AIEM
Avances de Investigación en Educación Matemática
Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN-e 2254-4313 | (2025) 27, 107-127 | aiem.es

seiem.es

Comprensión del conjunto solución de inecuaciones lineales en dos variables para proponer una descomposición genética

Understanding the Solution Set of Linear Inequalities in Two Variables to Propose a Genetic Decomposition

Adrian Muñoz-Orozco @, Gustavo Martínez-Sierra @, Marcela Ferrari-Escolá @

Universidad Autónoma de Guerrero (México)

Resumen ∞ El objetivo de esta investigación es analizar la comprensión de un grupo de estudiantes para proponer una descomposición genética (DG) sobre el conjunto solución de una inecuación lineal en dos variables (CSILDV). Empleamos la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, y Esquema) como referente teórico y metodológico. Participaron tres estudiantes de licenciatura en matemáticas, seleccionados por su buen rendimiento académico. Para la recolección de datos, realizamos tres sesiones virtuales que fueron grabadas usando Google Meet; durante las sesiones, los participantes resolvieron y discutieron nueve tareas. Los resultados mostraron que los estudiantes representan gráficamente el CSILDV construyendo tres tipos de procesos: utilizando puntos, semirrectas o generalizando propiedades de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$. Además, encontramos que comprenden el CSILDV como un área o una región donde se encuentran algunos puntos que satisfacen la inecuación. Por último, sugerimos nuevas investigaciones que permitan ampliar la DG propuesta.

Palabras clave ∞ Comprensión; Inecuaciones; APOE; Descomposición genética; Licenciatura

Abstract ∞ The objective of this research is to analyze the understanding of a group of students in order to propose a Genetic Decomposition (GD) on the solution set of a linear inequality in two variables (SSLITV). We employ the APOE Theory (Action, Process, Object, and Scheme) as a theoretical and methodological framework. Three undergraduate mathematics students participated, selected based on their good academic performance. For data collection, we conducted three virtual sessions that were recorded using Google Meet; during these sessions, participants solved and discussed nine tasks. The findings revealed that students graphically represent the SSLITV by constructing three types of processes: utilizing points, rays, or generalizing properties from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}^2$. Furthermore, we found that they conceptualize the SSLITV as an area or region where some points satisfy the inequality. Lastly, we recommend further research to expand upon the proposed GD.

Keywords ∞ Comprehension; Inequalities; APOS; Genetic decomposition; Bachelor's degree

Muñoz-Orozco, A., Martínez-Sierra, G., & Ferrari-Escolá, M. (2025). Comprensión del conjunto solución de inecuaciones lineales en dos variables para proponer una descomposición genética. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, 27, 107-127. https://doi.org/10.35763/aiem27.6017

CC BY
© de la autoría

1. Introducción

En los últimos veinte años, se han llevado a cabo numerosas investigaciones en Educación Matemática sobre las inecuaciones en una variable, en las cuales se ha informado que los estudiantes enfrentan dificultades en su aprendizaje. Por ejemplo, no reconocen la diferencia entre la igualdad y la desigualdad, no atribuyen contenido semántico a los signos de las inecuaciones y cometen errores algebraicos al determinar el conjunto solución (Blanco y Garrote, 2007; Tsamir y Almog, 2001). Para contribuir a superar estas dificultades, un grupo de investigaciones se han enfocado en el diseño de propuestas de enseñanza que empleen la visualización de $f(x)$ y $g(x)$, en su mayoría usando herramientas tecnológicas, que ayude al estudiante a comprender el conjunto solución de una inecuación de la forma $f(x) < g(x)$ (Abramovich y Connell, 2015). Por último, se han investigado sobre las problemáticas asociadas a inecuaciones en dos variables (Çekmez, 2021; Moon, 2019, 2020; Switzer, 2014).

La mayoría de los estudios en Educación Matemática sobre inecuaciones se enfocan en una variable (por ejemplo, Tsamir y Almog, 2001), mientras que solo algunos abordan inecuaciones en dos variables (Çekmez, 2021; Moon, 2019, 2020; Switzer, 2014). En este estudio, nos centraremos en las inecuaciones lineales en dos variables debido a la escasa atención que han recibido en la literatura de Educación Matemática (Çekmez, 2021). Además, las inecuaciones en dos variables requieren su representación en varios registros, lo que sugiere un análisis profundo de los elementos cognitivos que los estudiantes podrían necesitar para realizar estas representaciones y establecer conexiones entre ellas (Moon, 2019, 2020; Switzer, 2014). Por último, nuevas investigaciones sobre inecuaciones en dos variables representan una contribución al concepto de inecuación al ampliar su estudio de una a dos variables.

Nuestro interés específico radica en analizar la comprensión de un grupo de estudiantes acerca del conjunto solución de una inecuación lineal en dos variables (CSILDV), con el propósito de proponer una descomposición genética (DG), utilizando como referencia teórica y metodológica la Teoría APOE. Una DG es un modelo hipotético que describe en detalle las estructuras y mecanismos mentales necesarios para que un estudiante comprenda un concepto matemático (Betancur et al., 2022; Martínez-Planell y Trigueros, 2019). El diseño de este modelo no es único, pero contribuye a revelar el camino cognitivo que un estudiante podría seguir para comprender un concepto. Una DG debe ser validada o refinada mediante evidencia empírica para reflejar el pensamiento del estudiante.

La pregunta de esta investigación es la siguiente:

- ¿Cuáles son las estructuras mentales y los mecanismos que utilizan un grupo de estudiantes de licenciatura en matemáticas para comprender el CSILDV?

2. Revisión de la literatura

La literatura sobre inecuaciones ha evidenciado que los estudiantes de nivel bachillerato y universitario tienen dificultades en el tratamiento de inecuaciones en una variable. Por ejemplo, no reconocen el significado de $(>)$ y $(<)$ y tienen dificultad para establecer conexiones entre los registros verbal, geométrico y algebraico (Blanco y Garrote, 2007); y no interpretan los resultados de la inecuación, porque entienden que la solución de una inecuación es un número y no un conjunto (Tsamir y Almog, 2001). Algunas de estas dificultades surgen porque la inecuación se enseña como un tema secundario de las ecuaciones y, en la mayoría de los casos, se prioriza la enseñanza procedimental de manera algebraica, sin tener en cuenta el registro gráfico (Abramovich y Connell, 2015; Tsamir y Almog, 2001).

La visualización de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ para determinar la solución de la inecuación $f(x) < g(x)$, es un recurso que se utilizó como alternativa a la enseñanza algebraica, con el objetivo de mejorar la comprensión sobre la inecuación en una variable (Arcavi e Isoda, 2007; Sangwin, 2015). Por ejemplo, Arcavi e Isoda (2007) propusieron una secuencia de tareas que permite a los estudiantes comprender y resolver inecuaciones mediante la visualización, utilizando una calculadora gráfica.

Switzer (2014) llevo a cabo una investigación con estudiantes de licenciatura en matemáticas y encontró que algunos de ellos, para representar gráficamente la expresión $y > mx + b$ asociaban el símbolo "mayor que" con pintar la parte superior de la gráfica de la recta, lo cual les funcionaba bien; sin embargo, al enfrentarse a expresiones donde la variable y no estaba despejada, realizaban gráficos incorrectos. Además, Switzer (2014) propuso y analizó una tarea en la cual se pedía a los estudiantes que representaran el conjunto solución de una inecuación, evaluando algunos puntos (x, y) en $ax + by < c$ y representándolos en el plano cartesiano, utilizando diferentes símbolos para indicar si pertenecen o no al conjunto solución. Esto les permitió identificar que los puntos que satisfacen la igualdad quedan sobre la recta, mientras que los menores quedan a un lado de la recta y los mayores quedan al lado contrario.

