en buena parte, en que su conceptualización no surgió de necesidades prácticas, sino como una respuesta teórica para fundamentar el desarrollo de la propia matemática.

1.2. Complejidad de las representaciones externas del número real. La carencia intrínseca de una representación que pueda dar cuenta de todas las características de los números reales añade complejidad epistemológica a estas representaciones. Consideramos dos formas principales de representación de los números reales:

La notación decimal de los números reales. En el siglo XVI surge la idea general de número irracional como consecuencia de la introducción de la notación decimal. Si se transforma una fracción en número decimal, obtenemos *finitas* o *infinitas-periódicas* cifras decimales y recíprocamente. Este hecho da paso a pensar en la existencia de expresiones decimales de *infinitas cifras sin período*. Estas expresiones, que pueden pensarse, pero no escribirse, se conciben como números que no son racionales.

La recta geométrica como representación de los números reales. En el trabajo matemático se piensa a la recta geométrica como *continua*, es decir que no posee huecos. Esto fue usado en forma transparente en matemática por siglos. El *axioma de continuidad* formaliza esta característica de la recta fijando la relación uno a uno entre los puntos de la recta y los números reales, identificando la continuidad de la recta con la completitud de los reales. La afirmación de que la recta está constituida por puntos ha generado por siglos mucha controversia que pudo ser zanjada a través de establecer en forma *axiomática* la continuidad de la recta en correspondencia con la completitud de los reales.

1.3. Cantidad de números reales. Otro aspecto destacable por su complejidad epistémica y cognitiva es la *cantidad* de números reales. Al comparar conjuntos infinitos por cardinalidad, mediante correspondencias biunívocas G. Cantor mostró que hay infinitos números naturales y que hay tantos enteros como naturales, más aún (aun cuando parezca contrario a la intuición, que hay tantos racionales como naturales. Sin embargo, demostró que los números reales no son coordinables con los números naturales. Los reales son infinitos, como lo son los naturales, los enteros o los racionales, pero de una magnitud infinita mayor. Esta cardinalidad infinita no-numerable de los números reales les viene dada por los irracionales.

La noción de número real posee, una gran complejidad epistemológica, cognitiva y educativa.

§2. Nuestro estudio

Realizamos una indagación en profundidad sobre las comprensiones que estudiantes de secundaria y de universidad han construido e interiorizado acerca del número real, muchas veces, después de varios años de estudio. Asimismo, nos interesamos en analizar la posible influencia del nivel y el tipo de formación matemática en estas comprensiones (Montoro, 2022; Montoro, 2023).

Nos centramos en la comprensión de aspectos básicos de los números reales como son: el significado de número en general y de número racional, irracional y real en particular; la densidad y el orden de los números reales; la noción de infinito en el contexto de los números reales y la recta como representación de los números reales.

La comprensión de aspectos como la completitud, la no-numerabilidad y la inconmensurabilidad de los números reales, fueron abordados solo de manera tangencial, dado que requieren un mayor nivel de abstracción y una madurez cognitiva específica.

2.1. Participantes. Se seleccionó una población que abarcara desde estudiantes que recién comienzan el estudio de los números reales en tercer año de secundaria hasta estudiantes avanzados/as de Matemática con un conocimiento profundo del tema.

En total, participaron 307 estudiantes: 167 de nivel secundario y 140 de nivel universitario, ingresantes y avanzados/as de tres carreras con distinta especificidad de estudios en Matemática

La población en estudio estuvo compuesta por estudiantes:

- de tercer año de secundaria, iniciando el estudio de los números reales (3ro);
- de cuarto y quinto año de secundaria, cursos en que se estudian los números enteros, racionales y reales, llegando en quinto año a una introducción al cálculo (4to y 5to);
- ingresantes a Educación Física, muchos/as de los cuales no completaron la secundaria aun (EFI);
- avanzados/as de Educación Física, que no han tenido formación universitaria en matemática (EFA);
- ingresantes a las carreras de Biología y Matemática, recientemente egresados de la secundaria (BI y MI);
- avanzados/as de Biología, que han estudiado cálculo en una y varias variables, así como ecuaciones diferenciales (BA) y
- avanzados/as de Matemática, que han realizado un estudio sistemático y axiomático de los números reales (MA).

2.2. Cuestionario. Se aplicó un cuestionario a los y las estudiantes, compuesto por 10 tareas focalizadas, cuidadosamente diseñadas para ser resueltas de manera individual y por escrito. Este enfoque permitió alcanzar un número significativo de participantes y posibilitó el uso de técnicas de análisis multivariado para el análisis de las respuestas.

Las comprensiones sobre estos temas suelen ser lábiles y, en ocasiones, contradictorias. Por ello, el cuestionario fue diseñado con tareas abiertas, alejadas de los formatos escolares tradicionales y de problemas matemáticos típicos. Estas tareas planteaban diversos desafíos cognitivos con el objetivo de fomentar respuestas espontáneas y permitir mayor libertad de imaginación en los y las estudiantes.

El cuestionario abordó principalmente cuatro ejes temáticos:

- significado de número y número irracional (Tareas N1 y N2);
- orden y densidad de los números reales (Tareas D1 y D2);
- el infinito en el contexto de los números reales (Tareas I1, I2 y I3) y
- la recta como representación de los números reales (Tareas R1, R2 y R3).

Cada tarea implicó más de uno de estos aspectos, sin embargo, consideramos que esta agrupación atiende al principal en cada una de ellas.

2.3. Concepciones o comprensiones que buscábamos inferir con cada tarea. Respecto al significado de número y de número irracional en particular

Tarea N1: Concepciones sobre número en general
Tarea N2: Concepción de número irracional

Respecto a la densidad de los reales, en relación con el orden y el supremo de un intervalo

Tarea D1: Comprensión del orden y la densidad en los reales en el contexto de buscar números entre dos dados

Tarea D2: Comprensión del orden y la densidad en relación con el supremo de un intervalo de reales

Respecto a algunos aspectos del infinito implicados en los números reales

Tarea I1: Concepción de infinito cardinal en el contexto de la representación decimal infinito-periódica de un número

Tarea I2: Concepción de infinito cardinal en el contexto de la comparación de conjuntos infinitos de números

Tarea I3: Comprensión de la representación decimal infinito-periódica de un número en relación con el orden y la densidad

Respecto a la recta como representación de los reales

Tarea R1: Comprensión de la representación de distintos tipos de números reales en la recta

Tarea R2: Comprensión de la recta como representación de los números racionales y reales

Tarea R3: Concepción de la naturaleza de la recta numérica

En el Anexo presentamos las consignas de las tareas tal como fueron presentadas a quienes participaron del estudio y el objetivo primario de cada una. A modo de ejemplo presentamos a continuación la consigna de la Tarea R3 que indaga sobre la concepción de la naturaleza de la recta numérica.

