DOI: https://doi.org/10.15446/bol.mat.v31n1.121298

Boletín de Matemáticas **31**(2) (2024)

Origin and development of the theory of core models II

Origen y desarrollo de la teoría de modelos núcleo II

José Adrián Gallardo Quiroz[1,a],
Édgar Alonso Valenzuela Nuncio[1,b], **Luis Miguel Villegas Silva**[1,c]

Resumen. For this second part, we continue with the proposed goals in the first part. Now we deal with higher than K^{DJ} core models. That is, core models that allow large cardinals like measurables or higher. We begin by studying extender ultrapowers of the universe as a direct limit. The importance of this study is to illustrate, with strong cardinals, the requirements to construct an inner model with these cardinals. We discuss the covering property for higher-order core models. Next, we assess the hardships of constructing core models below a Woodin cardinal. We discuss the concept of iteration trees and the Woodin cardinal influence for iteration trees. Finally, we examine the current status of the subject and gather the core model notion.

Palabras claves: Set theory, Inner Models, Core model theory, Large Cardinals, Sequences of measures, Covering Theorem, Extenders, Sharps.

Abstract. En esta segunda parte continuamos con los objetivos propuestos en la primera, pero esta vez nos encargamos de modelos núcleo superiores a K^{DJ}, es decir, aquellos que pueden contener cardinales medibles o mayores. Se inicia con un examen de la construcción de ultrapotencias del universo mediante un extensor visto como un límite directo. Parte importante de esta descripción es ilustrar mediante cardinales fuertes los requerimientos para lograr un modelo interno con un cardinal de este tipo. Se discute la propiedad de cubierta para modelos núcleo de orden superior. A continuación se examinan las dificultades para construir modelos núcleo debajo de un cardinal Woodin, la noción de árbol de iteración, y la influencia de los cardinales Woodin en este concepto. Finalmente se examina el estado actual de la teoría y se resume la noción de modelo núcleo.

Keywords: Teoría de conjuntos, Modelos internos, Teoría de modelos núcleo, Grandes cardinales, Sucesiones de medidas, Teoremas de cubierta, Extensores, Sostenidos.

Mathematics Subject Classification: Mathematics Subject Classification According to AMS: Primary 03C20, 03C30, 03C55, 03E30, 03E35, 03E45, 03E55; Secondary 03-02, 03B80, 03C98, 03E47, 03E65.

Recibido: abril de 2024 Aceptado: abril de 2025

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, CDMX, CP09340, México

[a]adrian.gaq@gmail.com

[b]gar_ed_93@hotmail.com

[c]villegas63@gmail.com

1. Introducción

En la primera parte de este trabajo estudiamos los modelos núcleo hasta el modelo K^{DJ} en caso de no existir un cardinal medible, o hasta $L[U]$ cuando sí existe tal cardinal. Describimos también el modelo núcleo para sucesiones de medidas $K[\mathscr{F}]$, así que examinamos modelos núcleo incluso cuando $\exists\, \kappa(o(\kappa) = \kappa^{++})$. Como se observa al final de la primera parte, para desarrollar modelos núcleo de orden superior requerimos idear algo más que ultrafiltros normales para conseguirlo. No se deja de lado la noción de ultrafiltro normal, sino que se aprovechan todas las figuras que hemos obtenido pero a través de familias de medidas. Son muchas las virtudes de esta idea llamada extensor y en esta segunda parte nos ocuparemos de los modelos núcleo de la forma $L[\mathscr{E}]$ donde $\mathscr{E}$ es una sucesión de extensores. Para introducir formalmente la noción de extensor, ilustramos la construcción de una ultrapotencia como límite directo de ultrapotencias generadas mediante medidas dadas por un encaje elemental. Una vez que dispongamos de esta construcción, extraemos las propiedades que deben cumplir la familia de medias para generar una axiomatización de la noción de extensor.

Dado un cardinal fuerte κ, la definición del mismo propicia un encaje elemental del cual se puede derivar un extensor E, y parecería natural suponer que el modelo núcleo correspondiente para un cardinal fuerte tendría la forma $L[E]$, desafortunadamente en este modelo interno no existen cardinales fuertes; para salir de este atolladero, requerimos considerar sucesiones de extensores $\mathscr{E}$, pero aparecen dificultades similares a las que describimos para $L[\mathcal{U}]$, cuando tratamos de probar la HGC (y otros principios combinatorios), por lo que la sucesión de extensores no puede ser arbitraria, sino que debe cumplir ciertas propiedades de coherencia. Suponiendo que disponemos de tal sucesión $\mathscr{E}$, se construye el modelo interno $L[\mathscr{E}]$ y se demuestra la HGC, y no mucho más. Para lograr realmente el modelo núcleo correspondiente se requiere incorporar la teoría de estructura fina y construir la sucesión por recursión.

Como mencionamos en la primera parte, un concepto relevante en modelo núcleo es la propiedad de cubierta. Para los modelos ahora considerados requerimos introducir el ≪gato≫ o ≪sostenido≫ (*sharp*) correspondiente a $0^{\#}$ o $0^{\dagger}$. No obstante, en modelos núcleo superiores esta construcción no es tan simple como para L, y puede involucrar clases de grandes cardinales.

Debajo de un cardinal fuerte, las construcciones se asemejan mucho a las dadas para $L[\mathcal{U}]$, pues las iteraciones son lineales, pero una vez que aparecen dos o más cardinales fuertes, o cardinales mayores, las iteraciones dejan de ser lineales. En el primer caso, tratamos con extensores que no se traslapan, mientras que en el segundo aparecen extensores que se pueden traslapar. La nociones centrales en este asunto son las de árbol de iteración y de cardinal Woodin. Una vez que se consiguió controlar todas estas dificultades, Jensen y Steel logran construir el modelo núcleo debajo de un cardinal Woodin. Es importante aclarar que ninguna de las dos partes de este trabajo están concebidas como una ≪especie≫ de relato histórico sobre los modelos núcleo. Es decir, no es nuestra intención describir con precisión cronológica cómo y cáundo se logró un determinado avance. Tratamos de establecer los resultados en cierto contexto histórico, pero teniendo en cuenta que la idea básica es que el lector tenga una guía para incorporarse al estudio y/o trabajo en esta área.

2. Ultrapotencias por extensores

Demos una descripción sucinta de la construcción de una ultrapotencia de V por un extensor vista como un límite directo. Es bueno aclarar que es posible construir tales ultrapotencia para clases propias $N \neq V$ o incluso conjuntos N transitivos que sean modelos de un fragmento suficientemente poderoso de ZFC.

Como recién se mencionó, un encaje elemental en una ultrapotencia por un extensor se puede ver como un límite directo de encajes dados por ultrafiltros normales. Esta es la idea que a continuación desarrollamos. Haremos un relato generoso de estas materias, sin formalizar nada. Es importante recordar que se trata exclusivamente de una forma de incentivar la construcción y se establecen condiciones, quizá, innecesariamente fuertes para que toda la disertación transcurra sin dificultades adicionales.

Resumiendo todo lo anterior, dado un encaje elemental no trivial

$$j : V \to \mathfrak{M}$$

entre modelos internos, queremos aproximarlo mediante una sucesión de medidas en forma conveniente; coherente sea tal vez la noción adecuada aquí.

Si tenemos un encaje elemental no trivial

$$j : V \to \mathfrak{M}$$

sabemos cómo definir un ultrafiltro normal en su punto crítico; simplemente hacemos

$$U = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\},$$

pero ya vimos que esto no representa a grandes cardinales mayores que medibles y sobre todo, que los ordinales en el intervalo $(\kappa, j(\kappa))$ no son accesibles mediante j; lo que haremos será considerar un $\lambda \in (\kappa, j(\kappa)]$. Es previsible que la elección de este λ sea relevante.

Ahora cambiamos nuestra definición de ultrafiltro normal. Para explicar nuestra elección, el lector debe recordar que al final representaremos al encaje j como un límite directo, de modo que requerimos coherencia entre los ultrafiltros normales a definir, característica que posteriormente estableceremos con toda formalidad.

Para cada $a \in [\lambda]^{<\omega}$ definimos

$$X \in E_a \quad \Leftrightarrow \quad a \in j(X).$$

Es claro que si $Z \subseteq [\kappa]^{|a|}$, su imagen respecto a j está contenida en $[j(\kappa)]^{|a|}$. Note que los ultrafiltros E_a son ultrafiltros en $[\kappa]^{|a|}$ para cada $a \in [\lambda]^{<\omega}$, lo que es una exigencia extra. Se pueden definir extensores variando la κ, esto es, tomando los E_a sobre $[\mu_a]^{|a|}$ para distintos ordinales μ_a (como se hace en [36]), algo que aquí no examinamos. El lector no debe tener dificultad alguna al verificar que los E_a dados antes, son ultrafiltros κ-completos en $[\kappa]^{|a|}$ y que E_a es principal exactamente cuando $a \in [\kappa]^{<\omega}$. Una posibilidad para evitar usar conjuntos finitos de ordinales a es apelar a ordinales primitivo recursivo cerrados y emplear la función pareja de Gödel. En lo inmediato seguimos [48].

