Conhecimento Interpretativo de professores em uma tarefa de divisão de frações

Gabriela Gibim, Laura Rifo, Nuria Climent e Miguel Ribeiro

O Conhecimento Interpretativo é necessário, pois está vinculado à prática docente e ao ensino com compreensão, uma vez que é mobilizado pelos professores ao interpretar as produções dos alunos e atribuir-lhes significado. Este trabalho tem como objetivo compreender o Conhecimento Interpretativo revelado por professores e futuros professores de matemática através de uma tarefa de divisão de frações. Os resultados mostram um frágil Conhecimento matemático Especializado dos professores em relação a divisões e frações, e este conhecimento suporta um feedback superficial relacionado com uma avaliação interpretativa, o que se espera que limite a contribuição para a aprendizagem matemática dos alunos nesse tópico.

Palavras-chave: Conhecimento Interpretativo; Divisão de frações; Professor

Interpretative Knowledge of Teachers when Solving a Fraction Division Task

Interpretive Knowledge is necessary, since it is linked to teaching practice and teaching with understanding, once it is mobilized by teachers when interpreting students' productions and attributing meaning to them. This work aims to understand Interpretive Knowledge revealed by teachers and pre-service mathematics teachers through a fraction division task. The results show a weak Specialized Mathematical Knowledge of teachers regarding division and fractions. This knowledge supports superficial feedback related to an interpretive assessment, which is expected to limit the contribution to students' mathematical learning in this topic.

Keywords: Fraction Division; Interpretative Knowledge; Teacher

Gibim, G., Rifo, L., Climent, N. e Ribeiro, M. (2025). Conhecimento Interpretativo de professores em uma tarefa de divisão de frações. *PNA, 19*(3), 305-329. https://doi.org/10.30827/pna.v19i3.31002

Conocimiento Interpretativo del profesorado ante una tarea de división de fracciones

El Conocimiento Interpretativo es necesario, ya que está vinculado a la práctica docente y a la enseñanza con comprensión, dado que este se moviliza por los docentes al interpretar las producciones de los estudiantes y atribuirles significado. Este trabajo tiene como objetivo comprender el Conocimiento Interpretativo revelado por profesores y futuros profesores de matemáticas que queda reflejado en una tarea de división de fracciones. Los resultados muestran un débil conocimiento matemático especializado de los docentes respecto a la división y a las fracciones, lo que sustenta la existencia de un feedback superficial por parte de este profesorado relacionado con una evaluación interpretativa, lo que se espera que limite la contribución al aprendizaje matemático de los estudiantes en este tema.

Palabras clave: Conocimiento Interpretativo; División de fracciones; Profesorado

A compreensão da divisão de frações, por parte do professor, tem sido foco de atenção ao longo dos tempos e o número de publicações recentes têm aumentado cada vez mais indicando que há muito o que se investigar sobre o ensino e aprendizagem deste tópico (Borko et al, 1992; Lee, 2017). O foco na divisão de frações se dá devido as pesquisas indicarem que professores e futuros professores, apresentam dificuldades relativas à compreensão da divisão de frações em relação a justificativa, representação, flexibilidade com a unidade de referência e sentido de número fracionário. Os professores muitas vezes, sabem calcular a divisão de frações, mas não sabem explicá-la, ou seja, não compreendem seu significado de forma a fazer conexão entre o procedimento e o conceito. Assim, não detêm um conhecimento para ensinar o tópico com significado e compreensão (İşik e Kar, 2012; Ma, 1999; Olanof et al., 2014 Rizvi e Lawson, 2007).

Deste modo, o objetivo deste estudo é compreender o conhecimento do professor e dos futuros professores em relação a divisão de frações na perspectiva do Conhecimento Especializado (Ball et al., 2008; Carrillo et al. 2013, 2018) e do Conhecimento Interpretativo (Jakobsen et al., 2014; Di Martino et al., 2019; Mellone et al., 2020) por meio de uma Tarefa para a Formação[1] (TpF, Ribeiro et al., 2021). Uma das razões para isso se deve ao papel central que o conhecimento do professor exerce em relação à aprendizagem dos alunos (Nye et al., 2004), assim como às dificuldades dos professores em relação à divisão de frações (Tian e Siegler, 2017; Ma, 1999; Ball, 1990a; Newton, 2008) e ao fato de que essas

[1]Essas tarefas, que denominamos de Tarefas para a Formação, são conceitualizadas e desenhadas no âmbito do grupo de Pesquisa & Formação CIEspMat (Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor do matemática). https://www.ciespmat.com.br

dificuldades dos professores podem impactar diretamente a aprendizagem dos alunos (Ball et al., 2005).

Neste trabalho, tratamos principalmente do Conhecimento Interpretativo do professor requerido para a compreensão da divisão de frações no que concerne aos distintos raciocínios envolvidos. Para tanto, elencamos a seguinte questão: Que Conhecimento Interpretativo revelam professores quando confrontados com produções de alunos consideradas não comuns[2] para a divisão de frações e que tipo de feedback fornecem?

Esse foco no Conhecimento Interpretativo se torna atual e necessário, considerando uma perspectiva de pesquisa e formação de forma imbricada, para contribuir com a formação e a prática do professor, pois o professor necessita desenvolver uma compreensão do conhecimento matemático para a sua prática profissional e possibilitar que os alunos entendam matemática, uma vez que a falta de preparação pode levar a experimentarem dificuldades na prática de sala de aula (Li e Kulm, 2008). Assim, o foco no Conhecimento Interpretativo busca entender e desenvolver o conhecimento dos professores em relação aos distintos raciocínios da divisão de frações, de modo que consigam interpretar as diferentes produções dos alunos e abordar o conteúdo de distintas formas com compreensão e significado.

Discussão teórica

Durante a nossa experiência como alunos, fomos ensinados a usar "o" algoritmo de cada uma das operações, o que leva à crença de que existe apenas um algoritmo para cada operação, não correspondendo, obviamente, à realidade (Gómez et al., 2016). A escolha que fazemos do algoritmo para ensinar os alunos tem influência na forma como se ensina e se entende a divisão de frações, o que, consequentemente, interfere no entendimento matemático dos alunos.

Vários estudos apontam que os professores são fluentes em termos de procedimentos da divisão de frações, mas não entendem por que os algoritmos funcionam, visto que não sabem justificá-los conceitualmente (Borko et al., 1992; Ma, 1999; Tirosh, 2000). Considerando a importância que os algoritmos assumem no ensino da matemática, torna-se essencial desenvolver o conhecimento envolvido em validar e compreender um algoritmo, pois isso é fundamental na avaliação dos métodos elaborados pelos alunos (Hoffman, et al., 2023; Moriel et al., 2019). É, assim, basilar que os professores sejam detentores de um conhecimento além da regra, sendo capazes de dar sentido, de compreender os algoritmos, interpretar e entender as soluções dos alunos (Adu-Gyamfi et al., 2019). Esse conhecimento possibilitará ao professor o uso de estratégias que

[2] Produções não comuns são aqueles procedimentos que não são tipicamente utilizadas pelos professores e alunos, que muitas vezes são desconhecidos por eles.

privilegiam o conhecimento conceitual e não procedimental (p. ex., Fazio e Siegler, 2011; Hiebert e Lefevre, 1986).

