AIEM

AVANCES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN-e 2254-4313 | (2025) 27, 179-201 | aiem.es

seiem.es

Comprensión matemática evidenciada por estudiantes de secundaria sobre las funciones exponencial y logarítmica

Mathematical Understanding Evidenced by Secondary School Students on Exponential and Logarithmic Functions

Karen Gisel Campo-Meneses @ [1], Javier García-García @ [2]

[1] Universidad Autónoma de Occidente (Colombia)
[2] Universidad Autónoma de Guerrero (México)

Resumen ∞ Se refinó un marco de referencia sobre los niveles de comprensión a partir del establecimiento de conexiones matemáticas. Para ello, se emplea como referente teórico el *networking* entre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, y la Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas. Esta investigación cualitativa es un estudio de caso, en el que se analizaron las producciones y las respuestas a un cuestionario de tres estudiantes de secundaria. Los datos fueron analizados mediante el análisis ontosemiótico. Los resultados mostraron que el marco de referencia refinado permitió valorar el nivel de comprensión de los estudiantes, quienes, a través del establecimiento de conexiones evidenciaron un nivel de comprensión diferente respecto a las funciones exponencial y logarítmica. Los casos de estudio no evidenciaron un alto nivel de comprensión; algunas razones se debieron a la falta de tiempo para socializar y profundizar en algunas características de las funciones durante las sesiones.

Palabras clave ∞ Comprensión matemática; Conexiones matemáticas; Enfoque ontosemiótico; Función exponencial; Función logarítmica

Abstract ∞ A framework of reference on levels of comprehension was refined based on the establishment of mathematical connections. To this end, the networking between the Ontosemiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction and the Extended Theory of Mathematical Connections is used as a theoretical reference. This qualitative research is a case study in which the productions and responses to a questionnaire of three high school students were analyzed. The data were analyzed using ontosemiotic analysis. The results showed that the refined frame of reference allowed to assess the level of understanding of the students, who, through the establishment of connections, evidenced a different level of understanding concerning the exponential and logarithmic functions. The case studies did not show a high level of understanding; some reasons were due to the lack of time to socialize and deepen some characteristics of the functions during the sessions.

Keywords ∞ Mathematical understanding; Exponential function; Logarithmic function; Mathematical connections; Ontosemiotic approach

Campo-Meneses, K. G., & García-García, J. (2025). Comprensión matemática evidenciada por estudiantes de secundaria sobre las funciones exponencial y logarítmica. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática,* 27, 179-201. https://doi.org/10.35763/aiem27.6430

1. INTRODUCCIÓN

La comprensión es un proceso fundamental en la Educación Matemática (National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 2013). En la literatura existen investigaciones que han indagado sobre la comprensión matemática desde diferentes teorías, entre otros, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y la Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas (TAC) (Rodríguez-Nieto, Font, et al., 2021).

Estas investigaciones en general se han enfocado en estudiar la comprensión que evidencian estudiantes o futuros profesores de matemáticas sobre algún concepto, las perspectivas de los profesores sobre cómo comprenden los estudiantes y cómo se puede promover la comprensión (Cai y Ding, 2015; Yao et al., 2021).

De manera general, se ha reportado que tanto los profesores como los estudiantes tienen dificultad para comprender diferentes conceptos matemáticos (Campo-Meneses y García-García, 2021; Parra-Urrea y Pino-Fan, 2022; Yao et al., 2021), por ejemplo, respecto a la comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas se reporta que a los estudiantes se les dificulta relacionarlas (Campo-Meneses et al., 2021), alcanzar un nivel alto de razonamiento covariacional (Ferrari-Escolá et al., 2016), realizar diferentes representaciones semióticas (Sureda y Otero, 2013) y alcanzar un nivel óptimo de comprensión (Campo-Meneses y García-García, 2021).

Estas dificultades han llevado a diferentes investigadores a seguir indagando sobre lo que ocurre en el aula cuando se enseñan estas funciones (Campo-Meneses y García-García, 2023; Morales-López y Font, 2019), con el fin de analizar cómo promover la comprensión matemática. Así, entre las diferentes vías existentes para promover la comprensión en los estudiantes, está el establecimiento de conexiones matemáticas (Campo-Meneses et al., 2023; Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez, et al., 2021), la cual es un área de oportunidad.

De acuerdo con Font et al. (2007), la comprensión puede ser vista como competencia, donde su estudio se enfoca en analizar las prácticas del sujeto, la cual es la postura en la que se ubica la presente investigación. Un sujeto evidenciará un nivel de comprensión respecto al concepto que esté trabajando, el cual depende del tipo de tareas que logre resolver y de las conexiones que logre establecer entre los objetos emergentes de las prácticas matemáticas (Campo-Meneses y García-García, 2021). Campo-Meneses y García-García (2021) proponen unos niveles de comprensión relacionados con las funciones exponencial y logarítmica, que son refinados por García-García (2024) para el concepto de función y ecuación lineal; sin embargo, estos niveles solo incluyen conexiones intra-matemáticas.

De acuerdo con García-García (2024), es necesario realizar más estudios sobre la comprensión matemática, particularmente ampliar los niveles propuestos, incluyendo las conexiones extra-matemáticas. Por esta razón, en la presente investigación se buscó responder la pregunta: ¿Cómo valorar la comprensión matemática de un sujeto a través del establecimiento de conexiones intra y extra-matemáticas? Así, este artículo aporta a la ampliación del marco propuesto en García-García (2024), cuando se incluyen tareas extra-matemáticas.

2. Marco teórico

2.1. *Networking* entre la TAC y el EOS

De acuerdo con el *networking* entre la TAC y el EOS, propuesto por Rodríguez-Nieto, Font, et al. (2021), se afirma que la actividad matemática se modela en términos de prácticas matemáticas y la configuración de objetos matemáticos primarios y procesos activados en tales prácticas. Una práctica matemática se concibe como toda acción llevada a cabo en la resolución de tareas matemáticas y en la comunicación de las soluciones a otras personas, con el fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos (Godino y Batanero, 1994). En la práctica matemática intervienen diferentes objetos, los cuales pueden ser ostensivos (símbolos, gráficos...) y no ostensivos (que son recordados al hacer matemáticas).

El término objeto, desde la idea ontológica del EOS, se usa ampliamente para referirse a cualquier entidad que, de alguna manera, esté involucrada en la práctica matemática y que pueda identificarse como una unidad. De acuerdo con Godino et al. (2007), se definen seis objetos primarios: las tareas, que son aquellas a partir de las cuales surge la actividad matemática; representaciones, referidas a las diferentes formas en las que se puede representar la información presentada en una tarea, o bien para representar un concepto matemático; definiciones, que son aquellos conceptos matemáticos que se usan de manera explícita o implícita en la actividad matemática y que pueden ser definidos; proposiciones, que son los enunciados acerca de los conceptos; procedimientos, que incluyen algoritmos, operaciones y técnicas de cálculo usados para resolver una tarea; y los argumentos, que son las justificaciones usadas para mostrar la validez de una proposición o el desarrollo de tareas (argumentos formales e informales).