Decimos que $E = (E_a : a \in [\lambda]^{<\omega})$ es el (κ, λ)-extensor derivado de j, y si construimos las ultrapotencias de V por los E_a, obtenemos clases transitivas $\mathfrak{M}_a$ porque E_a es κ-completo; hacemos $\mathfrak{M}_a = Ult(V, E_a)$, de suerte que, para cada E_a, propiamente para cada $a \in [\lambda]^{<\omega}$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{M} \\
V \arrow[urr, "j"] \arrow[dr, "\pi_a"'] & & \\
 & \mathfrak{M}_a \arrow[uur, "k_a"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi_a(x) = [const_x^a]_{E_a}$ para cada $x \in V$, $k_a([f]_{E_a}) = j(f)(a)$ para toda $f \in V^{[\kappa]^{|a|}}$ y

$$const_x^a : [\kappa]^{|a|} \to \{x\}$$

es la función constante con valor x. Dadas las definiciones de E_a y $\mathfrak{M}_a$, se demuestra un teorema de Łoś que establece la validez de fórmulas en la ultrapotencia mediante la pertenencia de cierto conjunto al ultrafiltro correspondiente E_a, y se corrobora que k_a está bien definido y es elemental. Más aún, el diagrama conmuta, pues para $x \in V$, ocurre que

$$j(const_x^a) : [j(\kappa)]^{|a|} \to \{j(x)\}$$

es una función constante, de modo que

$$\begin{aligned} k_a \circ \pi_a(x) &= k_a([const_x^a]_{E_a}) \\ &= j(const_x^a)(a) \\ &= j(x). \end{aligned}$$

Es claro que tenemos ≪muchos≫ ultrafiltros E_a, ≪muchas≫ ultrapotencias $\mathfrak{M}_a$ y que deben existir relaciones entre ellos. Supongamos que $a, b \in [\lambda]^{<\omega}$ y que $a \subseteq b$; debe subsistir un vínculo entre E_a y E_b. Definimos la aplicación π_{ba} mediante la siguiente prescripción: si $b = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ (siempre supondremos $\xi_1 < \cdots < \xi_n$) y $a = \{\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m}\}$ ($1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$, recuerde que $a \subseteq b$), definimos

$$\pi_{ba} : [\kappa]^{|b|} \to [\kappa]^{|a|}$$

mediante

$$\pi_{ba}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}\}$$

esto es, de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ tomamos las ≪entradas≫ que comprenden los índices de a. Estas aplicaciones π_{ab} (no necesariamente distintas cuando varían a y b) nos permiten establecer la coherencia que prevalece entre algunos E_a. Si $a, b \in [\lambda]^{<\omega}$ y $a \subseteq b$, se cumple que

$$X \in E_a \Leftrightarrow \{s \in [\kappa]^{|b|} : \pi_{ba}(s) \in X\} \in E_b$$

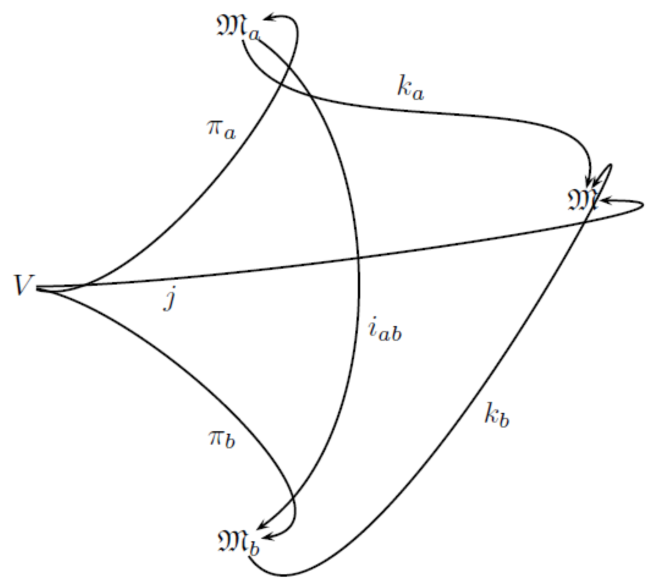
En el caso de los E_a derivados de j esta propiedad es inmediata porque

$$j(\pi_{ba})(b) = a$$

Dados a, b como recién, podemos definir una aplicación $i_{ab} : \mathfrak{M}_a \to \mathfrak{M}_b$ mediante la receta

$$i_{ab}([f]_{E_a}) = [f \circ \pi_{ba}]_{E_b}$$

para cualquier $f : [\kappa]^{|a|} \to V$, y lograr que el siguiente diagrama sea conmutativo,



con las siguientes relaciones de conmutatividad,

$$\begin{aligned} k_a \circ \pi_a &= k_b \circ \pi_b \\ &= j \\ i_{ab} \circ \pi_a &= \pi_b \\ k_b \circ i_a &= k_a. \end{aligned}$$

La aplicación i_{ab} está bien definida. Con lo anterior es claro que

$$((\mathfrak{M}_a : a \in [\lambda]^{<\omega}), (i_{ab} : a \subseteq b \in [\lambda]^{<\omega}))$$

es un sistema dirigido, de modo que tiene su correspondiente límite directo

$$\hat{\mathfrak{M}}_E = (D_E, \in_E).$$

Denotamos con $[(a, [f]_{E_a})]_E$ la clase de equivalencia de $(a, [f]_{E_a})$ y hacemos D_E el conjunto de estas clases de equivalencia. Establecemos $\in_E$ mediante

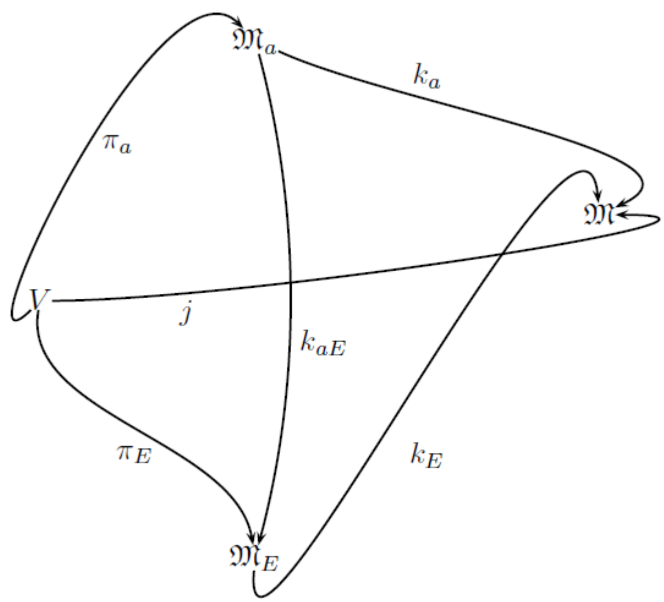
$$[(a, [f]_{E_a})]_E \in_E [(b, [g]_{E_b})]_E \Leftrightarrow \exists\, c \supseteq a \cup b (i_{ac}([f]_{E_a}) \in i_{bc}([g]_{E_b}).$$

Se sigue que los elementos $x \in \hat{M}_E$ tienen la forma $x = [(a, [f]_{E_a})]_E$ para algún $a \in [\lambda]^{<\omega}$ y cierta $[f]_{E_a} \in M_a$, $f : [\kappa]^{|a|} \to V$. Puesto que esto es un esbozo, es importante evitar complicaciones adicionales, especialmente con la notación, por lo que en la medida de lo posible, prescindiremos de subíndices como en E_a, E_b, etc. Así, si estamos en $\hat{\mathfrak{M}}_E$, $[a, f]_E \in [b, g]$ significa

$$[(a, [f]_{E_a})]_E \in_E [(b, [g]_{E_b})]_E.$$

Debemos recordar que partimos de un encaje elemental de V en un modelo interno (transitivo) y estamos construyendo una ultrapotencia módulo un extensor derivado de este encaje. Hasta este punto tenemos diversas estructuras $\mathfrak{M}_a$, aplicaciones entre ellas y su límite directo.

Resulta que este límite directo denotado $\hat{\mathfrak{M}}_E$ está bien fundado, y podemos tomar el colapso transitivo $\mathfrak{M}_E$ de $\hat{\mathfrak{M}}_E$. Tenemos la siguiente situación.



Nos gustaría obtener las aplicaciones π_E, k_{aE} y k_E; se definen como,

$$\pi_E(x) = [a, const_x^a] \text{ para cada } x \in V, \text{ y algún (cualquier), } a \in [\lambda]^{<\omega}$$
$$k_{aE}([f]) = [a, f] \text{ para cada } a \in [\lambda]^{<\omega} \text{ y } f : [\kappa]^{|a|} \to V$$
$$k_E([a, f]) = j(f)(a) \text{ para } a \in [\lambda]^{<\omega} \text{ y } f : [\kappa]^{|a|} \to V.$$

Se verifica que la definición de π_E no depende de la $a \in [\lambda]^{<\omega}$. De lo anterior extraemos algunas propiedades relevantes de π_E y $\mathfrak{M}_E$.

(i) $cri(k_E) \geq \lambda$, $cri(\pi_E) = \kappa$ y $\pi_E(\kappa) \geq \lambda$. En particular, si $\lambda = j(k)$, $cri(k_E) > \lambda$ y $\pi_E(\kappa) = j(\kappa) = \lambda$.

(ii)
$$\mathfrak{M}_E = \{\pi_E(f)(a) : a \in [\lambda]^{<\omega}, f : [\lambda]^{|a|} \to \kappa, f \in V\}$$

Como vimos,
$$[\lambda]^{<\omega} \subseteq ran(k_E).$$

De hecho $k_E \restriction \lambda = id$, lo cual da lugar a que para toda $a \in [\lambda]^{<\omega}$, $k_E(a) = a$.

(iii) Si para algún ordinal γ se cumple que

$$(|V_\gamma| \leq \lambda)^{\mathfrak{M}}$$

entonces $V_\gamma^{\mathfrak{M}} = V_\gamma^{\mathfrak{M}_E} \subseteq ran(k_E)$ y $k_E \restriction V_\gamma^{\mathfrak{M}_E} = id$.

