CÓMO ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS FORMULAN Y ARGUMENTAN IDENTIDADES ALGEBRAICAS

Bettina Milanesio y María Burgos

En este trabajo se investiga qué argumentaciones desarrollan estudiantes al comienzo de sus estudios universitarios cuando formulan y justifican propiedades algebraicas. Se emplean las herramientas del Enfoque Ontosemiótico para analizar el grado de razonamiento algebraico y los errores, relacionándolos con las argumentaciones empleadas. Los resultados muestran que los estudiantes consideran suficiente la prueba en casos particulares y no desarrollan argumentaciones que validen la veracidad o falsedad de las identidades algebraicas. Además, el carácter más algebraico no garantiza mayor pertinencia en la argumentación propuesta. A pesar de sus dificultades, las discusiones permitieron a los estudiantes reconstruir argumentos inicialmente incorrectos o incompletos.

Términos clave: Demostración matemática; Educación superior; Enfoque Ontosemiótico; Niveles de algebrización

How university students formulate and argue algebraic identities

This work investigates the argumentations developed by students at the beginning of their university studies when formulating and justifying algebraic properties. The tools of the Ontosemiotic Approach are employed to analyze the degree of algebraic reasoning and the errors, relating them to the types of argumentations used. The results show that students consider proof in particular cases to be sufficient and do not develop argumentations that validate the truth or falsity of algebraic identities. Furthermore, a more algebraic nature does not guarantee greater relevance in the argumentation. Despite the difficulties, discussions allowed students to reconstruct initially incorrect or incomplete arguments.

Keywords: Higher Education; Levels of algebrization; Mathematical proof; Ontosemiotical Approach

Milanesio, B. y Burgos, M. (2025). Cómo estudiantes universitarios formulan y argumentan identidades algegraicas. *PNA, 19*(3), 275-303. https://doi.org/10.30827/pna.v19i3.30473

Como estudantes universitários formulam e argumentam identidades algébricas

Este trabalho investiga quais estratégias de argumentação os estudantes desenvolvem no início de seus estudos universitários ao formular e justificar propriedades algébricas. As ferramentas da Abordagem Ontosemiótica são utilizadas para analisar o grau de raciocínio algébrico e os erros, relacionando-os com os tipos de argumentos empregados. Os resultados mostram que os estudantes consideram suficiente a prova em casos particulares e não desenvolvem argumentos que validem a verdade ou falsidade das identidades algébricas. Além disso, o caráter mais algébrico não garante maior relevância na argumentação proposta. Apesar das dificuldades observadas, as discussões permitiram aos estudantes reconstruir argumentos inicialmente incorretos ou incompletos.

Palavras-chave: Abordagem Ontosemiótica; Educação superior; Níveis de algebrização; Prova matemática

La demostración matemática es un proceso fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos (Conner et al., 2014). El interés de docentes e investigadores por esta práctica se debe tanto a su presencia en diferentes áreas de las matemáticas (Mariotti et al., 2018), como a lo que reporta a los estudiantes en el dominio de la disciplina (Knipping y Reid, 2019; Knuth et al., 2019; Stylianides et al., 2023).

La riqueza y complejidad intrínseca asociada a la propia actividad matemática implicada hacen que el sentido de la demostración varíe de acuerdo con el contexto institucional en el que se la considere (Rocha, 2019). Mientras que, en el campo de la lógica y los fundamentos de las matemáticas, la demostración aparece vinculada a las nociones de deducción y sistema axiomático (Alfaro-Carvajal et al., 2019), en el contexto escolar la noción de demostración se abre a formas menos abstractas, tales como justificación, validación, explicación, prueba o argumentación (Balacheff, 2000; Barreiro et al., 2008; Mariotti et al., 2018; Pedemonte y Balacheff, 2016; Staples y Conner, 2022; Stylianides et al., 2016).

De manera general, se entiende por argumentación un proceso reflexivo y dinámico en el que se proponen razones para aceptar o rechazar determinadas afirmaciones (Pedemonte y Balacheff, 2016). La relatividad de la demostración al contexto en el que se desarrolla es una de las primeras dificultades que deben afrontar los estudiantes cuando desarrollan prácticas argumentativas. Aceptar una forma argumentativa en un determinado nivel que se va a rechazar posteriormente en un nivel superior genera diversas barreras para su aprendizaje (Stylianides y Stylianides, 2017), llevando a los estudiantes a generar argumentaciones en el aula de matemáticas que no siempre coinciden con las esperadas (Crespo et al., 2010).