Entre los objetos primarios emergentes se pueden establecer relaciones verdaderas, las cuales se denominan conexiones matemáticas (Campo-Meneses y García-García, 2021) y dependiendo del tipo de relación, se determina la tipología de conexión que emerge. Las conexiones matemáticas pueden ser extra-matemáticas (si la relación es establecida entre la matemática y conceptos fuera de esta) o intra-matemáticas (si la relación es establecida entre conceptos matemáticos) (García-García y Dolores-Flores, 2018).

Las tipologías que puede evidenciar un estudiante al resolver tareas son:

Modelado: es la relación establecida entre el concepto matemático y una tarea en contexto real (que ocurra o pueda ocurrir en la vida real) o una tarea de aplicación en alguna otra disciplina, en el que el sujeto partiendo de la tarea construye un modelo matemático (simbólico o gráfico) para darle solución. Una vez construido el modelo, el sujeto hace uso de diversos conocimientos (matemáticos o no) y ejecuta diversas acciones que lo llevan a esteblacer conexiones intramatemáticas para llegar a una respuesta coherente a la situación estableciendo así la conexión de significado (Dolores y García-García, 2017; Evitts, 2004).

Característica: es la relación que se establece entre el concepto matemático y los rasgos invariantes de este, que los distinguen de otros o que lo asemejan a otros (Eli et al., 2011; García-García y Dolores-Flores, 2018).

Parte-todo: es la relación de generalización (entre casos generales y particulares) o inclusión (un concepto está contenido en otro) entre conceptos matemáticos (Businskas, 2008).

Procedimental: es la relación establecida entre la tarea y los procedimientos realizados para resolverla. Esta conexión incluye todo medio (cálculos, fórmulas, gráficos…) para llegar a un resultado (Evitts, 2004).

Implicación: es la relación lógica entre dos conceptos y se expresa de la forma *sí… entonces* (Businskas, 2008).

Significado: es la relación entre un concepto matemático y el sentido que los estudiantes le atribuyen (que lo hace diferente de otro), lo cual se puede ver de dos formas: como la relación entre el concepto y la definición que el estudiante ha construido para este o como la relación entre el concepto y sus contextos de uso (García-García y Dolores-Flores, 2018).

Reversibilidad: es la relación bidireccional entre dos conceptos matemáticos, es decir, se puede partir de un concepto A para llegar al B y a su vez invertir el proceso para llegar del B al A (García-García y Dolores-Flores, 2018).

Representaciones diferentes: es la relación entre dos representaciones, cada una ubicada en registros diferentes (representaciones alternas), o bien en el mismo registro semiótico (representaciones internas/equivalentes) (Businskas, 2008).

2.2. Comprensión matemática

La comprensión matemática desde la mirada de las conexiones es definida por Campo-Meneses y García-García (2021) como:

> Un sujeto X comprende un objeto O cuando realiza prácticas de las que emergen objetos, logra establecer la conexión central entre dichos objetos, lo cual le permite resolver las tareas propuestas consistentemente (usa el objeto de manera competente) y a su vez es capaz de justificar tal conexión. (p. 30)

Para el caso de las funciones en estudio, la conexión central es la de reversibilidad, ya que se abordan en conjunto dos funciones inversas. Para valorar el nivel de comprensión de un sujeto, Campo-Meneses y García-García (2021) proponen una herramienta que consta de 5 niveles, la cual se construyó de manera inductiva a partir del análisis de datos empíricos. Esta herramienta fue adaptada por García-García (2024), quien detalla más cada nivel e introduce una tipología nueva.

Tanto los niveles propuestos por Campo-Meneses y García-García (2021), como los propuestos por García-García (2024), toman en cuenta únicamente las conexiones intra-matemáticas, por ello es necesario adaptar dichos niveles para incluir las conexiones extra-matemáticas.

En un primer momento, se deben analizar las conexiones matemáticas que son importantes para comprender las funciones en estudio. En este sentido, para abordar las funciones exponencial y logarítmica es necesario establecer diferentes conexiones que permiten realizar distintas prácticas matemáticas. Así, es importante hacer algunas especificidades en las tipologías de conexiones característica y reversibilidad, ya que estas se pueden establecer en diferentes aspectos.

Para el caso de la conexión característica, se afirma que debe establecerse en relación con la monotonía, condiciones para la base, y el dominio y el rango de cada función. La conexión de reversibilidad debe darse entre las gráficas, las expresiones algebraicas y su uso en procedimientos y en el lenguaje natural.

Ahora bien, la conexión matemática central para estudiar las funciones exponencial y logarítmica es la de reversibilidad; sin embargo, esto solo es cuando se trabajan las conexiones intra-matemáticas. En este caso, como se trabajan con tareas que promueven el establecimiento de la conexión matemática de modelado, consideramos que esta resulta determinante, al igual que la conexión de reversibilidad, para la comprensión de las funciones, ya que son necesarias para hacer prácticas clave para responder las tareas consistentemente. Bajo las consideraciones previas, adaptamos el marco propuesto por García-García (2024) como preliminar para el estudio de la comprensión de las funciones exponencial y logarítmica (ver Tabla 1).

Tabla 1. Niveles de comprensión a partir del establecimiento de conexiones matemáticas

Nivel	Conexiones matemáticas esperadas	Descripción
0	Ninguna	El estudiante realiza prácticas rutinarias que impiden el establecimiento de conexiones. El estudiante proporciona resultados matemáticamente inconsistentes en todas las tareas dadas. Algunos de los argumentos del estudiante se basaron en el sentido común. El estudiante utiliza los datos proporcionados por la tarea de manera inconsistente. Se identifican dificultades en los argumentos de los estudiantes. Se identifican errores en los procedimientos del estudiante. El estudiante no resuelve las tareas.
1	Característica Procedimental	El estudiante completa exitosamente algunas de las tareas asignadas. En ciertos casos, el estudiante se basa en procedimientos guiados por fórmulas o reglas memorizadas. El estudiante realiza prácticas que lo llevan a reconocer algunas características o propiedades de los conceptos matemáticos involucrados en algunas tareas. En algunas tareas, el estudiante encuentra desafíos y comete errores, como tomar parcialmente el significado de los datos o ejecutar incorrectamente procedimientos. En este nivel, un estudiante puede hacer más conexiones matemáticas más allá de las esperadas, pero pueden no ser cruciales para resolver consistentemente las tareas asignadas.