Antes vimos que para cualquier $a \in [\lambda]^{<\omega}$, $k_E(a) = a$, de lo que se desprende que para cualquier $x \subseteq [\kappa]^{|a|}$,

$$\begin{aligned} a \in j(x) &\Leftrightarrow a \in k_E(\pi_E(x)) \\ &\Leftrightarrow k_E(a) \in k_E(\pi_E(x)) \\ &\Leftrightarrow a \in \pi_E(x) \end{aligned}$$

es decir, si tratamos de definir el nuevo (κ, λ)-extensor E' derivado de π_E, llegamos a $E = E'$.

No nos cansamos de repetir que todo lo anterior se efectúa a partir del encaje elemental

$$j : V \to \mathfrak{M}$$

donde $\mathfrak{M}$ es una clase propia transitiva. Aunque no lo parezca, todo resulta relativamente sencillo con la definición de E, por la presencia del encaje j y la clase transitiva M. Algo que ocurre con los cardinales medibles κ es que si tenemos el encaje $j : V \to \mathfrak{M}$ con punto crítico κ, podemos definir un ultrafiltro normal U en κ. Esto equivale a lo que hicimos arriba, que define el extensor E. Pero con los cardinales medibles también podemos construir el encaje j a partir de un ultrafiltro normal U en κ. Es pues natural preguntarse si lo mismo es realizable con extensores. Es decir, dado un extensor E, construir la clase transitiva $\mathfrak{M}_E$ y el encaje π_E. Se requiere que examinemos cuidadosamente la construcción arriba dada y deduzcamos con exactitud qué propiedades debemos pedirle a E para obtener π_E y $\mathfrak{M}_E$. Aquí es importante mencionar otra vez que incluiremos algo en la definición de E que propicia que $\mathfrak{M}_E$ esté bien fundado. Seguiremos con esta descripción informal, pero aparecerán muchas de las figuras principales que después trataremos formalmente, pero que ahora mismo es más fácil ilustrarlas y motivarlas.

Trataremos, pues, de describir las propiedades requeridas por un extensor. Sea κ un cardinal regular y $\lambda > \kappa$, y proponemos que

$$E = (E_a : a \in [\lambda]^{<\omega})$$

es un (κ, λ)-extensor cuando ocurre lo siguiente.

1. a) Para cada $a \in [\lambda]^{<\omega}$, E_a es un ultrafiltro κ-completo en $[\kappa]^{|a|}$.
   b) Existe $a \in [\lambda]^{<\omega}$ tal que E_a no es κ^+-completo.
   c) Para cada $\gamma < \kappa$, existe $a \in [\lambda]^{<\omega}$ con $\{s : \gamma \in s\} \in E_a$.

2. (Coherencia) Para cualesquier $a, b \in [\lambda]^{<\omega}$ con $a \subseteq b$,

$$X \in E_a \Leftrightarrow \{s \in [\kappa]^{|b|} : \pi_{ba}(s) \in x\} \in E_b$$

(π_{ba} se definió antes).

3. (Normalidad) Si para algún $a \in [\lambda]^{<\omega}$ y $f : [\kappa]^{|a|} \to V$, se cumple que

$$\{s \in [\kappa]^{|a|} : f(s) \in \text{máx}(s)\} \in E_a,$$

entonces existe $b \supseteq a$ tal que

$$\{s \in [\kappa]^{|b|} : f \circ \pi_{ba}(s) \in s\} \in E_b.$$

4. (Bien fundado) Si existen $a_n \in [\lambda]^{<\omega}$ y $X_n \subseteq [\kappa]^{|a_n|}$ con $X_n \in E_{a_n}$ para toda $n < \omega$, entonces existe una función que preserva el orden $d : \bigcup_{n<\omega} a_n \to \kappa$ tal que $d[a_n] \in X_n$ para toda $n \in \omega$.

Con esto se logra aislar la noción de extensor E, se puede dar sin necesidad de un encaje elemental; se constuye la ultrapotencia $\mathfrak{M}$ de V (o de M) con este extensor y se obtiene el encaje elemental $\pi_E : V \to_E \mathfrak{M}$. Es tiempo de algunas referencias bibliográficas, pues los ≪axiomas≫ de extensor recién escritos, no corresponden a los que generalmente se postulan. Los extensores se pueden tratar como hipermedidas, que es como arriba se hizo, o como aplicaciones. Esta última presentación aparece en [50], [16] y [9]. Para la presentación como hipermedida se puede consultar [39], [21], [20], [3] y [9], donde en la última se describe como desarrollar la equivalencia entre ambas presentaciones de los extensores.

El material previo nos permite definir las clases de grandes cardinales antes mencionadas en ZFC. Por ejemplo, en el caso de los cardinales fuertes tenemos lo siguiente, que se puede probar que se formula en ZFC.

Teorema 2.1. *Un cardinal κ es fuerte si y sólo si para todo conjunto z, $z \subseteq Or$ existe un (κ, ν)-extensor E en V, $\nu \geq \sup(z)$ tal que V es extensible por E y si $\pi_E : V \to M$, entonces $z \in M$.*

Demostración. [36, Teorema 8.1.7] □

Aquí extensible significa que la ultrapotencia está bien fundada. Este desarrollo podría hacernos pensar que hemos logrado nuestro propósito de crear un modelo núcleo para cardinales fuertes, pero no es así. Considere los siguientes resultados.

Lema 2.2. *Suponga que existe un cardinal fuerte. Si A es un conjunto, entonces $V \neq L[A]$.*

Demostración. [36, Lema 8.1.14] □

Proposición 2.3. *Suponga que E es un (κ, ν)-extensor que se derivó de un encaje fuerte. No existen cardinales fuertes en $L[E]$.*

Demostración. [36, Proposición 8.1.15] □

La idea recurrente en la prueba de estos resultados es que si A es un conjunto, y $V = L[A]$, A debe tener un rango asociado, digamos μ; en caso de existir un cardinal fuerte podríamos encontrar un encaje fuerte, cuyo punto crítico exceda a μ, a una ultrapotencia bien fundada M. Entonces, construimos $L[A]$ en M y obtenemos una contradicción. Incluso, si suponemos $V = L[\mathscr{E}]$, donde $\mathscr{E}$ es una sucesión de extensores, sucesión conjunto, obtenemos el mismo resultado.

Así que el modelo núcleo obvio para un cardinal fuerte debería ser de la forma $L[E]$, pero por lo previo, no funciona. La solución es considerar sucesiones de extensores $\mathscr{E}$, pero como veremos, para probar que $L[\mathscr{E}]$ es modelo de κ *es fuerte*, requerimos que la sucesión contenga extensores (λ, ν) para ν arbitrariamente grande. Anticipándonos a la definición de sucesiones (coherentes) de extensores vale la pena recordar algunos fenómenos, y es importante señalar que los extensores también han encontrado aplicaciones fuera de la teoría de modelos núcleo, véase por ejemplo [49].

Como se recordará, un hecho relevante para demostrar principios combinatorios y la HGC en $L[\mathcal{U}]$ fue el proceso de comparación entre ratones. Para lograrlo efectivamente, era indispensable que ciertos generadores de ultrafiltros quedaran fijos, donde, para un (κ, λ)-extensor E, todo ordinal en $[\kappa, \lambda)$ es un generador, así que el principio de no mover generadores requiere que si se usa E en una iteración, el resto de la misma no puede involucrar ningún (κ', λ')-extensor E' con $\kappa' < \lambda$. Esta dificultad aparece tan pronto como existe un cardinal fuerte mayor que un medible. Esto es, un cardinal κ que tiene un encaje $i : V \hookrightarrow M$ con punto crítico κ y que para algún cardinal $\lambda > \kappa$ existe una medida U con $U \in M$. El problema de mover generadores es más o menos tratable en este nivel, pero una solución general es mucho más complicada.

Para trabajar este problema Baldwin ([2]) definió una enumeración más cuidadosa de los extensores, de tal suerte que aunque la iteración moviera generadores, se garantiza que los que se movieron, queden fijos en un club de iteraciones posteriores. Esto permite la comparación, al menos para cardinales β-hipermedibles.

Posteriormente Dodd [3] construye un modelo para una clase de cardinales fuertes, más débiles que los tratados por Baldwin, pero que permiten considerar el fenómeno de mover generadores. Este modelo usa una sucesión coherente de extensores, que a continuación definimos.

Definición 2.4. Un predicado E es natural cuando ocurre lo siguiente.

(i) Cualquier $z \in E$ tiene la forma $z = (\nu, \kappa, a, X)$, donde ν es un ordinal límite, $\kappa < \nu$, $a \in [\nu]^{<\omega}$ y $X \in Pot([\kappa]^{|a|})$.

(ii) Si $(\nu, \kappa, a, X), (\nu, \kappa', a', X') \in E$, entonces $\kappa = \kappa'$.

Precisamos las siguientes nociones.

- $\kappa(\nu) = \kappa^E(\nu)$ es el único κ tal que $(\nu, \kappa, a, x) \in E$ para ciertos a, X.

- Si ν es un ordinal,
$$E_\nu = \{(a, X) : (\nu, \kappa, a, X) \in E\}.$$
- Para $a \in [\nu]^{<\omega}$,
$$E_{\nu a} = \{X : (a, X) \in E_\nu\}.$$
- $dom(E) = \{\nu : E_\nu \neq \emptyset\}$
- Si $X \subseteq Or$,
$$E|X = \{(\nu, \kappa, a, X) \in E : \nu \in X\}.$$

Definición 2.5. Un modelo

$$\mathfrak{M} = J_\alpha[E] \qquad \alpha \text{ es un ordinal límite}$$

donde E es natural, se conoce como una estructura con extensores (áspera, tosca) cuando se cumple lo reseñado a continuación.