Imagina que dispones de un microscopio ideal de gran potencia. Más aún, que puedes aumentar la imagen de los objetos tanto como quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta numérica. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio.

¿Podés dibujar lo que ves?

¿Podés describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?

Figura 1. La consigna utilizada para la Tarea R3 en el cuestionario.

§3. Modos de respuestas

En búsqueda de un repertorio de modos de respuesta a cada tarea, realizamos una categorización de éstas obteniendo clases disjuntas de modalidades de respuesta, para cada tarea. Interpretamos estas modalidades en términos de comprensiones del aspecto indagado y su asociación con el nivel de estudio en matemática. Caracterizamos cada categoría de respuesta según las ideas emergentes relacionadas con los diversos aspectos del número real abordados.

A modo de ejemplo presentamos la caracterización de los modos de respuesta determinados para la Tarea R3.

3.1. Caracterización de la modalidad de respuesta a la Tarea R3.

R3.1. Ajenidad (frente a la naturaleza de la recta numérica). El problema les es ajeno. Manifiestan no saber o no poder imaginar que ocurriría.

R3.2. Recta dibujada o material: Conciben la recta como un dibujo, como la marca que deja el lápiz o la tinta de la impresora en un papel (no se abstraen de la representación externa) o como constituida de materia (no se abstraen del objeto real "microscopio"). La recta no es un objeto matemático.

R3.3. Recta de (puntos) discreta. Ven uno pocos, muchos o una sucesión de puntos. Algunos aseguran ver una sucesión de infinitos puntos. La recta se concibe como conjunto de puntos (con medida) corresponde a la analogía del collar de perlas.

R3.4. Recta de magnitudes. Regla graduada. Ven la recta con escala, segmentada, con divisiones y subdivisiones. Conciben la recta numérica como el sostén de las magnitudes, es decir un instrumento de medida similar a una recta graduada decimal.

R3.5. Densidad numérica potencial - infinito como indefinido. Aseguran ver muchos o más números, nuevos números, o bien números con más cantidad de cifras decimales a medida que agrandan la recta. La recta se concibe como densa de números. Con aumento infinito manifiestan no saber, o que en el infinito no es posible. Algunos dibujan la recta con escala decimal.

R3.6. Densidad numérica potencialmente infinita. Aseguran ver muchos o más números, nuevos números o bien números con más cantidad de cifras decimales a medida que agrandan la recta. Algunos aseguran que al ir aumentando la potencia ven infinitos números. Con aumento infinito ven infinitos o todos los números. Suelen dibujar la recta con muchas marcas.

R3.7. Continuidad. Aseguran que al ir aumentando la potencia y con aumento infinito ven la recta continua o siempre ven lo mismo. Dibujan un segmento de recta sin marcas ni números. Conciben la recta como continua y como representación de la completitud de los números reales.

3.2. Asociaciones entre modos de respuestas a distintas tareas que nos muestran formas de comprender. El acceso a este repertorio de respuestas nos permitió inferir concepciones sobre cada aspecto indagado, analizar sus interrelaciones y obtener un panorama detallado de cómo los y las estudiantes conciben el número real abarcando todos los aspectos indagados. Gracias a la metodología utilizada, (Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples- AFCM) identificamos asociaciones entre los distintos tipos de respuestas, que nos permitieron reconocer diversas formas de comprender globalmente a los números reales.

Presentamos, a continuación, un esquema de las asociaciones de respuestas basado en los resultados del análisis multivariado realizado. Mostramos el primer plano factorial del AFCM de los estudiantes descriptos por sus modos de respuesta a las 10 Tareas. Hemos proyectado las modalidades de respuesta más contributivas a los factores, como así también las modalidades de la variable nivel de estudio de Matemática (3ro; 4to. 5to. EFI. EFA. BI. BA, MI y MA).

Muy sintéticamente podemos decir que los ejes factoriales representan los factores de variabilidad de los datos; que dos modalidades de respuesta estarán cercanas cuando sean globalmente los mismos/as estudiantes que la prefieren y cada modalidad de nivel de estudio, será el baricentro de las modalidades de respuesta, es decir que se encontrará más cerca de las modalidades de respuesta en que tenga mayor peso ese nivel de estudio. Estas asociaciones pueden ser interpretadas como formas integrales de comprender los números reales.

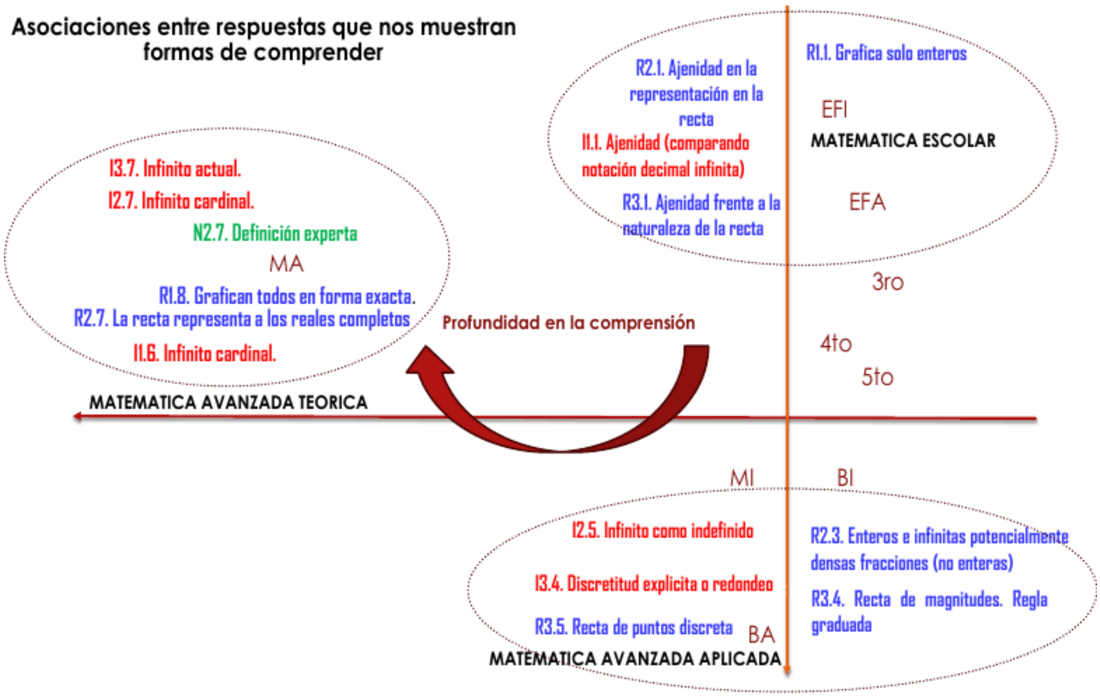


Figura 2. Asociaciones de respuestas donde se marcaron las asociaciones más fuertes entre modalidades de respuestas.

