AIEM

Avances de Investigación en Educación Matemática

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN-e 2254-4313 | (2025) 27, 157-177 | aiem.es

seiem.es

Una aproximación variacional para la significación de los criterios de la derivada en la modelación-graficación

A Variational Approach for the Significance of Derivative Criteria in Motion-Modeling Situations

José David Zaldívar Rojas @ [1], Luis Manuel Cabrera Chim @ [2], Amaranta Viridiana Jiménez Villalpando @ [1]

[1] Universidad Autónoma de Coahuila (México)
[2] Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (México)

Resumen ∞ En este trabajo presentamos los resultados de una investigación cuyo objetivo fue significar los criterios de la primera y segunda derivada a través del análisis variacional de una situación de modelación del movimiento que incorpora elementos tecnológicos. Para la construcción de la evidencia se aplicó una situación de modelación del movimiento a un grupo de estudiantes de licenciatura. Los resultados obtenidos evidencian que la discusión sobre los criterios se basa en cómo debe ser el movimiento (posición, velocidad y aceleración) de un móvil para reproducir cierta gráfica de posición propuesta y alcanzar un diálogo sobre cómo generar los diversos comportamientos (constantes, crecientes y decrecientes) observados en esta y, por tanto, de las características variacionales (representados en la monotonía y concavidad de la curva). Se evidencia la importancia de las estrategias variacionales de comparación y seriación en la significación de los criterios.

Palabras clave ∞ Estrategias variacionales; Modelación-graficación; Criterios de la derivada; Nivel superior; Cálculo

Abstract ∞ In this paper, we present the results of research that aims to signify the criteria of the first and second derivatives through a variational analysis of a motion modeling situation that incorporates technological elements. To construct the evidence, a movement-modeling situation was applied to a group of undergraduate students. The results show that the discussion on the criteria is based on how the motion (position, velocity, and acceleration) of a mobile must reproduce a certain proposed position graph and to reach a dialogue on how to generate the different behaviors (constant, increasing, and decreasing) observed in it and, therefore, of the variational characteristics (represented in the monotony and concavity of the curve). The importance of the variational strategies of comparison and seriation on the significance of the criteria is evident.

Keywords ∞ Variational strategies; Modelling–graphing category; Derivative criteria; Undergraduate; Calculus

Zaldívar Rojas, J. D., Cabrera Chim, L. M., & Jiménez Villalpando, A. V. (2025). Una aproximación variacional para la significación de los criterios de la derivada en la modelación-graficación. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 27*, 157-177. https://doi.org/10.35763/aiem27.6157

1. INTRODUCCIÓN

En la enseñanza del cálculo se ha privilegiado, en general, la comunicación de procesos algorítmicos y el desarrollo de habilidades operativas para la resolución de problemas rutinarios (Rasmussen et al., 2014; Hitt y Dufour, 2021). Existe un énfasis en la formalización y la mecanización, restringiendo el uso de diversas representaciones, así como la conexión entre los conceptos y el contexto de los estudiantes, lo que ha dado como resultado dificultades para la comprensión y significación de las nociones del cálculo (Berry y Nyman, 2003; Salazar et al., 2009). En particular, diversas investigaciones han puesto atención a la comprensión del concepto de derivada, debido a la complejidad de su definición, su presencia en diferentes contextos y la poca comprensión que los estudiantes logran (Antonio et al., 2019; Jones, 2017; Park, 2013; Zandieh, 2000).

Tradicionalmente, la enseñanza del concepto de derivada se desarrolla a partir de procesos algorítmicos-algebraicos fundamentados en la noción de límite, donde el cálculo rutinario de derivadas es uno de los significados más destacados (Antonio et al., 2019). Bajo este enfoque, los estudiantes aprenden, en el mejor de los casos, reglas algebraicas para derivar (Berry y Nyman, 2003), pero con dificultades para reconocer contextos donde la aplicación de la derivada es pertinente (Artigue, 1995; Hitt y Dufour, 2021). Además, presentan conflictos para analizar los comportamientos gráficos de las funciones en términos del fenómeno que representan, excepto quizás en situaciones algebraicas artificiales, o para transitar de la gráfica de la función a la gráfica de la función derivada, e incluso reconocer a la derivada como una función (Antonio et al., 2019; Park, 2013; Salazar et al., 2009).

La forma de abordar la noción de derivada y sus problemáticas permean en el trabajo de los criterios de la primera y segunda derivada, los cuales terminan siendo un conjunto de reglas a memorizar. Por ejemplo, en Jiménez y Zaldívar (2022) se presenta un análisis de libros de cálculo empleados en cursos universitarios en México, concluyendo que los criterios se utilizan como reglas, justificadas en los signos de la primera y segunda derivada, que permiten realizar gráficas sofisticadas de funciones.

A diferencia de lo que ocurre con la derivada, no existen suficientes estudios en la literatura especializada que aborden las dificultades para comprender los criterios de la derivada específicamente, salvo trabajos que discuten sobre monotonía o concavidad por separado. De ahí la motivación para estudiar este tema.

2. ANTECEDENTES

Desde hace varias décadas se han realizado investigaciones enfocadas en delimitar las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan a los tópicos más relevantes del cálculo (Artigue, 1995; Thompson y Carlson, 2017; Thompson y Harel, 2021; Zandieh, 2000). Sin embargo, también se reconoce que pocos estudios han atendido cómo sus resultados se podrían adaptar para la enseñanza de los principales tópicos del cálculo y, sobre todo, cómo algunas teorías se podrían relacionar con el diseño de propuestas didácticas o en investigaciones de diseño (Rasmussen et al., 2014). Es ahí donde se pretende realizar un aporte con el presente estudio, al analizar los resultados de una propuesta didáctica con un enfoque variacional para significar los criterios de la derivada en el aula.

Para significar el concepto de derivada, algunos trabajos han puesto la atención en las nociones de *variación* y de *variaciones sucesivas* a través de diferentes situaciones de cambio (Antonio et al., 2019; Cantoral et al., 2018; Thompson y Harel, 2021); otros, promueven la importancia de los contextos extramatemáticos y de aplicación, incluyendo en ocasiones una componente tecnológica para visualizar relaciones y hacer construcciones, y otros más han resaltado la importancia de la interpretación de gráficas de funciones en situaciones en contexto (Berry y Nyman, 2003; Hitt y Dufour, 2021; Jones, 2017; Marrongelle, 2004; Sealey et al., 2020; Suárez y Cordero, 2010; Swidan, 2019; Urban-Woldron, 2014).

Desde una perspectiva variacional, se han elaborado diseños didácticos basados en el análisis de situaciones de variación o de gráficas de objetos en movimiento para trabajar con conceptos vinculados con la derivada (Antonio et al., 2019; Vrancken y Engler, 2014). Estos trabajos plantean el estudio de las variaciones de las variables involucradas como medio para dar sentido a las razones de cambio de las variables, establecer covariaciones, encontrar regularidades que describen el comportamiento de las situaciones bajo estudio (Vrancken y Engler, 2014), así como construir significados de la derivada a través del análisis de aspectos gráficos y discutir sobre los comportamientos de la velocidad de un objeto (Antonio et al., 2019). En este sentido, los trabajos de Cantoral et al. (2018) y Cabrera y Martínez (2022) plantean el desarrollo del *pensamiento variacional* entre los estudiantes como elemento central para significar las nociones del cálculo escolar. Para ello proponen actividades donde se analizan fenómenos de cambio, identificando qué cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios, enfatizando el uso de *estrategias variacionales* para generar dicho desarrollo y como elemento central en los diseños didácticos para el aula.