(i) $E_\nu \subseteq J_\nu[E]$ cuando ν es un ordinal límite $< \alpha$.

(ii) Si $E_\nu \neq \emptyset$, E_ν es un extensor 0-plegado en $J^E_\nu, \kappa(\nu), \nu$.

(iii) Si $E_\nu \neq \emptyset$ y $\pi : J^E_\nu \to_{E_\nu} (N, E^N)$, entonces $E^N = E|\nu$ y
$$\forall\, \mu \in N(\kappa^{E^N}(\mu) = \kappa(\nu) \Longrightarrow \mu < \nu).$$

(iv) Si $E_\nu \neq \emptyset$, para todo μ límite, y
$$\left(\kappa(\nu)^+\right)^{J^E_\nu} \leq \mu \leq \nu$$
entonces $E_\mu \neq \emptyset$ y $\kappa(\mu) = \kappa(\nu)$.

(v) Si $E_\nu \neq \emptyset$, $\lambda < \kappa(\nu)$, entonces
$$\sup\{\mu < \kappa(\nu) : \kappa^E(\mu) = \lambda\} < \kappa(\nu).$$

Los extensores 0-plegados no incorporan parámetros encima de ν, lo que si hacen los plegados. Para nuestros fines es más que suficiente considerar exclusivamente extensores 0-plegados, por lo que el lector puede prescindir de este adjetivo por completo.

Nuestras estructuras, que son J-modelos, no requieren incorporar más nociones de estructura fina, excepo quizá aceptablidad, en cuyo caso se llamarán finas. El axioma (i) asegura que

$$Pot(J^E_\alpha) \cap J^E_{\alpha+\omega} = \Sigma_\omega(J^E_\alpha)$$

lo que facilita mucho algunos argumentos de definabilidad. De acuerdo con (ii), los extensores en la sucesión se indizan de acuerdo a su altura. El conjunto E_ν no es necesariamente un extensor en $\mathfrak{M}$, esto es, puede ser un extensor parcial. El axioma (iii) es una condición de coherencia, en el sentido de que si extendemos mediante E_ν, los extensores con índice menor se preservan, mientras que E_ν desaparece de la escena.

Los axiomas (iv) y (v) indican como se colocan los extensores en la sucesión. De acuerdo con (iv), se inicia poniendo un extensor en un lugar que puede ser el sucesor de un cardinal medible. Entonces, seguimos con el mismo medible en tanto sea parcial. Por (v), el medible $\kappa = \kappa(\nu)$ no se traslapa con extensores en el medible λ. Al sumar aceptabilidad al contexto, algunas de estas condiciones quedan mejor justificadas. Como ilustración de lo anterior, estudie el siguiente desarrollo.

Sea $\mathfrak{M} = L[\mathscr{E}] = J_\infty[\mathscr{E}]$ una estructura con extensores, κ un ordinal, y suponga que existe una cantidad no acotada de ordinales ν tales que se cumple lo siguiente.

(i) $\kappa^E(\nu) = \kappa$.

(ii) $\mathfrak{M}$ es extensible por E_ν.

Entonces,

$$\mathfrak{M} \models \kappa \text{ es un cardinal fuerte.}$$

Este relato breve e informal ilustra las dificultades para lograr nuestro objetivo, quizá la principal sea la obtención de la sucesión $\mathscr{E}$, pero al mismo tiempo nos indica como construirla por recursión simultáneamente con el modelo interno.

Dodd ([3]) introduce dos técnicas nuevas en el proceso de comparación. El lema de Dodd-Jensen que sirve como un complemento importante en el uso de ratones en la verificación de que el criterio de comparación se satisface.

Teorema 2.6. *Suponga que $i : M \to M'$ es una iteración del ratón M, y $\sigma : M \to M'$ es un encaje Σ_0-elemental. Entonces, $ran(\sigma)$ es cofinal en M' y $\sigma(\alpha) \geq i(\alpha)$ para todo ordinal α en M.*

La otra técnica nueva de Dodd fue el uso de un modelo más grande para conservar una iteración. Esta idea permite construir modelos núcleo para cardinales superfuertes, pero no mucho más. Antes de proseguir en esta dirección, precisamos revisar la propiedad de cubierta.

3. Teoremas de cubierta para grandes cardinales mayores

En la parte I revisamos los teoremas de cubierta para diversos modelos núcleo (L, K^{DJ}) o modelos internos ($L[U]$), que pueden incluir hasta un cardinal medible. Ahora nos interesa la posible formulación de teoremas de cubierta para modelos internos con más medibles o grandes cardinales mayores. Para un estudio de estos problemas véase [24], [27] y [28]. Considere el siguiente enunciado para $L[U]$.

Teorema 3.1. *(Cubierta para $L[U]$) Suponga que $0^\dagger$ no existe pero sí un modelo interno con un cardinal medible, que $L[U]$ se elige de tal suerte que U es normal en κ, y éste es el menor posible. Entonces, se cumple alguna de las siguientes afirmaciones.*

- *Para todo conjunto x de ordinales existe un conjunto $y \in L[U]$ con $y \supseteq x$ y $|y| = |x| + \aleph_1$.*
- *Existe una sucesión $C \subseteq \kappa$ que es Prikry genérica sobre $L[U]$, tal que para todo conjunto x de ordinales existe $y \in L[U, C]$ tal que $y \supseteq x$ y $|y| = |x| + \aleph_1$.*

Además, la sucesión C es única módulo segmentos iniciales finitos.

Este teorema se generaliza a modelos con más medibles pero que no contengan un cardinal inaccesible que sea límite de cardinales medibles. Si se quiere lograr tal teorema para grandes cardinales mayores se debe construir un modelo núcleo apropiado y establecer un enunciado de cubierta conveniente para ese contexto.

En lo inmediato suponga que no existe un modelo interno con un cardinal μ-medible (véase [25] para su definición formal) y que K es el modelo núcleo. Si κ es un cardinal en K y $\beta < o(\kappa)$, $\mathcal{U}(\kappa, \beta)$ es la medida de orden β en κ en K. Si κ es singular, pero regular en K, un subconjunto $C \subseteq \kappa$ no acotado es un conjunto Prikry-Magidor débil para K si ocurre lo siguiente.

- $|C| < \kappa$
- Si x es un club en κ con $x \in K$, entonces $C - x$ está acotado en κ.

Ahora podemos formular una clase de teorema de cubierta.

Teorema 3.2. *De no existir un modelo con un cardinal μ-medible, entonces cualquier conjunto Prikry-Magidor débil $C \subseteq \kappa$ para K tiene las siguientes propiedades.*

1. *C está finalmente contenido en cualquier conjunto $a \in K$ tal que $a \in \mathcal{U}(\kappa, \beta)$ para todo $\beta < o(\kappa)$.*
2. *$C \cap \lambda$ es un conjunto Prikry-Magidor débil sobre K para cualquier punto límite λ de C suficientemente grande.*

(Véase [28]).

El siguiente teorema generaliza el teorema de cubierta de Dodd-Jensen; establece que cualquier subconjunto pequeño de κ se puede aproximar mediante un conjunto Prikry-Magidor débil.

Teorema 3.3. *Si un cardinal singular κ es regular en K, entonces para cualquier conjunto $x \subseteq \kappa$ con $|x| < \kappa$ existe un conjunto Prikry-Magidor $C \subseteq \kappa$ para K y una función $g : \kappa \to \kappa$ tales que $x - \bigcup_{\nu \in C}(g(\nu) - \nu)$ está acotado en κ.*

(Véase [28]).

Para grandes cardinales mayores es difícil aspirar a que el correspondiente modelo núcleo satisfaga algún teorema de cubierta como los antes mencionados. Lo que se formula es el teorema de cubierta débil que se prueba de la misma forma que para cardinales κ debajo de un cardinal fuerte.

Un modelo clase transitivo M de ZFC satisface la propiedad de cubierta débil si $(\lambda^+)^M = \lambda^+$ para todo cardinal singular λ en V. Esta es una de las consecuencias más importantes de los teoremas de cubierta arriba descritos. Por ejemplo, (con notación que después veremos), si existe $0^\P$ para un modelo con una clase de cardinales fuertes, entonces existe un modelo núcleo K de la forma $L[\mathscr{E}]$ que satisface la propiedad de cubierta débil.

4. Sostenidos

Ya mencionamos que para diversos modelos núcleo aparecen expresiones correspondientes a $0^\#$ para L. Este procedimiento puede referirse a la definición de sostenido para una propiedad de gran cardinal, o para definir el sostenido de un conjunto. Para el primer concepto, considere un modelo interno mínimo M de la propiedad dada; por ejemplo, para un cardinal medible, se puede tomar un modelo de la forma $M = L[U]$, donde U es un ultrafiltro normal según M y una clase cerrada y propia J de indiscernibles para M, y definir el conjunto de números de Gödel de fórmulas $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ tales que $M \models \varphi[c_1, \ldots, c_n]$ para cualquier $(c_1, \ldots, c_n) \in [J]^n$. Esta idea se puede extender a modelos $M = L[\mathcal{U}]$ con una clase propia de medibles y se obtiene el sostenido relativo a una clase propia de medibles. En el caso de $L[U]$ se obtiene $0^\dagger$, o para un cardinal fuerte se denota $0^\P$, en cambio para un cardinal Woodin se denota usualmente como $M_1^\#$, donde M_1 es el modelo mínimo con un cardinal Woodin.