Nivel	Conexiones matemáticas esperadas	Descripción
2	Característica Procedimental Parte-todo Representaciones diferentes Implicación	Un estudiante completa exitosamente algunas de las tareas propuestas, pero no todas. Las conexiones matemáticas utilizadas en el nivel 1 siguen aplicándose en este nivel. Expandiendo el uso de estas tipologías para otras características de los conceptos y procedimientos más complejos. A diferencia del nivel 1, en este el estudiante demuestra una comprensión de las relaciones lógicas entre conceptos matemáticos o propiedades relevantes para determinadas tareas. El estudiante establece las conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes y parte-todo para resolver algunas de las tareas propuestas. Más allá de las conexiones matemáticas más comunes esperadas en este nivel, un estudiante podría utilizar algunas adicionales, aunque es posible que no influyan para resolver todas las tareas asignadas. La ausencia de las conexiones matemáticas de reversibilidad (dependiendo de los conceptos matemáticos involucrados) en este nivel puede plantear desafíos para una estudiante en la resolución de todas las tareas.
3	Todas menos la de modelado	En este nivel, un estudiante resuelve consistentemente la mayoría de las tareas. Algunas o incluso todas las conexiones matemáticas utilizadas en el nivel 2 continúan utilizándose en este nivel. Expandiendo el uso de estas tipologías para otras características de los conceptos y procedimientos más complejos. A diferencia del nivel 2, un estudiante emplea hábilmente la conexión matemática de representaciones diferentes en más de dos registros de representación. Un estudiante demuestra la capacidad de atribuir significados a los conceptos matemáticos implicados en las tareas y sus soluciones numéricas dentro del contexto de la tarea. Principalmente, identifica contextos de uso y los relaciona con el concepto. El estudiante establece, en algunos casos, la conexión matemática de reversibilidad (entre las gráficas o en el lenguaje natural). La conexión de reversibilidad es usada para establecer la conexión de implicación en algunos casos.
4	Todas las tipologías	Algunas o incluso todas las conexiones matemáticas utilizadas en el nivel 3 continúan utilizándose en este nivel. En este nivel estarían los estudiantes que ,en algunos casos, establecen la conexión de modelado a través de un modelo gráfico, sin recurrir a modelos simbólicos complejos. La conexión de reversibilidad es usada para establecer la conexión de implicación. La conexión de significado, además de establecerse entre el concepto y los contextos de uso, puede establecerse entre el concepto y la definición.

Nivel	Conexiones matemáticas esperadas	Descripción
5	Todas las tipologías	El estudiante realiza prácticas que lo llevan a establecer la conexión central y así resolver consistentemente todas las tareas de manera competente. Algunas o incluso todas las conexiones matemáticas empleadas en el nivel 4 se aplican consistentemente en este nivel. La conexión característica en este nivel se establece en todos los rasgos esenciales del concepto. Un estudiante identifica hábilmente tanto las similitudes como las diferencias entre las tareas propuestas. A través de sus producciones escritas y verbales, un estudiante demuestra una comprensión de estructuras matemáticas y las relaciones entre los conceptos involucrados, demostrando una capacidad genuina para hacer matemáticas. La conexión central sirve como base para justificar la aplicación de otras conexiones matemáticas en todas las tareas. Esta conexión depende del concepto, en este caso es la de reversibilidad y la de modelado. De acuerdo con esto, el estudiante establece la conexión de reversibilidad entre las gráficas, entre expresiones simbólicas, en el lenguaje natural y en los procedimientos para encontrar una gráfica, un valor específico, el domino, el rango y alguna expresión. El estudiante usa la condición de ser conceptos inversos para establecer la conexión de implicación entre proposiciones emergentes. En este nivel estarían los estudiantes que establecen la conexión de modelado, creando un modelo simbólico que los lleve a establecer las demás tipologías y así realizar prácticas que le permitan resolver las tareas. El estudiante reconoce diferentes contextos de uso del concepto (dentro y fuera de la matemática). El estudiante relaciona el concepto matemático con conceptos de otras disciplinas.

Fuente: adaptada de García-García (2024).

Cabe señalar que si las tareas no promueven conexiones extra-matemáticas, no se tendría en cuenta la conexión de modelado en ninguno de estos niveles.

3. Metodología

Esta investigación cualitativa es un estudio instrumental de casos (Stake, 2005), en el que se analizaron las producciones (en lápiz y papel, orales y empleando GeoGebra) y las respuestas a un cuestionario de tres estudiantes colombianos de secundaria. Los casos fueron seleccionados de la siguiente forma:

(1) Se implementó en un grupo de 30 estudiantes de secundaria un proceso de enseñanza sobre las funciones exponencial y logarítmica (consultar en Campo, 2025) diseñado para promover el establecimiento de conexiones matemáticas (implementado en tres sesiones de 1 hora y media).

(2) Se revisó quiénes estuvieron en todas las sesiones realizadas y hubiesen respondido todas o la mayoría de las tareas, y

(3) se preguntó a estos estudiantes si estaban con la disposición de responder un cuestionario relacionado con el trabajo en clase; tres estudiantes estuvieron de acuerdo (2 mujeres y un hombre), y estos son quienes componen los casos de estudio. En adelante los llamaremos E1, E2 y E3.

Los datos fueron analizados teniendo en cuenta la ruta que se ha seguido en las investigaciones donde se usa de manera conjunta la TAC y el EOS (Campo-Meneses y García-García, 2021; Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez, et al., 2021), en ese sentido, se consideraron las siguientes seis fases:

Fase 1. Organización de la información. En esta fase se trascribieron las respuestas al cuestionario y se organizó toda la información recolectada en documentos de Word, un archivo por cada estudiante. El objetivo del cuestionario fue indagar sobre cómo los casos de estudio respondieron las tareas, para ello, se incluyeron preguntas como ¿Por qué elegiste esa situación para resolverla? ¿Cómo resolviste la tarea? ¿Qué aprendiste? ¿Qué puedes concluir de cada tarea? Esto permitió analizar si realmente los estudiantes establecieron cada conexión matemática evidenciada en sus respuestas, por lo que el análisis de las respuestas a este cuestionario se hizo en conjunto con las evidencias de las tareas.

Fase 2. Se hace una narrativa "matemática" temporal de la producción de cada estudiante en la que se hallan implícitamente las prácticas matemáticas realizadas por el estudiante y los objetos primarios (llamados los personajes principales de la narrativa). Como ejemplo, a continuación, presentamos una parte de la narrativa del estudiante E3 para la situación del COVID-19:

> Primero se propone la tarea en la que deben leer tres situaciones propuestas, para ello, E3 lee las situaciones y luego, en la tarea 2, deben resolverlas, para lo cual procede a resolver cada situación. Para el caso de la situación del COVID-19, E3 realiza procedimientos para encontrar los valores cuando el factor es 2, luego realiza procedimientos para realizar la gráfica en Excel ubicando el tiempo en el eje x y el número de contagios en el eje y, afirmando que la gráfica es exponencial.

Fase 3. Identificación de prácticas. En esta fase se identifican las prácticas que realiza el sujeto. Como ejemplo de ello, se presentan las prácticas evidenciadas en la actividad matemática de E1 en la situación del COVID-19:

P1T2. Encuentra los valores para el x e y cuando $R = 2$.