En cuanto a la noción de concavidad, el estudio de Jones (2018) afirma que los estudiantes raramente interpretan dicha noción como el *cambio en las razones de cambio*, evidenciando solamente una asociación entre la concavidad hacia arriba con la forma "∪" y la concavidad hacia abajo con "∩". El autor señala que se requiere el desarrollo de un razonamiento covariacional entre los estudiantes para que puedan darle sentido a la concavidad y al punto de inflexión. En correspondencia con esto, la investigación de Fallas y Lezama (2022) muestra cómo se le puede dar sentido a la concavidad y al punto de inflexión de una curva a través de estrategias variacionales y un uso de las gráficas a través del análisis de una situación que involucra un contexto de crecimiento poblacional.

Bajo el enfoque del estudio del cambio, algunos trabajos proponen la inclusión de una componente tecnológica, como sensores de movimiento para promover la comprensión de la derivada (*Calculator based ranger* o CBR) y calculadoras graficadoras. Por ejemplo, Berry y Nyman (2003) reportan cómo los estudiantes relacionan la gráfica de una función derivada con su función original, al solicitarles que caminen frente a un CBR para producir una gráfica de desplazamiento en función del tiempo que produjera la función dada de velocidad Los autores buscaban ampliar la comprensión de los conceptos del cálculo desde una representación gráfica, lo cual denominaron como *physical feel*. Por otro lado, Suárez y Cordero (2010) postulan una epistemología para el cálculo escolar que descansa en la modelación y un uso de las gráficas (Modelación-Graficación). Para ello, presentan una situación de modelación del movimiento que involucra calculadoras y sensores y donde las tareas permiten el estudio de un fenómeno de cambio a través de relaciones entre gráficas y el análisis de la variación.

De acuerdo con lo anterior, se postula que para promover una comprensión de los criterios de la derivada es necesario incorporar un enfoque variacional a su estudio. Además, se debe dejar de basar su estudio en la graficación de funciones sofisticadas y como reglas memorísticas, pues ¿cuál es la ganancia en la comprensión para los estudiantes si un software puede resolver esa tarea con unas pocas líneas de instrucción? Se postula también que el uso de las gráficas debe relacionarse con *modelar situaciones,* donde la gráfica permita ser un eslabón entre el estudio de la variación de fenómenos y la monotonía-concavidad de los comportamientos asociados al fenómeno, generando ambientes mediados por una componente tecnológica, como la calculadora graficadora y el CBR.

En síntesis, la pregunta de investigación que se plantea para este estudio es: *¿qué significados sobre los criterios de la derivada emergen en un grupo de estudiantes cuando enfrentan una situación de modelación del movimiento bajo un enfoque variacional?* La investigación toma como base de significados los asociados a las nociones del Cálculo desde la Categoría de Modelación-Graficación (Suárez y Cordero, 2010) y de la implementación de una situación de modelación del movimiento (SMM) con estudiantes de nivel superior en un ambiente experimental con el uso de calculadoras graficadoras y sensores de movimiento (CBR). Dado que la propuesta se fundamenta en la variación, el análisis se realiza con base en las *estrategias variacionales* que dichos estudiantes manifiestan al enfrentar la SMM.

3. Marco conceptual

El reconocimiento de las problemáticas relativas al aprendizaje y la enseñanza del Cálculo promovieron el surgimiento de diversos enfoques e investigaciones que intentan abordarlas. Algunas de estas cuestionan no solamente *cómo enseñar*, sino *qué enseñar* (Cantoral, 2019). La Teoría Socioepistemológica (TS) propone abordar dichas problemáticas, fundamentando sus ideas en el estudio de la variación cuando se desarrollan prácticas predictivas, al identificar que la acción de *predecir* el comportamiento de fenómenos de flujo continuo motivó históricamente el desarrollo y construcción de ideas asociadas al Cálculo (Cantoral et al., 2018). Este posicionamiento dio lugar a la línea de investigación denominada Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar).

El PyLVar postula que es el *uso* que se le da a los objetos matemáticos para enfrentar las situaciones o fenómenos de cambio lo que favorece su construcción. Las características de este *uso* están determinadas por las normas o formas de acción particulares que rigen a los espacios, grupos sociales o comunidades (biólogos, ingenieros, etc.) dentro las que se enmarcan dichas situaciones o fenómenos, es decir, dentro de una práctica de referencia caracterizada por la triada: *uso-usuario-contexto*. Esto promueve una construcción y significación particular de los saberes matemáticos asociada con dicha práctica. Por tanto, la construcción del conocimiento matemático es un proceso continuo de darle significado a través de sus usos en diferentes prácticas de referencia (Cantoral, 2019).

Por PyLVar se entenderá a aquella forma de abordar el estudio de fenómenos o situaciones de cambio a través del análisis de las variaciones de sus variables que intrínsecamente determinan su comportamiento y las leyes que los rigen, con la finalidad de su comprensión o, en su caso, realizar estimaciones, anticipaciones o predicciones sobre el mismo (Cabrera y Martínez, 2022, p. 68). De esta manera, como parte del estudio de la variación, interesa describir las cualidades del cambio, es decir, comprender cómo y cuánto cambia un cuerpo, un sistema o un objeto, y determinar las regularidades que gobiernan ese cambio (Cantoral, 2019; Cantoral et al., 2018).

El estudio del cambio se desarrolla a través de una o más *estrategias variacionales* (E-Var), las cuales son acciones que permiten identificar la producción de un cambio, cuantificarlo o cualificarlo, determinar sus regularidades y postular estados futuros o desconocidos. Las E-Var permiten generar *argumentos variacionales* (A-Var) que describen y comunican los resultados del estudio del cambio. De acuerdo con Cabrera y Martínez (2022), las E-Var identificadas son:

Comparación. Acción de establecer las diferencias existentes entre dos estados de un mismo fenómeno o dos estados equivalentes de fenómenos diferentes de interés, con la intención de cuantificar o cualificar el cambio. Esta estrategia permite identificar el cambio y posibilita el desarrollo de la siguiente.

Seriación. Consiste en analizar los resultados de un conjunto de comparaciones de estados contiguos (variación de primer orden) para determinar alguna regularidad en la variación de las variables. En caso de que la acción anterior no permita dicha determinación, los resultados de las comparaciones se pueden considerar "nuevos estados" y se pueden poner en práctica de nueva cuenta la comparación y la seriación (variaciones sucesivas de segundo orden, tercer orden, etc.)

Para el desarrollo de las siguientes E-Var, las anteriores deben contribuir al establecimiento de un modelo (Cantoral et al., 2018), es decir, de aquello que permita incidir sobre lo que se modela.

Predicción. Estrategia relacionada con la acción de anticipar un comportamiento o estado de un fenómeno con precisión a partir del empleo del modelo identificado en las estrategias anteriores.