También se generaliza la construcción de $0^\#$ para obtener $a^\#$ para cualquier conjunto a de ordinales. Sin duda, si $a \subseteq \gamma$ y J es una clase propia cerrada de indiscernibles para $L[a]$, $a^\#$ es el conjunto de parejas $(n, \vec{a})$, donde $n = \ulcorner\varphi\urcorner$ es el número de Gödel de una fórmula $\varphi(\vec{v}, z, \vec{u})$, $\vec{a} \in [\gamma]^{<\omega}$, y $L[a] \models \varphi(\vec{c}, a, \vec{a})$ para cualesquier $\vec{c} \in]J]^n$, y si codificamos tomamos a a como subconjunto de γ. Esta construcción se usa para iterar la operación sostenido, en el sentido de que si empezamos con $(0^\#)^1 = 0^\#$, se define $(0^\#)^{\alpha+1} = ((0^\#)^\alpha)^\#$. Si α es límite, $(0^\#)^\alpha$ se establece como el conjunto que codifica $((0^\#)^\gamma : \gamma < \alpha)$. Con hipótesis de gran cardinal (por ejemplo existe un cardinal Ramsey), es consistente que $(0^\#)^\gamma$ existe para todo ordinal γ, y el modelo $L[(0^\#)^\gamma : \gamma \in Or]$ conforma una jerarquía construible con condensación y es un segmento inicial de la jerarquía de modelos núcleo. Se continua este proceso, el modelo $L[(0^\#)^\gamma : \gamma \in Or]$ es mínimo para la propiedad de gran cardinal $a^\#$ *existe para todo conjunto* a; si damos una clase de indiscernibles para esta propiedad, se puede definir el sostenido de esta propiedad.

5. Los modelos $L[\mathscr{E}]$

Antes vimos cómo construir un modelo de la forma $L[\mathscr{E}]$ donde $\mathscr{E}$ es una sucesión coherente de extensores. En [3] y [21] se construyen modelos de este tipo; en el primer trabajo se prueba la HGC, en el segundo la HC y un resultado muy interesante sobre cardinales Jónsson. Dodd prescinde mayormente de estructura fina, pero presenta un teorema de condensación e incorpora lo que después se conocerían como los parámetros de Dodd ([51]). Koepke sí involucra un poco de estructura fina pero no hasta el punto de lograr construir la sucesión coherente $\mathscr{E}$ por recursión; establece la noción de modelo núcleo $K[F]$ en presencia de $\neg L[\mathscr{E}]$, donde $\neg L[\mathscr{E}]$ significa que no existe un modelo interno con un cardinal fuerte. Trabajar con modelos núcleo a este nivel generalmente ocurre con la hipótesis $\neg L[\mathscr{E}]$, pues se pueden definir modelos núcleo máximos. Por supuesto, si con ciertas hipótesis se pretende construir un modelo interno con un cardinal fuerte, se supone $\neg L[\mathscr{E}]$ para llegar a una contradicción. Así, si $\neg L[\mathscr{E}]$ y $K[F]$ es el modelo núcleo, en él se cumple la HGC, $\Diamond$, $\Box$ y otros principios combinatorios. Si los extensores en $\mathscr{E}$ se construyen recursivamente (por supuesto, usando estructura fina) escogiendo los puntos críticos menores posibles, se obtiene un modelo núcleo canónico $K[F_C]$. Por ejemplo, si $\pi : K[F_C] \hookrightarrow W$ es un encaje elemental con W transitivo, entonces π es la aplicación iteración de algún iterado de $K[F_C]$. Además, $K[F_C]$ es rígido, en el sentido de que no existe un encaje elemental no trivial de él en sí mismo. Más aún, $K[F_C]$ satisface la propiedad de cubierta débil. El teorema recién mencionado de Koepke sobre cardinales Jónsson es la siguiente afirmación.

Teorema 5.1.

$$Con(ZFC + \exists\,\kappa \exists\,\mu(\kappa = \mu^+ \wedge \kappa \text{ es Jónsson}) \Rightarrow Con(ZFC + \exists\,\kappa(\kappa \text{ es fuerte})).$$

En cuanto al trabajo de Dodd, para lograr probar la HGC en $L[\mathscr{E}]$ desarrolla un importante teorema de consdensación cuya figura resulta relevante en la literatura posterior. Después corrobora que si $o^{\mathscr{E}}(\kappa) = \infty$, entonces en $L[\mathscr{E}]$ κ es fuerte. Aquí y en la prueba de la HGC es indispensable que la sucesión $\mathscr{E}$ sea una clase propia. Al final caracteriza los extensores en $L[\mathscr{E}]$; no se puede probar que todo extensor en $L[\mathscr{E}]$ sea miembro de $\mathscr{E}$, pero si, por ejemplo, que las medidas normales en $L[\mathscr{E}]$ aparecen, en cierto sentido, en la sucesión $\mathscr{E}$. Un esbozo de la construcción de una sucesión coherente $\mathscr{E}$ de extensores, en presencia de un cardinal fuerte, se puede leer en [4].

Llegamos al punto en que se tiene la teoría y técnicas para considerar el modelo núcleo para un cardinal fuerte. La referencia más adecuada en este sentido, el primer intento exitoso, es [12]. La obra inicia generalizando los resultados de [17] para incorporar situaciones debajo de un cardinal fuerte, donde se explica por qué plantear la teoría de estructura fina en foma más general de lo necesario en [17]; se debe señalar que seguir el manuscrito requiere un buen manejo de la teoría desarrollada para medidas de orden cero, pues muchas de las pruebas se omiten o sólo se demuestran algunos puntos que requieren atención. Es importante tener claro la definición dada de ratón, en esta obra, y sus diversas variantes ahí señaladas. Se prueba la propiedad de cubierta débil con la hipótesis y modelo correspondiente. Ahora vienen las lecturas alternativas, pero recomendamos fuertemente considerar a [12] como la fuente principal de las ideas y construcciones requeridas. La primera es [50] que como ya dijimos, en buena medida está concebida para presentar los modelos para medidas de orden cero, pero en su capítulo ocho se trata el modelo núcleo hasta un cardinal fuerte. Como en el trabajo de Jensen recién mencionado, se trata de una generalización más o menos inmediata de la teoría previa; recuerde que en este caso las iteraciones aún son lineales. No obstante, el esbozo presentado es demasiado sucinto para que un lector poco experimentado pueda realmente entender todo el material involucrado. Otra vez, se debe prestar mucha atención a la definición de ratón, y algo que, quizá, debimos haber mencionado antes, es que tratamos con sucesiones de extensores que no se traslapan (*non-overlapping extenders*), esto es, como sí habíamos escrito, para iterar se emplean extensores cuyo punto crítico es mayor que la longitud de los previos. La siguiente referencia es [21] donde se presenta la teoría de estructura fina para construir un modelo interno hasta un cardinal fuerte, se da la definición de ratón y de otras técnicas, pero propiamente no se construye el modelo núcleo, sino que se deja como proyecto a futuro. En cualquier caso, la definición de ratón y otras relevantes no coinciden con los trabajos previemente señalados. En [37] se concluye este proyecto, aunque no se conserva la noción de ratón; se trata de acudir a [12] en la medida de lo posible, pero no es la misma construcción. Finalmente, una vez que pasamos la frontera de un cardinal fuerte, tenemos la obra [38] en donde se construye el modelo núcleo con la hipótesis de que no existe una clase propia de cardinales fuertes. La idea principal es que, dado que ya no tenemos iteraciones necesariamente lineales, sí disponemos de iteraciones casi lineales, así que el artículo se centra principalmente en construir el modelo núcleo con iteraciones casi lineales, pero utilizando en buena medida lo dado en [12].

6. El modelo núcleo más allá de los fuertes

Antes se intentó la creación de modelos para cardinales supercompactos, pero se hizo evidente que había dificultades enormes, quiza insalvables, con la forma de realizar las iteraciones. Pero, ¿qué es lo que no funciona con esta idea para grandes cardinales mayores? Antes que nada recordemos que para tener éxito en el proceso de comparación se exige que no se muevan los generadores; sin entrar en detalles de la definición de generador, basta saber que en un (κ, λ) extensor E, todo ordinal en $[\kappa, \lambda)$ es un generador, por lo que para no moverlos en una iteración, necesitamos que el (κ', λ')-extensor E' en curso cumpla con $\kappa' > \lambda$, lo cual es fácil de conseguir cuando tenemos un sólo cardinal fuerte, pero la presencia de dos de ellos, complica mucho la situación.