La asociación más fuerte que emergió de los análisis realizados se da entre las respuestas categorizadas como *infinito cardinal* o *infinito actual*, para las tareas que abordan el infinito en el contexto del número real. Estas respuestas se vinculan con una comprensión sólida de la recta numérica como representación completa de los números reales y con una definición experta de los números irracionales, en oposición a todas las demás respuestas. Están asociadas con estudiantes avanzados/as de Matemática (MA).

Además, identificamos dos asociaciones principales adicionales: por un lado: *la ajenidad* frente a las tareas del infinito y a la naturaleza de la recta y donde los y las participantes grafican únicamente números enteros; asociadas a estudiantes con menor estudio de matemática (EFI, EFA y 3ro). Por otro lado, las concepciones alternativas del infinito (*infinito como indefinido, infinito potencial*), *discretitud explícita o redondeo* y la representación de la recta numérica como una *sucesión discreta de puntos o como una recta de magnitudes*; principalmente asociadas a estudiantes ingresantes a carreras científicas y avanzados/as de Biología (BI, MI y BA).

De modo que las asociaciones entre modos de respuestas están determinadas por la manera en que se concibe la *recta como representación de los números reales* y por las *concepciones del infinito* que intervienen en la resolución de las tareas.

Identificamos dos factores de variabilidad asociados al nivel de estudio en Matemática, en dos direcciones distintas. En un extremo de ambos factores, encontramos a estudiantes con menor formación e interés en la Matemática. En el otro extremo, distinguimos dos tipos de profundización de los estudios matemáticos: por una parte, *estudios formales y teóricos* sobre los números reales (MA) y por otra, *estudios orientados a aplicaciones* de los números reales (BA). Estos factores (representados por los ejes en el gráfico) pueden considerarse indicadores de profundidad en la comprensión de los números reales, en función tanto del nivel de estudios en Matemática como del tipo de enfoque de estos estudios: Matemática escolar, Matemática avanzada teórica o Matemática avanzada aplicada.

§4. Modos integrales de comprensión de los números reales. Relación con el nivel de estudio

Mediante el análisis de las asociaciones entre los modos de respuesta de un/a mismo/a estudiante y entre aquellos de los y las distintos/as estudiantes, elaboramos una tipología integral de respuestas al cuestionario. De modo que construimos un repertorio de modalidades de comprender cada uno de los aspectos indagados y una tipología global que integra las formas de comprender estos aspectos. Analizando, además cómo estas formas de entender el número real se relacionan con los estudios de Matemática realizados. A continuación, mostramos un esquema de las asociaciones de modalidades de respuestas a todas las tareas que determinaron siete modos integrales de comprensión de los números reales, en relación con el nivel de estudio, insinuadas por elipses de líneas de puntos.

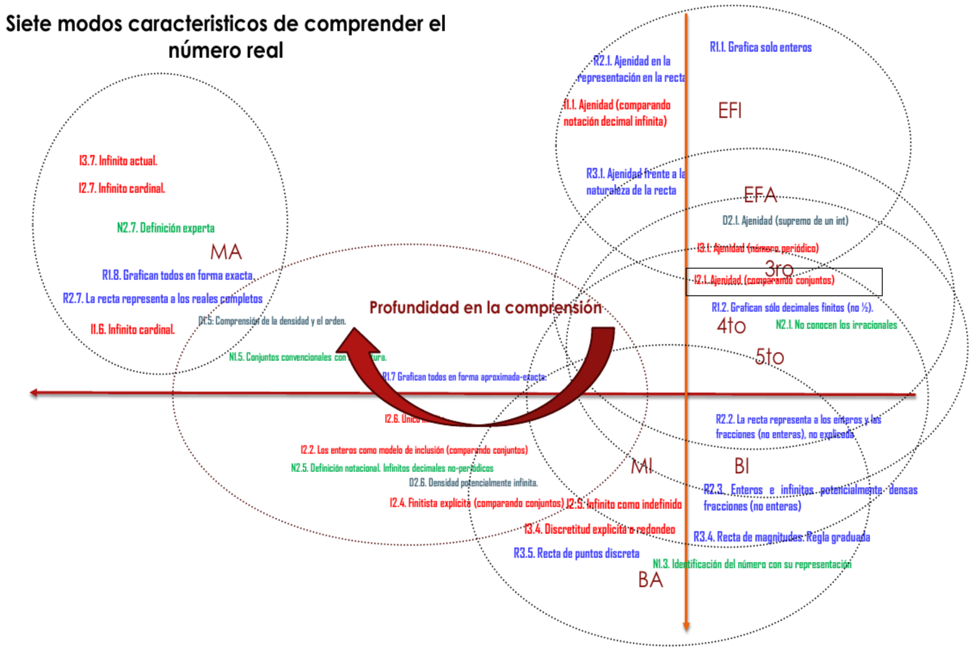


Figura 3. Asociaciones de modalidades de respuestas que muestran los siete modos integrales de comprensión de los números reales que fueron determinados.

Determinamos *siete modos característicos de comprensión del número real*, organizados en un orden progresivo de profundidad en la comprensión de este concepto. Identificando asociaciones entre estos modos de respuesta y el nivel y tipo de estudio de Matemática de los participantes.

1. *Solo los enteros son números. Ajenidad* (6 % de la población)

   Comprensión que se observa en un pequeño grupo de estudiantes que consideran que sólo los enteros son números. Presentan inseguridad respecto al orden, la densidad, la representación en la recta y evitan el concepto de infinito. Se asocia principalmente con estudiantes con menos estudios de Matemática.

2. *Los enteros y fracciones finitas representados en la recta. Ajenidad* (18 % de la población)

   Estudiantes que consideran que los números incluyen enteros, fracciones y decimales finitos. Manifiestan inseguridad frente al orden y la densidad, y conciben la recta como representación de enteros, fracciones y decimales finitos. La naturaleza de la recta y la cardinalidad de los conjuntos numéricos les resultan ajenas. Se asocia mayormente con estudiantes de secundaria.