Estimación. Estrategia relacionada con el establecimiento de caracterizaciones de estados o comportamientos tendenciales o globales de un fenómeno, ante las restricciones o imprecisiones de los modelos establecidos o de las características conocidas de los fenómenos bajo estudio.

Ahora bien, para Suárez y Cordero (2010), un eslabón que permite dotar de sentido a ciertos conceptos del cálculo se encuentra en la categoría de *Modelación-Graficación*. Dicha categoría fundamenta los tipos de tareas que plantean a los estudiantes un uso de las gráficas en situaciones de modelación del movimiento (SMM). Los artefactos tecnológicos involucrados en las SMM actúan como herramientas cognitivas e interactivas y como un *mediador semiótico* (Mariotti y Maffia, 2018; Urban-Woldron, 2014), puesto que permiten generar gráficas mientras los datos se recolectan, pero, sobre todo, permiten la aparición y coordinación de diferentes medios semióticos (lenguaje, cuerpo, símbolos, gestos y herramientas) para el desarrollo del pensamiento matemático.

4. Consideraciones metodológicas

La investigación se desarrolló bajo el diseño metodológico de un *Experimento de Enseñanza* (Steffe y Thompson, 2000). En ese sentido, se plantearon las siguientes etapas: *el diseño de la SMM*, producto de un análisis preliminar (Artigue, 1995) reportado en Jiménez y Zaldívar (2022); *implementación de la SMM* con estudiantes de una licenciatura en matemáticas aplicadas, en México, y *el análisis de las producciones de los estudiantes* durante la experimentación. La implementación de la SMM fue realizada por una de las autoras del presente manuscrito.

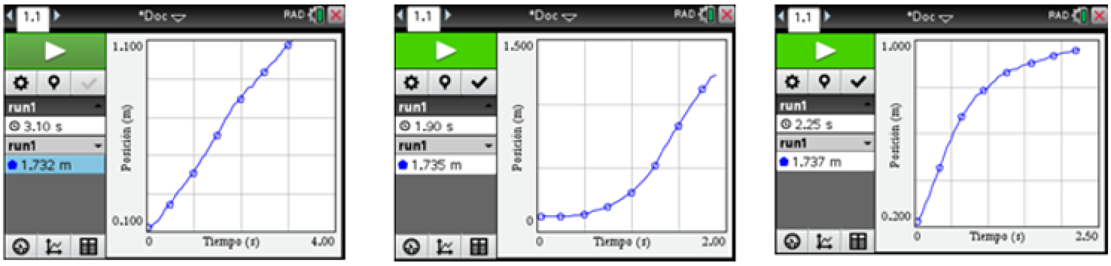
Dado el diseño metodológico, se optó en la investigación por un paradigma interpretativo bajo un enfoque cualitativo para el análisis de la información recabada. Por esta razón, se utilizan las técnicas de *observación participante* y el *análisis documental* (Latorre, 2005) para la obtención de la información en el experimento de enseñanza.

4.1. Sobre el diseño de la SMM

El experimento de enseñanza incorporó el diseño de una SMM, la cual retoma lo reportado en Jiménez y Zaldívar (2022) y se sustenta en la categoría de Modelación-Graficación, buscando propiciar un uso alternativo de las gráficas, situando a la variación como argumento central. La tecnología educativa que se incluyó fueron calculadoras *TI-Nspire CX CAS* y sensores de movimiento CBR. Con la mediación de la tecnología, los estudiantes debían recrear el movimiento de una persona que camina frente al sensor en línea recta y reproducir las gráficas solicitadas de posición en función del tiempo con respecto a un marco de referencia. Para esto se requería: analizar cómo se debe caminar para producir la gráfica solicitada; elegir una posición de partida; realizar la caminata con las características establecidas; analizar la gráfica generada en la calculadora (retroalimentación), y, en su caso, revisar sus conjeturas y repetir el experimento para conseguir la gráfica deseada.

Cualquier forma de "caminar" en línea recta frente al CBR (excluyendo el quedarse estático) puede caracterizarse por seis comportamientos gráficos básicos, los cuales pueden ser descritos a través de la monotonía y concavidad (Figura 1). A estos comportamientos se les llamará grupos variacionales, por poder ser caracterizados a través de cómo cambian las variables. Como se puede apreciar en la Figura 1, la forma de las gráficas no se sujeta a las formas "∪" y "∩".

Figura 1. Ejemplos de las gráficas y grupos de variación



Alejarse del CBR a velocidad constante

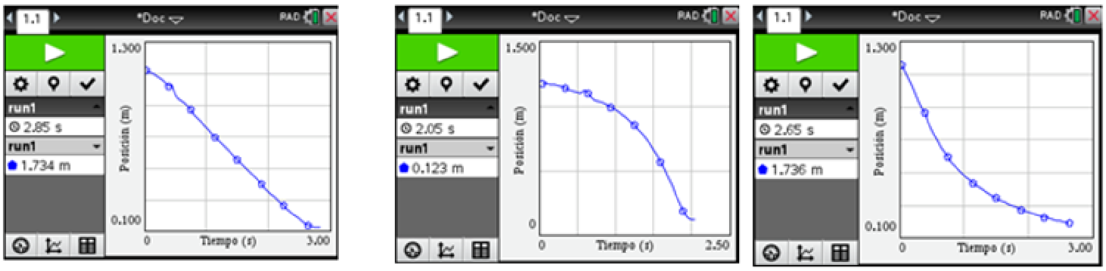
$f'(x) > 0$ $f''(x) = 0$

Alejarse del CBR aumentando la velocidad

$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$

Alejarse del CBR disminuyendo la velocidad

$f'(x) > 0$ $f''(x) < 0$



Acercarse al CBR a velocidad constante

$f'(x) < 0$ $f''(x) = 0$

Acercarse al CBR aumentando la velocidad

$f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$

Acercarse al CBR disminuyendo la velocidad

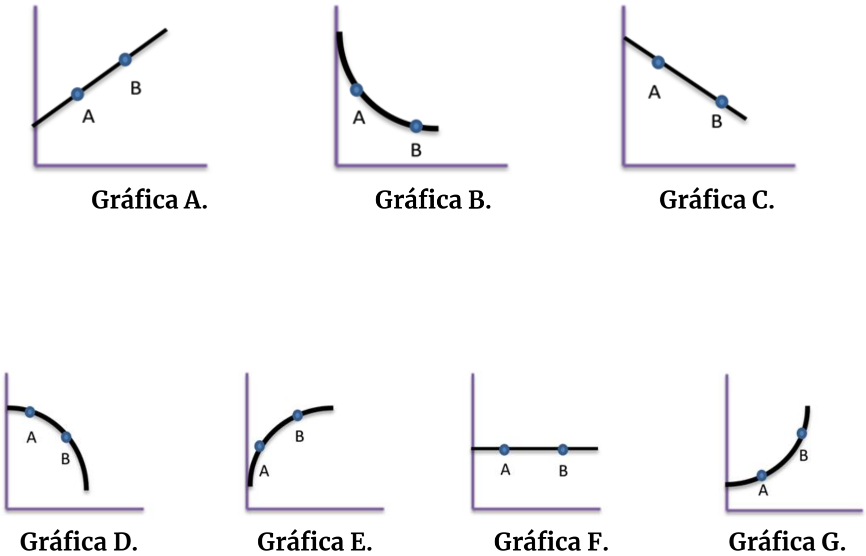
$f'(x) < 0$ $f''(x) > 0$

La SMM consta de tres momentos que tienen asociada una tarea, las cuales se presentan a continuación. Además, para cada tarea se realiza una serie de preguntas, las cuales no se presentan en su totalidad por cuestión de espacio, pero que los estudiantes debían responder en las hojas de trabajo entregadas.