Seguimos, en lo posible, [47]. Una alternativa para no mover generadores es generalizar la técnica de iteración. Las iteraciones se hacían en forma lineal,

$$L[\mathcal{E}] = M_0 \overset{i_{01}}{\to} M_1 \overset{i_{12}}{\to} \cdots M_\omega \overset{i_{\omega\omega+1}}{\to} M_{\omega+1} \overset{i_{\omega+1\omega+2}}{\to} \cdots M_\theta$$

donde θ es la longitud de la iteración. Es importante detallar esta situación pues ilustra el problema de la aparición de cardinales Woodin. En lo inmediato todos los modelos involucrados satisfacen ZFC, si E es un extensor en M y N la ultrapotencia de M por E, la fortaleza de E es el mayor ordinal λ tal que $V_\lambda^M \subseteq N$. Suponga que

$$M_0 \models E_0 \text{ es un extensor y } \lambda \text{ es su fortaleza}$$

Ponemos $M_1 = Ult(M_0, E_0)$ y suponemos que

$$M_1 \models E_1 \text{ es un extensor con punto crítico} < \lambda$$

Si iteramos linealmente el siguiente modelo sería $M_2 = Ult(M_1, E_1)$, y así sucesivamente. En cambio, el siguiente modelo podría ser $M_2 = Ult(M_0, E_1)$ (aquí y en lo sucesivo se hacen las suposiciones necesarias para que M_2 ≪sepa> > que E_1 es un extensor); podríamos continuar iterando desde ahí. Con las hipótesis necesarias se corrobora que

$$M_2 \models E_2 \text{ es un extensor}$$

con $cri(E_2) < \lambda_1$ y hacemos

$$M_3 = Ult(M_1, E_2).$$

Se forma una ≪rama≫ M_0, M_1, M_3; con hipótesis adecuadas, podemos generar una rama paralela M_0, M_2, M_4, M_5, etc., donde $M_{n+1} = Ult(M_{n-1}, E_n)$ con $M_n \models E_n$ es un extensor. Se puede probar que si $M_0 = V$ y existe un cardinal Woodin, realmente se pueden formar las ramas alternates recién descritas, y de hecho, muchas ramas y otros fenómenos interesantes. Llamemos a esto un árbol de iteración, esta noción es de extraordinaria importancia y mucho de lo que ahora se sabe al respecto se origina en el trabajo [23]. Otra vez, con hipótesis adecuadas se puede continuar estas ramas ω etapas. ¿Cómo continuar después de estas ω etapas? Si $\mathcal{T}$ es un árbol de iteración y b es una de sus ramas, formamos $M_b^{\mathcal{T}}$ como el límite directo de los elementos de la rama b, y se dice que b está bien fundada si $M_b^{\mathcal{T}}$ lo está. Con ciertas hipótesis (que no involucran, aún, la existencia o no de un cardinal Woodin) y $M_0^{\mathcal{T}} = V$, se prueba que siempre existe una rama bien fundada en uno de estos árboles de longitud ω. En general, si $\mathcal{T}$ es uno de estos árboles con inicio en $M_0 = V$ y de longitud ω, entonces $\mathcal{T}$ tiene una rama infinita. Se verifica ([1]) que si existe un cardinal Woodin y T es un orden árbol en ω que tenga una rama infinita, entonces existe un árbol de los recién descritos iniciando en V cuyo orden es precisamente T. Un problema abierto y de gran relevancia es si existe uno de los árboles mencionados basado en V y de longitud ω que tenga ramas cofinales distintas bien fundadas (al menos dos de ellas). Si la respuesta a esta pregunta es no, significaría que podemos continuar el árbol de manera única, lo que nos facilita el trabajo y tiene consecuencias importantes.

Por supuesto, existen ocasiones en que necesitamos seguir iterando después de haberlo hecho ω veces, así que se definen árboles de iteración de longitud transfinita γ. En las etapas sucesor, se usa un extensor adecuado en el modelo apropiado y en las etapas límite se construye el límite directo. Parecería un tanto inapropiado no definir con exactitud como se construyen tales árboles, pero requeriríamos una serie de definiciones que no aportan más a este breve esbozo. Llamemos ≪buenos≫ al tipo de árbol que hemos estado tratando. El resultado principal en esta dirección es el siguiente.

Teorema 6.1. *Sea $\mathcal{T}$ un árbol bueno de iteración en V de longitud límite numerable con orden T. Suponga que para todos los ordinales límite $\eta < \lambda$, $\{\alpha : \alpha T \eta\}$ es la única rama cofinal bien fundada de $\mathcal{T} \upharpoonright \eta$. Entonces, $\mathcal{T}$ tiene una rama cofinal bien fundada.*

Note que el teorema funciona cuando tenemos exclusivamente una rama cofinal bien fundada en cada etapa límite. No es claro como garantizar esto, de hecho esta situación da lugar a dos problemas abiertos de gran actualidad.

- **UBH-bueno** es la afirmación de que todo árbol de iteración bueno en V de longitud límite tiene a lo sumo una rama cofinal bien fundada.
- **UBH-bueno genérico** es la afirmación

$$V[G] \models \text{ UBH-bueno siempre que } G \text{ sea genérico sobre } V$$

La respuesta más útil a ambas sería **sí**, porque esto permitiría generar una estrategia de iteración para V. Con un poco más de detalles, suponga que M es un modelo transitivo de ZFC y θ es un ordinal. El juego (bueno) $G_g(M,\theta)$ de iteración de longitud θ en M se lleva a cabo entre dos participantes I y II, que cooperan para producir un árbol de iteración $\mathcal{T}$ en M. En las etapas sucesor $\alpha+1$, I extiende $\mathcal{T}$ eligiendo un extensor $E_\alpha^{\mathcal{T}}$ en $M_\alpha^{\mathcal{T}}$, se define $M_{\alpha+1}^{\mathcal{T}} = Ult(M_\xi^{\mathcal{T}}, E_\alpha^{\mathcal{T}})$, donde ξ es el menor ordinal tal que $cri(E_\alpha^{\mathcal{T}}) < lht(E_\xi^{\mathcal{T}})$ (aquí lht es la longitud del extensor: si E es un (κ,ν)-extensor, ν es su longitud); si la ultrapotencia no está bien fundada, el juego termina y gana I. En las rondas límite $\lambda < \theta$, II debe actuar, para lo cual escoge una rama cofinal b en λ tal que $M_b^{\mathcal{T}}$ esté bien fundada y extiende $\mathcal{T}$. Si II no es capaz de lograrlo, I gana. Despues de θ rondas, si I no ha ganado, II gana. Una estrategia ganadora para II se conoce como estrategia de θ-iteración para M, y decimos que M es θ-iterable cuando ésta existe. Se verifica que si se cumple UBH-buena, entonces V es ω_1-iterabe para árboles de iteración buenos, y que si UBH-buena-genérica se cumple, entonces V es κ-iterable para árboles buenos de iteración, donde κ es el menor cardinal medible.

El resultado principal en esta dirección es que si UBH-buena es falsa, entonces existe un modelo interno con un cardinal Woodin.

Definición 6 .2. Un cardinal δ es Woodin si para cualquier función $f : \delta \to \delta$ existe un encaje $i : V \hookrightarrow M$ con punto crítico $\kappa < \delta$ tal que $V_{i(f)(\kappa)} \subseteq M$.

Este devenir no fue sencillo, sino fruto de numerosos intentos, que vale la pena reseñar. Tratamos de seguir [30]. Neeman descubrió en 2004 un árbol de iteración infinito que carece de ramas de longitud 4 . En ese tiempo, no parecían existir grandes cardinales interesantes entre los medibles y los super-compactos e iterabilidad parecía ser un problema inaccesible. Por otro lado, en 1984 Foreman, Magidor y Shelah mostraron que si la existencia de un cardinal supercompacto es consistente, así lo es el que el filtro de no estacionarios en ω_1 sea saturado. Esto implica que, en una extensión genérica, existe un encaje $i : V \to M$ tal que, si esto ocurriera en V en lugar de la extensión genérica, sería mucho más fuerte que un encaje supercompacto. Tal encaje contradice una premisa en la teoría de modelos núcleo, que tal encaje se extiende a un encaje de gran cardinal existente en el modelo base. Woodin, abundando en este trabajo, finalmente presenta la definición (arriba dada) de cardinal Woodin.

Una herramienta importante para tratar con cardinales Woodin es una modificación debida al propio Woodin de un forcing (véase, por ejemplo, [22]). El nuevo forcing se llama ≪stationary forcing≫. Por ejemplo, mediante este forcing se consigue colapsar cardinales para convertir un cardinal Woodin en ω_1; en otra aplicación, si δ es un cardinal Woodin, se logra una extensión genérica $V[G]$, en la que δ es Woodin y existe un encaje elemental $i^G : V \to M$ tal que $(V_\delta)^M = V_\delta[G]$. La aparación de estos grandes cardinales motivó el desarrollo de los modelos núcleo en dos direcciones. Primero, esta nueva clase de grandes cardinales merecen un modelo núcleo y son más accesibles que los supercompactos. La segunda es que ayudan a explicar las dificultades antes encontradas. Poco después, Martin y Steel empiezan a trabajar en la teoría de árboles de iteración [23]. Ellos obtienen la determinación proyectiva a partir de un modelo con una cantidad infinita de cardinales Woodin. Después se demostró que si existe un modelo con ω cardinales Woodin y un medible encima de ellos, se cumple el AD en $L(\mathbb{R})$.

En la búsqueda de modelos con cardinales Woodin, se obtuvo un resultado clave.

Teorema 6.3 (Martin, Steel)**.** *Suponga que M es un modelo con extensores y que T es un árbol de iteración en M con dos ramas distintas b, c que tienen límites bien fundados M_b, M_c. Entonces, existe un modelo con un cardinal Woodin. De hecho, si δ es el supremo de las longitudes de los extensores usados en T, δ es Woodin con respecto a cualquier función $f \in M_b \cap M_c$. En particular, si M es un término clase, δ es Woodin en $L[\mathcal{E}]$, donde $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{M_b} \restriction \delta = \mathcal{E}^{M_c} \restriction \delta$.*

Así, para lograr un modelo mínimo con un cardinal Woodin, basta definir una sucesión $\mathcal{E}$ por recursión de tal suerte que, en tanto no se haya alcanzado un cardinal Woodin, todo árbol de iteración tendría al menos una rama con un límite bien fundado. El modelo de Martin y Steel tiene una debilidad grave. Tienen la forma $L[\mathcal{E}]$, donde $\mathcal{E}$ es una sucesión de extensores, pero el proceso de comparación no usa ultrapotencias del modelo mismo, sino que se basa en ultrapotencias en un modelo mayor construido a partir de una sucesión $\mathcal{F}$. Por esto, no se puede controlar la estructura del modelo $L[\mathcal{E}]$. Por ejemplo, no se puede probar la HGC; lograron probar HC usando un resultado de Jensen. Un segundo forcing descubierto por Woodin, permitió aclarar más las dificultades con los árboles de iteración. Para el lector interesado en la problemática de los árboles de iteración, recomendamos las referencias [42] y [41].