A divisão envolvendo quantidades representadas em fração podem ser resolvidas utilizando algoritmos formais, como o IM (Inverte e Multiplica) e seus derivados (multiplicar cruzado e regra do sanduíche), assim como raciocínios informais envolvendo números decimais, frações equivalentes e taxa unitária (Son e Crespo, 2009), que torna possível generalizar e explicar o algoritmo do IM. A divisão de frações também pode ser compreendida por meio de recursos como a representação pictórica e a tira de frações. No entanto, é essencial que os professores sejam capazes de utilizar abordagens como o auxílio de representação pictórica com sentidos de partilha e medida e diferentes representações como discreto ou contínuo, pois as representações apoiam a compreensão dos alunos sobre os conceitos matemáticos (Amaral et al., 2022; Ball, 1990b; Chen et al., 2011; Díaz-Cárdenas et al., 2019; Lo e Luo, 2012).

Além disso, é importante que o professor detenha conhecimento de algoritmos usuais IM (Inverte e Multiplica); não usuais, como DND (Dividir numeradores e denominadores entre si), que consiste em realizar a divisão de duas frações, dividindo entre si os respectivos numeradores e denominadores (Flores, 2008; García, 2013; Li e Kulm, 2008) e ID (Igualar denominadores), que consiste em obter frações equivalentes ao dividendo e ao divisor, de forma que ambos tenham o mesmo denominador (Gómez et al., 2016). Isso porque, muitas vezes o professor detém um conhecimento limitado a respeito de diferentes procedimentos para a divisão de frações (conhecimento do IM apenas) e têm dificuldades em validá-lo ou justificá-lo (García, 2013; Moriel et al., 2019). Estudos apontam que a maioria dos professores utilizam o IM e aceitam o IM e o ID como válidos sem necessidade de justificativa por ser algo que encontram nos livros didáticos. Já em relação ao DND os professores não aceitam a sua generalidade e o consideram como incorreto (García, 2013).

Desse modo, cumpre ao professor deter um Conhecimento Especializado, no âmbito da divisão de frações, que vá além de um saber fazer e lhe permita entender os porquês além de interpretar as produções de outros. Das diferentes conceitualizações do conhecimento do professor, assume-se a especialização desse conhecimento na perspectiva do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*[3] (MTSK, Carrillo et al., 2018), que é um modelo específico para o estudo do conhecimento do professor de matemática, e que se relaciona com o Conhecimento Interpretativo, uma vez que é específico para sua prática profissional. Essa conceitualização está focada nas dimensões especializadas desse conhecimento, considerando que tal especialização não se restringe ao domínio do Conhecimento

[3]De modo similar à nomenclatura da conceitualização do conhecimento do professor, assumimos também, aqui, a nomenclatura em inglês, associada à mesma justificação anteriormente apresentada.

Pedagógico do conteúdo (Pedagogical Content Knowledge, PCK), mas se situa, também, no domínio do Conhecimento do Conteúdo – no caso, o matemático (Mathematical Knowledge, MK), incluindo, nesse escopo de especificidades, de forma inter-relacionada aos dois domínios anteriormente mencionados, as crenças dos professores sobre a matemática e sobre o ensino e a aprendizagem da matemática (Figura 1).

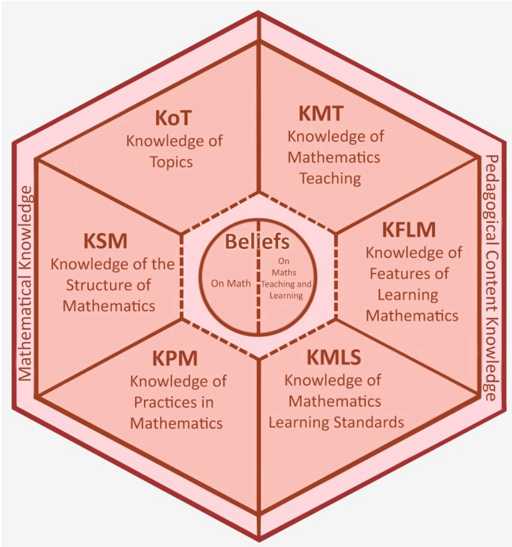


Figura 1. Domínios do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (Carrillo et al., 2018, p. 241)

Aqui, focamos nossa atenção nos subdomínios do MK e PCK (KMT e KFLM), pois abordamos as especificidades do conhecimento matemático do professor, que lhe permitem sustentar a atribuição de significado às produções dos alunos, relativamente ao tópico da divisão de frações.

O *Knowledge of Topics* (KoT) inclui o conhecimento matemático do professor, associado aos tópicos relacionados à divisão de frações, que sustentarão o entendimento do que se faz, de como se faz, e do porquê se faz de determinada forma. Também, o conhecimento de diferentes tipos de registro de representação e das múltiplas possíveis definições para um mesmo tópico. No contexto da divisão de frações inclui, por exemplo, conhecer: os distintos sentidos atribuídos à divisão (como medição e partição, Simon, 1993); distintos procedimentos (algoritmos), tradicionais ou não comuns; propriedades, como a relação entre divisor e a unidade de medida, entre o dividendo e o todo a medir equivalência de frações, ligado ao conceito de número racional como representante de uma classe de números equivalentes; diferentes tipos de frações (própria, imprópria, mistas, unitárias, aparentes, irredutíveis); distintas formas de representação associadas aos procedimentos para a divisão de frações (pictóricas e algébrica) incluindo a modelação com recursos como tira de frações, papel quadriculado, aplicações web e apps.

O *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) corresponde ao conhecimento matemático do professor sobre cada um dos tópicos, de forma ampla e profunda, que sustenta as conexões entre tópicos. Em relação à divisão de frações, inclui-se, por exemplo, o conhecimento relativo à comparação entre a divisão de números inteiros; ao inverso multiplicativo nos números racionais, reais e complexos e o sentido da fração, por exemplo, parte todo utilizado na operação da divisão de frações.

Já no Knowledge of *Practices in Mathematics* (KPM), inclui-se o conhecimento do professor associado às formas (próprias) de fazer matemática. Entre elas está o conhecimento de demonstração e das diferentes maneiras de se demonstrarem resultados matemáticos; dos critérios a estabelecer para que uma generalização seja válida; das diferentes estratégias de resolução de problemas. No âmbito da divisão de frações, esse conhecimento contempla, por exemplo, conhecer métodos (exemplos e contraexemplos, prova por redução ou absurdo) que devem ser utilizados para generalizar os distintos procedimentos da divisão de frações.

O *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) corresponde ao conhecimento matemático do professor em relação teorias de ensino; recursos materiais e virtuais; estratégias, técnicas, tarefas e exemplos. Relaciona-se por exemplo, aos modos de ensinar, abordagens envolvendo problemas aritméticos, geométricos ou contextualizados. Abordagem com recursos didáticos (tira de frações, reta numérica, área) para representar a divisão de frações tendo conhecimento das limitações/potencialidades destes recursos.

Além da abordagem baseada na comparação entre dois modos de resolução da divisão de frações, por exemplo, o geométrico e de diferentes algoritmos que permitam o professor optar por uma estratégia mais potente.

Já no Knowledge of *Features of Learning Mathematics* (KFLM), inclui-se o conhecimento de como os alunos aprendem a divisão de frações, por exemplo. Além do conhecimento de que alunos do sétimo ano tem desenvolvimento cognitivo apto para compreender e lidar com problemas de divisão de frações. As características desse processo de compreensão, erros comuns e suas fontes prováveis, dificuldades, obstáculos e a linguagem normalmente usada ao lidar com cada conceito.

Essas dimensões do Conhecimento Especializado do professor, incluindo as crenças, sustentam a atuação do professor ao desenvolver nos alunos os conhecimentos e habilidades matemáticas sem se limitar a uma única forma de fazer, não assumindo o ensino de regras como ponto de partida, mas, quando muito, como ponto de chegada. Para tanto, essa atuação do professor deve assumir, como ponto de partida, o conhecimento dos alunos, e isso requer o Conhecimento Interpretativo (Jakobsen et al., 2014).