3. **Decimales finitos. Discretitud explícita. Visión finitista.** (25 % de la población)

   Estudiantes que consideran que los números incluyen a los enteros y decimales finitos. Confunden los irracionales con los decimales. Expresan una visión discreta explícita de los números, visualizando la recta como una recta de puntos discretos o una recta material dibujada. Manifiestan una concepción finitista implícita al comparar. Todo esto sugiere un traslado de la estructura de los enteros a los décimos o centésimos. Se asocia principalmente con estudiantes de quinto año.
4. *Decimales infinito-potencialmente densos representados en la recta. Infinito potencial y comparación por inclusión.* (19 % de la población)

   Estudiantes que consideran que los números incluyen enteros, fracciones y decimales potencialmente densos. Se centran en los conjuntos numéricos escolares y dan una definición literal de los irracionales como "no-fracción". La densidad es concebida como potencialmente infinita, y el infinito se visualiza como potencial o indefinido. La recta es vista como potencialmente densa de números decimales. Se asocia con estudiantes ingresantes a las carreras científicas (BI y MI).
5. *Racionales por su aproximación decimal finita mediada por la utilidad. Discretitud y finitud intencional. Recta graduada (magnitudes decimales).* (17 % de la población)

   Estudiantes que consideran que los números incluyen decimales finitos por redondeo y describen a los irracionales como números con infinitos decimales. Identifican intencionalmente a cada real con su aproximación racional finita. La densidad de los números depende de su utilidad, manifestando una visión finitista explícita. La recta se concibe como una regla graduada con magnitudes decimales finitas. Comparan los conjuntos infinitos desde una perspectiva finitista o ven el infinito como indefinido o único. Se asocia con estudiantes avanzados/as de Biología (BA).
6. *Reales como unión de racionales e irracionales. Densidad potencialmente-infinita. Infinito en sentido común. La recta continua representa a los reales.* (10 %)

   Estudiantes que consideran que los números son elementos de conjuntos numéricos bien definidos. Conocen los números irracionales y los describen mediante su definición notacional. Ven a los reales como infinito-potencialmente densos, comprenden el orden y los conciben como unión de racionales e irracionales. La recta es vista como continua, y comparan conjuntos infinitos por inclusión o con razonamientos finitistas. Se asocia con estudiantes ingresantes de Matemática (MI).
7. *Reales completos. Recta continua. Infinito actual.* (5 %)

Un pequeño grupo de estudiantes, que concibe los números como elementos de un conjunto numérico con estructura. Definen los irracionales de manera experta, comprenden el orden y la densidad de forma actual y consideran la recta como continua, representando a los reales completos. Además, presentan una visión de infinito actual, y en algunos casos, plantean una única cardinalidad infinita. Se asocia con estudiantes avanzados/as de Matemática (MA).

§5. Gradiente de amplitud y profundidad en la comprensión de los números reales

Mostramos un gradiente de amplitud y profundidad en los modos de comprensión de los números reales inferidos. Este orden lo establecemos teniendo en cuenta: cuán amplio es el conjunto numérico que se evidencia en las respuestas; las nociones de discretitud, densidad o completitud que se pusieron en juego; si las respuestas pueden ser consideradas finitistas, infinitistas en sentido común, o infinitistas en sentido matemático y visiones de discretitud, densidad o continuidad y concepciones sobre infinito se manifiestan en la comprensión de la recta numérica.

Consideramos en primera instancia los conjuntos numéricos que los y las estudiantes abarcan en los tipos de respuestas en cada uno de los siete modos de comprensión, de este modo obtuvimos un gradiente que comienza desde lo que podemos denominar una comprensión centrada en los números enteros, para luego encontrar una comprensión centrada en los números racionales y, por último, una comprensión centrada los números reales como unión de racionales e irracionales.

Comprensión centrada en los números enteros.

En un extremo del gradiente encontramos un pequeño grupo de estudiantes que ve *sólo como números a los enteros, presenta inseguridad respecto del orden, la densidad, la representación en la recta y evasión del infinito,* continuando por un grupo de estudiantes que perciben a los números *como los enteros y (finitas) fracciones, presentan ajenidad respecto de la recta numérica y una visión finitista (no explicada)*. Son principalmente estudiantes con menos estudios de Matemática y representa el 24 % de la población.

Comprensión centrada en los números racionales mayormente como decimales.

En un estadio intermedio encontramos la comprensión más popular en esta población y manifestada principalmente por estudiantes de secundaria: Esta es una visión de *los números como decimales finitos, un traslado de los enteros a los décimos, discretitud explícita y concepción finitista*. Una segunda forma de comprender a los reales también intermedia, principalmente de estudiantes de quinto año de secundaria e ingresantes a las carreras científicas, es una visión de los *números como los enteros y potencialmente infinitas fracciones y* *decimales, el conjunto de enteros como modelo de inclusión y el infinito en forma potencial.* Son visiones de los números donde se consideran principalmente los decimales y representan el 44 % de la población. Una tercera forma de comprender a los reales como racionales, un poco más elaborada es una visión de *los números como magnitudes (decimales), en forma intencionalmente finitista y discreta mediante redondeo o aproximación*, fundamentalmente construida por estudiantes avanzados de Biología (17 %).

Comprensión centrada en los reales como unión de racionales e irracionales.

En el otro extremo del gradiente encontramos dos formas más profundas de comprensión que son: una visión de *los números reales como unión de racionales e irracionales,* estos últimos descriptos por su *definición notacional, la densidad como potencialmente infinita; una visión de infinito potencial o de único infinito al comparar y la recta como representando los decimales*, construida por estudiantes de Matemática (ingresantes y avanzados/as) y por último, unos pocos estudiantes avanzados/as de Matemática, que han construido una visión muy cercana al concepto matemático y ven a *los números reales como completos, la recta continua y el infinito en forma actual*. Representan estas dos últimas el 15 % de la población.

§6. Perfiles de modos integrales de comprensión de los reales según el nivel de estudio

6.1. Distribución de los modos de comprensiones en los niveles de estudio en Matemática. A continuación, mostramos la distribución de los modos integrales de comprensión de los reales en cada nivel de estudio. Vemos como cada perfil de distribución es característico y distinto al perfil medio de la población. Algunos son similares entre si como 4to y 5to o EFI y EFA. Ciertos tipos de respuestas se presentan como característicos de algún nivel de estudio: *como reales completos, recta continua e infinito actual* para MA; *racionales por su aproximación decimal finita, mediada por la utilidad*, para BA; *decimales (finitos), discretitud explícita y finitistas* para 4to y 5to. Como así también decimales infinito-potencialmente densos para 3ro.

Es notable como (salvo para MA) en cada nivel de estudio están presentes casi todas las clases de respuestas, lo que muestra la diversidad de ideas que pueden operar en un grupo-clase de estudiantes, tanto en la secundaria como en la universidad.