P2T2. Realiza procedimientos para hacer la gráfica que modela la situación cuando $R2 = 2$.

P3T2. Compara las gráficas dadas con la realizada.

P4T2. Encuentra los valores para x e y cuando $R = 3$.

P5T2. Realiza procedimientos para realizar la gráfica que modela la situación cuando $R2 = 3$.

P6T2. Analiza la situación en contexto real.

Fase 4. Configuración de objetos. Después de la identificación de prácticas, se procede a identificar los objetos primarios emergentes en estas y para ello se elabora la configuración de objetos primarios (ver las dos primeras columnas de la Tabla 2).

Fase 5. Identificación de conexiones matemáticas establecidas. Una vez identificados los objetos primarios, se procede a analizar las conexiones establecidas y a distinguir qué tipo de conexión es (ver Tabla 2).

Tabla 2. Configuración de objetos y conexiones matemáticas identificadas en la actividad matemática de E1

Prácticas	Objetos	Conexiones	Tipología de conexión
P1T2.	T2 (tarea): Situación del COVID-19.	T2-Pp1	Característica
	Pp1 (proposición): x corresponde al tiempo y, y al número de contagiados.		
	Pr1 (procedimiento): Hallar los valores de y para el caso de $R = 2$.	T2-Pr1	Procedimental
P2T2.	Ln1: Función exponencial	G1-Ln1	Representaciones diferentes.
	G1: Gráfica cuando $R = 2$.	T2-G1	Modelado
	Pp2: G1 es exponencial.		
	Pr2: Ubicar los puntos en el plano y graficar el caso de $R = 2$.	T2-Pr2	Procedimental
	D1: Continuidad.	D1-Pr2	Característica
P3T2.	G2: Gráfica Colombia. G3: Gráfica México. G4: Gráfica Venezuela. Pp 3: Las gráficas propuestas (G2, G3, G4) se asemejan a G1. Pp4: A medida que pasa el tiempo, incrementa el número de contagios.	G1-G2; G1-G3; G1-G4 G1-Pp3; G1-Pp4	Característica
P4T2.	T2 Pr3: Hallar los valores de y para el caso de R=3.	T2-Pr3	Procedimental
P5T2.	Pr4: Ubicar los puntos en el plano y graficar el caso de $R = 3$.	T2-Pr4	Procedimental. Modelado
P6T2.	Pp5: El número inicial de infectados es 1. Pp6: Para que haya un contagio, por lo menos debe haber una persona infectada.	Pp5-Pp6	Característica
	Argumento 1: Tesis: Pp5. Razón: Pp6. Pp7: El contagio se detendrá en el algún momento. Pp8: Vacunar a la población es una vía para detener el contagio.	Pp7-Pp8	Implicación

Fase 6. Valoración de la comprensión matemática. En esta fase se hace la valoración de la comprensión teniendo en cuenta las fases anteriores.

4. Resultados

Los resultados de esta investigación se presentarán, a continuación, por caso de estudio.

4.1. Caso 1: E1

De las tres situaciones presentadas en la tarea 2, E1 eligió la tarea del COVID-19. Las prácticas que realizó, los objetos primarios que emergieron y las conexiones establecidas entre estos objetos se presentan en la Tabla 2.

En esta situación se observó que E1 estableció diversas conexiones matemáticas. La conexión que permitía realizar prácticas para resolver esta tarea era la de modelado, ya que, proponer un modelo para resolver la situación exigía diferentes procedimientos, aludir a propiedades, representaciones, etc., que evocaban otras tipologías de conexiones matemáticas. E1 estableció la conexión de modelado (ver Figura 1), para ello, propuso una gráfica como modelo de la situación (para $R = 2$ y $R = 3$), y a través de esta respondió las preguntas planteadas.

Figura 1. Gráfica de la situación del COVID-19, para R=2, realizada por E1

En este proceso estableció la conexión de representaciones diferentes entre una representación gráfica (G1) y una representación lenguaje natural (Ln1). La conexión característica (ver Figura 2) fue establecida en el momento en que E1 comparó las gráficas y particularmente afirmó que a medida que pasa el tiempo los contagios incrementan (G1-Pp4), además, afirmó que inicialmente hay un contagiado porque el 2 y el 3 elevados a la cero da como resultado 1. La conexión procedimental se empleó cuando E1 realizó diferentes procedimientos, tanto para encontrar los valores como para ubicarlos en el plano y realizar la respectiva gráfica. La conexión de implicación fue realizada solo en el momento en que E1 afirmó que, si se vacuna, entonces el contagio se detendrá.

Figura 2. Evidencia de la conexión característica por E1

Respuesta: Sí, estas curvas se asemejan con las gráficas construidas por mi persona, ya que lo que sucede en la pandemia, es un caso que muestra que, mientras avanza el tiempo, los contagiados aumentan. ¿Cuál suponen que fue la cantidad inicial de infectados? ¿Por qué? Respuesta: Inicialmente, para poder contagiarse un virus, tiene que existir por lo menos una persona infectada; por lo tanto, la cantidad inicial infectados puede iniciar desde 1. Esto corresponde cuando elevamos cualquier número a la 0, porque inicial es cuando empieza y en las funciones sería desde cero y en este caso 2 o 3 a la 0 da 1.

El mismo análisis se realizó para cada una de las tareas. En ese sentido, en la Tabla 3, se presentan objetos y conexiones matemáticas establecidas por E1 en las tareas 4 y 5.

Tabla 3. Análisis de la actividad matemática de E1 en las tareas 4 y 5

Objetos	Conexiones	Tipología de conexión
T4: Progresiones aritmética y geométrica. Ta1: Tabla que relaciona dos progresiones (artimética y geomética). Pr1: Completar la tabla. Pp1: Los números de las dos filas van de manera ascendente. Pp2: En la segunda fila los números se duplican. Pp3: La primera fila corresponde a x y la segunta a y.	T4-Pr1 Ta1-Pp1 Ta1-Pp2 Ta1-Pp3	Procedimental. Característica.
G1: Gráfica exponencial. G2: Gráfica logarítmica. Ln1: Función exponencial. Ln2: Función logarítmica. Pr2: Ubicar los puntos en el plano y graficar. D1: Función.	T4-G1; T4-G2; G1-Ln1; G2-Ln2 T4-Pr2 D1-Ln1; D1-Ln2	Representaciones diferentes. Procedimental. Parte-todo.
Pp4: La gráfica de la función exponencial va en dirección hacia arriba. Pp5: La gráfica de la función logarítmica va en dirección hacia abajo.	G1-Pp4; G2-Pp5	Característica.