O Conhecimento Interpretativo é mobilizado pelos professores ao interpretar as produções dos alunos e atribuir significado, sejam elas imprevistas, incorretas ou quando os alunos parecem não ter usado estratégias padrão. Difere de outras formas de entender o conhecimento (e a prática) do professor, pois os erros e o raciocínio alternativos são considerados como ponto de partida para o processo de construção do conhecimento matemático dos alunos (Di Martino et al., 2016). Envolve o exercício de observação do conhecimento evidenciado pelos alunos nas tarefas matemáticas, sendo necessários a sensibilidade e o conhecimento matemático à atribuição de sentido dessas produções. Assim, os professores "se tornam mais sensíveis para perceber oportunidades no momento" (Mason, 2002, p. 61) e, em particular, na tomada de decisão para considerar os erros e o raciocínio atípico dos alunos como oportunidades de aprendizagem (Borasi, 1994).

Desse modo, é importante que seja desenvolvido esse conhecimento, para que haja a ampliação das fronteiras do espaço solução do professor (muitas vezes, sendo um conjunto com um único elemento, uma única estratégia de resolução). A noção de espaço solução está relacionada à natureza do conhecimento matemático que o professor possui, enquanto um conjunto de possíveis respostas e diversas formas de abordagem, além de diferentes representações matemáticas para resolução de um problema, mesmo que esse problema tenha uma única solução. Assim, o espaço solução associa-se ao Conhecimento Matemático Especializado do professor a respeito das definições, conceitos, abordagens, representações e processos de um mesmo tópico e, por isso, ativar o Conhecimento Interpretativo demanda um conhecimento que permita ao professor ultrapassar as fronteiras de seu próprio espaço solução (Jakobsen et al., 2014).

Importa salientar que o Conhecimento Interpretativo não corresponde, a um conhecimento pedagógico geral, mas, sim, a um Conhecimento Matemático Especializado, que sustenta a efetivação de um feedback construtivo, auxiliando os alunos a desenvolverem o seu entendimento matemático. Não se limita, portanto, a fornecer um retorno de nível avaliativo, descritivo ou pessoal, mas que seja, de fato, contributivo para iniciar as discussões matemáticas. O feedback é um elemento imprescindível para o desenvolvimento da aprendizagem do aluno, é uma forma de comunicação entre professor e aluno (Santos e Pinto, 2009). Esse feedback deve estimular o aluno a melhorar sua produção, analisar suas respostas e reformular raciocínios desenvolvendo estratégias diferentes e eficientes (Dias e Santos, 2009). O feedback é categorizado por Galleguillos e Ribeiro (2019) como: (a) feedback sobre como resolver problema: orienta sobre como os alunos devem proceder para resolver o problema, principalmente afirmando que devem pensar indutivamente; (b) feedback confuso: quando o feedback parece estar correto, mas pode ser confuso para o aluno; (c) contraexemplo como feedback: um exemplo é usado para refutar o erro exposto; (d) feedback superficial: o conteúdo de tal feedback foi insuficiente (muito amplo ou inconsistente) para permitir que o solucionador entendesse seu significado.

Antes de fornecer um feedback ao aluno o professor deve ser capaz de interpretar a produção deste aluno. Para tanto, a interpretação das produções dos alunos pode ser categorizada de acordo com Mellone et al. (2017) e Ribeiro et al. (2021) como: (a) interpretação avaliativa, na qual o professor realiza uma correspondência entre a sua solução e a do aluno, considerando a sua solução ou estratégia como referência para obter a resposta correta; (b) interpretação que sustenta a prática letiva (*design educacional*), a maneira como o professor desenha as etapas educativas a desenvolver, a partir das produções dos alunos; (c) interpretação como pesquisa, relativa à habilidade do professor em rever sua formalização matemática, para que seja coerente com as produções dos alunos, ainda que estas estejam em conflito com o que é ensinado tipicamente nas escolas.

Consideramos que a interpretação das produções dos alunos não pode ser um processo apenas avaliativo, mas, sim, estar relacionada a uma interpretação, por meio de uma escuta hermenêutica (Davis, 1997) que seja ativa e considere, de fato, a interação com os alunos (Mellone et al., 2020).

Neste texto, discutimos o Conhecimento Interpretativo no âmbito da divisão de frações, fazendo considerações a partir de uma Tarefa para a Formação TpF (Ribeiro et al., 2021), que tem como ponto de partida uma tarefa matemática para alunos dos Anos Finais (alunos de onze a quinze anos). A parte da tarefa relacionada aos professores tem como foco o Conhecimento Interpretativo e contribui para uma discussão matemática a respeito da interpretação e atribuição de significado a distintos raciocínios de resolução da divisão de frações, que foram incluídos na tarefa por considerar suas potencialidades para discussões matemáticas a respeito do tópico.

Contexto e método

Esta é uma investigação qualitativa e um estudo de caso instrumental (Stake, 1995), cujo foco de interesse não é o caso em si, mas saber que este instrumento permite conhecer e entender um elemento específico (o conhecimento do professor) de modo a gerar teorias. Os discursos e produções dos professores foram a unidade de análise, estes tratam das interpretações que os professores dão a alguns exemplos de tarefas, resolvidas pelos alunos, sobre a divisão de frações que lhe foram apresentadas.

As informações foram coletadas em um workshop online (devido ao contexto da pandemia) sobre números racionais, de nove horas de duração, durante dois dias. Os participantes se inscreveram voluntariamente e o workshop contou com 6 participantes, professores e futuros professores do Ensino Fundamental (lecionam para alunos de sete a catorze anos). Os professores não se conheciam e pertenciam a diferentes cidades. O grupo era formado por dois professores com formação em matemática com experiência de prática de prática de mais de cinco anos (Bruno e Ana); dois futuros professores que estavam no último ano do curso de matemática (Dina e Carlos), e duas professoras que lecionam matemática (para alunos de 8 a 11 anos) com experiência de mais três anos (Célia e Eva).

As informações foram coletadas utilizando um questionário online; observações durante a formação online utilizando o *google meet*; as produções dos professores e as gravações áudio e vídeo das sessões online e do chat. A Tarefa para Formação foi enviada previamente, 2 semanas antes, aos participantes para que tivessem tempo de responder e enviar suas produções individualmente por e-mail. Durante o workshop foi realizada uma plenária a partir da Tarefa e das produções enviadas pelos professores, assim foi possível compartilhar as diferentes estratégias e formas de pensar dos participantes com o grupo e realizar reflexões e discussões que surgiam sobre as dificuldades e desafios encontrados pelo grupo a respeito de estratégias, procedimentos, representação, justificativas, validação, recursos, interpretação de produção de alunos e feedback a respeito da divisão de frações de modo a ampliar o conhecimento matemático em relação ao tópico. As discussões foram guiadas pelos formadores e eram sempre pautadas nas reflexões, produções e discursos dos professores. Foram utilizadas imagens com materiais manipulativos, como as tiras de frações e também a mesa digitalizadora para realização de representações pictóricas na tela. Os professores enviavam novas produções realizadas por eles que iam surgindo a partir das discussões em plenária por meio do whatsapp. Estas representações e justificativas eram compartilhadas na tela do computador para os participantes (por um dos formadores) e discutidas com o grupo para que novas reflexões fossem realizadas e ampliadas. Deste modo, os discursos e produções enviadas previamente e na hora do workshop dos professores e futuros professores foram a unidade de análise deste estudo.