Los estudios de Abramovich y Connell (2015), y Çekmez (2021) utilizaron herramientas tecnológicas para diseñar una secuencia de tareas que ayudara a los estudiantes a comprender el conjunto solución de inecuaciones en dos variables. En Çekmez, (2021), se encontró que los estudiantes tenían dificultad para establecer conexiones entre los puntos, el conjunto solución y la representación algebraica de la desigualdad.

En el contexto de la Teoría APOE y las inecuaciones en dos variables, encontramos el estudio de Moon (2020), quien propuso una DG sobre la representación gráfica de inecuaciones en dos variables. Esta DG se centró en los procesos de variable y parámetro, los cuales deben coordinarse para que el estudiante construya el proceso de representación gráfica de la inecuación en dos variables. La encapsulación de este proceso en un objeto permite al estudiante desarrollar una imagen dinámica de la inecuación, comprendiendo la representación gráfica como una totalidad. Moon (2020) encontró que la mayoría de los estudiantes no representaban gráficamente las inecuaciones, en muchos casos, debido a la dificultad para graficar la ecuación, y cuando lo hacían correctamente, no lograban establecer conexiones entre su representación gráfica y algebraica. En contraste con Moon (2020), nuestra investigación se enfoca en inecuaciones lineales, profundiza en las estructuras objeto y esquema, y explora cómo se manifiestan estas estructuras durante la solución de sistemas de inecuaciones.

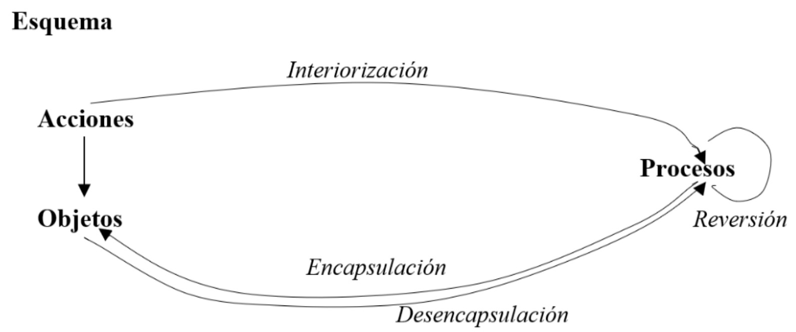
Tras revisar la literatura, consideramos que la construcción cognitiva del CSILDV depende de que los estudiantes cuenten, al menos, con las siguientes estructuras previas. Las estructuras proceso de variable y parámetro, porque permiten al estudiante coordinar estos procesos para graficar una inecuación en dos variables (Moon, 2020). Asimismo, los procesos de expresión algebraica y desigualdad son necesarios para evaluar puntos en la inecuación, comparar y determinar si satisfacen la inecuación (Switzer, 2014). Los procesos de plano cartesiano y ecuación lineal en dos variables ayudan al estudiante a comprender que la representación gráfica del CSILDV siempre estará acotada por la gráfica de la ecuación. Por último, la estructura objeto del conjunto solución de inecuaciones en una variable contribuirá a que los estudiantes establezcan conexiones entre las diferentes representaciones de la inecuación en dos variables (Çekmez, 2021).

Nuestro objetivo es el diseño de una DG sobre el CSILDV, la cual será refinada a partir de los mecanismos y estructuras mentales observadas empíricamente en un grupo de estudiantes.

3. Marco teórico

La APOE es un marco utilizado para describir cognitivamente cómo los estudiantes comprenden conceptos matemáticos. Este marco surge de la propuesta de (Dubinsky, 1991), que usa la abstracción reflexiva de Piaget para describir cómo un estudiante utiliza los mecanismos mentales para construir las estructuras mentales (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) necesarias para comprender un nuevo concepto matemático (Figura 1).

Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático



Fuente: Arnon et al., (2014).

En Arnon et al. (2014) se entiende una acción como algo externo, en el sentido de que cada paso de la transformación debe ser guiado por instrucciones, por ejemplo, las indicaciones del profesor. En la estructura acción para una inecuación en dos variables, un estudiante podría representar gráficamente $f(x) < y$ siguiendo los pasos de un algoritmo como el método de prueba, que consiste en graficar $f(x) = y$, elegir algunos puntos en las dos regiones divididas por gráfica de la ecuación, evaluarlos en la inecuación, encontrar los que la satisfacen y representar el conjunto solución (Moon, 2020).

El estudiante construye un proceso mediante el mecanismo de interiorización, que se produce a medida que repite las acciones y comienza a reflexionar sobre ellas, adquiriendo así un control interno. Además, un proceso puede ser revertido o coordinado con otros para generar nuevos procesos. Por ejemplo, en el contexto de una inecuación $f(x) < y$, el estudiante podría construir un proceso al repetir la acción de evaluar puntos e interiorizar que aquellos que satisfacen la igualdad se encuentran sobre la gráfica de la ecuación, mientras que los valores menores se ubican en una de las regiones divididas por la ecuación, y los mayores en la otra (Switzer, 2014).

Si un estudiante comprende un proceso como un todo, sobre el cual se le pueden aplicar nuevas acciones o procesos, este se encapsula como un objeto. Este objeto puede ser desencapsulado en los procesos de los que se originó. Según Moon (2020), en la estructura objeto de la inecuación, un estudiante comprende la gráfica de $f(x) < y$ como la totalidad de los elementos que satisfacen la inecuación. En este contexto, el estudiante transita de una imagen estática a una imagen dinámica de la inecuación.

En un esquema, un estudiante tiene la capacidad de interactuar con todos los elementos presentes en la Figura 1. Ampliando lo propuesto por Moon (2020), consideramos que en un esquema de $f(x) < y$, un estudiante podría utilizar la imagen dinámica de la inecuación en dos variables para abordar problemas de la vida real, como aquellos relacionados con dominio de funciones y sistemas de inecuaciones.

Para elaborar una DG, se parte de una conjetura denominada descomposición genética preliminar (DGP), la cual se prueba empíricamente con estudiantes. Usualmente, durante este proceso, se observan construcciones inesperadas por parte de los estudiantes y también se evidencian dificultades en algunas de las estructuras conjeturadas, lo que lleva a refinar la DGP.

4. Metodología

En este estudio analizamos los mecanismos y estructuras mentales empleados por un grupo de estudiantes para construir el CSILDV. Para ello, utilizamos el ciclo de investigación de APOE, compuesto por tres componentes: análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de datos. Este ciclo ha sido empleado en investigaciones con características similares a la nuestra (Arnon et al., 2014; Rodríguez-Jara et al., 2019).

4.1. Análisis teórico

En esta investigación, la DGP se elaboró a partir de investigaciones previas sobre el concepto (Moon, 2019, 2020), nuestra experiencia como docentes de aula y nuestro conocimiento sobre APOE. Consideramos que un estudiante podría construir el objeto CSILDV mediante la encapsulación de al menos tres tipos de procesos sobre la representación gráfica del CSILDV. Estos procesos pueden construirse de forma independiente o complementarse el uno al otro.