Objetos	Conexiones	Tipología de conexión
T5: Teniendo en cuenta lo que encontraste en la clase anterior y en la tarea 4, ¿cómo podrías representar cualquier función exponencial y cualquier función logarítmica? S1: $y = a^x$ S2: $x = a^y$ S3: $f(x) = log_a x$ Pp6: La función logarítmica es la inversa de la exponencial. Pp7: La función exponencial se presenta de manera inversa. Pr3: Hallar la expresión general en cada caso.	Ta1-S1; Ta1-S2 S2-S3; G1-S1; G2-S2 T5-Pp6 Pp6-Pp7 T5-Pr3	Parte-todo. Representaciones diferentes. Característica. Implicación Procedimental.

E1 realizó diferentes prácticas y estableció diferentes conexiones matemáticas que le permitieron resolver las tareas propuestas (4 y 5). Aunque E1 se confundió al introducir algunos de los puntos en Excel para generar las gráficas, logró identificar la forma de la representación gráfica de una función exponencial y de una logarítmica. Por los procedimientos y justificaciones que se ofrecen, se afirma que E1 estableció conexiones matemáticas de tipo procedimental, implicación, característica, parte-todo y representaciones diferentes. Por ejemplo, la conexión parte-todo se evidenció cuando propuso expresiones generales a partir de los datos de la tabla y la conexión característica, cuando mencionó la concavidad de las gráficas para distinguirlas (ver Figura 3).

Figura 3. Evidencia de las conexiones parte-todo y característica por E1

g. Encuentra una expresión matemática que represente los datos para los dos casos.

Respuesta: Las expresiones matemáticas son:

$$y = a^x$$
$$x = a^y$$

h. ¿Hay alguna relación entre estas expresiones y las realizadas en la clase anterior? ¿Cuál?

Respuesta: Es la misma función, pero una es exponencial y la de la clase pasada fue logarítmica, la que va en dirección hacia arriba es exponencial, mientras que va direccionada hacia abajo es logarítmica.

En esta tarea, la conexión matemática que permitía resolverla era la de reversibilidad, pero, aunque hay indicios sobre el establecimiento de esta conexión, ya que E1 planteó la proposición "la función logarítmica es la inversa de la exponencial", se considera que no hay evidencia suficiente para afirmar que estableció dicha conexión matemática.

En lo que respecta a la tarea 6, E1 estableció conexiones matemáticas de tipo característica, implicación, significado y de reversibilidad (ver Tabla 4).

Tabla 4. Análisis de la actividad matemática de E1en la tarea 6

Objetos	Conexiones	Tipologías de conexión
T6: Caracterizar las funciones exponencial y logarítma. Pp1: Para que exista una función exponencial y logarítmica, el valor que tiene que tomar a tiene que ser un número positivo. Pp2: Cuando $0 < a$ las gráficas se pueden generar de manera normal presentando las dos funciones. Pp3: Si $a < 0$ no es posible generar las gráficas. Pp4: Para la función $f(x) = 2^x$ el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el rango $(0, \infty)$. S1: $f(x) = 2^x$ S2: $(-\infty, \infty)$ S3: $(0, \infty)$	T6-Pp1; T6-Pp2; T6-Pp3; S1-Pp5	Característica.
Pp5: Las funciones se relacionan porque están ubicadas de manera inversa en el plano cartesiano. Pp6: La forma de las funciones es casi la misma, solo que están de manera inversa.	T6-Pp5; T6-Pp6	Reversibilidad
Pp7: La función exponencial es en donde se toma cualquier número como base (que sea mayor a cero) y otro número el cual era el exponente. Pp8: La función logarítmica usa siempre el log y un número para cumplir su función. Pp9: log en base a de y es igual a x Pp10: a elevado a x es igual a y. Pp11: Las funciones se relacionan porque son inversas. Ln1: Función exponencial. Ln2: Función logarítmica.	Pp11-Pp5 Pp9-Pp10 Pp9-Pp10 Ln1- Pp7 Ln2-Pp8	Reversibilidad Implicación Significado

Aunque E1 estableció la conexión característica cuando mencionó rasgos de las gráficas de las funciones al mover el deslizador, no discriminó qué ocurría con las gráficas de las funciones cuando $0 < a < 1$. Además, E1 no propuso el dominio ni el rango de las funciones en general, sino que decidió poner un caso particular y solo para la función exponencial. Logró identificar que para que existan las funciones la base debe ser mayor a cero, pero no mencionó algo sobre qué pasaría si la base es 1.

La conexión de significado fue establecida por E1 cuando propuso una definición para cada función. Y la conexión de reversibilidad se evidenció cuando afirmó que las funciones son inversas y que esto se veía con las gráficas en el plano cartesiano, además cuando, a partir de la expresión de una función logarítmica, propuso la expresión para la función exponencial. Esto último también justifica la conexión de implicación.

Teniendo en cuenta lo anterior, analizamos cómo fue el establecimiento de conexiones matemáticas en general. E1 estableció la conexión característica entre algunas de las propiedades relacionadas con la concavidad y la monotonía de las funciones, pero no estableció dicha conexión entre las demás propiedades. En cuanto a la conexión de modelado, en general se observa que E1 la estableció en el proceso de la resolución de las tareas.

Por su parte, el establecimiento de la conexión de reversibilidad por parte de E1 se evidenció entre las gráficas, en el lenguaje natural y entre las expresiones matemáticas; sin embargo, no se evidenció su uso en procedimientos, por ejemplo, para encontrar el dominio y el rango. El establecimiento de la conexión de implicación se observó en algunas tareas. La conexión parte-todo, se observó cuando E1 encontró las expresiones generales de las funciones en estudio.

La conexión de representaciones diferentes se estableció en diversos registros. La conexión procedimental principalmente se evidenció cuando E1 completó las tablas, realizó gráficas o encontró una expresión matemática a partir de determinados datos. La conexión de significado emergió cuando propuso una definición para cada función y reconoció contextos de uso.

En este sentido, se valora el nivel de comprensión de E1 en un nivel 4, ya que la conexión de reversibilidad no la usa en procedimientos para hallar el dominio y rango y la conexión de modelado es empleada a partir de un modelo gráfico elemental.

4.2. Caso 2: E2

De las tres situaciones propuestas, E2 escogió la tarea de los perritos callejeros. El análisis de la actividad matemática de E2 en esta situación se presenta en la Tabla 5.

Tabla 5. Análisis de la actividad matemática de E2 en la situación de perritos callejeros

Objetos	Conexiones	Tipología de conexión
T2: Perritos callejeros		
G1. Gráfica que representa la situación.		Ninguna.
Pr1: Realizar la gráfica.		
Pr2: Calcular la cantidad de perritos callejeros en 30 años.	T2-Pr2	Procedimental.
Pr3: Encontrar la expresión S1.		
S1: $N^{2*t} = x$.		
S2: $6^{2*30} = N.º$		Ninguna.
Pp1: Para calcular la cantidad de perritos en 30 años se realiza una potenciación.		
Pp2: Si se duplica la cantidad de perritos en lugar de sextuplicarse la relación disminuye en comparación con la anterior.	T2-Pp2	Característica.