A Tarefa para a Formação (TpF) utilizada no workshop possui uma estrutura própria, com duas partes construídas levando em consideração as fragilidades do conhecimento do professor, e permitindo uma discussão que faça a correlação entre a teoria e a prática do professor (Ribeiro et al., 2021).

A Parte I tem como ponto de partida uma proposta que os alunos do nível em que os professores ensinam podem resolver e que se espera que os professores possam implementar com seus alunos. Com base nessa tarefa para os alunos, incluímos um conjunto de questões para os (futuros) professores, formuladas tendo por base o conteúdo dos subdomínios do MTSK. A Parte II tem como ponto de partida um conjunto de produções de alunos (reais ou simuladas), para a tarefa dos alunos que foi explorada anteriormente e tem por objetivo aceder ao conteúdo do Conhecimento Interpretativo. As tarefas têm um foco direcionado ao conhecimento matemático do professor, com vistas a desenvolver as especificidades que sustentam as opções pedagógicas, possibilitando um feedback que contribua para que os alunos entendam o que fazem e por que o fazem, a partir de discussões matemáticas, e não somente considerando aspectos do conhecimento pedagógico geral.

Aqui, consideramos as produções dos professores associadas à Parte II de uma das questões da TpF que aborda os distintos raciocínios usados para resolver a divisão de frações (Figura 2).

A professora Gabriela solicitou aos alunos que resolvessem a operação da divisão $de\ fraçao\ \frac{12}{15} \div \frac{3}{5}$ nas suas turmas de 7.º ano[4] e algumas das produções dos alunos foram distintas daquelas que elas tinham antecipado. Abaixo estão algumas dessas produções dos alunos.

Três alunos resolveram da seguinte forma:

Luís: $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5} = \frac{12}{15} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

Rafael $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5} = \frac{12 \div 3}{12 \div 5} = \frac{4}{3}$

Mônica: $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5} = \frac{12}{15} \div \frac{9}{15} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

a. Para cada uma das produções dos alunos, indique se as avalia como matematicamente corretas (adequadas) ou não, justificando o raciocínio matemático evidenciado.

b. Forneça um *feedback* construtivo aos alunos, ou seja, dê sentido às suas produções de modo que possam posteriormente auxiliar na construção do seu conhecimento matemático.

c. Qual(is) das formas acima você selecionaria para ensinar aos seus alunos? Justifique.

Figura 2. Parte II: Conhecimento Interpretativo.

A inclusão dessas produções na TpF tem como objetivo trazer para a discussão distintas formas de resolução e de raciocínios associados à determinação do resultado de uma mesma divisão envolvendo frações, além disso, cada uma delas foi incluída com um objetivo específico.

A produção de Luís está relacionada ao que se considera, frequentemente, como "o" algoritmo para dividir duas quantidades em representação fracionária, Inverte e Multiplica (IM), e é tipicamente aquele que aparece nos livros escolares e é ensinado aos alunos (Ma, 1999; García, 2013; Contreras, 2012). Esse procedimento foi incluído pois, geralmente, o conhecimento do professor se limita a conhecer o algoritmo e sua aplicação de forma direta. Portanto, se faz necessário averiguar o conhecimento do professor em relação a esse algoritmo e promover uma discussão em relação à aprendizagem significativa e com compreensão. Isso porque, compreender os conceitos relacionados ao procedimento contribui para

[4] Nos documentos oficiais, no Brasil, esse é um tópico do 7.º ano, e isso pode variar de país para país, porém, de todo modo, as discussões em termos das especificidades da divisão de fração formam parte do Conhecimento Especializado do professor não apenas desse ano ou etapa educativa.

que os alunos identifiquem respostas incoerentes, ou seja, interpretem e compreendam o resultado que estão obtendo.

Já a produção de Rafael, vincula-se ao raciocínio ao algoritmo de Dividir Numeradores e Denominadores entre si (DND), este raciocínio tem causado algum estranhamento aos professores e, em geral, é considerado inadequado, apesar de ser matematicamente correto. Tal produção foi incluída, também, para discutir as questões ligadas à generalização, pois, com frequência essa forma de pensar matematicamente é considerada válida apenas para casos particulares (García, 2013; Ma, 1999; Flores, 2008). Por ser um algoritmo que normalmente não aparece nos livros didáticos, é desconhecido por muitos professores.

A produção de Mônica associa-se à oportunidade de discutir um algoritmo que envolve o conceito de frações equivalentes e pode ser denominado de Algoritmo de Igualar os Denominadores (ID). Isso porque os professores podem ter a ideia de que o uso de frações equivalentes é correto somente para a adição e subtração e não para a multiplicação e divisão, o que está ligado ao conceito de número racional e fração como representante de uma classe de números equivalentes. Esse algoritmo é aceito pelos professores, pois relacionam a comparação para realizar a divisão de frações, ou seja, averiguam quantas vezes cabe a fração do divisor na fração dividendo (García, 2013).

Além disso, pretende-se discutir com os professores uma forma de representação pictórica da operação da divisão de frações que justifique o algoritmo para que se compreenda o que se faz, como se faz e por que se faz.

A análise implicou a identificação dos elementos em cada uma das respostas dos grupos, tomando como lente os subdomínios do MTSK, a partir dos três subdomínios relacionados ao *Mathematical Knowledge* (MK) e ao Conhecimento Interpretativo, o que permitiu considerar as suas semelhanças e diferenças e elencar o conhecimento revelado e desenvolvido pelos professores.

ANÁLISE E DISCUSSÃO

A análise revelou que os professores conheciam um único procedimento ou algoritmo, o apresentado pelo aluno Luís, o Inverte e Multiplica (IM). As produções e discursos dos professores se baseavam em apenas descrever ou avaliar como certo ou incorreto o algoritmo, isso porque se limitaram a apresentar uma descrição dos procedimentos para encontrar a resposta, sem apresentar algum comentário associado à questão matemática dos procedimentos usados ou ao conceito que os fundamenta.

Os professores revelaram conhecer o procedimento matemático IM, que se associa à regra usual para resolver a divisão de frações, ou seja, demonstraram fluência em termos de procedimentos (KoT, procedimentos), mas não em seu significado, usando o procedimento sem compreender por quê. Assim, os comentários dos professores apresentam uma interpretação avaliativa (nível 1) em termos de Conhecimento Interpretativo, pois efetuaram uma correspondência entre a sua própria forma de resolver a divisão de frações e a produção do aluno, indicando como incorretas as produções que não possuíam uma correspondência com a sua. Além disso, não apresentaram argumentos sobre a validade matemática do procedimento utilizado por Luís, e não foram capazes de validar, justificar a produção matematicamente.

Tabela 1
Comentários dos professores para a produção de Luís. Fonte: os autores

Professor	Comentários
Bruno	A solução do Luís está correta, eu sempre uso em minhas aulas.
Ana, Célia e Eva	A solução do Luís está correta, eu apenas conheço essa maneira de resolver a divisão de frações, foi assim que aprendi e ensino hoje.
Carlos e Dina	Correta, pois utiliza o algoritmo da divisão de frações.

O espaço solução dos professores, para resolver a divisão de frações, estava composto por um único elemento (ver fala da professora Ana, na Tabela 1), o IM, procedimento que aprenderam enquanto alunos e ensinam enquanto professores. O conhecimento de um único elemento, ou seja, de um único algoritmo para a divisão de frações impactou as interpretações dos professores sobre as outras produções (de Mônica e Rafael), impactando na interpretação e justificação de outros algoritmos.