Suponemos que el estudiante deberá tener dominio de las estructuras de proceso relacionadas con el plano cartesiano, la ecuación en dos variables, la expresión algebraica, la inecuación y el parámetro. En otras palabras, el estudiante utiliza el plano cartesiano para representar gráficamente elementos como puntos, semirrectas y rectas; reconoce cuándo dos rectas son paralelas; emplea la expresión algebraica para sustituir valores en la inecuación y comparar elementos; y puede asignar parámetros a una variable.

La acción de sustituir puntos (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ en $ax + by < c$, comparar ambos lados de la desigualdad y encontrar algunos puntos que pertenecen al CSILDV, se repite por parte del estudiante hasta alcanzar un control interno sobre ella. En otras palabras, el estudiante podrá, de manera mental, identificar puntos que satisfacen la inecuación sin necesidad de sustituir en la expresión algebraica y visualizar que existen infinitos puntos que la satisfacen, interiorizando la acción en un proceso.

La acción de asignar un parámetro k a las variables x o y para reducir la inecuación de dos a una variable equivale a expresar la inecuación como $ak + by < c$ o $ax + bk < c$, con el fin de encontrar un subconjunto de CSILDV. Si el estudiante repite esta acción para varios $k \in \mathbb{R}$, la interioriza como un proceso, en el cual comprende, sin necesidad de asignar el parámetro, que por cada k siempre obtendrá conjuntos representados por semirrectas paralelas al eje y o al eje x, que satisfacen la inecuación.

La acción de emplear el parámetro $p \in \mathbb{R}$, la condición de paralelismo de rectas y la comparación entre p y c para identificar algunos conjuntos $ax + by = p$ contenidos en CSILDV, se repite hasta que el estudiante tiene un control interno sobre ella. Este control lleva al estudiante a comprender, sin necesidad de usar explícitamente el parámetro $p < c$, que siempre habrá conjuntos de la forma $ax + by = k$ contenidos en el CSILDV, interiorizando así la acción como un proceso.

Cualquiera de los tres procesos mencionados, coordinado con las estructuras del plano cartesiano y la ecuación en dos variables, permitirá a los estudiantes representar gráficamente el CSILDV. La coordinación de estas estructuras permite al estudiante comprender que la gráfica de una inecuación siempre estará acotada superior o inferiormente por la ecuación; que cualquier punto en la gráfica del CSILDV satisface la inecuación; y que la gráfica de la inecuación puede interpretarse como una unión infinita de puntos (Figura 2.1), semirrectas paralelas en eje y (Figura 2.2), el eje x (Figura 2.3), o rectas paralelas a $ax + by = c$ (Figura 2.4).

Figura 2.1. Representación gráfica por puntos

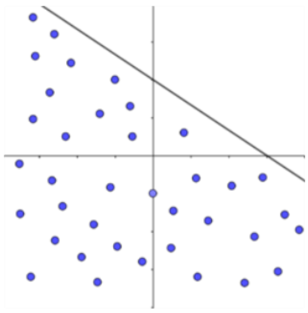


Figura 2.2. Representación gráfica por semirrectas paralelas eje y

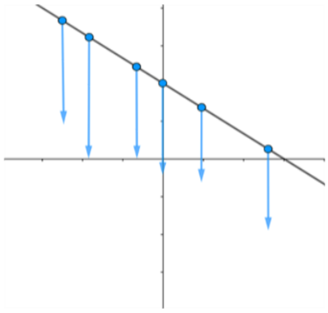


Figura 2.3. Representación gráfica por semirrectas paralelas eje x

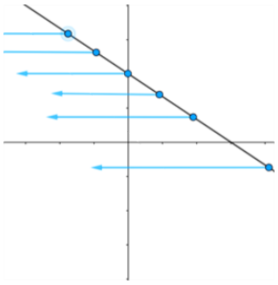
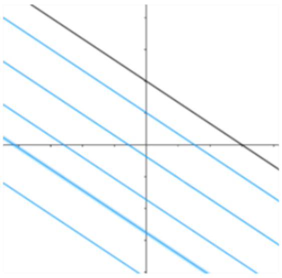


Figura 2.4. Representación gráfica por rectas paralelas



Si el estudiante justifica que un elemento satisface la inecuación mediante su representación gráfica, puede argumentar que un elemento del conjunto $A = \{(x, y)/\ ax + by < c\}$ no puede pertenecer a $B = \{(x, y)/\ ax + by \geq c\}$ porque son conjuntos disjuntos, o puede establecer relaciones de complementariedad entre estos conjuntos. Consideramos que emerge el mecanismo de encapsulación que permite al estudiante construir el objeto CSILDV.

El mecanismo de tematización se observa cuando el estudiante realiza una articulación coherente de las estructuras y mecanismos mentales relacionados con el CSILDV con otros esquemas para resolver problemas en contextos reales vinculados a inecuaciones lineales. En este esquema, el estudiante podría modelar un problema de la vida real utilizando inecuaciones lineales, resolver sistemas de inecuaciones y justificar gráfica o algebraicamente si un elemento satisface dicho sistema.

4.2. Diseño e implementación de enseñanza

Participantes y contexto: Tres estudiantes de edades entre 18 y 20 años. Estos estudiantes estaban matriculados en el tercer semestre del programa de licenciatura en matemáticas en una universidad de México. Habían completado cursos como Matemática Fundamental, Cálculo I, Cálculo II y Álgebra Lineal. Se seleccionaron como participantes debido a su conocimiento previo de las estructuras necesarias para comprender el CSILDV, su disposición voluntaria para participar en la investigación y su desempeño académico, con un promedio acumulado en la licenciatura mayor a 4 en una escala de 0 a 5. Para mantener su anonimato, les asignamos los seudónimos: Luis, Fernando y Gonzalo.

Recolección de datos: Se llevaron a cabo tres sesiones virtuales a través de Google Meet, las cuales fueron grabadas en video para recopilar la información proporcionada por los participantes. Además, se utilizaron otros medios digitales, como Classroom y pizarra Jambordad, para recopilar información escrita. Las dos primeras sesiones fueron grupales, mientras que la tercera fue individual. Durante estas sesiones, los participantes resolvieron nueve tareas diseñadas a partir de la DGP sobre el CSILDV. En las sesiones grupales, se presentaba a los participantes cada tarea a través de Google Meet, se les concedía entre 15 y 20 minutos para resolverla, y luego compartían con sus compañeros e investigadores los procedimientos que emplearon para llegar a la solución. En la sesión individual, solicitamos a los participantes que resolvieran dos tareas y explicaran en voz alta su proceso de resolución, para luego ser entrevistados por el primer autor del estudio, con base en sus explicaciones.

Durante las sesiones grupales e individuales, creamos espacios en los que los estudiantes pudieran explicar y ser consultados sobre los aspectos que emplearon al resolver las tareas, con el fin de profundizar en sus estructuras y mecanismos mentales. Inicialmente, las tareas de esta investigación fueron diseñadas por el primer autor de este estudio y luego validadas por los otros dos autores y un investigador experto. En la Tabla 1 se muestra cómo se relacionan las sesiones, las tareas y la intencionalidad con que fueron diseñadas en función de la DGP.