Teniendo en cuenta todo lo anterior, se inició una nueva investigación de modelos núcleo. En cuanto a los modelos de Mitchell, en la nueva presentación, $L[\mathcal{E}]$ se construye enteramente con extensores E_γ en la sucesión $\mathcal{E}$. Pero estos extensores no lo son, necesariamente, en todo $L[\mathcal{E}]$, sino hasta un cierto nivel $J_\gamma[\mathcal{E} \restriction \gamma]$. Como resultado, los ratones en $L[\mathcal{E}]$ son precisamente los segmentos iniciales $M = J_\alpha[\mathcal{E}]$ de $L[\mathcal{E}]$ y condensación se cumple en automático. Con estos resultados, e ideas de Jensen, se abrieron nuevas perspectivas. No obstante, seguía el problema de los árboles de iteración. Mitchell y Steel usaron una técnica nueva. Se habían usado iteraciones externas para manejar modelos adecuadamente en el árbol; con la nueva estructura este manejo se realiza mediante la estructura fina, por lo que las iteraciones son internas en el sentido de que se emplean extensores en modelos en el árbol. Ellos construyeron un modelo $L[\mathcal{E}]$ que satisface muchas propiedades, incluyendo HGC, y que puede contener un cardinal Woodin, si es que existe uno en el universo ([34]). Steel ([45]) generalizó esto a un modelo con una cantidad arbitraria de cardinales Woodin y Neeman ([35]) construye un modelo ligeramente más alla de un cardinal Woodin límite de cardinales Woodin.

Este tipo de modelos, sin embargo, se logran suponiendo, de inicio, que existe una sucesión de extensores en el mundo real, extensores soporte. Estos deben ser más ≪fuertes≫ que los presentes en $\mathcal{E}$. Así, existe un modelo con un cardinal Woodin, si existe un cardinal Woodin. En contraste, el modelo núcleo, presenta la estructura de gran cardinal latente aún si el gran cardinal ha sido destruido, digamos por forcing. Poco después, Steel mejoró su resultado, para sólo requerir la existencia de un cardinal medible. Aún así, no estaba dentro del espíritu de la teoría de modelos núcleo, el suponer la existencia de un gran cardinal para obtener el modelo.

En este punto, estamos ya casi al final de la historia, por lo que vale la pena enumerar algunos hechos trascendentales en la misma.

1. (1970) Dodd-Jensen construyen el modelo núcleo K^{DJ}. Demuestran el teorema de cubierta mediante la no existencia de $0^\dagger$ [5], [6], y [7].

2. (1980) Mitchell desarrolla la teoría con la hipótesis: no existe un ≪sostenido≫, para un término clase modelo de ZFE con un medible κ de orden κ^{++}. Mitchell introduce una idea fundamental: construir un modelo K^c suficientemente cercano a V y que permite un teorema de cubierta débil. No obstante, depende de extensores ≪externos≫. El teorema de cubierta débil se emplea para construir el modelo K, como una especie de cerradura de Skolem de K^c [24], [25], [26] y [27].

3. (1990) Steel extiende el trabajo de Mitchell, de tal forma que se pueda llevar a cabo con la hipótesis de que no existe un modelo interno con un

cardinal Woodin. Él requiere la existencia de un cardinal medible Ω. [43] y [44]

4. (1991-1994) Mitchell, Steel, Schimmerling prueban un teorema de cubierta débil para el modelo K construido por Steel. Se requiere un cardinal medible. [32] y [31].

5. (2001) Primer paso para eliminar el cardinal medible. Mitchell y Schindler demuestran que si $\Omega \geq \omega_2$ es regular y $2^{<\Omega} = \Omega$, existe un ratón iterable W de altura Ω que es universal, en el sentido de que ningún preratón de altura Ω itera más alla de W. La existencia de tal Ω se desprende de la HGC, pero no es demostrable en ZFE. [33].

6. (2003) Jensen encuentra una condición más débil para iterabilidad, pero aún externa, sin suponer la HGC, que muestra que ésta permite que K^c sea universal. Este fue un avance fundamental, la construcción de un ≪K^c local≫ de altura ordinal Ω. Antes, la universalidad de K^c y K se discutía en términos de clases propias. Pero, una vez que se acercaban a un cardinal Woodin, el proceso de comparación se volvía casi imposible. [13].

7. (2006) No obstante, universalidad en un cardinal regular no era suficiente para implementar el método de Mitchell para obtener K a partir de la cerradura de Skolem de K^c. Para lograrlo se requería una forma de cubierta débil y la noción correspondiente de ≪cerradura gruesa≫. Jensen logra un avance significativo con la teoría de ≪stocking mice≫. [18].

Finalmente, Jensen describe su trabajo a Steel y en 2007 se obtiene el teorema siguiente. [19]

Teorema 6.4. *Existen fórmulas Σ_2 $\psi_K(v)$ y $\psi_\Sigma(v)$ tales que, de no existir una clase propia transitiva modelo de ZFE y que satisfaga ≪existe un cardinal Woodin≫, entonces ocurre lo siguiente.*

1. $K = \{v : \psi_K(v)\}$ *es una clase propia transitiva, preratón, que satisface ZFE.*

2. $\{v : \psi_\Sigma(v)\}$ *es una estrategia de iteración para K con árboles de iteración conjuntos, y es la única de tales estrategias.*

3. *(Absolutez genérica)* $\psi_\kappa^V = \psi_K^{V[G]}$ *y* $\psi_\Sigma^V = \psi_\Sigma^{V[G]} \cap V$, *siempre que G sea V-genérico sobre un conjunto.*

4. *(Definición inductiva)* $K|(\Omega_1^V)$ *es Σ_1-definible en $J_\omega(\mathbb{R})$.*

5. *(Cubierta débil) Para cualquier $\lambda \geq \omega_2^V$ tal que λ es un cardinal sucesor de K, $cf(\lambda) \geq |\lambda|$. En consecuencia, $\alpha^{+K} = \alpha^+$ siempre que α se un cardinal singular.*

Se puede formular el teorema sin referirse a clases propias.

- Un ratón clase propia se llama en ocasiones un modelo extensor, tiene la forma $(L[\mathcal{E}], \in, \mathcal{E})$, donde $\mathcal{E}$ es una sucesión coherente de extensores.
- (1) dice que la sucesión distinguida de extensores en K es definible en V mediante ψ_K. Se puede probar que $K \models V = K$.
- La jerarquía de un preratón iterable tiene condensación como en L, y permite desarrollar teoría de estructura fina en gran detalle.
- K satisface $\Box$ en todos sus cardinales.
- (1)-(4) indican que K es absolutamente definible.
- La propiedad débil de cubierta se debe a Mitchell.
- La propiedad fuerte de cubierta puede fallar una vez que K se complica ante la presencia de medibles.

Es más que recomendable consultar la obra [19], culminación de lo que hemos descrito.

La hipótesis de que no existe una clase propia con un cardinal Woodin no se puede debilitar, a menos que se fortalezca la hipótesis de ZFE. En efecto, suponga que δ es Woodin, esto es, V es el modelo clase, y que tuviésemos una fórmula $\psi_K(v)$ definiendo K que cumple (3)-(5). Sea G V-genérico para toda torre estacionaria debajo de δ. Sea

$$j : V \to M \subseteq M[G]$$

donde $M^{<\delta} \subseteq M$ se cumple en $V[G]$. Se puede elegir G de tal suerte que $cri(j) = \aleph_{\omega+1}^V$ y sea $\mu = \aleph_\omega^V$. Entonces,

$$\mu^{+K} = \mu^{+V} < \mu^{+M} = \mu^{+j(K)} = \mu^{+K}$$

una contradicción.

Con esto concluimos la descripción de los modelos núcleo, su historia, técnicas y dificultades principales; antes hemos descrito la bibliografía adecuada para ciertos modelos núcleo. Para los recién considerados, la referencia fundamental e invaluable es [16] que pronto estará totalmente concluido (esperamos). En el capítulo nueve de [50] se tratan los modelos internos con extensores que se traslapan. Los resultados mencionados de Steel y Mitchell se pueden seguir en [29], [28], [34], [44], [33], [40] y [46]. El complicado desarrollo de la noción apropiada de ratón se describe en los trabajos [8], [11], [10], [13], [15], [14] y [18]. Una fuente magnífica, y de la que mucho hemos tomado, para la historia de esta materia es [30].