Tabela 2
Comentários dos professores para a produção de Rafael. Fonte: os autores

Professor	Comentários
Célia	Para mim, a resposta de Rafael está incorreta, porque não funciona com qualquer número, apenas para alguns exemplos. Esse exemplo dá certo porque tanto o numerador quanto o denominador são múltiplos entre si
Ana	A solução de Rafael, não acho que seja válida para qualquer número, pois pode dar dízima, portanto, está incorreta.
Bruno	A solução de Rafael não é algo que aparece nos livros didáticos, nunca vi, não sei se funciona sempre.
Eva	Acho que ele tentou aplicar a regra da multiplicação de fração na divisão, nesse exemplo deu certo, mas nem sempre dá.
Carlos e Dina	A solução do Rafael está correta.

Ao interpretarem a produção de Rafael, os professores revelaram dificuldades em atribuir significado aos procedimentos e raciocínios utilizados (Tabela 2): dois professores (Carlos e Dina) alegaram que a produção estava correta, mas não conseguiram justificar por quê; dois professores (Célia e Ana) simplesmente consideraram a resposta incorreta. Dois professores (Bruno e Eva) afirmaram que essa forma de pensar de Rafael poderia ser considerada válida para, apenas, alguns casos particulares.

Os professores tinham conhecimento da divisão de frações por meio de regras como o procedimento IM no entanto, desconheciam, a forma como Rafael resolveu a divisão de frações e apresentaram, também, dificuldades em validá-la matematicamente. Isso sustentou uma avaliação interpretativa e um feedback superficial e sem relação com discussões matemáticas.

A professora Célia afirmou que a produção não dá certo para qualquer número, apresentando alguns exemplos específicos, o que não constitui uma generalização e aponta que só funciona quando numerador e denominador são múltiplos entre si (KoT, procedimentos).

Já a professora Ana afirmou que a produção não é válida caso o número não seja natural, pois, em sua fala, refere que está incorreta por dar dízima (KoT, propriedades). O professor Bruno fundamentou sua interpretação na sua experiência atrelada ao livro didático, considerando-a incorreta por não estar presente em nenhum material didático que utiliza. Já o professor Carlos e Dina validam a solução do Rafael, no entanto não sabiam como justificá-la. Entendemos que essa produção do Rafael não faz parte do espaço solução dos professores, pois afirmaram não conhecer esse procedimento e usaram apenas o IM, de forma direta, sem compreendê-lo.

O feedback proposto se atentou, apenas, à apresentação de exemplos (contraexemplos) com diferentes números, no entanto, a existência de alguns casos em que o algoritmo funciona (DND) não constitui uma prova da validade geral. Notamos que limitações do conhecimento matemático sobre a validade do algoritmo (KoT e KPM) interferiram no modo como os professores poderiam agir sobre os raciocínios matemáticos dos alunos, em aceitá-los ou refutá-los, ou até mesmo elaborar uma explicação instrucional sobre eles como algébrica ou pictórica.

Em relação à produção de Mônica (Tabela 3), três professores (Eva, Célia, Carlos) a princípio disseram que era desnecessário encontrar as frações equivalentes para realizar a divisão, considerando que uma produção correta tem de incorporar alguma "regra" da divisão de frações, como por exemplo, o IM. Já os outros três professores (Ana, Bruno, Dina), apesar de considerarem a produção de Mônica correta, levantaram dúvidas sobre a aplicabilidade desse raciocínio para o ensino da divisão de frações, ou seja, se esse seria um recurso potente para ensinar a divisão de frações.

O feedback para o aluno por parte dos professores limitou-se a dizer se a operação estava correta ou não, e em relação à complexidade de usar as frações equivalentes para resolver a divisão de fração, sendo, portanto, superficial.

Tabela 3
Comentários dos professores para a produção de Mônica. Fonte: os autores

Professor	Comentários
Eva	Acho que a solução da Mônica não está incorreta, mas não é necessário encontrar as frações equivalentes para realizar a divisão de frações, fazemos isso com a adição e subtração de frações.
Ana	A solução da Mônica, eu não uso, mas vejo que é possível já que os alunos têm conhecimento das frações equivalentes neste ano em que se ensina divisão de frações, 7. ° ano. Mas ensino pela regra como o Luís, por ser mais fácil para os alunos.
Bruno	Ensino Inverte e Multiplica porque é mais fácil para os alunos, eles se confundem muito com as frações equivalentes.

Os professores consideraram que usar a regra do IM é mais fácil para o aluno realizar a divisão de frações, ou seja, que a solução de Luís é o melhor procedimento para se ensinar divisão de frações. Consideraram, também, que utilizar frações equivalentes para o ensino da divisão de frações é algo mais complexo e confuso para os alunos. No entanto, entendemos que essas considerações se baseavam na própria dificuldade do professor, na falta de experiência e conhecimento de outros procedimentos (KoT, procedimentos), de outras formas de resolver a divisão de frações.

Formador: Podemos usar as frações equivalentes para ensinar divisão de frações? Se não, por quê? Se sim, por quê?

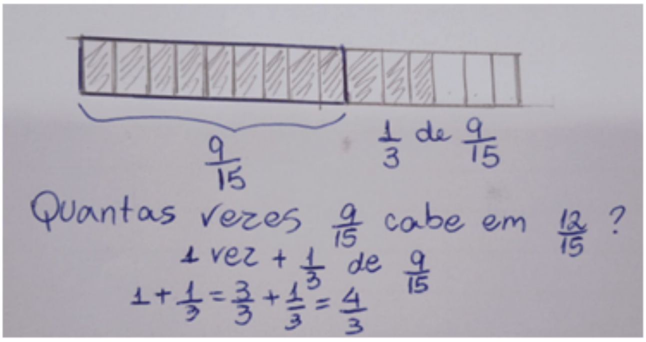
Ana: Sim, é possível pois conhecem frações equivalentes, mas não é algo fácil pra eles, é mais fácil ensinar pelo IM.

Formador: É mais fácil ensinar ou é mais fácil pra eles aprenderem pelo IM? Como seria a representação da divisão de frações por frações equivalentes? Vocês conseguem fazer esta representação e explicá-la?

A professora Dina, a partir da produção da Mônica, das discussões realizadas em plenária, da interação entre os professores e as reflexões em forma de perguntas do formador vê a possibilidade de apresentar uma nova representação para validar e justificar o procedimento da divisão por meio das frações equivalentes.

Dina: Agora, vendo a solução da Mônica, consigo pensar em uma representação pictórica para tentar justificar o procedimento [Figura 3].

A professora Dina ao tentar realizar a representação da divisão de frações por frações equivalentes, (12/15) ÷ (3/5) = (12/15) ÷ (9/15), usa além das frações equivalentes, o sentido de medida da divisão de frações (discutido também em plenária anteriormente) “Quantas vezes 9/15 cabe em 12/15?” Assim a professora mostra que “Cabe 1 vez + 1/3 de 9/15” ou seja, 1 + (1/3) = (3/3) + (1/3) = 4/3 justificando o porquê do resultado ser 4/3 (KoT, registros de representação).



Mônica $\frac{12}{15} \div \frac{3}{5} = \frac{12}{15} \div \frac{9}{15}$

Quantas vezes $\frac{9}{15}$ cabe em $\frac{12}{15}$? Cabe 1 vez + $\frac{1}{3}$ de $\frac{9}{15}$

$1 + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Usara esta!!!