Tabla 1. Relación entre las tareas, los objetivos y el número de sesiones

Sesión	Tareas	Intencionalidad
1	Tarea 1: Represente todos los puntos (x,y) que satisfacen 2x+3y=5 en un plano cartesiano. Tarea 2: a) Encuentre algunos puntos (x,y) que cumplen 2x+3y<5. b) Encuentre todos los puntos (x,y) que cumplen 2x+3y<5 y represéntelos en un plano cartesiano.	Si en la Tarea 1 el estudiante representa gráficamente la ecuación y justifica que la recta es su conjunto solución, interpretaremos que posee la estructura previa del proceso de ecuación. En la Tarea 2, esperamos identificar algunas de las tres acciones descritas en la DGP, o incluso otras no consideradas, que un estudiante utilice para graficar el CSILDV.
2	Tarea 3: ¿Cuál es la representación gráfica del conjunto solución de la inecuación $-x+4y<8$? Tarea 4: ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $x-2y<6$? Tarea 5: ¿Es posible generalizar que la representación gráfica del conjunto solución de la inecuación $ax+by<c$ son todos los puntos del semiplano inferior de la recta $ax+by=c$? Tarea 6: Represente el conjunto solución de sistema de inecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+3y\geq 5 \\ 3x+2y\leq 7 \end{cases}$	Esperamos que en las Tareas 3 y 4 los estudiantes repitan las acciones descritas en la DGP, promoviendo el mecanismo de interiorización y construyan el proceso de CSILDV. Si el estudiante puede justificar con argumentos coherentes cómo representar gráficamente una inecuación y establecer conexiones entre la representación gráfica y algebraica, consideraremos que ha construido un proceso; de lo contrario, seguirá en acciones. En la Tarea 5, esperamos que el estudiante realice la transición cognitiva de casos particulares a generales, promoviendo el mecanismo de encapsulación. Si el estudiante puede justificar bajo qué condiciones la solución de $ax+by<c$ es el semiplano inferior de $ax+by=c$, consideraremos que ha construido el proceso de CSILDV.

Sesión	Tareas	Intencionalidad
	Tarea 7: Represente gráficamente el conjunto solución del sistema de inecuaciones lineales $\begin{cases} x+y \leq 5 \\ -2x+y \leq -2 \\ y \geq 2 \end{cases}$	En las Tareas 6 y 7, promovemos que el estudiante realice nuevas trasformaciones sobre la gráfica de la inecuación para representar los sistemas de inecuaciones. Cuando el estudiante resuelve el sistema y explica cómo lo solucionó, consideraremos que ha construido el objeto CSILDV. Además, si el estudiante establece conexiones entre las representaciones gráfica y algebraica del sistema, explica que un punto sobre la gráfica satisface el sistema y describe al sistema como la intersección del CSILDV, consideraremos que ha tematizado este objeto en un esquema.
3	Tarea 8: Represente gráficamente el conjunto solución del sistema de inecuaciones lineales $\begin{cases} x+y \geq 5 \\ -2x+y \geq -2 \\ y \leq 2 \end{cases}$ Tarea 9: Explique de forma general cómo representar gráficamente el conjunto solución de una inecuación. Use la inecuación $-2x-4y<8$ para ejemplificar su propuesta.	En la Tarea 8, buscamos identificar cómo un estudiante articula las estructuras mentales sobre el CSILDV para solucionar un sistema de inecuaciones con un conjunto solución vacío. En la Tarea 9, examinaremos las estructuras mentales construidas del CSILDV y los mecanismos empleados tras resolver diversos tipos de inecuaciones y sistemas de inecuaciones. En esta tarea, nos enfocaremos especialmente en cómo un estudiante comprende la representación gráfica de una inecuación cómo su conjunto solución.

4.3. Análisis de los datos

Primero nos sumergimos en los datos para familiarizarnos con su contenido. Luego, llevamos a cabo un análisis exploratorio utilizando la DGP, lo que nos permitió identificar los episodios más relevantes de la toma de datos. Después, transcribimos los diálogos de estos episodios y organizamos las respuestas de las tareas proporcionadas por los participantes, con el objetivo de realizar un análisis más exhaustivo de las construcciones mostradas por los estudiantes. Los datos fueron analizados de manera independiente por los tres autores de esta investigación; posteriormente, las interpretaciones fueron trianguladas hasta llegar al consenso presentado en la siguiente sección.

La DGP es fundamental en el análisis de los datos en varios aspectos: i) nos permitió diseñar y describir la intención de las tareas aplicadas, lo cual facilita la interpretación de los resultados; ii) nos ayudó a delimitar los episodios más representativos de la recolección de datos; y iii) permitió la identificación, interpretación y descripción de las estructuras y los mecanismos utilizados empíricamente para la construcción del CSILDV. Además, este ciclo de investigación nos ayudó a validar algunas de las estructuras y mecanismos descritos en la DGP, así como identificar nuevas estructuras y mecanismos mentales. Esto condujo a una reformulación de la descomposición en una nueva versión, presentada en la sección de discusión y conclusiones.

5. RESULTADOS

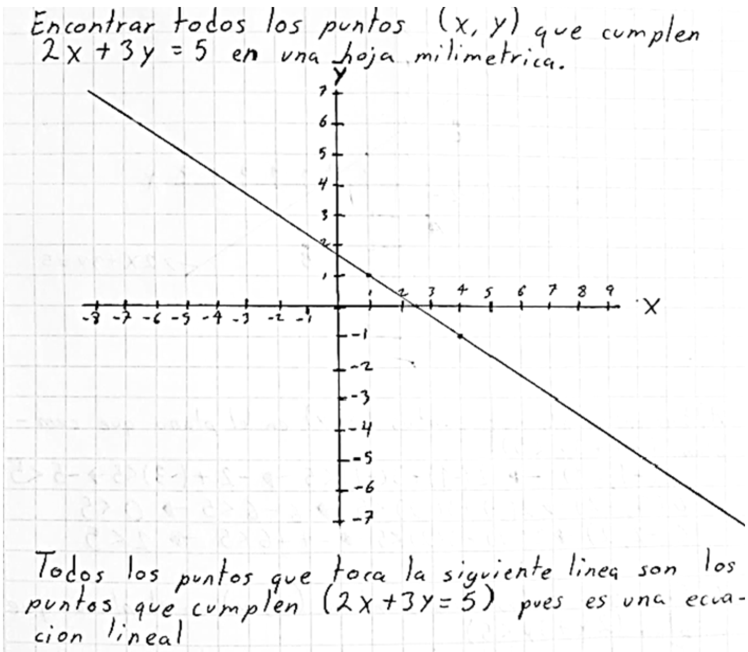
5.1. Estructuras previas del CSILDV

En este contexto, nos interesaba investigar si los estudiantes contaban con las estructuras previas de ecuación lineal en dos variables, plano cartesiano, expresión algebraica y variable. Observamos que Fernando y Luis habían desarrollado ciertas acciones para representar gráficamente la ecuación, las cuales implicaban la comprensión de los procesos de plano cartesiano, variable y expresión algebraica.

Estas acciones fueron evidentes en la Tarea 1. Por ejemplo, Luis explicó que identificó la expresión algebraica como una ecuación lineal. Para graficar la ecuación, asignó valores a las variables x y y, encontrando así dos puntos que satisfacían la ecuación. Luego, marcó estos puntos en el plano cartesiano, trazó una línea recta a través de ellos (Figura 3) y afirmó que todos los puntos en esa línea satisfacían $2x + 3y = 5$ (Extracto 1). Interpretamos que Luis comprende que cualquier expresión de la forma $ax + by = c$ corresponde a una ecuación lineal. Además, ha interiorizado las acciones necesarias para representar gráficamente la ecuación en dos variables y establecer conexiones entre su representación gráfica y algebraica.