Como se muestra en la Tabla 5, E2 realizó diferentes prácticas de las que emergen objetos, sin embargo, solo estableció dos conexiones matemáticas: procedimental y característica. Respecto a la primera, esta se evidenció cuando efectuó ciertos procedimientos para encontrar el valor solicitado, e incluso explicó el procedimiento que consideró se debía seguir para encontrar el número de perritos en 30 años (ver Figura 4).

Figura 4. Evidencia de la conexión procedimental establecida por E2 en la tarea 2

Respuesta: Podríamos calcular la cantidad de perros callejeros si realizamos una potenciación, gracias a que multiplicaríamos el número de perros (6), cada 6 meses, durante esos 30 años.

Pero, al estar realizando el estudio cada 6 meses, tenemos que tomar en cuenta que se seleccionaría medio año, por tanto, se tendría que duplicar el tiempo establecido para que se realice el análisis con el año completo (12 meses), es decir, $30\ x\ 2\ =\ 60$.

La conexión característica fue establecida por E2 cuando comparó dos situaciones: una que se duplica y una que se sextuplica, afirmando que cuando se duplica el crecimiento es más lento que cuando se sextuplica (Pp2).

En la tarea de los perritos callejeros se esperaba que los casos establecieran una mayor variedad de conexiones matemáticas; sin embargo, E2 cometió errores que le impidieron hacerlo. Por ejemplo, propuso una representación gráfica y simbólica inconsistente matemáticamente. Incluso la expresión general que propuso no se corresponde con los casos particulares ni con la gráfica (ver Figura 5).

Figura 5. Evidencia del no establecimiento de conexiones por E2 en la tarea 2

Y utilizaríamos la siguiente fórmula:
N^{t*2} = x N = N.° de perros
t = tiempo
Aplicando la fórmula sería:
6^{30*2}= N.° de Perros en 30 años
a. ¿y en x años?
Respuesta: Se utilizaría la misma fórmula, pero se cambiaría el tiempo, según el dato de tiempo que nos suministren.
b. Ahora, si en lugar de sextuplicarse, se duplica la cantidad de perros cada seis meses
Respuesta: Se utilizaría la siguiente fórmula:
$N * 2^{6}$ = x N = N.° de perros

En lo que respecta a las tareas 4 y 5, E2 completó la tabla (P1T4) evidenciando la conexión procedimental entre T4 y Pr1 de la Tabla 3. Las respuestas de E2 a las preguntas relacionadas con describir el comportamiento de las filas y proponer la expresión correspondiente no son matemáticamente consistentes. Realizó las gráficas en cada caso; sin embargo, cometió errores al introducir los datos en el programa Excel que usó para realizar las gráficas. E2 no resolvió la tarea 5. En la tarea 6 caracterizó parcialmente a las funciones exponencial y logarítmica (P1T6), afirmando que, para que existan las funciones, el número que toma la base debe ser positivo (Pp1) (ver Figura 6) y que, cuando el valor de la base es mayor que cero, las gráficas se generan normalmente (Pp2), de esta manera se evidenció el establecimiento de la conexión característica.

Figura 6. Evidencia de la conexión representaciones diferentes establecida por E2 en la tarea 2

a. ¿Cuáles son los valores que puede tomar a para que exista una función exponencial y una función logarítmica?

Respuesta: Para que exista una función exponencial y logarítmica, el valor que tiene que tomar a tiene que ser un número positivo.

E2 no realizó prácticas consistentes matemáticamente relacionadas con el dominio, rango, monotonía de las funciones, además no realiza prácticas asociadas a la función logarítmica respecto a la expresión matemática y características, lo que le impidió establecer otras tipologías de conexiones matemáticas.

De manera general, E2 solo estableció, en algunos casos, las conexiones matemáticas característica y procedimental, permitiéndole realizar prácticas para resolver algunas tareas o parte de estas. En ese sentido la comprensión de E2 se valora en un nivel 1.

4.3. Caso 3: E3

De las tres situaciones presentadas en la tarea 2, E3 eligió la tarea de los terremotos. Los objetos primarios que emergieron y las conexiones establecidas entre estos se presentan en la Tabla 6.

Tabla 6. Análisis de la actividad matemática de E1 en la situación de terremotos

Objetos	Conexiones	Tipología de conexión
T2: Situación de terremotos. Pr1: Contar cifras. Pr2: Pasar un número a notación científica. Pp1: La energía liberada aumenta a medida que la escala aumenta.	T2-Pr1 T2-Pr2	Procedimental
Argumento: tesis: Pp1; razón: Pr1.	T2-Pp1	Característica

Como se observa en la Tabla 6, E3 estableció dos tipologías de conexiones matemáticas. Particularmente los procedimientos realizados (Pr1 y Pr2) se evidencian al completar la tabla (ver Figura 7).

Figura 7. Evidencia de la conexión procedimental establecida por E3 en la tarea de terremotos

Sismo: lugar – fecha	Cantidad de energía liberada: C	Magnitud	Cantidad de dígitos de C	C en notación científica
Cariaco, Venezuela – 1997	199.000	7	6	$1{,}99*10^5$
Puebla, México – 2017 Perú - 2018 Guerrero, México – 2021	236.000	7,1	6	$2{,}36*10^5$
Mexicali, México – 2010 Ecuador – 2010 Guerrero, México - 2014 Oaxaca, México – 2018 Haití - 2021	250.000	7,2	6	$2{,}5*10^5$
Sucre, Venezuela – 2018	419.700	7,3	6	$4{,}197*10^5$
Guatemala - 2012 Guerrero, México – 2012	550.000	7,4	6	$5{,}5*10^5$
Oaxaca, México - 1999 Indonesia – 2015	750.000	7,5	6	$7{,}5*10^5$
Colima, México - 2003 Costa Rica – 2012 Chile – 2016	820.000	7,6	6	$8{,}2*10^5$
El Salvador – 2001 Chile – 2007 Chile – 2014	997.000	7,7	6	$9{,}97*10^5$
Chile - 2005 Nepal – 2015 Ecuador – 2016	1.250.000	7,8	7	$1{,}25*10^6$
Perú – 1970	5.850.000	7,9	7	$5{,}850*10^6$

Además de esta situación, E3 resolvió la situación del COVID-19, sin embargo, sus resultados no son consistentes, por lo que no se evidenció establecimiento de conexiones matemáticas. En lo que respecta a las tareas 4 y 5, las prácticas matemáticas realizadas por E3 (Tabla 3) son similares a las realizadas por E1. Se evidenció el establecimiento de diferentes tipologías de conexiones matemáticas, similar a E1. Por ejemplo, la conexión matemática de tipo procedimental fue establecida por E3 al realizar diferentes procedimientos para completar la tabla y para encontrar las expresiones que correspondían con los datos, lo que se justifica con los argumentos que da E3 (ver Figura 8).