Momento 1: establecer funciones crecientes y decrecientes con el CBR como marco de referencia

Tarea 1. Utilizando la calculadora, realiza los movimientos necesarios frente al sensor para obtener cada una de las siguientes curvas de posición respecto al tiempo (Figura 2). Describe el movimiento que realizaste debajo de cada una (acercarse, alejarse, aumentar o disminuir la velocidad, etc.).

Figura 2. Gráficas de la tarea 1. Descripción de los movimientos a realizar



Momento 2: reconocer la variación igual a cero (máximos y mínimos).

Tarea 2. Por medio del uso de la calculadora y el sensor. Resuelve la siguiente pregunta, tomando en cuenta el esquema siguiente, donde hay un observador en todo el tiempo (Figura 3).

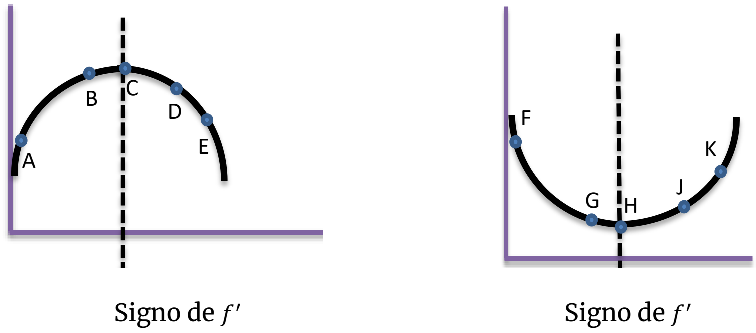
Figura 3. Esquema del observador y el recorrido de *a* a *b*

A) ¿Cuáles son las formas posibles de salir de un punto, llegar a un punto que se encuentra más alejado y regresar al punto? Considere el recorrido en línea recta con respecto al observador. Posteriormente, compruebe con la calculadora y el sensor.

Momento 3: reconocer la variación en el comportamiento que varía.

Tarea 3. Escribe debajo de las siguientes gráficas (Figura 4) (posición en función del tiempo) ¿cómo es que varía f′? (recuerda que $f'(a)$ está asociada con el valor de la velocidad instantánea en el punto "a") Escribe si para que la gráfica ocurra nos alejamos o nos acercamos al sensor, analiza el movimiento en dos partes.

Figura 4. Gráficas correspondientes a la tarea 3



De esta manera, las E-Var se postulan como los mecanismos que permitirán determinar las características del movimiento a realizar frente al sensor. Las discusiones y reflexiones para lograr esto, así como la ayuda tecnológica para experimentar corpóreamente el movimiento que permite generar estas gráficas, promueven en los estudiantes el análisis de la variación: ¿qué cambia?, ¿cuánto y cómo cambia? Este contexto se concibe como una alternativa para el estudio de los criterios de las derivadas.

4.2. La población de estudio y organización de la implementación

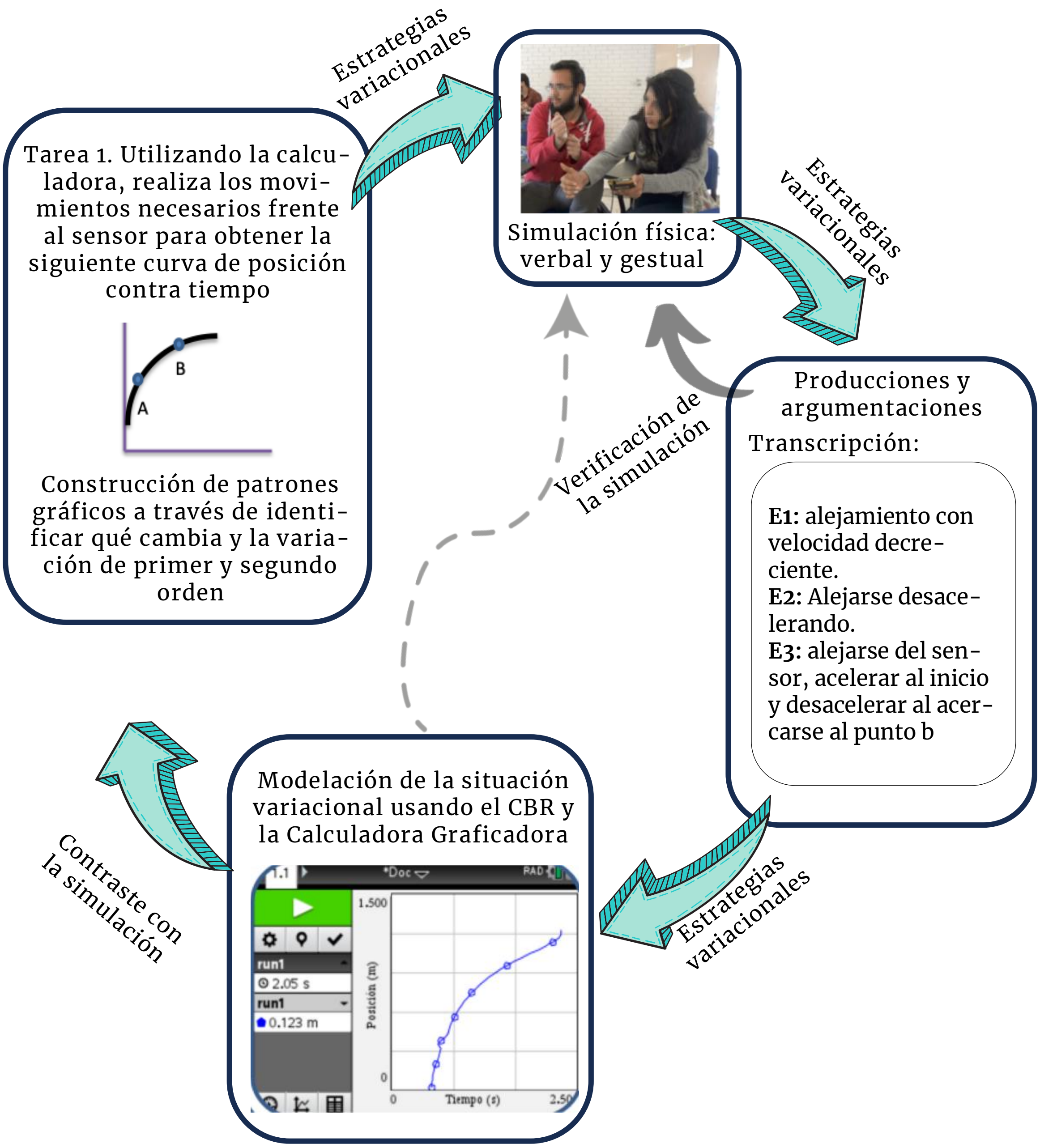
La SMM se aplicó, en una sesión de 2 horas, a un grupo de nueve estudiantes de la licenciatura en matemáticas aplicadas de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila, en la ciudad de Saltillo, Coahuila, México. Este colectivo ya había aprobado sus cursos de cálculo.