Además, la falta de dominio del lenguaje matemático, el desconocimiento de las reglas de la lógica, la poca capacidad para formalizar argumentaciones deductivas o la interpretación errónea de enunciados (Lew y Mejía-Ramos, 2019; Mujib, 2015; Pedemonte, 2008) lleva a que estudiantes incluso de nivel superior no desarrollen argumentaciones válidas.

Para estudiar las formas de argumentación que se manifiestan en el aula, documentar las dificultades que encuentran los estudiantes con la demostración y analizar cómo progresa su aprendizaje, diferentes autores (Arce y Conejo, 2019; Conner et al., 2014; Inglis et al., 2007; Molina y Samper, 2019; Molina et al., 2019; Pedemonte y Balacheff, 2016; Soler-Álvarez y Manrique, 2014) han seguido el modelo de Toulmin (2003).

En estas investigaciones, sin embargo, no se han analizado las prácticas matemáticas involucradas en una demostración o el origen de las dificultades en términos del grado de formalidad de los objetos y procesos que intervienen en dichas prácticas. Un primer avance se ha llevado a cabo en trabajos que toman el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2019) como marco de referencia para analizar la actividad matemática implicada en la demostración. En algunos trabajos se ha utilizado la herramienta de configuración ontosemiótica del EOS para analizar la actividad matemática implicada en las demostraciones que proponen estudiantes de nivel medio o superior en diversos contextos (aritmético, algebraico, geométrico), evidenciando, fundamentalmente, disparidades entre significados personales e institucionales pretendidos sobre la demostración (Giayetto et al., 2023; Markiewicz et al., 2021; Molina et al., 2019; Morales-Ramírez et al., 2021).

Consideramos que analizar la actividad algebraica requerida en el trabajo con la demostración permitirá diferenciar grados de formalización en su estudio y tomar conciencia de su complejidad intrínseca, a fin de definir trayectorias de aprendizaje que consideren la conexión entre lo formal y lo informal en el trabajo matemático. Para ello nos apoyamos en el modelo de razonamiento algebraico elemental (RAE) propuesto desde el EOS (Godino et al., 2014; Godino et al., 2015). Este modelo ha sido empleado en investigaciones recientes para analizar los niveles de algebrización de prácticas matemáticas desarrolladas por estudiantes y futuros docentes, valorar su relación con los conocimientos matemáticos mostrados y plantear procesos instruccionales que permitan progresar el desempeño en sucesivos niveles de RAE (Burgos et al., 2018; Burgos y Godino, 2019; Gaita y Wilhelmi, 2019; Larios-Osorio et al., 2021).

En este trabajo, empleamos estas herramientas teórico-metodológicas del EOS para analizar las prácticas argumentativas desarrolladas por estudiantes al inicio de la educación superior cuando resuelven una situación en un contexto algebraico que requiere el descubrimiento y la construcción de conjeturas, así como la propuesta de argumentaciones que las validen. Pretendemos responder a las siguientes cuestiones de investigación:

- ¿Qué estrategias de argumentación desarrollan los estudiantes cuando formulan y justifican propiedades algebraicas?
- ¿Cuáles son los niveles de razonamiento algebraico identificados en sus prácticas matemáticas?
- ¿Cuáles son los errores observados y cómo se relacionan con las estrategias y los niveles RAE en dichas prácticas?

La novedad de nuestra investigación radica tanto en la situación propuesta como en el tipo de análisis realizado. Por un lado, la tarea ofrece la oportunidad de poner en práctica diversos procesos argumentativos, como el uso de ejemplos y contraejemplos, la elaboración de conjeturas, la búsqueda de condiciones para que se satisfagan las conjeturas y la propuesta de demostraciones que permitan validarlas. Este tipo de actividad no es usual en estos cursos universitarios, donde lo habitual es solicitar demostrar afirmaciones verdaderas (Lew y Zazkis, 2019). Por otro lado, en el análisis realizado de las prácticas utilizamos de manera articulada el modelo de Toulmin (2003), para identificar y clasificar las estructuras argumentativas propuestas, y los niveles de RAE propuestos en el EOS, para reconocer el grado de generalidad de los objetos y procesos implicados en las prácticas argumentativas.

Demostración, argumentación y el modelo de Toulmin

La mayoría de los educadores matemáticos acuerdan que la definición de demostración debe considerar tanto el contexto en el cual se ubica como las restricciones de la propia disciplina matemática (Staples y Conner, 2022). En este sentido, es fundamental ser consciente de los distintos términos asociados a la demostración (como justificación, validación, explicación, prueba, argumentación) y sus relaciones, de forma que se puedan encontrar elementos de convergencia (Alfaro-Carvajal et al., 2019).