Extracto 1. Luis: Lo primero que hice fue identificar que es una ecuación lineal, por lo tanto, su gráfica es una línea recta, lo que hice fue encontrar dos puntos al azar, tal que al sustituir por (x, y) en la expresión me diera 5, en este caso $(1,1)$ y $(4, -1)$. Después de encontrar estos dos puntos, tracé una línea recta y con eso podemos ver que todos los puntos que estén en esa línea recta cumplen $2x + 3y = 5$.

Figura 3. Tarea 1 realizada por Luis



En el caso de Fernando, observamos acciones similares a las mostradas por Luis, así como algunas diferentes. Por ejemplo, ambos comprenden que cualquier expresión de la forma $ax + by = c$ corresponde a una ecuación lineal. Utilizan la estructura proceso del plano cartesiano para representar una ecuación y establecen conexiones entre su representación gráfica y algebraica (Extracto 2). A diferencia de Luis, Fernando se refiere a la recta como el conjunto solución de la ecuación, compuesto por todos los puntos que satisfacen la igualdad, lo cual se relaciona más con nuestra postura teórica, en la que consideramos la gráfica de una inecuación como su conjunto solución. A partir de lo realizado por Luis y Fernando en la Tarea 1, coincidimos en que mostraron una estructura proceso de ecuación lineal en dos variables.

> **Extracto 2. Fernando:** Al pedir todos los puntos, lo que hice fue decir, se refiere al conjunto de todos los puntos que representa eso, al representarlos es una línea recta, así que no hay necesidad de poner cada punto, simplemente con sola recta, representa los puntos que satisface la ecuación dada.

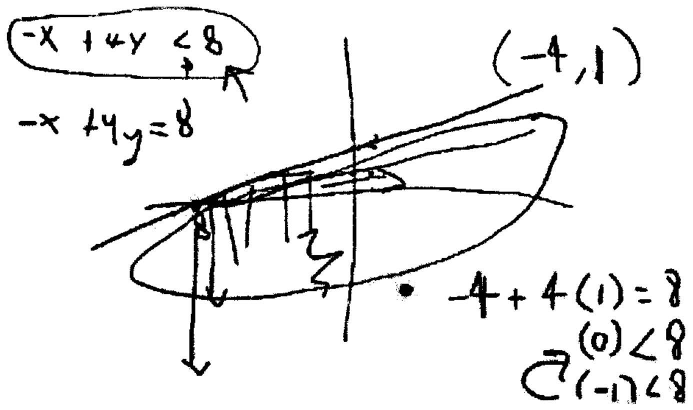
5.2. Estructura acción del CSILDV

Todos los estudiantes mostraron diferentes acciones para graficar el CSILDV. Las primeras acciones las observamos en los tres estudiantes, que consistieron en cambiar la inecuación $ax + by < c$ por $ax + by = c$, graficar la ecuación resultante, seleccionar puntos ubicados en cualquiera en los dos semiplanos divididos por la gráfica de la igualdad, sustituir estos puntos en la desigualdad, verificar si satisfacen la inecuación y señalar que la solución de la inecuación se encuentra en la región donde al menos uno de los puntos la satisface.

Otras acciones para graficar el CSILDV fueron realizadas por el estudiante Luis. Estas acciones comienzan con el cambio de la desigualdad $ax + by < c$ por la ecuación $ax + by = c$, seguido de la representación gráfica de esta ecuación. Luego, identifica un punto (x_0, y_0) que satisface la ecuación $ax_0 + by_0 = c$, utiliza x_0 como un parámetro para variar $y < y_0$. A continuación, reduce la inecuación de dos variables a una sola y determina conjuntos de la forma $ax_0 + by < c$ con $y < y_0$ contenidos en $ax + by < c$. Por ejemplo, en la Tarea 3 (Figura 4), Luis transformó la inecuación $-x + 4y < 8$ en la ecuación $-x + 4y = 8$, la graficó, identificó el punto $(-4,1)$ que satisface $-(-4) + 4(1) = 8$, asignó el parámetro -4 a la variable x, redujo la inecuación a $-(-4) + 4y < 8$, encontró un subconjunto del CSILDV e indicó que la solución de la inecuación se ubicaría en la parte inferior de la ecuación (Extracto 3). Estas acciones coinciden con las propuestas en la DGP, donde el estudiante asigna un parámetro a las variables x o y para reducir la inecuación de dos variables a una.

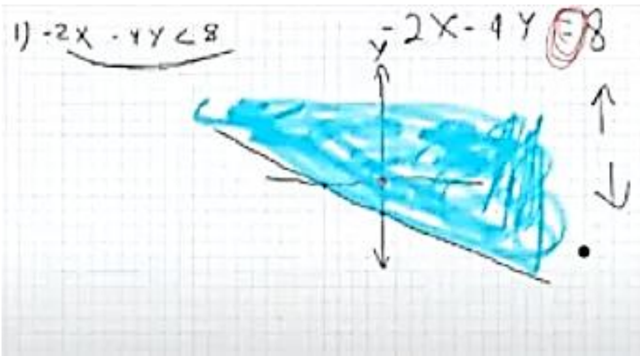
> **Extracto 3. Luis:** A mí lo que se me ocurrió para mostrar que todos los puntos de abajo (de la recta) cumplen esta condición $-x + 4y < 8$. Una vez que ya tenía los puntos, por ejemplo (-4,1) que cumplía la condición de igual a 8... entonces $x = -4$ ya estaba fija y lo que hacía era irle restando a la y, en vez de uno ponía un cero y esto me da un número menor a 8... E iba bajando cada vez más, por lo que todos los números debajo iban a ser menores a 8, y esto se aplica a cualquier punto de la línea.

Figura 4. Tarea 3 realizada por Luis



Luis exhibió otras acciones adicionales para graficar el CSILDV. Estas involucraron cambiar la desigualdad $ax + by < c$ por la ecuación $ax + by = c$, representar gráficamente esta ecuación para dividir el plano cartesiano en dos semiplanos, y emplear la expresión $by < c$ para determinar si la gráfica de la inecuación se ubicaba en el semiplano superior o inferior a la recta. Si b era positivo en $by < c$, la gráfica de la inecuación representaba el semiplano inferior a la recta; si b era negativo, la solución se encontraba en el semiplano superior. Por ejemplo, en la Tarea 9, Luis explicó que para graficar la inecuación $-2x - 4y < 8$, bastaba con identificar el valor de b. Si este valor era negativo, el área que representaba el conjunto solución de la inecuación giraría y se ubicaría en la parte de arriba de la recta $-2x - 4y = 8$ (Figura 5). Interpretamos que, en estas acciones, que no consideramos en la DGP, Luis estaba generalizando propiedades de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$. En $\mathbb{R}$ el conjunto solución de $ax < c$ es $x < c/a$ si $a > 0$, o $x > c/a$ si $a < 0$; en $\mathbb{R}^2$, la solución de $ax + by < c$ es el semiplano inferior a $ax + by = c$ si $b > 0$ o el semiplano superior si $b < 0$ (Extracto 4).

Figura 5. Tarea 9 realizada por Luis



> **Extracto 4. Luis:** Aquí lo que hago es saber si el área va hacia arriba o hacia abajo, y quien me dictamina eso es el eje de las y... así que el eje y lo marca como negativo (coeficiente eje y, negativo). Así el eje y, por así decirlo, lo invierto, como si lo rotará, como el menor que está para abajo y el mayor que está para arriba, si esto se invierte cambian de orientación. Por lo tanto, el área de solución vendría siendo esta área de acá (arriba) (Explicación Tarea 9).