5. Análisis de los datos y resultados

El análisis documental se realizó triangulando, sistemática y planificadamente, la transcripción completa de la videograbación realizada de la experiencia de enseñanza, las notas de campo de la investigadora-profesora y el registro escrito de las producciones de los estudiantes en hojas de trabajo. Se hizo un análisis de tipo cualitativo basado en un método de tipo interpretativo, con la intención de establecer algunas categorías para rescatar los A-Var utilizados durante la resolución de las tareas y determinar las E-Var implicadas en estos.

Para el análisis de la evidencia se consideraron las discusiones en equipo a través del lenguaje, argumentos, gesticulaciones y el uso de la tecnología. En la figura 5 se presenta un esquema general del rol de los diferentes medios semióticos que se presentan en el trabajo de los estudiantes. En este artículo solo se presenta el análisis de un equipo.

Figura 5. Esquema general del análisis de la evidencia empírica



5.1. Ejemplo de análisis: equipo 1

Para los integrantes del equipo 1 se utilizaron los siguientes seudónimos: Mario, Diego y Jenny, según la posición, de izquierda a derecha, en la que aparecen en la Figura 6. Aunque el equipo decide no caminar frente al CBR, la forma de realizar la simulación cumple con los objetivos de la SMM.

Figura 6. Elementos que interactúan en la simulación

Fuente: Jiménez, (2019, p. 63).

Al iniciar la resolución de la tarea 1, el equipo discrepa sobre si deben alejarse o acercarse al sensor para generar la gráfica de una recta con pendiente positiva (gráfica A de la figura 2). Sin embargo, consensan que se trata de un "alejamiento lento". Posteriormente, con base en la simulación con el CBR y la calculadora, se consensa que la respuesta correcta es "alejamiento constante". En el siguiente extracto, donde se manifiesta lo anterior, se utilizan corchetes para dar cuenta de medios semióticos como gestos, descripciones de las acciones con el sensor o aclaraciones sobre las reflexiones que acontecen. Estas anotaciones también se realizarán en extractos subsecuentes.

> Diego: A como está la gráfica de posición, entonces necesita ser una velocidad... que vaya creciendo.
>
> Mario: Decreciendo, ¿no?
>
> Diego: Sí, decreciendo
>
> Jenny: ¿Cómo que decreciente?
>
> Diego: Es que se supone que tiene que alejarse velozmente [mueve la mano alejándose de su cuerpo].
>
> [Realizan la simulación con el CBR y la calculadora, y no obtienen una línea recta, sino una gráfica similar a la E del momento 1].
>
> Diego: ¿Sigue siendo lineal?, ¿cómo pudiera ser un movimiento que tenga velocidad lineal?
>
> Diego: Entonces, este es un movimiento de tipo constante, entonces debe ser lineal [refiriéndose a la gráfica A]. Entonces, ¿cómo puedo hacer un movimiento donde la velocidad sea hacia allá? [mueve la mano alejándola de su cuerpo].

Profesora: ¿Qué cosas pueden hacer? Tienen que ver qué pasa cuando cambian la velocidad.

[La profesora se retira y los estudiantes inician otra simulación].

Mario: Es una gráfica de posición respecto al tiempo, o sea, la posición debe iniciar y debe de ir decreciendo [realiza un movimiento con su mano] poco a poco, ¿no?

Jenny: Entonces estaría bien lo que dicen acá [realizan una simulación con el CBR, donde Mario mueve la libreta alejándola del sensor con una velocidad cada vez más lenta].

De acuerdo con el extracto anterior, el equipo 1 establece el tipo de movimiento que debe realizar frente al sensor para obtener una gráfica creciente o decreciente, asociando creciente – alejarse y decreciente – acercarse (E-var de *comparación*). Asimismo, al reflexionar sobre el comportamiento creciente lineal de la gráfica A y creciente no lineal de la gráfica E, se establece que la velocidad de movimiento debe mantenerse constante para el primer caso e ir disminuyendo para el segundo (E-var de *seriación*). Por un razonamiento análogo, el equipo genera la gráfica C (recta con pendiente negativa), señalando que debe realizarse un "acercamiento constante" al sensor.

La discusión para las demás gráficas se basa en cómo varía la velocidad con la que acercan o alejan la libreta del sensor, lo cual se traduce en reconocer que las gráficas crecen o decrecen, pero no crecen o decrecen igual. Por ejemplo, para la gráfica B del momento 1, los estudiantes refieren que en esta se refleja un comportamiento de "acercarse rápido y luego lento". El siguiente extracto hace referencia al análisis anterior:

Diego: [Haciendo referencia a la gráfica C] debe ser acercamiento constante. [Haciendo referencia a la gráfica B] El segundo hay que volverlo a hacer, eso que hiciste de que acercarlo rápido.

Mario: Sería así [haciendo referencia a la gráfica B mueve la libreta frente al sensor, primero acercándola de forma rápida y luego cada vez más lento].

Diego: Sí, se ve más curveada [D realiza un gesto con la mano expresando la gráfica "curveada"]. Un acercamiento rápido y decreciente, la velocidad del acercamiento.

Mario: ¡Sí!

Diego: Un acercamiento mientras decrece la velocidad.

Jenny: De rápido a lento.

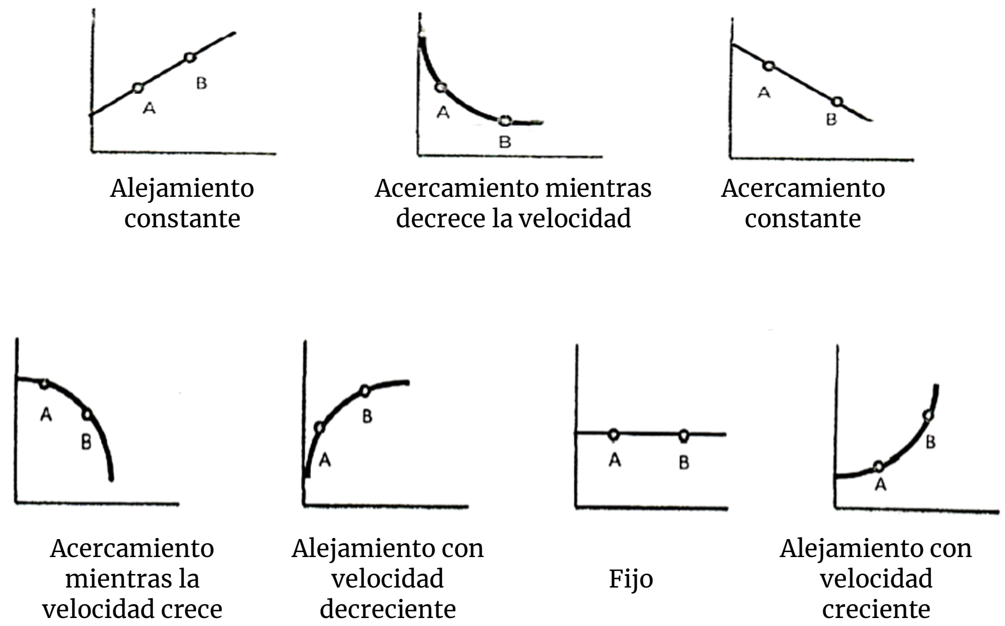
Mario: [Para la gráfica D] Entonces este es, lento al principio [mueve la libreta acercándose al sensor] y luego... [acerca rápidamente la libreta al sensor].