El término justificación, utilizado fundamentalmente en educación primaria y secundaria, refiere al proceso de brindar razones para convencer a los demás sobre la verdad de una afirmación (Cañadas, 2007), respaldar afirmaciones matemáticas y elecciones al resolver problemas, o explicar por qué estas afirmaciones tienen sentido (Staples y Conner, 2022).

En la validación, el individuo manifiesta y sostiene en un ámbito social las razones de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento es o no correcto o un razonamiento es o no válido (Barreiro et al., 2008). Según Balacheff (2000), para asegurar la validez de una proposición, el sujeto puede producir una explicación, una prueba o una demostración. En la explicación el sujeto pretende hacer inteligible al público, mediante un lenguaje natural principalmente, la verdad de una proposición que para él ya es cierta. Cuando la explicación es reconocida y aceptada socialmente por una comunidad, pudiendo ser rechazada por otra, se convierte en una prueba.

La argumentación se ha interpretado por diversos autores como: el proceso de realizar afirmaciones matemáticas y proporcionar evidencias para apoyarlas (Staples y Conner, 2022); una herramienta que permite comunicar ideas, compuesta por argumentos (pasos de la argumentación) con el objetivo de convencer a alguien de la verdad de un enunciado matemático (Pedemonte y Balacheff, 2016); una actividad matemática amplia que implica la exploración de casos particulares, la generación de conjeturas y la producción de argumentos que no necesariamente califiquen como demostraciones (Stylianides et al., 2016).

A pesar de la variedad de formas de concebir la demostración, en el ámbito de la Educación Matemática, es fundamental adoptar una postura que, además de respetar la integridad matemática, contemple el papel de la comunidad del aula (Stylianides et al., 2017). Así, consideramos la demostración como una argumentación en matemáticas que tiene las siguientes características (Stylianides et al., 2017):

1. Utiliza un conjunto de aserciones aceptadas como verdaderas y que están disponibles para la comunidad de aula sin más justificación.
2. Se usan modos de argumentación válidos y conocidos por la comunidad o que están dentro de su alcance conceptual.
3. Se comunica con formas de expresión apropiadas, conocidas o dentro del alcance conceptual de la comunidad de aula.

Examinar las estructuras de argumentación en las clases de matemáticas proporciona una herramienta potente para comprender mejor las formas en las que los profesores enseñan la demostración y cómo los estudiantes llegan a comprenderla (Knipping y Reid, 2019). En este sentido, como mencionamos, diferentes autores siguieron el modelo de Toulmin (2003) para analizar las argumentaciones que desarrollan los estudiantes en el aula de matemáticas. Este modelo proporciona una poderosa herramienta para distinguir diferentes tipos de argumentos (pasos de la argumentación) empleados en un proceso de demostración (Mariotti et al., 2018). En particular, Arce y Conejo (2019) o Soler-Álvarez y Manrique (2014) se apoyan en el modelo de Toulmin "para analizar argumentaciones, que puede aplicarse a los razonamientos matemáticos" (Arce y Conejo, 2019, p. 165). Estos autores adoptan la idea de razonamiento de Peirce, como proceso mediante el cual se llega a una conclusión a partir de unas premisas, y conduce a un conocimiento verdadero para quien razona. Así, Soler-Álvarez y Manrique (2014) afirman que un razonamiento para Peirce se puede considerar un tipo de argumento según Toulmin (2003). En efecto, para Toulmin un argumento es un discurso oral o escrito producto de un proceso compuesto por tres elementos básicos: la conclusión (se manifiesta una afirmación u opinión cuyo valor se está tratando de establecer), los datos (permiten apoyar la afirmación realizada, es decir, la conclusión) y la garantía (posibilita que el paso de los datos a la conclusión sea legítimo, mediante una justificación a partir de inferencias basadas en reglas generales, principios, etc.). También considera tres elementos auxiliares que permiten describir un argumento: el respaldo (otras certezas que soportan la garantía), el calificativo modal (grado de fuerza conferida por la garantía que acompaña a la conclusión) y las refutaciones (condiciones de excepción en las que la garantía se podría anular).

Desde la investigación se ha hecho un esfuerzo para caracterizar diversos tipos de argumentaciones partiendo de la distinción general entre inductivo y deductivo (Cañadas, 2007). Así, se han considerado también la exploración y comprensión de conjeturas y las argumentaciones de tipo abductivo o analógico como fundamentales en el desarrollo matemático de los estudiantes. Detallamos a continuación estos tipos de argumentaciones haciendo uso del modelo de Toulmin.