6.2. Asociaciones de perfiles de respuesta según el nivel y tipo de estudio de Matemática. Estudiamos, además, asociaciones entre los perfiles de distribución de modos integrales de respuesta a todo el cuestionario en los niveles de estudio. Describimos, estas asociaciones mediante los modos de respuesta que encontramos como característicos de los distintos niveles de estudio. No debemos perder de

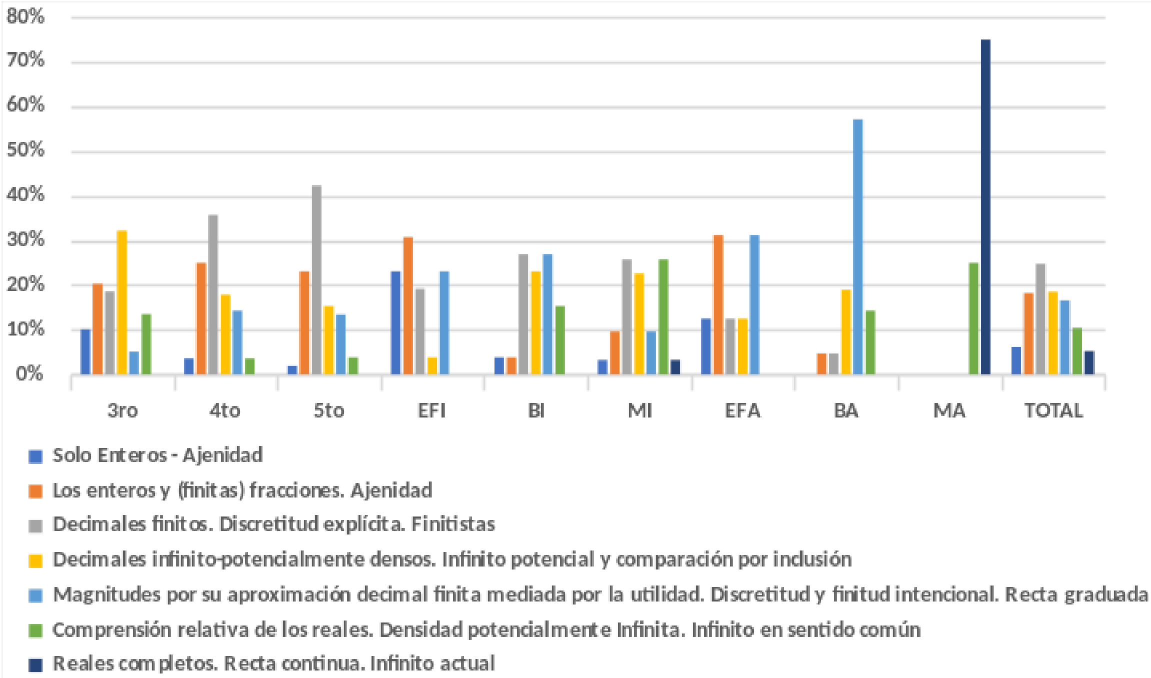


FIGURA 4. Distribución de los modos integrales de comprensión de los reales en cada nivel de estudio.

vista que esto nos da un panorama muy general y que en cada nivel de estudio se presentan casi todos los modos de respuesta. A partir de este análisis identificamos cinco perfiles diferenciados según el nivel y tipo de estudios en Matemática.

Perfil de estudiantes con menores estudios en Matemática (EFI y EFA).

Estudiantes con educación secundaria, sin formación universitaria en Matemática y con poco interés en el tema. Su comprensión se basa en los números enteros, incluyendo, en algunos casos, fracciones y decimales finitos. Predomina una actitud de ajenidad frente a las problemáticas relacionadas con los números reales.

Perfil de secundaria (3°, 4° y 5° año).

Se mantiene una visión de los enteros como modelo numérico central. En muchos casos, los y las estudiantes parecen haber trasladado la idea de los enteros a los décimos, con una visión discreta explícita. Algunos estudiantes comienzan a manifestar una noción de infinito potencial, así como la identificación de los números reales con los decimales.

Perfil de ingresantes a carreras científicas (BI y MI).

Se asocia con la identificación de los números reales con los decimales, aunque con una comprensión relativa del concepto. La densidad se percibe como potencialmente infinita. Se observa una visión del infinito como potencial o como un único infinito al comparar cardinalidades.

Perfil de Matemática Avanzada Aplicada (BA).

Comparte características con el perfil anterior, pero incorpora una visión en la que los racionales se identifican con su aproximación decimal finita, mediada por su utilidad en contextos de medición o magnitudes. Los números reales son comprendidos a partir de una finitud y discretitud intencional.

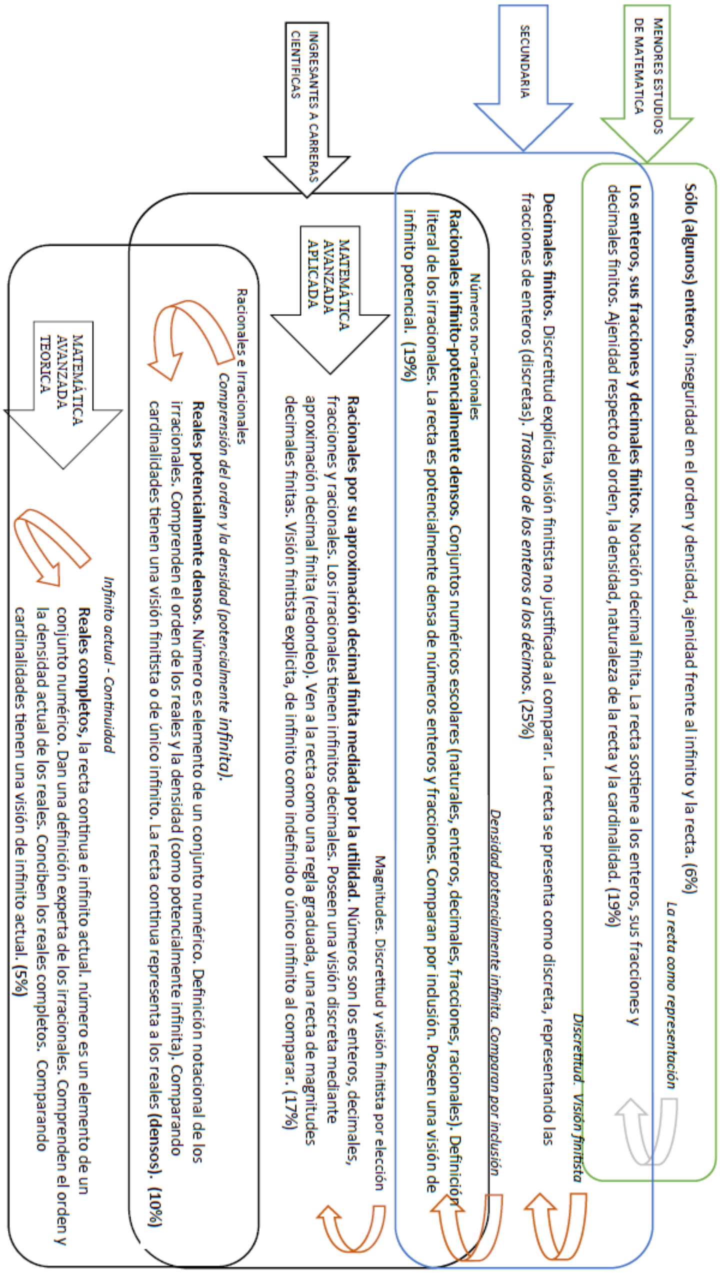


Figura 5. Esquema del gradiente de amplitud y profundidad de la comprensión de los números reales, hitos característicos en los pasos entre grados de comprensión y según los perfiles de respuesta características por nivel y tipo de estudios.