Figura 8. Evidencia (respuesta al cuestionario) de la conexión procedimental establecida por E3 en la tarea 4

• Cuéntame lo que hiciste para completar la tabla

Respuesta: Lo que hice fue reconocer las variables X y Y, observando que el valor común es 2, X actúa como resultado y Y como exponente, ejemplo: Y: 20 =1; Y: 21 =2; Y: 22 = 4; Y: 23 =8

• ¿Qué aprendiste de las preguntas relacionadas con la tabla?

Respuesta: Aprendí a interpretar los datos de una tabla y llevarlos a una gráfica, además poder reconocer qué valores toma cada una de las variables y los comportamientos que toman las filas, además vemos aplicada la función exponencial y logarítmica.

La conexión característica se evidenció cuando E3 describió el comportamiento de cada fila de la tabla (ver Figura 5). La conexión parte-todo se evidenció cuando E3 propuso una expresión general para la función exponencial a partir de los datos y luego afirmó que el caso planteado es cuando $a = 2$ (ver Figura 9).

Figura 9. Evidencia de las conexiones parte-todo y representaciones diferentes establecidas por E3 en la tarea 4

k. Encuentra una expresión matemática que represente los datos para los dos casos.

1.ª TABLA: $y = ax$ $a = 2$ 2.ª TABLA: Loga $y = x$

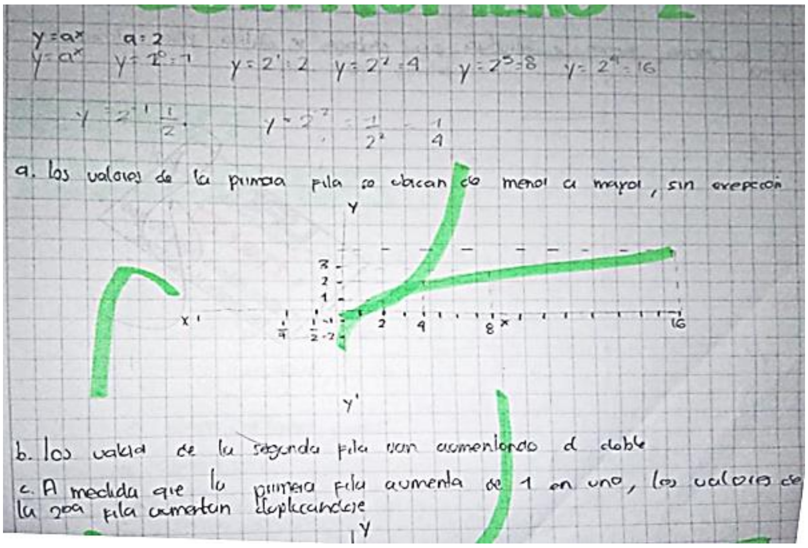
Por su parte, la conexión de representaciones diferentes se estableció solo cuando E3 encontró una expresión que representaba las tablas y al representar gráficamente la función logarítmica (ver Figura 10). Aunque propuso una gráfica para cada caso, cometió un error al graficar la función exponencial (ver Figura 10).

En lo que respecta a la tarea 6, E3 realizó la práctica P1T6 (ver Tabla 4), donde afirmó cuestiones relacionadas con la base de las funciones, pero no logró caracterizar detalladamente cuál es la condición que se establece para la base de las funciones (ver Figura 11).

Además, realizó la práctica P3T6, estableciendo así las conexiones matemáticas de tipo: significado, implicación y reversibilidad entre los objetos primarios, de manera similar como lo hizo E1. No obstante, la conexión de reversibilidad solo fue establecida por E3 en el lenguaje natural.

De manera general, E3 estableció las conexiones matemáticas de tipo procedimentales, representaciones diferentes, característica (entre algunas propiedades de las funciones), parte-todo, significado, implicación y reversibilidad (en el lenguaje natural); en ese sentido la comprensión de E3 fue valorada en el nivel 3, dado que a diferencia de E1, E3 no estableció la conexión de modelado.

Figura 10. Evidencia de la tarea 4 por E3



Transcripción:
$y = a^x \; a = 2$
Los valores de la primera fila se ubican de menor a mayor sin excepción.
Los valores de la segunda fila van aumentando el doble.
A medida que la primera fila aumenta de uno en uno, los valores de la segunda fila aumentan duplicándose.

Figura 11. Evidencia de la tarea 6 por E3

b. ¿Qué ocurre con las gráficas cuando $0 < a < 1$?

c. Cuando a es menor a 0 las figuras desaparecen completamente, la curva roja se alinea en el eje Y mientras que la curva azul se alinea en el eje X cuando 0 es mayor que a, ambas curvas dan la ilusión de dar un giro completo sobre su mismo eje.

d. ¿Qué ocurre con las gráficas cuando $a > 1$?

e. Cuando a es mayor a 1, exactamente en ese momento ambas curvas se alinean en el punto (1,1) de manera horizontal, posterior a esto, siguen rotando sobre su eje

5. Discusión y conclusiones

Esta investigación buscó responder la pregunta ¿Cómo valorar la comprensión matemática de un sujeto a través del establecimiento de conexiones intra y extra-matemáticas? Los resultados evidenciaron que en cada tarea los casos de estudio establecieron diferentes tipologías de conexiones matemáticas entre los objetos emergentes de las prácticas matemáticas asociadas y, consecuentemente, su nivel de comprensión varió de un caso a otro.

Así, cada tarea promueve y exige el establecimiento de ciertas tipologías de conexiones matemáticas y, en ese sentido, se podría hablar de una comprensión específica relacionada con determinada tarea. Por ejemplo, en las tareas 1, 2 y 3, que corresponden a las situaciones del COVID-19 y de los perritos callejeros, la conexión determinante era la de modelado, esta lleva a que se establezcan las demás conexiones (por su definición). Mientras que en las tareas 4, 5 y 6 la conexión determinante era la de reversibilidad.

Cuando se hace un análisis general de las tareas, los resultados permitieron identificar una comprensión global del concepto involucrado. El análisis de cada tarea permitió indagar sobre la comprensión global de los estudiantes respecto a las funciones exponencial y logarítmica. Así, la comprensión de E1 estuvo valorada en un nivel 4, E2 en un nivel 1 y, E3 en un nivel 3. Esto muestra que los estudiantes no alcanzaron niveles óptimos de comprensión, lo cual se ha reportado en otras investigaciones respecto a las funciones exponencial y logarítmica (Campo-Meneses y García-García, 2021; Kuper y Carlson, 2020; Sureda y Otero, 2013) y otros conceptos (Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez, et al., 2021). Alguna de las causas es que las sesiones estipuladas no se realizaron como se habían planeado, debido a diferentes actividades que surgieron en la institución, ajenas a la clase.