7. El modelo núcleo

Hemos presentado diversas situaciones en torno a los modelos núcleo (así, en plural), pero no hemos dejado claro que se entiende por modelo núcleo; quizá ahora estemos en posibilidad de ilustrar mejor la noción. La noción ≪modelo núcleo≫ fue introducida por R. Jensen y A. Dodd. Lo primero que viene a colación es si es singular o plural. A nivel de L, digamos con grandes cardinales menores que ω_1-Erdös o debajo de $0^{\#}$, **el** modelo núcleo es L: admite estratificación y estructura fina, valida el teorema de cubierta, y en él viven los grandes cardinales menores a los arriba mencionado, en caso de que estos existan en V. Podríamos decir que estas son las características deseables en un modelo núcleo. Si queremos incorporar grandes cardinales menores que un medible, aparece K^{DJ}. Si tenemos un medible, disponemos de $L[U]$, aunque este no cumple todo lo antes mencionado, pues su estructura fina no es la que se pretende, pero si admite teorema de cubierta (bifurcado). Por otro lado, en este caso K^{DJ} está en el ≪núcleo≫ de $L[U]$; si tenemos varios medibles, aparece el modelo núcleo $K[\mathscr{F}]$ (Mitchell), que tiene la propiedad de cubierta. Para grandes cardinales mayores aprecen los extensores, propiamente sucesiones de extensores, dando lugar a modelos internos de la forma $L[\mathscr{E}]$.

En cierto sentido, todo modelo núcleo conocido hasta ahora es de la forma $L[\mathscr{E}]$, un modelo con extensores; aquí modelo con extensores implica la estructura del modelo, en cambio modelo núcleo involucra la relación entre el modelo y la clase de los conjuntos. Un buen ejemplo de esta dicotomía es K^{DJ}, que está caracterizado por su forma de construirse: es un segmento inicial de la construcción del modelo núcleo en cualquier modelo en el que tal construcción sea posible. Pero también se caracteriza por el hecho de que él (o al menos $K^{DJ} \cap M$) es el modelo núcleo dentro de cualquier modelo M, en tanto M no contenga un modelo interno con un cardinal medible.

De lo anterior sintetizamos algunos hechos que conducen a la ≪definición≫ de modelo núcleo, aunque ya dijimos varias veces que esto no es posible de formalizar. En el sentido mencionado, el modelo núcleo está en el núcleo de modelos internos con las propiedades adecuadas al tipo de modelo interno en cuestión (grandes cardinales). Admite la validez de diversos principios combinatorios (diamante, cuadrado, etc) demostrables mediante estructura fina; se construye en forma estratificada, por lo que valida algún grado de condensación. Él satisface la HGC, el axioma global de elección y un buen orden definible.

Desde otro punto de vista, el modelo núcleo es cercano a V (propiedad o teorema de cubierta, según sea el caso). Es rígido, en el sentido de que no permite un encaje elemental en sí mismo no trivial; es absoluto: el modelo núcleo está definido en forma única por una fórmula absoluta entre extensiones genéricas.

Por lo previo, ocurre que el modelo núcleo es el modelo interno más pequeño (respecto a la contención) que contiene a los grandes cardinales que vivan en V. Esta ≪definición≫ debe servir exclusivamente como una guía al estudio y comprensión de los modelos núcleo, y de ninguna manera como una restricción formal. Sería válido abundar más e incorporar, por ejemplo, modelos internos cuando no existe una clase propia de cardinales Woodin, etc, pero creemos que lo ya hecho cumple la tarea que nos habíamos propuesto.

Referencias

[1] A. Andretta, *Building iteration trees*, J. Symb. Logic **56** (1991), 1369–1384.

[2] S. Baldwin, *Between strong and superstrong*, Journal of Symbolic Logic **51** (1986).

[3] A. Dodd, *Strong cardinals*, Manuscrito.

[4] ______, *The core model*, Cambridge University Press, 1982.

[5] A. Dodd and R. Jensen, *The core model*, Ann. Mathematical Log. **20** (1981), 43–75.

[6] ______, *The covering lemma for K*, Ann. Mathematical Log. **22** (1982), 1–30.

[7] ______, *The covering lemma for $L[U]$*, Ann. Mathematical Log. **22** (1982), 127–135.

[8] Q. Feng and R. Jensen, *Super complete extenders and type I mice I*, https://www.mathematik.hu-berlin.de/~raesch/org/jensen/Qi_Type1.pdf.

[9] A. Gallardo Quiroz, E. A. Valenzuela Nuncio, and L. M. Villegas Silva, *Modelos internos para cardinales medibles, sucesiones de medidas y cardinales fuertes*, Propuesto para publicación.

[10] R. Jensen, *T-mice*, diversos PDF en https://www.mathematik.hu-berlin.de/~raesch/org/jensen.html.

[11] ______, *More on iterability*, diversos PDF en https://www.mathematik.hu-berlin.de/~raesch/org/jensen.html.

[12] ______, *Nonoverlapping extenders sequences*, Manuscrito.

[13] ______, *Robust extenders*, diversos PDF en https://www.mathematik.hu-berlin.de/~raesch/org/jensen.html.

[14] ______, *Smooth iterations*, diversos PDF en https://www.mathematik.hu-berlin.de/~raesch/org/jensen.html.

[15] ______, *What is the strength of two cofinal well-founded branches?*, diversos PDF en https://www.mathematik.hu-berlin.de/~raesch/org/jensen.html.

[16] ______, *Manuscript on fine structure, inner model theory, and the core model below one Woodin cardinal*, Book in preparation, https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/rds/jensenskript_march_19_2024.pdf.

[17] ______, *Measures of order zero*, Diversos PDF en https://www.mathematik.hu-berlin.de/∼raesch/org/jensen.html.

[18] R. Jensen, E. Schimmerling, R. Schindler, and J. Steel, *Stacking mice*, J. Symb. Logic **74** (2009), 315–335.

[19] R. Jensen and J. Steel, *K without a measurable*, J. Symb. Logic **78** (2013), 708–734.

[20] P. Koepke, *Fine structure for inner models up to one strong cardinal*, Ph.D. thesis, Freiburg, 1989.

[21] ______, *Logic coll. '87*, North-Holland, 1989.

[22] A. Larson, *The stationary tower: Notes on a course given by W. Hugh Woodin*, University Lecture Series, AMS, 2004.

[23] D. A. Martin and J. Steel, *Iteration trees*, J. Am. Math. Soc. **7** (1994), 1–73.

[24] W. Mitchell, *Sets constructible from sequences of ultrafilters*, J. Symbolic Logic **39** (1974), 57–66.

[25] ______, *Hypermeasurable cardinals*, Logic Coll. '78, North-Holland, Amsterdam (1979), 303–317.

[26] ______, *Sets constructed from sequences of measures: revisited*, J. Symbolic Logic **48** (1983).

[27] ______, *The core model for sequences of measures I*, Math. Proceed. Cambridge Phil Soc. **95** (1984), 229–260.

[28] ______, *Handbook of set theory*, ch. 18. The covering lemma, pp. 1497–11594, M. Foreman, A. Kanamori, editors, Springer-Verlag, 2010.

[29] ______, *Handbook of set theory*, ch. 17. Beginning Inner Model Theory, pp. 1449–1496, M. Foreman, A. Kanamori, editors, Springer-Verlag, 2010.

[30] ______, *Set's and extensions in the twentieth century, handbook for the history of logic*, vol. 6, ch. Inner Models for Large Cardinals, Cambridge University Press, 2012.

[31] W. Mitchell and E. Schimmerling, *Weak covering without countable closure*, Math. Res. Letters **2** (1995), 595–509.

[32] W. Mitchell, E. Schimmerling, and J. Steel, *The covering lemma up to a woodin cardinal*, Ann. Pure App. Logic **84** (1997), 219–255.

[33] W. Mitchell and R. Schindler, a universal extender model without large cardinals in V, J. Symb. Logic **69** (2004), 219–255.

[34] W. Mitchell and J. Steel, *Fine structure and iteration trees*, vol. Lecture Notes in Logic 3, Springer-Verlag, 1994 (spanish).

[35] I. Neeman, *Inner models in the region of a Woodin cardinal*, Ann. Pure App. Logic **116** (2002), 67–155.

[36] J. A. Nido Valencia, H. G. Salazar Pedroza, and L. M. Villegas Silva, *Modelos internos, grandes cardinales y álgebra*, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Propuesto para publicación.

[37] R. Schindler, *The core model up to one strong cardinal*, Ph.D. thesis, Bonn, 1997.

[38] ______, *The core model almost linear iterations*, Ann. Pure App. Logic **116** (2002), 205–272.

[39] ______, *Set theory, exploring independence and truth*, Springer-Verlag, Switzerland, 2014.

[40] R. Schindler, J. Steel, and M. Zeman, *Deconstructing inner model theory*, J. Symb. Logic **67** (2002), 721–736.

[41] J. Steel, *The comparison lemma*, archivo PDF en https://math.berkeley.edu/∼steel/papers/comparisonlemma.03.07.22.pdf.

[42] ______, *Normalizing iteration trees and comparing interation strategies*, https://math.berkeley.edu/∼steel/papers/strategycompare.oct2019.pdf.

[43] ______, *Inner models with many woodin cardinals*, Ann. Pure App. Logic **65** (1993), 185–209.

[44] ______, *The core model iterability problem*, vol. Lecture Notes in Logic 8, Springer-Verlag, 1996.

[45] ______, *Core model with more Woodin cardinals*, J. Symb. Logic **67** (2002), 1197–1226.

[46] ______, *Handbook of set theory*, ch. 19. An outline of Inner Model Theory, pp. 1595–1684, M. Foreman, A. Kanamori, editors, Springer-Verlag, 2010.

[47] ______, *An introduction to iterated ultrapowers*, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, 2015.

[48] K. Tsaprounis, *Introduction to extenders*, unpublished manuscript.

[49] E. A. Valenzuela Nuncio, *Extenders and infinitary logic*, En preparación.

[50] M. Zeman, *Inner models and large cardinals*, Walter de Gruytier, 2002.

[51] ———, *Dodd parameters and λ-indexing of extenders*, J. Math. Logic **1** (2004), 73–108.