Perfil de Matemática Avanzada Teórica (*MA*).

Se caracteriza por una comprensión más estructurada y formal de los números reales. Se identifica una visión de los reales como un conjunto completo, representados en una recta continua. Se reconoce el concepto de infinito actual, lo que refleja una comprensión cercana a la de un experto en Matemática.

En el esquema de la figura 5 sintetizamos el gradiente de amplitud y profundidad en la comprensión de los números reales evidenciado en las clases de respuestas a todo el cuestionario y los perfiles de niveles de estudio en Matemática asociados con sus grupos de respuestas característicos. Se destacan los hitos característicos en los pasos entre grados de comprensión de los números, matices de los aspectos indagados cuya incorporación hacen notable la ampliación y profundización conceptual entre modos de comprensión.

§7. Progresión en la comprensión de los números reales según el nivel de estudio de matemática

Presentamos, a continuación, un esquema de la progresión en la visión de los números según el tipo de números que incorporan los y las estudiantes en sus respuestas y según los distintos niveles de estudio en Matemática, debe tenerse en cuenta que los modos de comprensión pueden superponerse en los distintos niveles de estudio en Matemática, tanto como los niveles de estudio en los modos de comprensión.

Los modos de comprender los números reales se nos mostraron en un arco que abarca desde una visión escolar (primaria) basada plenamente en *los números enteros*, para ir incorporando algunas fracciones y decimales finitos, característica de estudiantes con menores estudios en Matemática.

Luego una visión centrada en *los racionales* identificados con su representación, como fracciones o *decimales* conservando la *discretitud* de los enteros, que se presenta como una visión propia de la secundaria.

En una transición entre secundaria y universidad encontramos los *decimales*, pero ahora *potencialmente densos*, acercándose a una identificación de los *números con los racionales*.

Como concepciones universitarias encontramos tres formas: la que *incorpora además los números irracionales, y ve a los números como potencialmente densos*, una *visión de discretitud e infinitud intencional* (redondeo, tantos decimales como se necesiten, etc.) que da una visión utilitaria de los números como magnitudes; otra que concibe a los reales como unión de *racionales e irracionales, comprendiendo el orden como potencialmente denso;* y finalmente una visión *de densidad infinito actual de los números y de los reales como completos*.

Figura 6. Esquema de la visión de los números según el tipo de números que los y las estudiantes incorporan en las respuestas y según los NEM.

§8. Algunas conclusiones

- A partir de los resultados de las asociaciones de respuesta al conjunto de tareas, sabemos que los aspectos que determinan la mayor variabilidad en este repertorio de modos de comprender los números reales tienen que ver con: cómo se concibe a la recta como representación de los números y con las concepciones de infinito que operan. Los núcleos temáticos indagados se interrelacionan tanto epistemológicamente como cognitivamente, por lo que, a través de este análisis, hemos podido sacar a la luz cómo la manera de enfocar cada uno de estos aspectos puede colaborar a construir una idea más acabada del número real, o en vez operar como obstáculo para ello.
- El gradiente de comprensión de los números reales, asociado a la amplitud del conjunto numérico considerado, diferentes modos de ver la densidad numérica, de concebir el infinito y la recta numérica como representación de los reales, mantiene una relación con el nivel de estudio en Matemática, pero no se da de forma ni cronológica ni uniforme. Decimos que la relación no es cronológica pues estudiantes que previamente han cumplimentado cierta cantidad de años de estudio, pero no se encuentran actualmente en contacto con la Matemática, pueden evidenciar menor nivel de comprensión que otros/as con menos años de estudio pero que actualmente están estudiando matemática. Decimos que la asociación tampoco es uniforme pues un mismo

nivel de estudio puede estar asociado a más de un nivel de comprensión, excepto para algunos/as estudiantes avanzados/as de Matemática.

- La mayoría de los/las participantes en este estudio han interiorizado el concepto de número real asociado al de número racional, entendiendo los reales como decimales discretos o potencialmente densos, y considerando a los irracionales como algunos (pocos) números especiales.
- Las nociones de infinito actual, cardinalidad y completitud-continuidad funcionan como conceptos algo opacos durante los últimos cursos de la secundaria y los primeros años de universidad. Aunque estos conceptos son fundamentales para varias prácticas, especialmente en los primeros años de las carreras científicas, su comprensión aún no se asienta de forma clara en muchos estudiantes. Ampliar y profundizar el conocimiento numérico requerirá del o de la estudiante un esfuerzo cognitivo importante al hacerse necesario poder reconocer correctamente qué propiedades son adecuadas al conjunto numérico utilizado y a la tarea en cuestión.
- Es posible que en la vida cotidiana sea suficiente una visión finitista y discreta de los números, mientras que, en las aplicaciones a la ciencia, la tecnología o la educación puede parecer suficiente una visión infinito potencial de los decimales (en ocasiones intencionalmente finitista), sin embargo, por momentos se necesitará (dependiendo de la complejidad del contexto) una visión más avanzada en cuanto a la continuidad y el infinito. Sin lugar a duda para la población de matemáticos/as u otros/as científicos/as que construyen o justifican la Matemática como ciencia es imprescindible una visión numérica de los reales completos y de infinito actual.

§9. Algunas reflexiones para la enseñanza

Mostramos la diversidad de ideas que pueden operar en un grupo-clase de estudiantes, tanto en la secundaria como en la universidad. Al considerar esta variedad, el docente puede partir de estas concepciones para facilitar los aprendizajes y desarrollar estrategias que favorezcan la reflexión colectiva. Este enfoque permite visibilizar las distintas ideas, ayudando a los y las estudiantes a revisar, articular o refinar sus conceptos.

Es fundamental observar el esfuerzo cognitivo que implica explicitar la naturaleza del número real, así como conceptos abstractos como el infinito o la completitud-continuidad. Este esfuerzo subraya que, para que los y las estudiantes logren apropiarse de tales conceptos, la enseñanza debe integrar entre sus metas un trabajo específico y explícito sobre estas nociones complejas, especialmente en los últimos años de secundaria y primeros de universidad. De esta manera, se facilitará la transición de una matemática escolar hacia una matemática avanzada.