5.3. Mecanismo de interiorización y estructura proceso del CSILDV

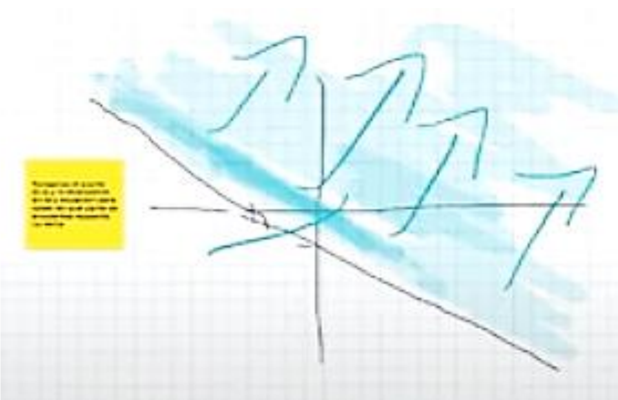
Desde la DGP, planteamos como hipótesis que, en la estructura proceso, un estudiante comprendería la representación gráfica como un conjunto infinito de elementos que satisfacen la inecuación. Identificaría la gráfica de la ecuación como la cota superior o inferior del CSILDV e interpretaría la gráfica de la inecuación como su conjunto solución.

No encontramos suficiente evidencia para afirmar que los participantes interiorizaron la gráfica de la inecuación como un conjunto infinito, en parte debido a la falta de profundización y la escasez de preguntas adicionales sobre este tema. Sin embargo, observamos que Luis proporciona indicios de comenzar a interiorizar el CSILDV como un conjunto infinito. En la Tarea 3, Luis explicó que la acción de reducir la inecuación de dos a una variable podría aplicarse a cualquier punto de la recta (Extracto 3) y graficó las semirrectas paralelas al eje y, mostrando que esta acción podría realizarse infinitamente (Figura 4).

Observamos que Luis y Fernando construyeron un proceso mediante el cual comprenden que la representación gráfica del CSILDV siempre estará acotada superior o inferiormente por la ecuación de la recta.

Encontramos que los estudiantes progresaron en la elaboración de gráficos del CSILDV, volviéndolos más sofisticados con las sesiones. Inicialmente, simplemente señalaban la ubicación de la solución, utilizando círculos, triángulos o triángulos con rayas. Sin embargo, en la Tarea 9, observamos gráficos que se acercan más a lo que se espera teóricamente de la representación gráfica del CSILDV, ya que los estudiantes emplearon semiplanos para graficar la inecuación. Por ejemplo, Gonzalo representó $-2x - 4y < 8$ usando un semiplano (Figura 6), lo que evidencia un avance respecto a la Tarea 1. Consideramos que los estudiantes que lograron representaciones más avanzadas del CSILDV están mostrando signos del mecanismo de interiorización, dado que muestran una comprensión más profunda de la necesidad de usar un semiplano para representar la solución de la inecuación.

Figura 6. Tarea 9 realizada por Gonzalo



Consideramos que la representación gráfica de la inecuación mediante el uso de un semiplano por parte de un estudiante no proporciona suficiente evidencia para concluir que ha construido un proceso de CSILDV. Es posible que un estudiante realice el gráfico de la inecuación siguiendo señales externas y utilizando el método de prueba, pero sin interiorizar las acciones del método en un proceso cognitivo. Por ejemplo, en la Tarea 9, Gonzalo graficó $-2x-4y<8$ (Figura 6), utilizando el método de prueba. Después de graficar $-2x-4y=8$, seleccionó el punto $(0,0)$ ubicado en semiplano superior a la recta, evaluó este punto en la inecuación y, al satisfacer la desigualdad, concluyó que la solución es el semiplano que contiene el punto $(0,0)$ (Extracto 5). Sin embargo, al ser cuestionado por uno de los investigadores sobre cómo llegó a la conclusión de la ubicación del CSILDV a partir de un punto que satisface la inecuación, Gonzalo simplemente respondió que seguía lo visto en clases, lo que sugiere que está siguiendo señales externas sin una interiorización en un proceso.

> **Extracto 5. Gonzalo:** Si tomo el punto $(0,0)$ sería $0<8$ y estaría en la parte de arriba de la recta, entonces creo que el conjunto solución será toda la parte de arriba.
>
> **Profesor:** ¿Por qué a partir de un punto podemos generalizar que es la parte superior?
>
> **Gonzalo:** Considerando que el conjunto solución de la inecuación va a estar bien, sea arriba o abajo, ya habíamos visto que, siempre que cumplía un punto, cumplirán los demás.

5.4. Mecanismo de encapsulación y estructura objeto del CSILDV

En la DGP, esperábamos que la solución de los sistemas de inecuaciones lineales fomentara el mecanismo de encapsulación, mediante el cual los estudiantes realizarían nuevas transformaciones sobre la gráfica de la inecuación. Empíricamente, observamos que las tareas lograron inducir a los estudiantes a realizar estas nuevas transformaciones, lo cual consideramos un aspecto positivo del diseño de las tareas. En el caso de Fernando, emergió el mecanismo de encapsulación tal como lo anticipábamos en la DGP. Sin embargo, en el caso de Gonzalo, no se obtuvo el resultado esperado, ya que aún no había desarrollado una imagen dinámica del CSILDV.

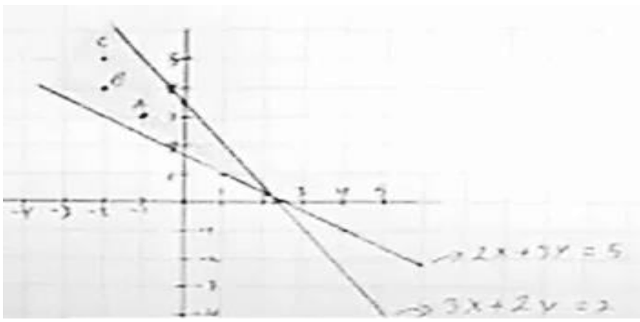
En la Tarea 7, Gonzalo graficó las inecuaciones del sistema y señaló que la solución del sistema es el área sombreada (Figura 7). Al observar la representación gráfica del sistema de inecuaciones, notamos que Gonzalo no incluyó en la solución del sistema los elementos debajo de la recta $x=2$. A partir de esto, interpretamos que Gonzalo entiende la solución de un sistema como la intersección de las inecuaciones presentes, lo que sugiere indicios del mecanismo de encapsulación mediante la intersección de conjuntos. Sin embargo, la gráfica de $-2x+y\leq-2$ no coincide con la que realizó Gonzalo, lo que indica que aún no ha construido el proceso del CSILDV que le permita establecer conexiones entre la representación gráfica y algebraica de una inecuación. Esto influye directamente en su capacidad para desarrollar completamente el mecanismo de encapsulación y construir el objeto del CSILDV.

Figura 7. Tarea 7 realizada por Gonzalo

En la Tarea 6, Luis graficó las inecuaciones del sistema y determinó la intersección de las soluciones de ambas para concluir que el área sombreada representaba la solución del sistema (Figura 8). Observamos que Luis se refiere tanto a la solución de las inecuaciones individuales, como a la del sistema, como el área sombreada (Extracto 6). A partir de esto, interpretamos que aún no ha desarrollado una comprensión dinámica de la inecuación, es decir, aún no comprende la solución de un sistema como la intersección de conjuntos, sino más bien como la intersección de áreas. En comparación con lo mostrado por Gonzalo, consideramos que Luis exhibió un mecanismo de encapsulación más sofisticado, ya que había desarrollado el proceso del CSILDV, mientras que Gonzalo solo mostró la estructura de acción.