Figura 3. Representação fornecida pela professora Dina

A nova representação e a justificativa trazidas pela professora Dina após a discussão em plenária, foram pertinentes, pois oportunizaram novas discussões com o grupo de participantes a respeito da resolução da divisão de frações por frações equivalentes (KoT, propriedades).

Eva: Eu achava que resolver divisão de frações pelas frações equivalentes estaria incorreto, mas agora vejo que esta é a melhor opção para ensinar os alunos, pois compreendo melhor quando faço por elas.

Ana: Agora vejo que as frações equivalentes fazem sentido porque, quando os números não são divisíveis, como na solução de Rafael, pode-se resolver por elas. Até mais fácil já usá-las em um primeiro momento

Assim, houve uma percepção por parte dos professores que a divisão de frações por frações equivalentes poderia ser uma forma potente de ensinar ao aluno com compreensão, uma vez que sua representação pictórica apresenta um significado da razão de ser feito daquela maneira. Desse modo, a representação da professora Dina possibilitou ampliar e compreender o procedimento da divisão de frações, por frações equivalentes, desconhecido, até então, pelos professores. Os professores ampliaram seu espaço solução, antes apenas sobre o IM, agora por meio de frações equivalentes e sua representação pictórica.

A partir das discussões em relação à produção da Mônica, os professores refletiram, também, sobre a solução de Rafael, e perceberam que poderiam usar o conceito de frações equivalentes em sua solução quando os números não fossem múltiplos (García, 2013). No entanto, o DND não resultaria de um inteiro sobre um inteiro, por isso exigiria outros conceitos para a finalização da operação, como interpretar a fração como um quociente entre dois inteiros (KoT, fenomenologia: sentidos da fração). Vemos que a produção da Mônica permitiu que os professores apresentassem um novo olhar à produção do Rafael, ampliando seu espaço solução de resolução da divisão de frações, agora por meio do ID, e o DND (KoT, procedimentos), assim como sua representação pictórica (KoT, registros de representação) por meio das frações equivalentes e interpretação da fração como quociente (KoT, fenomenologia).

Identificamos uma mudança de percepção e interpretação de incorreto para um recurso potente para ensino da divisão de frações nos depoimentos de Eva e Ana, acima, e na representação pictórica apresentada pela professora Dina (Figura 3). É importante ressaltar que essa observação não foi apresentada anteriormente quando os professores resolveram a Tarefa para a Formação individualmente apenas após as discussões em plenária , assim entendemos que houve uma ampliação do Conhecimento Interpretativo, partindo de uma interpretação avaliativa para uma interpretação onde o professor revê seu conhecimento matemático, de forma a compreender e validar a produção do aluno, ainda que esta esteja em conflito com a forma que ensina. Do mesmo modo, amplia-se o seu Conhecimento Especializado, no que diz respeito ao MK, sentidos da divisão, sentidos da fração, representação pictórica, distintos procedimentos para a resolução da divisão de frações, propriedades com relação entre o divisor, e a unidade de medida entre o dividendo e o todo a medir.

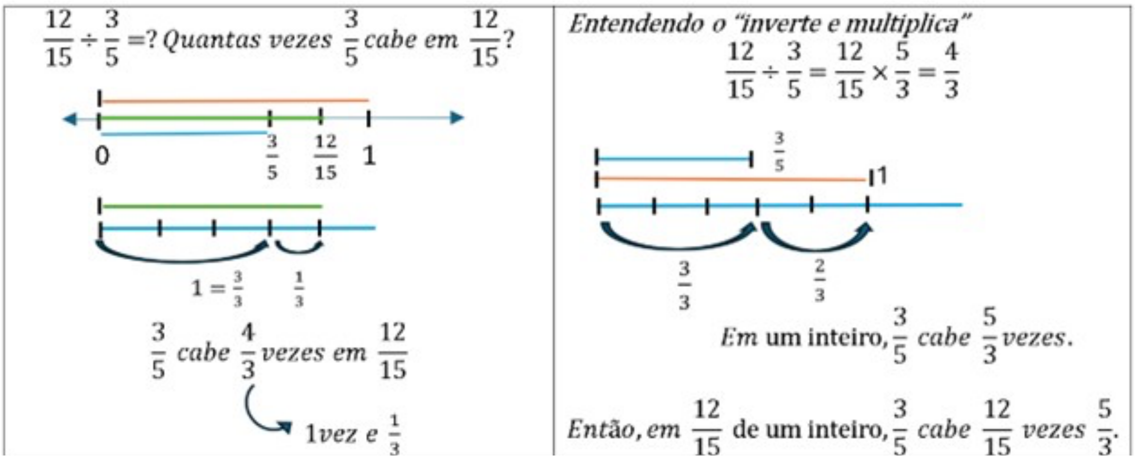


Figura 4. Representação pictórica e numérica associada à produção do Luís.

As respostas e análises realizadas até aqui referem-se às produções dos professores ao realizar uma TpF individualmente e, participar de uma plenária para reflexão de suas soluções de modo a conhecer e ampliar o conhecimento que detinham. Desse modo, a partir das reflexões sobre a produção de Mônica e Rafael, e a representação pictórica a partir das frações equivalentes, foi possível discutir em conjunto uma representação, não utilizando frações equivalentes que desse significado à produção de Luís (Figura 4). O formador ao questionar os professores: "A representação por frações equivalentes não mostra por que se inverte ou por que se multiplica. Como podemos explicar isso?" Os professores não foram capazes de responder alegando que sempre utilizam o procedimento, mas não sabiam como explicá-lo. Assim, foi realizada uma representação junto com os participantes para justificar o IM (Figura 4).

Na Figura 4 vemos a representação que justifica a operação (12/15) ÷ (3/5), realizada juntamente com os professores durante a plenária, para que se compreendesse, de fato, a divisão realizada pelo procedimento IM com o sentido de medida. Assim temos: ao dividir (12/15) ÷ (3/5), temos quantas vezes 3/5 cabe em 12/15? Vemos pela representação que 3/5 cabe 1 vez e 1/3 de 3/5 , ou seja, 1 + (1/3) = (3/3) + (1/3) = 4/3. Para justificar e validar o procedimento do Luís (12/15) ÷ (3/5) = (12/15) × (5/3) = 4/3 temos também "quantas vezes 3/5 cabe em 12/15? Pela representaçao vemos que em 1 inteiro, 3/5 cabe 1 vez (3/3) e 2/3 de 3/5, ou seja, cabe 5/3 vezes. Deste modo, invertemos porque queremos ver quantas vezes cabe. Temos, então, que em 12/15 de um inteiro, 3/5 cabe 12/15 de 5/3, ou seja, (12/15) × (5/3), ou seja, multiplicamos porque vamos repetir essa quantidade (5/3) em quantas partes tenho. Logo como resultado temos 4/3, que representa a quantidade de vezes que 3/5 cabe em 12/15.

As discussões a respeito da validade de distintas produções contribuíram para ampliar o espaço solução dos professores que, muitas vezes, se baseava apenas em uma única estratégia de resolução como o IM. Portanto, apontamos como essenciais as tarefas que abordem o Conhecimento Interpretativo, para que este seja ampliado e desenvolvido.

Os professores, ao final, consideraram importante e necessário incorporar os raciocínios de Mônica e Rafael em suas aulas, e não apenas apresentar o IM, pois relataram que os alunos esquecem, ou realizam de forma errônea, essa regra ao fazerem as tarefas em várias etapas escolares.

Ana: Não conhecia essas outras formas de fazer a divisão de frações, vou começar a ensiná-las aos meus alunos. Não sei se os alunos compreendem o que fazem, eu mesma não compreendia até agora. Sempre fiz assim, sem pensar, aprendi assim. Mas agora percebo a importância de compreender e de questionar por que se faz assim.