Destacamos la brecha conceptual que existe entre la capacidad de pensar u operar con colecciones potencialmente infinitas y con conjuntos actualmente infinitos. El infinito matemático está muy lejos de ser una noción que los y las estudiantes adquieran simplemente por estar en contacto con conjuntos infinitos de números, ya que se trata de una comprensión profunda que debe ser desarrollada explícitamente.

La representación del continuo de los números reales está muy lejos de ser una noción que se adquiera simplemente por estar frente a una definición o convención. El supuesto imperante en la enseñanza de que la representación de los números reales en la recta puede resultar "natural" o accesible de forma directa al estudiante, puede convertirse en un serio obstáculo para promover una comprensión profunda de los números reales.

§10. A modo de cierre

Podemos pensar al número real como una construcción cultural e históricamente generada, que nos permite acceder a otros mundos posibles, más allá del mundo (paradójicamente) real de objetos finitos y discretos. La comprensión de este conocimiento numérico no solo exige una reconstrucción mental, sino que la hace posible, generando nuevas formas de pensar y concebir el mundo.

§11. Anexo. Las tareas del cuestionario

En este anexo presentamos las consignas de las tareas del cuestionario tal como fueron presentadas a quienes participaron del estudio y el objetivo primario de cada una.

Tareas respecto al significado de número y de número irracional en particular

- *Tarea N1. Concepciones de número según una tipología*

  > Por favor, menciona los tipos de números que conoces. ¿Podrías darnos un ejemplo de cada uno?

  Con esta tarea pretendimos conocer qué es para estos y estas estudiantes "un número" a través de una tipología de números propuesta por ellos y ellas. También si reconocen distintos tipos de números, particularmente si consideran a los racionales, irracionales y reales como números.

- *Tarea N2. Concepción de número irracional*

Posiblemente has escuchado que $\sqrt{2}$ y el número π son números irracionales. ¿Cómo explicarías con tus palabras en qué consiste esa condición de ser "irracionales"?

¿Conoces otros números irracionales?... ¿Cuáles?

Con esta tarea nos propusimos explorar si los y las estudiantes conocen los números irracionales, si los reconocen con condiciones necesarias y suficientes (si los reconocen como los reales que no se pueden escribir como fracción (cociente) de enteros, con denominador distinto de cero o como los que poseen infinitos decimales no-periódicos) y si pueden diferenciarlos de los racionales. La tarea nos habilita a inferir una posible identificación de los reales con los racionales y/o de los irracionales con las raíces o con ciertos números muy especiales.

Tareas respecto a la densidad de los reales, en relación con el orden y el supremo de un intervalo

- *Tarea D1. Comprensión del orden y la densidad de los reales en el contexto de buscar números entre dos dados*

Cuando decimos "un número entre 0 y 2", nos referimos a un número mayor que 0 y menor que 2.

¿Podrías nombrar un número entre…..

0 y 2?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé
1/5 y 1/4?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé
3,14 y π?	□ Si.	¿Cuál?	□ No hay	□ No sé

¿Cuántos números hay entre:

0 y 2?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé
1/5 y 1/4?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé
3,14 y π?	□ Ninguno	□ Unos pocos	□ Muchísimos	□ Infinitos	□ No sé

El objetivo de esta tarea fue conocer cómo conciben estos y estas estudiantes el orden de los reales con sus especiales características en relación con la densidad y con distintas notaciones para los números: fraccionaria, decimal o nominal (esta última para un irracional) e identificar si los y las estudiantes confunden la densidad de los racionales con la completitud de los reales. También buscamos inferir concepciones sobre infinito, en relación con la cantidad de números entre dos dados y con la densidad.

- *Tarea D2. Concepción sobre el orden y la densidad en relación con el supremo de un intervalo*

En matemática solemos considerar el intervalo (1,2) como todos los números mayores que 1 y menores que 2. Vemos que ni 1 ni 2 pertenecen al intervalo.
Una profesora de Matemática de la Universidad nos contó que discutió con sus alumnos sobre la posibilidad de identificar dentro del intervalo al número que se encuentra lo más cerca posible de 2.

¿Qué pensás al respecto? ¿Se puede identificar el número que se encuentra lo más cerca posible de 2 y que pertenezca al intervalo? ______________________________

____

¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

____

____

El objetivo de esta tarea fue conocer cómo conciben estos y estas estudiantes el orden de los reales con sus especiales características en relación con la densidad y el supremo de un intervalo de números reales. En particular identificar si los y las estudiantes confunden la densidad de los racionales con la completitud de los reales e inferir concepciones sobre infinito, en relación con la cantidad de números entre dos dados, la densidad y la completitud.

Tareas respecto a algunos aspectos del infinito implicados en los números reales

- *Tarea I1. Comprensión del infinito cardinal en el contexto de la representación decimal infinito-periódica de un número.*

Probablemente sepas que en matemática solemos escribir al número con infinitas cifras decimales iguales a 3 como: $0,\hat{3}=0,33333..$
El número con infinitas cifras decimales que se repiten, iguales a 32 se escribe: $0,\overline{32}=$ 0,323232....
De modo que por ejemplo $2,2\hat{9}$ = 2,299999… posee infinitas cifras decimales 9 a partir de los centésimos

¿En cuál de los siguientes números hay más cantidad de cifras 3?

Comparando $0,\hat{3}=0,33333...$ y $0,\overline{32}=0,3232323232....$

□ Hay más en $0,\hat{3}=0,33333...$ □ Hay más en $0,\overline{32}=0,3232323232....$
□ Hay igual cantidad □ No se pueden comparar
□ No sé

¿Podés explicar por qué elegiste esa opción?

____

____

El objetivo de la esta tarea es estudiar cómo comprenden los y las estudiantes el infinito cardinal en el contexto de la comparación de colecciones numerables ordenadas. Esto es las infinitas cifras decimales en la representación decimal infinito-periódica de un número racional.

- *Tarea I2.*[1] *Concepciones sobre el infinito cardinal en el contexto de la comparación de la cardinalidad de conjuntos infinitos de números .*

A continuación aparecen parejas de conjuntos numéricos. Comparando estas parejas ¿qué conjunto es más abundante, es decir con más cantidad de números? ¿Por favor, explicarías por qué pensás así en cada caso?

Capicúas	No capicúas	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Los números primos	Los números pares	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Naturales	Enteros	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Enteros	Racionales	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?
Racionales	Irracionales	□ El primero es más abundante □ El segundo es más abundante □ Son igual de abundantes □ No se pueden comparar □ No sé	¿Por qué?

El objetivo de esta tarea fue conocer las concepciones de estos y estas estudiantes sobre el infinito en el contexto de la comparación de la cardinalidad de conjuntos infinitos de números, sin plantear explícitamente que se trata de conjuntos infinitos, ni mostrar una posible biyección entre ellos.