Extracto 6. Luis: Lo que hice fue trazar dos líneas rectas que representaban en vez de la desigualdad una ecuación de cada una y, después de eso, marqué el área que me pedían. Por ejemplo, marque el área de la parte de abajo de la línea $3x + 2y = 7$, y también el área de arriba de $2x + 3y = 5$, y de ahí borre todo lo que no coincidía con ambas, dejando ese triángulo de ahí.

Figura 8. Tarea 6 realiza por Luis



5.5. Mecanismo de tematización y estructura esquema del CSILDV

De los tres casos analizados, consideramos que ninguno demostró la construcción completa del esquema del CSILDV. Sin embargo, interpretamos que Fernando estuvo más cerca de lograrlo que los otros. En la Tarea 8, Fernando explicó que el conjunto solución del sistema es vacío porque no existe ningún punto que satisfaga a las tres inecuaciones simultáneamente. De esto, interpretamos que emergió el mecanismo de tematización, ya que Fernando articuló de forma coherente el objeto CSILDV con el proceso de intersección de conjuntos para explicar que la solución del sistema es un conjunto vacío. Además, Gonzalo mostró que ha construido el objeto CSILDV al exhibir una comprensión dinámica del CSILDV.

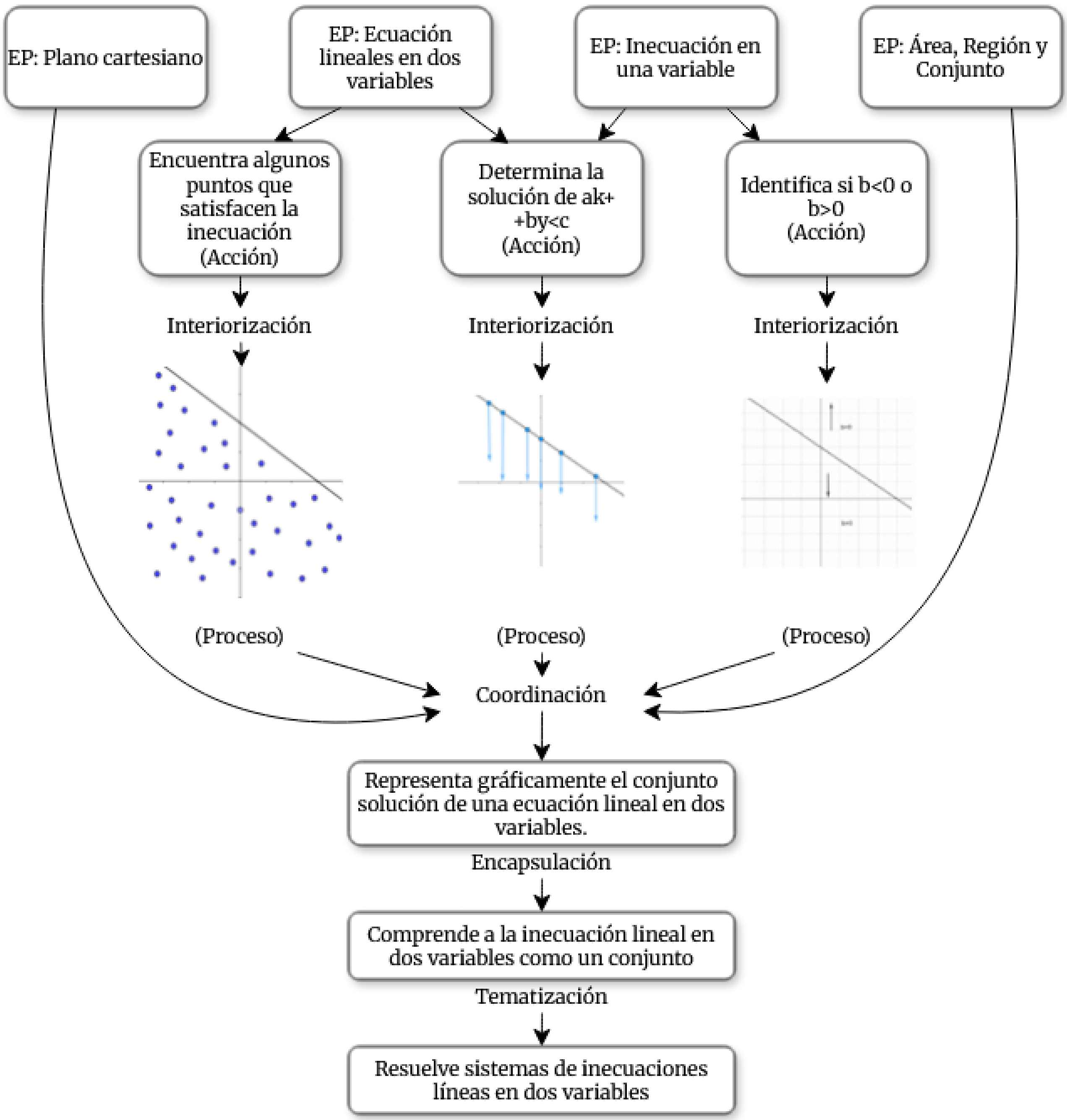
6. Discusión y conclusiones

Concluimos que Fernando desarrolló la estructura del objeto para el CSILDV, Luis mostró un proceso, y Gonzalo exhibió acciones. Para representar gráficamente el CSILDV, los estudiantes emplearon dos de las tres acciones hipotetizadas. La primera acción descrita en la DGP fue adoptada por los tres participantes, la segunda solo por Luis, mientras que la tercera no fue utilizada por ningún participante. Además, Luis demostró una acción que no estaba contemplada en la DGP, que consiste en expandir propiedades de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$. Aunque no encontramos evidencia de la acción tipo tres, consideramos que su interiorización en un proceso puede ser útil para comprender el CSILDV. Por lo tanto, sugerimos que se utilice como una alternativa en la elaboración de experimentos de enseñanza o en la práctica docente, coincidiendo con la postura de Moon (2019).

Los resultados indican que los estudiantes conciben el CSILDV como un área sombreada, una región o la unión de un número infinito de puntos que satisfacen la desigualdad. Ninguno de los participantes interiorizó la representación gráfica de la inecuación como un semiplano, lo cual sugiere la necesidad de una exploración más profunda en futuras investigaciones sobre este tema. Un resultado destacado es que dos de los estudiantes establecieron conexiones entre la representación gráfica y algebraica de una inecuación, aspecto que ha demostrado ser problemático en investigaciones similares (Çekmez, 2021; Moon, 2020; Switzer, 2014).

En la Figura 9, presentamos una versión refinada de la DGP sobre el CSILDV, donde se exponen los mecanismos y estructuras mentales demostradas por los participantes para comprender el CSILDV. Esta DG valida algunas de las estructuras y mecanismos hipotetizados en la DGP y revela otros nuevos. Sin embargo, no incluimos la estructura de esquema, ya que consideramos que ninguno de los tres participantes la construyó completamente, ya que la mayoría no comprendió la solución de una inecuación como un conjunto infinito, lo cual influyó en su percepción de la solución de un sistema como la intersección de conjuntos.