Diego: Ahí mero, entonces ya... acercamiento lento, bueno... acercamiento mientras la velocidad crece.

Jenny: [señala la gráfica E del momento 1] va a ser ... empieza desde aquí [sitúa la libreta cerca del CBR] se aleja rápido [...] y luego va decreciendo la velocidad.

Los dos extractos anteriores evidencian cómo las E-Var de *comparación* y *seriación* permiten que los estudiantes determinen el patrón de comportamiento gráfico general, es decir, creciente o decreciente (*comparación*) y establecer diferencias en la forma en la que crecen o decrecen las gráficas (*seriación*). Esto se refleja en mirar a la gráfica como construida por instantes con movimientos "lentos" o "rápidos" y reconociendo cómo esos comportamientos varían de inicio a fin. Esto se refleja en la síntesis que realiza el equipo 1 de sus respuestas para la tarea 1 (Figura 7).

Figura 7. Respuestas de la tarea 1 del equipo 1 - ¿Qué movimiento realizó?



Fuente: Jiménez, 2019, p. 64.

Las respuestas evidencian los dos elementos variacionales puestos en discusión: la covariación entre las variables de posición y tiempo y la variación de la velocidad. Los estudiantes tipifican un binomio "monotonía – variación de la velocidad" a través de códigos variacionales con frases como: alejamiento, acercamiento, constante (refiriéndose a la velocidad), velocidad creciente, velocidad decreciente, "curveada".

En la tarea 2 se solicitaba a los estudiantes describir el movimiento rectilíneo que ocurre al realizar un "viaje redondo" (ida y vuelta) (ver momento 2), es decir, analizar sobre cuáles son las formas posibles de salir de un punto *a*, llegar a un punto *b* y regresar al punto *a*. Al realizar esta tarea, el equipo 1 entabla el siguiente diálogo:

> Diego: Dice que te pasas de aquí para acá en línea recta [señala al punto a y después al b en la hoja de trabajo]. Entonces, en línea recta se fue de aquí [señala el CBR] a acá [señala un punto alejado del CBR] y regresó [señala de vuelta el CBR]. Solamente podemos hacer eso, o sea, podemos [mueve la mano de izquierda a derecha y viceversa repetidamente] rápidamente... o...

Mario: Sí, pero… velocidad constante, velocidad decreciente y velocidad creciente… bueno […].

Diego: pregunta de cuántas formas […] ya dijimos que son, ¿tres por tres? Nueve formas.

Al inicio los estudiantes solo consideran “unir” las formas gráficas crecientes (para ir del punto a al b) y decrecientes (para ir del punto b al a) analizadas en la tarea anterior. Así, en esa unión se pueden presentar puntos con cambios “bruscos” en el movimiento; por ejemplo, al unir una recta creciente y una decreciente. Ante la falta de simulación del movimiento frente al sensor, no se percatan que en el punto b el movimiento tendría que ser nulo, generándose en un cierto intervalo una curva “suave”, es decir, derivable. No obstante, más adelante, entre las preguntas de la hoja de trabajo, se cuestiona a los estudiantes sobre si los recorridos de “ida y vuelta” se podrían hacer sin “pasar” por una velocidad cero. Esto lleva a los estudiantes a entablar un diálogo sobre el significado de esta velocidad.

Mario: Velocidad cero es cuando… llegas a un punto y tienes que regresar.

Diego: Ah, tú dices que tienes que pasar por la velocidad cero.

Mario: Porque en algún momento tienes que parar y regresarte…

Diego: No…

Mario: ¿Por qué no?

Diego: ¿Qué pasa cuando en los dos casos se hace creciente y creciente? La posición… sí, o sea que es creciente-creciente, entonces la velocidad puede estar así [dibuja una curva ascendente. Ver figura 8] pero, tu movimiento fue así… o sea, que regresó [señala la Figura 3 de la tarea 2 del momento 2].

Mario: Pero la velocidad aquí sería cero [señala el punto de retorno b].

Figura 8. La curva ascendente dibujada por Diego

Fuente: Jiménez, 2019, p. 83

Como se aprecia, el argumento de Diego hace referencia a un punto de inflexión, donde la concavidad cambia. En este momento y ante el no avance del equipo, la profesora interviene cuestionando sobre el significado de la velocidad cero.

Profesora: ¿Qué era la velocidad?, ¿con qué lo relacionábamos en la actividad anterior? [en la tarea 1 se pregunta sobre la relación entre la velocidad en un punto y el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto].

Mario: Con la pendiente…

> Profesora: Con la pendiente de la recta tangente, ¿cierto? Y ahí, ¿cómo es la pendiente de la recta tangente?
>
> Mario: Es cero.
>
> Diego: ¿Constante?
>
> Mario: Aquí es cero [indica el punto de retorno b].
>
> Profesora: Es el punto que está en la cima... entonces si la pendiente es cero, la velocidad es cero.
>
> Mario: Se para...
>
> Diego: No es que se pare... eh... la pendiente [...] digo, la pendiente es cero. Porque ahí es donde entra lo que yo estaba diciendo, nunca se para, pero sí se...
>
> Mario: Sí para, porque... la velocidad hacía acá es... positiva [aleja la libreta del CBR] y luego aquí paro [detiene la libreta] y la hago negativa [acerca la libreta al CBR] y es en todos los movimientos, porque tengo que ir de aquí [sitúa la libreta cerca del CBR] para acá [sitúa la libreta lejos del CBR] y regresar, entonces en este punto tengo que parar. Aunque esto sea creciente [aleja la libreta del CBR], y esto sea decreciente [acerca la libreta al CBR], tengo que parar aquí y es donde la velocidad se hace cero, es como... el tiro parabólico o el tiro hacia arriba... lo aviento y va a llegar a un punto en el que la velocidad va a ser cero y se tiene que regresar.

El contraste entre las respuestas dadas al inicio de la situación y las reflexiones posteriores sobre si el recorrido debe pasar por una velocidad cero, reflejan cómo la falta de un análisis variacional de la situación completa (en particular en el punto de retorno), no permite modelar adecuadamente la situación. Aunque en la tarea 1 se realizaron análisis variacionales adecuados de los siete tipos de gráficas, su empleo en esta tarea sin considerar las características del movimiento solicitado lleva a plantear respuestas no correctas. Por su parte, la reflexión desde un enfoque variacional de lo que ocurre en el punto de retorno del movimiento (en el punto b) permite determinar que ahí se requiere generar una curva derivable. Así, las E-Var de *comparación* y *seriación* permiten a los estudiantes reconocer que antes del punto de retorno la velocidad es positiva, en dicho punto la velocidad es cero y luego de este la velocidad es negativa. Esto en correspondencia con el criterio de la primera derivada.