- *Tarea I3.*[2] *Comprensión de la representación decimal infinito-periódico de un número.*

Comparando el número $0,\overline{9} = 0{,}9999\ldots$ con 1:

□ $0,\overline{9} = 0{,}9999\ldots$ es mayor que 1.
□ $0,\overline{9} = 0{,}9999\ldots$ es menor que 1.
□ $0,\overline{9} = 0{,}9999\ldots$ es igual a 1.
□ son incomparables:
□ otra posibilidad:
□ no sé.

¿Por qué pensás que esto es así?

El objetivo de esta tarea fue estudiar las comprensiones sobre del orden y la densidad de los números reales de los y las estudiantes en una situación

[1]Esta tarea fue presentada en: Montoro et al. (2016)
[2]Varios/as autores/as han usado la misma tarea en sus estudios (Tall, 1991)

de representación decimal infinito-periódico de un número racional y que concepciones sobre infinito operan en estas.

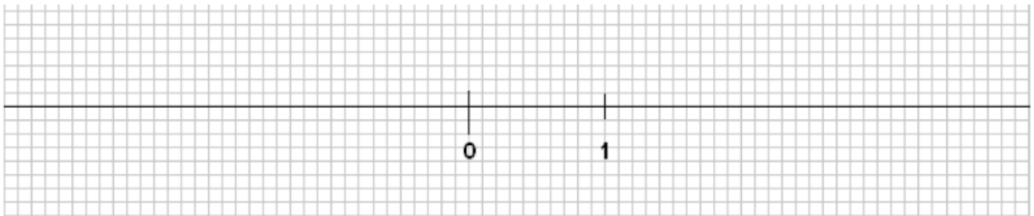
Tareas respecto a la recta como representación de los reales

- *Tarea R1. Comprensión de la representación de números reales en la recta*

Durante muchos siglos una cuestión que intranquilizó a muchos matemáticos fue la representación y distribución de los números en la recta numérica.

Más abajo te ofrecemos una recta numérica. Por favor, ¿podrías representar los siguientes números en ella?

$0{,}2$; 2 ; -2 ; $\sqrt{2}$; ½ ; $2{,}2$; $2{,}2\overset{\frown}{9}$



Si no pudiste representar alguna de las expresiones te rogamos que para cada una de ellas llenes lo siguiente:
_______ no lo pude representar porque ____

El objetivo de esta tarea fue conocer cómo estos y estas participantes conciben la representación de distintos números reales: enteros, racionales e irracionales (construibles), cuando la recta numérica es dada con una escala decimal.

- *Tarea R2. Concepción de la recta como representación de los números reales*

Si fuera posible marcar sobre la recta TODAS las fracciones (números racionales). ¿la recta. se llenaría. se completaría? □ Sí. □ No.
¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

____

____

Si además de los racionales. marcáramos todas sus raíces (cuadradas. cúbicas. etc) ¿se completaría la recta? __________. ¿Quedaría lugar para más números? __________ ¿Para cuántos? __________
¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

____

____

Si de la recta numérica quitásemos todas las fracciones (números racionales) ¿qué pensás que quedaría?

____

____

Los objetivos de esta tarea fueron: conocer cómo los y las estudiantes conciben en la recta numérica como representación de los números reales, la diferenciación entre números racionales y números reales y la diferenciación entre densidad y completitud-continuidad.

- *Tarea R3.*[3] *Concepciones de la naturaleza de la recta numérica* [4].

Si fuera posible marcar sobre la recta TODAS las fracciones (números racionales), ¿la recta, se llenaría, se completaría? □ Si. □ No.
¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

____

____

Si además de los racionales, marcáramos todas sus raíces (cuadradas, cúbicas, etc) ¿se completaría la recta? __________. ¿Quedaría lugar para más números? __________ ¿Para cuántos? __________
¿Cómo lo pensás vos? ¿Cómo lo explicarías a alguien que piense lo contrario?

____

____

Si de la recta numérica quitásemos todas las fracciones (números racionales) ¿qué pensás que quedaría?

____

____

El objetivo de la Tarea R3 fue conocer cómo estas/os estudiantes conciben a la recta numérica como representación de los números reales, identificando diferentes modos de pensar la naturaleza de la recta numérica e inferir las concepciones sobre el infinito, la densidad y completitud de los números reales y su relación con la continuidad de recta.

Referencias

Ausubel, D., Novak, J., & Henesiam, H. (1978). *Educational Psychology: A Cognitive View*. Holt, Rinehart; Winston.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

Ministerio de Educación de Río Negro. (2017). Educación Matemática, Diseño Curricular de la Escuela Secundaria de Río Negro [Documento oficial].

Montoro, V. (2022). Diversidad de ideas construidas por estudiantes sobre los números reales, los números irracionales, el orden y la densidad. *RevEM*, *37*(1), 61-92. https://doi.org/10.33044/revem.32442

[3]El análisis de esta tarea fue publicado en Montoro et al. (2017)

[4]Tarea similar a la utilizada por (Romero, 1996) que ya era una modificación de la utilizada por (Robinet, 1986).

Montoro, V. (2023). *Comprensión del Número Real en Estudiantes de Secundaria y de Universidad* [Tesis Doctoral]. Universidad Nacional del Comahue. http://rdi.uncoma.edu.ar/handle/uncomaid/17555

Montoro, V., Cifuentes, M., Salva, N., & Bianchi, M. J. (2017). Students' understanding of the number line / estudiantes pensando en la recta numérica. *Infancia y Aprendizaje*, *40*(2), 302-342.

Montoro, V., Scheuer, N., & Echeverría, M. (2016). ¿Cuán abundantes son los conjuntos de números? Estudiantes comparando infinitos. *Educación Matemática*, *28*(3), 145-174.

Pozo, J. I., & Scheuer, N. (1999). Las concepciones sobre el aprendizaje como teorías implícitas. En J. I. Pozo & C. Monereo (Eds.), *El aprendizaje estratégico* (pp. 87-108). Santillana.

Robinet, J. (1986). Les Réels: Quels modèles en ont les élèves? *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 359-386.

Romero, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. *Enseñanza de las Ciencias*, *14*(1), 3-14.

Sfard, A. (2010). A theory bite on infinity: A companion to falk. *Cognition and Instruction*, *28*, 210-218.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21, Vol. 11). Springer.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Vosniadou, S. (Ed.). (2008). *International Handbook of Research on Conceptual Change*. Routledge.

VIRGINIA MONTORO
Departamento de Matemática - Universidad Nacional del Comahue (Bariloche)
Grupo Vinculado de Estudios Culturales y Cognitivos - IPEHCS (CONICET -UNCo)
(✉) *vmontoro@gmail.com –virginia.montoro@crub.uncoma.edu.ar*

Recibido: *25 de marzo de 2025.*
Aceptado: *18 de agosto de 2025.*
Publicado en línea: *29 de agosto de 2025.*