A professora Ana, por exemplo, relata que não compreendia a divisão de frações, ou seja, que apenas realizava o procedimento como regra, mas não tinha conhecimento do porquê se faz assim. Essa falta de entendimento do porquê se faz, levou a professora a considerar que outro procedimento estava incorreto, ou a não o utilizar por considerar que era complexo. Desse modo, a professora Ana, assim como os outros professores, ampliou seu espaço solução passando da interpretação avaliativa para a interpretação com pesquisa, onde o professor revê sua formalização matemática para buscar entender as produções dos alunos e validá-las ou não, ampliando o conhecimento do aluno a partir da produção deles.

Algumas reflexões finais

Neste texto, discutimos um exemplo de tarefa no âmbito da divisão envolvendo frações para a formação de professores, cujo objetivo foi buscar responder a seguinte questão: Que Conhecimento Interpretativo revelam professores quando confrontados com produções de alunos consideradas não comuns para a divisão de frações e que tipo de feedback fornecem?

Os professores revelaram deter um conhecimento em relação ao MTSK: conhecer o algoritmo para a divisão de frações associado ao Inverte e Multiplica (KoT, procedimentos); conhecer a equivalência de frações e inverso multiplicativo (KoT, propriedades); conhecer um modo de explicar a validade do algoritmo ID e DND para alunos, como, por exemplo, pegar vários casos, trabalhar e mostrar que aquilo vai dar um resultado exato ou não (KoT, procedimentos). Assim, nossa pesquisa corrobora com a investigação de Moriel (2019) de que é comum professores e futuros professores avaliarem a validade de um algoritmo por meio de exemplos e contraexemplos ao invés de trocar por variáveis. E que apesar dos professores deterem esse conhecimento, isso não os capacitou a validar ou justificar os procedimentos, portanto os professores identificaram algumas das produções e formas de pensar dos exemplos apresentados como incorretas.

Nossa pesquisa também complementa outras investigações que apontam que os professores apresentaram dificuldades em justificar o algoritmo da divisão de frações, por meio de uma representação pictórica ou algébrica (KPM) (Hoffman et al., 2023, Ma, 1999; Moriel et al., 2019). Percebemos que os professores detinham um conhecimento a respeito do algoritmo IM, no entanto não eram capazes de justificá-lo. Alguns professores aceitavam o IM e o ID sem necessidade justificar e não aceitavam a generalidade do algoritmo DND considerando um procedimento incorreto como apresenta o acervo investigado por Moriel et al. (2019).

No entanto, nossa pesquisa traz um aporte sobre o Conhecimento Especializado, mas também sobre o Conhecimento Interpretativo da divisão de frações, por meio de uma Tarefa para Formação elaborada para compreender e ampliar o conhecimento de professores e futuros professores que ensinam matemática. Deste modo, esta investigação apresenta que a limitação no conhecimento sobre a validade do algoritmo interferiu no modo como os professores avaliaram e interpretaram os possíveis raciocínios matemáticos elaborados pelos alunos em relação a aceitá-los, refutá-los ou refiná-los, assim como elaborar uma explicação instrucional. Assim, os professores apresentaram dúvidas em relação à produção de Mônica (ID) e à de Rafael (DND), em validá-las matematicamente, revelando um desconforto quanto ao raciocínio não padronizado. Com a produção de Mônica e as discussões associadas em plenária, foi possível ampliar o espaço solução do professor, no que diz respeito a conhecer outras formas de realizar a divisão de frações, outros procedimentos, assim como compreender esses algoritmos por meio da representação pictórica e sua generalização. Também, foi possível ampliar, de modo a possibilitar formas de entender o “quantas vezes a quantidade 3/5 tem de ser utilizada para medir a quantidade 12/15”. E que o resultado 4/3 deve ser entendido a partir da compreensão do que significa “1 e 1/3”, e isso demanda um conhecimento matemático associado ao entendimento do número misto 1 1/3, e à fração no sentido de operador. Notamos que a pergunta “quantas vezes o 3/5 cabe em 12/15?” equivale a “quantas vezes o 9/15 cabe em 12/15?”, e o resultado para ambas é igual a “1 vez e 1/3 ”.

Nossa investigação traz, portanto, um aspecto de originalidade em relação ao Conhecimento Interpretativo do professor e a divisão de frações, pois apresenta que os professores ao interpretarem as produções dos alunos solicitadas, efetuaram uma avaliação interpretativa (nível 1 do Conhecimento Interpretativo). Em relação ao feedback, este foi de contraexemplo e superficial, pois ficou apenas no nível de descrever como resolver o problema, no caso, aqui, a divisão de frações pelo IM. Essas dificuldades dos professores interferiram na estratégia a ser utilizada para ampliar o conhecimento matemático do aluno, assim como no modo como os professores interpretam os raciocínios dos alunos, por exemplo, em aceitá-los ou não. Isso corrobora com a necessidade de ampliar o conhecimento matemático dos professores em relação à divisão de frações para potenciar o entendimento matemático dos alunos.

Essa abordagem possibilita, também, superar a avaliação interpretativa (que busca a correspondência com a nossa própria forma de fazer) para uma interpretação associada, ou seja, a uma revisão da formalização matemática, de modo a assegurar que seja coerente com as produções e os raciocínios dos alunos. Discutir outras possibilidades de interpretação em relação à divisão de frações, diferentes daquelas que são consideradas nos materiais didáticos ou que os constituem, usualmente, contribui para ampliar o espaço solução dos professores, sua interpretação em relação à produção dos alunos e, consequentemente, o feedback, de modo a ser construtivo. Para tanto, é importante e necessário que o professor estenda e aprofunde seu próprio conhecimento matemático sobre os conceitos que fundamentam a divisão de frações como, por exemplo: sentidos da divisão e da fração; distintos procedimentos; propriedades (entre divisor e dividendo), representação e generalização.

Apontamos que a tarefa, e as discussões associadas, contribuiu para ampliar o denominado Conhecimento Interpretativo do professor em relação aos distintos raciocínios matemáticos no que diz respeito ao conhecer, validar e compreender cada um deles, ou seja, um conhecimento matemático com compreensão por parte do aluno, assim como questões associadas à generalização e às estratégias mais potentes e menos potentes para o entendimento da divisão de frações. Deste modo, entendemos que existem abordagens para ensinar a divisão de frações sem que a regra seja colocada em primeiro lugar e que o importante é uma compreensão conceitual que posteriormente leve a deduzir ou compreender a regra.

Agradecimentos

Este estudo foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código Financeiro 001; pelo projeto Aspectos matemáticos da tomada de decisão e formação de professores 88881.311131/2018-00; pelo projeto "Desenvolver o Conhecimento Interpretativo e Especializado dos professores e suas relações com as Tarefas para a Formação de Professores no âmbito da Medição e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estocástico" (404959/2021-0) e pelo Projeto PID2021-122180OB-I00 (Governo da Espanha) e pela Red Iberoamericana sobre Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (RED MTSK) patrocinado pela AUIP.

Referências

Adu-Gyamfi, K., Schwartz, C. S., Sinicrope, R. e Bossé, M. J. (2019). Making sense of fraction division: domain and representation knowledge of preservice elementary teachers on a fraction division task. *Mathematics Education Research Journal*, *31*, 507-528. https://doi.org/10.1007/S13394-019-00265-2

Amaral, C. A. D., Veiga Ferreira de Souza, M. A. e Belford Powell, A. (2022). Construção do conceito de fração sob a perspectiva de medição: contribuições do 4a instructional model. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *25*(3), 263-288. https://doi.org/10.1007/S13394-019-00265-2

Ball, D. L. (1990a). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, *90*, 449-466. https://doi.org/10.2307/749140

Ball, D. L. (1990b). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*, 132-144. https://doi.org/10.2307/749140

Ball, D. L., Hill, H.C. e Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *29*(1), 14-17.