Por último, en la tarea 3, los estudiantes analizaron el comportamiento de los valores de la derivada empleando la idea de que la pendiente de la recta tangente es el valor de la velocidad en el punto de tangencia. De esta manera, analizan el comportamiento de la derivada en los puntos señalados en las gráficas (A, B, C, etc.), pudiendo identificar dónde el valor de la velocidad es mayor o menor y establecer los signos de la derivada en dichos puntos. Con base en esto caracterizan el comportamiento de las derivadas de las funciones cuyas gráficas se analizan. Aquí, la E-Var de *comparación* se emplea para confrontar el valor y signos de las pendientes en diferentes puntos y determinar cuál es mayor o menor. Por su parte, la E-Var de *seriación* permite el análisis de cómo la pendiente varía conforme se avanza de izquierda a derecha de la gráfica y con esto caracterizar su comportamiento: la velocidad (valor de la derivada) decrece para la gráfica con un máximo y la velocidad (valor de la derivada) crece para la gráfica con un mínimo. Esto se evidencia en el siguiente extracto:

> Mario: [Analiza la gráfica 1 de la tarea 3] Considerando todo el recorrido, ¿cómo cambia la velocidad durante todo el recorrido?, … ¿va decreciendo?
>
> Diego: A ver…
>
> Mario: ¿positivo-negativo? [haciendo referencia al signo de la velocidad] Creciente-decreciente, y va aumentando y después disminuyendo [para la gráfica con máximo], y va disminuyendo y después aumentando [para la gráfica con mínimo].
>
> Diego: Está bien, sí.
>
> Mario: Va disminuyendo. [escribe en la hoja de trabajo: "la velocidad va disminuyendo" para la gráfica con un máximo y "la velocidad va aumentando" para la gráfica con un mínimo].
>
> Mario: En el primer recorrido completo, la derivada… es positiva.
>
> Profesora: A todo, sí, el ir y venir […] por ejemplo, acá fueron y regresaron y aquí, regresaron y fueron… ustedes pusieron la velocidad va disminuyendo:
>
> Mario: La velocidad se va haciendo más pequeña… decreciendo [dibuja en el aire con la mano una curva cóncava hacia abajo] Y en el otro, sería creciendo…
>
> Diego: Cóncava… ¿una es cóncava y el otro convexo? [dibuja las formas en el aire con la mano].
>
> Profesora: Y ahora, ¿cómo definirían cóncava hacía arriba?
>
> Mario: Sería cuando… la velocidad va… aumentando… y cóncava hacia abajo, la velocidad va… disminuyendo (Ver Figura 9).

En el diálogo anterior, Mario muestra evidencia de "formulación" del criterio de la segunda derivada a través de identificar un comportamiento creciente (concavidad hacia arriba) o decreciente (concavidad hacia abajo) en la variación en la velocidad (usando códigos variacionales como: crece, decrece, aumenta la velocidad, disminuye la velocidad) dando cuenta de una segunda variación. Así, el cambio creciente de la velocidad se asocia a una segunda variación positiva y el cambio decreciente, a una velocidad negativa. En la Figura 9 se presentan las conclusiones del equipo 1 (E1) al respecto de la formulación de la concavidad en términos de la variación de la velocidad.

Figura 9. Conclusiones del equipo 1 (E1) al respecto de la concavidad y su relación con la variación de la velocidad

j) ¿Cómo puedes definir la concavidad respecto al cambio de velocidad?
E1: Cóncava hacia arriba, la velocidad va aumentando. Cóncava hacia abajo, la velocidad va disminuyendo.

Fuente: Jiménez, 2019, p. 82

6. CONCLUSIONES

De acuerdo con los análisis anteriores, el estudio de la variación de la velocidad es un elemento central en la discusión de los estudiantes para la construcción de significados sobre la monotonía y concavidad de las gráficas cuando se interpretan como modelos de un movimiento. En la tabla 1 se sintetizan las E-Var y A-Var que se desarrollan en los momentos de la SMM.

Tabla 1. Síntesis de resultados

Momento	E-Var	A-Var
Establecer funciones crecientes y decrecientes con el CBR como marco de referencia	Comparación y seriación	Acercarse o alejarse del sensor. La variación de la velocidad del movimiento genera cierta forma gráfica.
Reconocer la variación igual a cero	Comparación y seriación	En un movimiento con "retorno" la velocidad se debe hacer cero. Existen casos de movimiento donde la velocidad se hace cero y no se "retorna" *
Reconocer la variación en el comportamiento que varía	Comparación-seriación	La velocidad varía de forma creciente o decreciente.

*Si bien este argumento surge en la discusión de la tarea 2, no se analiza con suficiencia, pero contribuye a significar el criterio de la primera derivada.

Como parte de la tarea 1, el CBR y la calculadora graficadora permitieron determinar las características del movimiento para generar los tipos de comportamientos gráficos básicos propuestos; generando reflexiones sobre acercarse o alejarse del sensor, moverse rápido o lento, cada vez más rápido, etc. Esto permitió a los estudiantes vincular *variación de la velocidad - forma gráfica de la posición*. Es decir, se relacionan características de la derivada y la función original, como establecen Berry y Nyman (2003). No obstante, con las tareas 2 y 3 se avanzó hacia la formulación de características de los criterios de la derivada a partir del estudio variacional de las gráficas al analizar las características de la velocidad alrededor de un "punto de retorno" del movimiento. Para esto, el análisis de la variación de la velocidad se realizó a través de la pendiente de la recta tangente, asociando *magnitud de la velocidad - pendiente de la tangente*, lo que permitió visualizar la variación de la velocidad. Así, cuando los análisis se centran en los cambios de signo del valor de la velocidad antes y después de tener una velocidad cero, las características del criterio de la primera derivada surgen en las argumentaciones para resolver la tarea 2: un cambio en la monotonía de la gráfica (de crecimiento a decrecimiento o viceversa), asociando al crecimiento un signo positivo y al decrecimiento un signo negativo. Por su parte, al analizar cómo varía la velocidad del movimiento antes y después de un "punto de retorno" y verse este como un continuo, las características del criterio de la segunda derivada surgen en las argumentaciones para resolver la tarea 3: la velocidad del movimiento (pendiente de la recta tangente) es decreciente para la concavidad hacia abajo y es creciente la concavidad hacia arriba. De esta forma es que se responde a la pregunta de investigación planteada al inicio.

Este trabajo evidencia, como Jones (2018) y Fallas y Lezama (2022) establecen, que la significación de la concavidad se logra a través del análisis variacional y aporta un diseño didáctico, la SMM, a través de la cual puede realizarse esto en el aula. Además, el diseño evidencia que estudiar las características de la velocidad alrededor de un "punto de retorno" del movimiento permite analizar la monotonía y concavidad a la vez, construyendo significados de los criterios de la derivada desde un mismo estudio. Esto es una diferencia con los estudios actuales que se centran solo en la monotonía o la concavidad.

De acuerdo con la evidencia empírica, en la medida que los estudiantes sean capaces de construir un binomio *comparación-seriación* para analizar situaciones de cambio, como en este caso sobre el movimiento, podrán ser capaces de significar la monotonía y la concavidad como la identificación de un crecimiento-decrecimiento ante un marco de referencia, así como la rapidez de ese crecimiento-decrecimiento, respectivamente. Así, los criterios de la derivada se despojan de un carácter memorístico y algorítmico, y cobran significado como argumentos para analizar el comportamiento de un fenómeno en un cierto intervalo en el cual se da un cambio en su comportamiento (punto crítico) o en el cual se analiza si dicho cambio se produjo (punto de inflexión). Esta fenomenología constituye una base para generar diseños didácticos que permitan significar los criterios de la derivada bajo diferentes fenómenos o situaciones dinámicas, y representa el aporte del trabajo.