Como se evidenció en los resultados, en los casos de estudio hubo dificultad para establecer la conexión de reversibilidad, lo cual también ha sido reportado en investigaciones previas (Campo-Meneses y García-García, 2021, 2023). Las tareas, especialmente la 6, permitió que los estudiantes analizaran el carácter inverso entre las funciones, principalmente de manera gráfica, sin embargo, en esa parte era indispensable la intervención del docente para que los estudiantes establecieran esta conexión en los otros aspectos. En ese sentido, respecto al proceso de enseñanza, se considera necesario que, para una próxima implementación, se hagan ajustes promoviendo más discusión en clase para que los estudiantes logren alcanzar niveles más altos de comprensión.

En cuanto a la herramienta empleada para valorar la comprensión, se considera adecuada, ya que se refinó la propuesta por García-García (2024), puntualizando en las formas de establecer las conexiones de tipo característica y de reversibilidad y extendiéndolo para tareas extramatemáticas. Esta adaptación permitió analizar los datos y así valorar la comprensión de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas tanto intra-matemáticas como extra-matemáticas. De esta manera, esta investigación aporta tanto un marco refinado para valorar la comprensión a partir del establecimiento de conexiones matemáticas, que un sujeto evidencia cuando resuelve tareas matemáticas, como la valoración de la comprensión matemática de tres estudiantes, lo cual amplía el panorama sobre la comprensión de las funciones exponencial y logarítmica.

Es importante que, en futuras investigaciones, se emplee esta herramienta para valorar la comprensión de otros conceptos matemáticos, con el fin de generalizarla. Además, seguir indagando sobre la comprensión desde la mirada de las conexiones matemáticas con miras a sustentar cómo se dan estos dos procesos cuando un sujeto se enfrenta a determinada tarea, ya que es un área de oportunidad.

Referencias

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. (Tesis de doctorado no publicada). Simon Fraser University.

Cai, J., & Ding, M. (2015). On mathematical understanding: Perspectives of experienced Chinese mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(1), 5–29. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9325-8

Campo, K. (2025). *Diseño del proceso de enseñanza* [Anexo pdf]. Figshare. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.28870985.v1

Campo-Meneses, K. G., Font, V., García-García, J., & Sánchez, A. (2021). Mathematical connections activated in high school students' practice solving tasks on the exponential and logarithmic functions. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(9), 1–14. https://doi.org/10.29333/ejmste/11126

Campo-Meneses, K. G., García-García, J., & Font, V. (2023). Mathematical connections associated with the exponential logarithmic functions promoted in the mathematics curriculum. *International Journal of Instruction, 16*(4), 17–36.

Campo-Meneses, K. G., & García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: Una mirada desde las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico. *PNA, 16*(1), 25–56. https://doi.org/10.30827/pna.v16i1.15817

Campo-Meneses, K. G., & García-García, J. (2023). Conexiones matemáticas identificadas en la clase sobre funciones exponencial y logarítmica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 37*(76), 849–871. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a22

Dolores, C., & García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: Un estudio de casos en el nivel superior. *Bolema, 31*(57), 158–180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23*(3), 297–319. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0

Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula* (Tesis de doctorado sin publicar). Pennsylvania State University College of Education.

Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G., & Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). "Multiply by adding": Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *Journal of Mathematical Behavior, 42*, 92–108. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.003

Font, V., Godino, J., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 2–9.

García-García, J. (2024). Mathematical understanding based on the mathematical connections made by Mexican high school students regarding linear equations and functions. *The Mathematics Enthusiast, 21*(3), 673–718.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(2), 227–252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 14*(3), 325–355.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 39*(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Kuper, E., & Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *The Journal of Mathematical Behavior, 57.* https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740

Morales-López, Y., & Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educação e Pesquisa, 45*, 1–20. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2013). *Connecting the NCTM process standards and the CCSSM practices.* NCTM.

Parra-Urrea, Y., & Pino-Fan, L. (2022). Proposal to systematize the reflection and assessment of the teacher's practice on the teaching of functions. *Mathematics, 10*(18), 3330. https://doi.org/10.3390/math10183330

Rodríguez-Nieto, C., Font, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2021). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–27. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., Font, V., & Morales-Carballo, A. (2021). Una visión desde la red de teorías TAC-EOS sobre el papel de las conexiones matemáticas en la comprensión de la derivada. *Revemop*, *3*, 1–32. https://doi.org/10.33532/revemop.e202115

Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos.* Ediciones Morata.

Sureda, P., & Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática*, *25*(2), 89–118.

Yao, Y., Hwang, S., & Cai, J. (2021). Preservice teachers' mathematical understanding exhibited in problem posing and problem solving. *ZDM - Mathematics Education*, *53*(4), 937–949. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01277-8

∞

Karen Gisel Campo-Meneses

Universidad Autónoma de Occidente (Colombia)
karencampo@uagro.mx | https://orcid.org/0000-0001-7483-3134

Javier García-García

Universidad Autónoma de Guerrero (México)
jagarcia@uagro.mx | http://orcid.org/0000-0003-4487-5303

Recibido: 13 de diciembre de 2023
Aceptado: 5 de mayo de 2024

Mathematical Understanding Evidenced by Secondary School Students on Exponential and Logarithmic Functions

Karen Gisel Campo-Meneses @ [1], Javier García-García @ [2]

[1] Universidad Autónoma de Occidente (Colombia)
[2] Universidad Autónoma de Guerrero (México)

This research is immersed in the line of mathematical connections, whose purpose is to study understanding from the making of these. In particular, this article aimed to refine a framework of reference about the levels of understanding based on the making of mathematical connections. The networking between the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA) and the Expanded Mathematical Connections Model (EMCM) proposed by Rodríguez-Nieto, Font, et al. (2021) was used as a theoretical reference.

This research is qualitative, particularly a case study, in which the productions and responses to a questionnaire of three secondary school students were analyzed. These cases were selected from a group of 30 students who participated in the implementation of a teaching process previously designed to promote the understanding of exponential and logarithmic functions based on the establishment of mathematical connections. The selection was taken into account that the students had been in all the sessions carried out, that they had solved most of the tasks, and that they had the disposition to solve the questionnaire. This implementation was carried out in an educational institution in Colombia.

The data collected were analyzed following six phases, which were based on the route that has been followed in research where EMCM and OSA are used jointly (Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez, et al., 2021; Campo-Meneses & García-García, 2021). The results showed that the refined framework of reference allowed to assess the level of understanding of the students, who, through the making of mathematical connections, evidenced a different level of understanding concerning the exponential and logarithmic functions. The case studies did not show a high level of understanding; some reasons were due to the lack of time to socialize and deepen some characteristics of the functions during the sessions.

Finally, as a theoretical contribution, this article refines the framework of reference to study understanding, in which the establishment of characteristic mathematical connections and reversibility is specified, and the extra-mathematical connection of modeling that had not been included in García-García (2024) proposal is added. Based on the results of this research, it is considered necessary to use the proposed levels to assess the understanding of concepts other than those already worked on to date (exponential and logarithmic functions, and linear equation and function), to generalize the framework of reference.