Ball, D., Thames, M. e Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Borasi, R. (1994). Capitalizing on Errors as "Springboards for Inquiry": A Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 166-208. https://doi.org/10.2307/749507

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D. e Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*, 194-222. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.23.3.0194

Carrillo, J., Contreras, L. C. e Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. In L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigacion en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Comares.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Àvila, D. e Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chen, L., Van Dooren, W., Chen, Q. e Verschaffel, L. (2011). An investigation on Chinese teachers' realistic problem posing and problem-solving ability and beliefs. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*(4), 919-948. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9259-7

Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones: un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje.* [Tese de Doutorado, Universidad de Valencia, España]. https://roderic.uv.es/items/421df127-c9ec-4f95-b68d-262f30081945

Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 355-376. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.28.3.0355

Díaz-Cárdenas, A. F., Díaz-Furlong, A., Díaz-Furlong, H. A., Sankey-García, M. R. e Zago-Portillo, G. (2019). Multiplication and division of fractions: numerical cognition development and assessment procedures. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *22*(3), 333-362. https://doi.org/10.12802/relime.19.2234

Di Martino, P., Mellone, M., Minichini, C. e Ribeiro, M. (2016). Prospective teachers' interpretative knowledge: Giving sense to subtraction algorithms. In S. Zehetmeier, M. Ribeiro, B. Roesken-Winter, e B. Potari (Orgs.), Proceedings ERME topic *Conference Mathematics Teaching, Resources and Teacher Professional Development* (pp. 66-75). ERME.

Di Martino, P., Mellone, M. e Ribeiro, M. (2019). Interpretative knowledge. Em S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 1-5). Springer.

Dias, S. e Santos, L. (Setembro, 2009). Feedback on different mathematics tasks. *33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Thessaloniki, Greece.

Fazio, L. e Siegler, R. (2011). *Educational practices series: teaching fractions*. International Bureau of Education.

Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Epsilon*, 70, 27-40.

García, A. I. M. (2013). *Conocimiento profesional de un grupo de profesores sobre la división de fracciones* [Dissertação de Mestrado em Didática da Matemática, Universidad de Granada, España]. https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Ana_Márquez.pdf

Galleguillos, J. e Ribeiro, R. (2019). Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: Focus on the provided feedback. Em U. T. Jankvist,

M. van den Heuvel-Panhuizen, e M. Veldhuis (Eds.). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (3281-3288). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Gómez, B., Figueiras, O. e Contreras, M. (2016). Modelos de enseñanza de los algoritmos de la división de fracciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *9*, 43-63. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.147

Hiebert, J. e Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Em J. Hiebert (Ed.). *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics* (pp. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates.

Hoffman B. V. S., Magalhães Brum, J. e Pereira dos Santos-Wagner, V. M. (2023). Reflexões de professores sobre divisão de frações por fração: compreensões e filosofias. *Educação Matemática Pesquisa*, *25*(1), 47-77. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p47-77

İşik, C. e Kar, T. (2012). An error analysis in division problems in fractions posed by preservice elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory & Practice, 12*(3), 2289-2309.

Jakobsen, A., Ribeiro, M. e Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*, 135-150. https://doi.org/10.7146/nomad.v19i3-4.148652

Li, Y. e Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction division. *ZDM*, *40*, 833-843. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0148-2

Lee M. Y. (2017). Pre-service teachers' flexibility with referent units in solving a fraction division problem. *Educational Studies in Mathematics*, *96*, 327-348. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9771-6

Lo, J-J. e Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(6), 481-500. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9221-4

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing.* Routledge Falmer.

Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P. e Pacelli. T. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education*, *22*(2), 154-167. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710557

Mellone, M., Tortora, R., Jakobsen, A. e Ribeiro, M. (2017). Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research. Em T. Dooley & G. Gueudet (Eds.) (2017). *Proceedings of the Tenth*

Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 2498-2555). DCU Institute of Education and ERME.

Moriel, J. G., Wielewski, G. D. e Carrillo, J. A. (2019). Meta-análise sobre Conhecimento para Ensinar Divisão de Frações. *Bolema, 33*, 988-1026. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a02

Newton, K. J. (2008). An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080-1110. https://doi.org/10.3102/0002831208320851

Nye, B., Konstantopoulos, S. e Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects. *Educational evaluation and policy analysis*, *26*(3), 237-257. https://doi.org/10.3102/01623737026003237

Olanoff, D., Lo, J. e Tobias, J. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on fractions. *The Mathematics Enthusiast, 11*(2), 267-310. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1304

Ribeiro, M., Almeida, A. e Mellone, M. (2021). Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, *14*(35), 1-32. https://doi.org/10.46312/pem.v14i35.13263

Rizvi, N. F. e Lawson, M. J. (2007). Prospective teachers' knowledge: Concept of division. *International Education Journal, 8*(2), 377-392.

Santos, L. e Pinto, L. (Setembro, 2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. *33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Thessaloniki, Greece.

Simon, M. A. (1993). Prospective Elementary Teachers' Knowledge of Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(3), 233-254. https://doi.org/10.2307/749346

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. SAGE Publications.

Son, J. e Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(4), 235-26. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9112-5

Tian, J. e Siegler, R. S. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *50*(6), 614-620. https://doi.org/10.1177/0022219416662032

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research of Mathematics Education*, *31*(1), 5-25. https://doi.org/10.2307/749817

Gabriela Gibim
Universidade Estadual de Campinas
(Unicamp), Brasil
gabi.gibim@gmail.com

Laura Rifo
Universidade Estadual de Campinas
(Unicamp), Brasil
laurarifo@unicamp.br

Nuria Climent
Universidad de Huelva, España
climent@ddcc.uhu.es

Miguel Ribeiro
Universidade Estadual de Campinas
(Unicamp), Brasil
Cmribas78@gmail.com

Recibido: Junho de 2024. Aceitaram: Dezembro de 2024
doi: 10.30827/pna.v19i3.31002
ISSN: 1887-3987

Interpretative Knowledge of Teachers in a Fraction Division Task

Gabriela Gibim, Laura Rifo, Nuria Climent, and Miguel Ribeiro

Interpretative Knowledge is important and necessary, as it is linked to teaching practice and teaching with understanding, as it is mobilized by teachers to interpret students. The results reveal the need for Specialized Mathematical Knowledge to interpret and attribute meaning to students' ways of thinking when they are different from the usual ones. The results show a weak specialized mathematical knowledge of teachers regarding the meanings of division and properties of the operation (p. ex., relationship between dividend and divisor); senses of fractions; representation records; procedures for dividing two fractions and possible generalizations. This specialized knowledge supports superficial feedback related to an interpretative assessment (level 1 of Interpretive Knowledge), which is expected to be limiting in contributing to students' mathematical learning on the topic of division of fractions. It is clear that, through the implementation of the Training Task, it was possible to expand the Specialized and Interpretative Knowledge of teachers in relation to the topic and contribute to their professional practice and consequently to the mathematical understanding of students' productions and attribute meaning to them so that they can assume what students know and as they know as a starting point for discussions. This work focuses on Interpretive Knowledge revealed and developed by mathematics teachers (who teach students aged seven to fourteen), in a training context through a Training Task on division of fractions.