La estructura de las tareas de la SMM no propició el determinar o postular un comportamiento, valor o estado futuro de las gráficas, lo cual llevó a que las E-Var de *estimación* y *predicción* no aparecieran. Así, conviene analizar la pertinencia de incorporar como objetivo de la SMM la discusión y análisis de comportamientos o estados futuros, para promover un mayor desarrollo de las habilidades de los estudiantes para realizar análisis variacionales.

REFERENCIAS

Antonio, R., Escudero, D., & Flores, E. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática, 31*(1), 258-280. https://doi.org/10.24844/EM3101.10

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas)* (pp. 97–140). Iberoamérica.

Berry, J., & Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior,* 22, 481–497. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.006

Cabrera, L., & Martínez, J. A. (2022). Esquema para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en secundaria. Un estudio exploratorio. En B. Rodríguez (Coord.), *Los estudios sobre la enseñanza del Español y las Matemáticas en* *educación básica, hoy* (pp. 167-195). Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Universidad Autónoma de Querétaro y Benemérita Escuela Normal Veracruzana.

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber. Pensamiento y lenguaje variacional*. Gedisa.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A., & Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education, 50*, 77–89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Fallas, R., & Lezama, J. (2022). Argumentos variacionales en la comprensión de la concavidad en gráficas de funciones. *Perfiles Educativos, 178*(44), 130-148. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2022.178.60619

Hitt, F., & Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: Representations and actions by students in action. *ZDM – Mathematics Education, 53*, 635–647. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x

Jiménez, A. (2019). *Estrategias variacionales usadas por estudiantes de licenciatura en un ambiente tecnológico: El caso de los criterios de la derivada* (Tesis de maestría sin publicar). Universidad Autónoma de Coahuila.

Jiménez, A., & Zaldívar, J. (2022). Resultados de un estudio preliminar para el estudio de los criterios de la derivada. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 7, 1-26. https://doi.org/10.46618/iime.122

Jones, S. (2017). An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts. *Journal of Mathematical Behavior, 45*, 95–110. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.11.002

Jones, S. (2018). Students' application of concavity and inflection points to real-world problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*, 523-544. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9876-5

Latorre, A. (2005). *La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa*. Graó.

Mariotti, M., & Maffia, A. (2018). From using artefacts to mathematical meanings: The teacher's role in the semiotic mediation process. *Didattica della Matematica. Dalle Ricerche Alle Pratiche d'Aula, 3*, 50–63. https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3.1

Marrongelle, K. A. (2004). How students use physics to reason about calculus tasks. *School Science and Mathematics, 104*(6), 258–272. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2004.tb17997.x

Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 624-640. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.795248

Rasmussen, C., Borba, M., & Marrongelle, K. (2014). Research on calculus: What do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education, 46*, 507–515. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x

Salazar, C., Díaz, H., & Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis, 26*, 62-82. https://doi.org/10.17227/ted.num26-421

Sealey, V., Infante, N., Campbell, M., & Bolyard, J. (2020). The generation and use of graphical examples in calculus classrooms: The case of the mean value theorem. *The Journal of Mathematical Behavior, 57*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100743

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Erlbaum.

Suárez, L., & Cordero, F. (2010). Modelación graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 319-333.

Swidan, O. (2019). Construction of the mathematical meaning of the function–derivative relationship using dynamic digital artifacts: A case study. *Digital Experiences in Mathematics Education, 5*, 203-222. https://doi.org/10.1007/s40751-019-00053-4

Thompson, P., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P., & Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM–Mathematics Education, 53*, 507–519. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01270-1

Urban-Woldron, H. (2014). Comprehension of calculus concept based on motion sensor data. *R&E Source, 1*. https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/158

Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: Resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 449-468. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education, 8*, 103-122. https://doi.org/10.1090/cbmath/008/06

∞

José David Zaldívar Rojas

Universidad Autónoma de Coahuila (México)
david.zaldivar@uadec.edu.mx | https://orcid.org/0000-0002-4274-0336

Luis Manuel Cabrera Chim

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (México)
lmcabrerach@gmail.com | https://orcid.org/0000-0003-3444-5166

Amaranta Viridiana Jiménez Villalpando

Universidad Autónoma de Coahuila (México)
amaranta.jimenez@uadec.edu.mx | https://orcid.org/0000-0003-3747-0500

Recibido: 15 de septiembre de 2023
Aceptado: 1 de agosto de 2024

A Variational Approach for the Significance of Derivative Criteria in Motion-Modeling Situations

José David Zaldívar Rojas @ [1], Luis Manuel Cabrera Chim @ [2], Amaranta Viridiana Jiménez Villalpando @ [1]

[1] Universidad Autónoma de Coahuila (México)
[2] Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (México)

This article addresses the teaching of the first and second derivative criteria in the context of motion by focusing on how undergraduate students understand and signify these concepts through a variational approach. It critiques traditional calculus teaching, which tends to be algorithmic and rote, and proposes that a more dynamic and visual approach utilizing a motion sensor, and a graphic calculator can enable a deeper understanding of the criteria.

The research is grounded in Socioepistemological Theory and Variational Thinking and Language, which emphasizes the relevance of variation in learning calculus. It is considered that the understanding of mathematical concepts, such as derivatives, is enriched when students can observe and analyze changes in real situations. The use of technological tools such as graphing calculators and motion sensors allows students to interact with concepts more tangibly, facilitating the analysis of position, velocity, and acceleration in graphs.

This research was conducted with a group of students from the Bachelor of Applied Mathematics at the Autonomous University of Coahuila. Through a qualitative analysis of the group's interactions and discussions, it was revealed that students initially exhibited confusion regarding the relationship between zero velocity and the slope of the tangent line. However, through discussion and graph analysis, they were able to identify graphical behavior patterns, such as approaching and distancing, and how these relate to the velocity. Students developed variational strategies that allowed them to describe and communicate their observations of motion. The analysis focused on variational strategies and arguments, which are actions that enable the identification, quantification, and qualification of changes, as well as the determination of regularities and prediction of future states. The importance of zero velocity in the context of a round trip was highlighted, as well as the connection between velocity variation and the concavity of the graphs. It was observed that increasing velocity was associated with upward concavity, whereas decreasing velocity was related to downward concavity. These findings underscore the effectiveness of the signification of the comparison-seriation binomial as fundamental in variational analysis since it allows students to identify patterns of graphical behavior through the comparison of contiguous states and the organization of the states in sequences.

This suggests that Motion-Modelling situations should include spaces for reflecting on the behavior of graphs, especially in situations where the velocity is zero, but there is no change in monotonicity. This reflection is crucial for analyzing the derivative and developing variational skills in students. Furthermore, it emphasizes the need to move away from rote and algorithmic learning, promoting a deeper and more meaningful understanding of concepts such as velocity, monotonicity, and concavity. In summary, the article proposes that the teaching of derivatives can greatly benefit from an approach that integrates variation and technology, thereby facilitating the re-signification of mathematical concepts in the context of motion.