Figura 9. DG sobre el CSILDV



Consideramos que los mecanismos y estructuras mentales descritos en esta investigación son recursos valiosos para el diseño, la aplicación y la validación de experimentos de enseñanza que podrían contribuir a mejorar la enseñanza y el aprendizaje del CSILDV. Además, la aplicación de estos experimentos en otros contextos podría ayudar a descubrir nuevos mecanismos o estructuras mentales que faciliten la comprensión del CSILDV.

Los resultados de Moon (2020) muestran que los estudiantes representan gráficamente una inecuación al encontrar un punto que la satisface, hallazgo que coincide con lo encontrado en esta investigación, específicamente en los casos de

Fernando y Gonzalo. Además, en ambas investigaciones se planteó la hipótesis de que los estudiantes podrían representar el CSILDV como la unión de infinitas rectas paralelas, pero ninguno de los dos estudios encontró evidencia de esta estructura, lo que sugiere que en futuras investigaciones se podría profundizar más en este tema. Para Moon (2020), la comprensión de la representación gráfica de la inecuación en dos variables se logra a través de la encapsulación del proceso que surge de coordinar los procesos de variable y parámetro. En nuestro caso, consideramos que este proceso es más amplio e incluye otros mecanismos y estructuras mentales. Por ejemplo, los estudiantes pueden realizar nuevas transformaciones sobre la gráfica de la inecuación, como intersecciones, o establecer relaciones de contenencia y diferencia simétrica con $\mathbb{R}^2$, lo que les permitiría encapsular el CSILDV como un objeto.

En cuanto al uso de herramientas computacionales como recurso didáctico para comprender el conjunto solución de una inecuación en dos variables, tal como se describe en Abramovich y Connell (2015) y Çekmez (2021), consideramos que es un recurso valioso que permite graficar y visualizar dicho conjunto, evitando las dificultades para su representación, como las reportadas por Switzer (2014) y Moon (2020). Sin embargo, creemos que no se fomenta suficientemente la reflexión en los estudiantes sobre la representación gráfica de una inecuación, lo que les impediría encapsularla como un objeto. En este sentido, la herramienta tecnológica podría no ser tan efectiva como se esperaría. Por ejemplo, Gonzalo representaba el CSILDV siguiendo un algoritmo, pero no logró llevar a cabo nuevas transformaciones sobre la gráfica de la inecuación para determinar el conjunto solución del sistema de inecuaciones, lo que le habría permitido construir el objeto CSILDV de manera más efectiva.

El objetivo de esta investigación es responder a la pregunta: ¿Cuáles son las estructuras mentales y los mecanismos que utilizan un grupo de estudiantes de licenciatura en matemáticas para comprender el CSILDV? En la Figura 9, intentamos abordar esta pregunta en función de los resultados obtenidos en la investigación. Sin embargo, consideramos que en futuras investigaciones se podrían explorar nuevas estructuras que no fueron contempladas en la DGP. Por ejemplo, se podrían analizar las estructuras y los mecanismos mentales que los estudiantes necesitan para transformar una inecuación del registro gráfico al algebraico, y cómo estas influencian en la comprensión del CSILDV.

Referencias

Abramovich, S., & Connell, M. L. (2015). Digital fabrication and hidden inequalities: Connecting procedural, factual, and conceptual knowledge. *International Journal of Technology in Teaching and Learning, 11*(2), 76–89. https://eric.ed.gov/?id=EJ1213420

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: From historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 111–129. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9075-8

Arnon, I., Cottrill, J., Dubiski, E., Oktaç, A., Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Betancur, A., Fuentes, S. R., & González, M. P. (2022). Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y eigenvectores: Refinación de un modelo cognitivo mental. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 23–46. https://doi.org/10.35763/aiem22.4005

Blanco, L. J., & Garrote, M. (2007). Difficulties in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 3*(3), 221–229. https://doi.org/10.12973/ejmste/75401

Çekmez, E. (2021). Investigating the effect of computer-supported instruction on students' understanding of different representations of two-variable inequalities. *Interactive Learning Environments, 31*(6), 3305–3325. https://doi.org/10.1080/10494820.2021.1926288

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–126). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1__7

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior, 55*, 100687. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.003

Moon, K. (2019). Graphs of two variable inequalities: Alternate approaches to the solution test. *Mathematics Enthusiast, 16*(1–3), 107–126. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1452

Moon, K. (2020). New approaches for two-variable inequality graphs utilizing the Cartesian Connection and the APOS theory. *Educational Studies in Mathematics, 104*(3), 351–367. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09956-1

Rodríguez-Jara, M. A., Lorca-Mena, A., Lorca-Mena, J. J. F., Vásquez-Saldias, P., & Leo, M. D. V. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 71–92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194

Sangwin, C. J. (2015). Inequalities, assessment and computer algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(1), 76–93. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.941424

Switzer, M. (2014). Graphing inequalities, connecting meaning. *The Mathematics Teacher, 107*(8), 580–584. https://doi.org/10.5951/mathteacher.107.8.0580

Tsamir, P., & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 513–524. https://doi.org/10.1080/00207390110038277

∞

Adrian Muñoz-Orozco

Universidad Autónoma de Guerrero (México)
16348253@uagro.mx | https://orcid.org/0000-0001-5582-470X

Gustavo Martínez-Sierra

Universidad Autónoma de Guerrero (México)
gtrsierra@gmail.com | https://orcid.org/10.1080/0020739X.2024.2379485

Marcela Ferrari-Escolá

Universidad Autónoma de Guerrero (México)
mferrari@uagro.mx | https://orcid.org/0000-0002-8759-4387

Recibido: 21 de julio de 2023
Aceptado: 30 de agosto de 2024

Understanding the Solution Set of Linear Inequalities in Two Variables to Propose a Genetic Decomposition

Adrian Muñoz-Orozco @, Gustavo Martínez-Sierra @, Marcela Ferrari-Escolá @

Universidad Autónoma de Guerrero (México)

This research aims to analyze the comprehension of a group of students to propose a Genetic Decomposition (GD) of the solution set of a linear inequality in two variables (SSLITV), using the APOS Theory (Action, Process, Object, Schema) as a theoretical and methodological framework. This study is justified by the importance of two-variable inequalities in solving real-world problems and in the construction of advanced mathematical knowledge, as well as by the limited amount of research on this topic in the field of mathematics education.

To this end, we developed a Preliminary Genetic Decomposition (PGD) of the SSLITV, from which we designed and applied nine tasks to three Bachelor of Mathematics students selected for their outstanding academic performance. These tasks were implemented with the purpose of identifying the structures and mechanisms proposed in the PGD, as well as others that had not been initially considered, through three virtual sessions (two groups and one individual) recorded through Google Meet. During these sessions, the students were interviewed to delve deeper into their reasoning when solving the tasks. In the data analysis, the interviews were transcribed, a detailed exploration of the data was carried out, and the PGD was used as a framework to identify the mental structures and mechanisms evidenced by the participants.

The results revealed that students represented the SSLITV graphically using three types of processes: using points, constructing rays, and generalizing properties of $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$. In the SSLITV process structure, they were able to establish connections between the graphical and algebraic representations; in the object structure, they understood the graphical representation as the solution set and performed operations with this set; and in the diagram structure, they coherently integrated the previous structures to solve systems of linear inequalities in two variables.

Finally, we suggest that future research refine the mechanisms and mental structures of the proposed GD, extend the study of two-variable inequalities to systems of inequalities in two variables, and design teaching proposals based on the described GD that contribute to improving the learning of SSLITV.