En una argumentación abductiva, un hecho observado (conjetura) actúa como conclusión y se propone una posible explicación que lo justifique a partir de posibles datos, garantía y respaldo (Arce y Conejo, 2019). La garantía actúa como una regla hipotética que proviene de una exploración empírica o de una regla aceptada dentro de una exploración teórica (Molina y Samper, 2019). Está respaldada por un enunciado o una teoría matemática de la cual podría derivarse la garantía.

La argumentación inductiva parte de la evidencia empírica sobre casos particulares para concluir una afirmación matemática general, por lo que el proceso de generalización desempeña un papel fundamental. Siguiendo el modelo de Toulmin, los datos corresponden a verificaciones en casos particulares de la conclusión y la garantía está respaldada por la comprobación de la conclusión en esos casos concretos, aunque es insuficiente para inferir la validez de la conclusión (Arce y Conejo, 2019). Se deriva de forma plausible y provisional un enunciado general (conclusión).

La argumentación deductiva se produce en los procesos de demostración de conjeturas, siendo la única que permite validar conocimiento matemático irrefutable a excepción de que existan cambios en el sistema axiomático de partida (Arce y Conejo, 2019). En estas argumentaciones se aplica una proposición general conocida (garantía) a unos datos dados para obtener la conclusión (Molina et al., 2019). A su vez, la garantía está respaldada por una teoría matemática que hace que la misma sea válida (Arce y Conejo, 2019). Soler-Álvarez y Manrique (2014) e Inglis et al. (2007) consideran como un tipo de argumentación deductiva el uso de contraejemplos, donde se toma como dato al caso $\exists y\colon (P(y) \wedge \neg Q(y))$, como garantía la regla general $\forall x\colon (P(x) \rightarrow Q(x))$, como respaldo la equivalencia lógica $\forall x\colon \big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \leftrightarrow \neg\exists y\colon (P(y) \wedge \neg Q(y))$ y como conclusión, el no cumplimiento de la regla general.

En una argumentación analógica se obtiene una conclusión a partir de premisas en las que se establece una comparación entre elementos o conjuntos de elementos distintos (Cañadas, 2007). La garantía corresponde a la relación entre un hecho conocido y el caso que se está estudiando (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). El respaldo hace referencia a la analogía entre los dominios donde se desarrolla la argumentación, aunque no proporciona ciertamente un respaldo para las garantías pues no las justifica (Marraud, 2007). La conclusión (conjetura) se infiere de manera plausible.

En este estudio, se utiliza el modelo de Toulmin para categorizar los sistemas de prácticas argumentativas propuestas por los estudiantes según su estructura (inductiva, abductiva, deductiva, deductiva por contraejemplo, analógica). Aunque en el texto no profundizamos en este análisis, resulta fundamental en la etapa inicial de la investigación para, posteriormente, analizarlas de manera microscópica en términos de los elementos del EOS.

ELEMENTOS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Prácticas, objetos y procesos matemáticos

El EOS interpreta el significado de los objetos matemáticos desde un punto de vista pragmático, esto es, en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en la solución de situaciones-problema (Godino et al., 2019) por una persona (significado personal) o institución (significado institucional). Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. En estas prácticas intervienen objetos matemáticos entendidos como entidades que pueden ser separadas según su naturaleza y función. Pero, además de por su estructura (los objetos), la actividad matemática queda caracterizada por su funcionamiento (cómo interactúan los objetos), lo que lleva a hablar de procesos matemáticos concediéndole una perspectiva dinámica (Font et al., 2010).

Así, los diferentes tipos de objetos primarios (lenguajes, conceptos, proposiciones, argumentos, procedimientos y situaciones-problemas) emergen por medio de los respectivos procesos de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización. Además, estos objetos pueden ser considerados desde cinco dimensiones duales, lo que lleva a la siguiente tipología de objetos secundarios: ostensivos (públicos) - no ostensivos (ideales); extensivos (particulares) - intensivos (generales); significantes (expresión) - significados (contenido); unitarios (considerados como un todo previamente conocido) - sistémicos (sistemas formados por distintos componentes); personales (sujetos individuales) - institucionales (compartidos en una institución). Tanto los objetos primarios como los secundarios se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo que permite distinguir procesos matemáticos primarios (aquellos de los que emergen los objetos primarios) y secundarios (de los que emergen los objetos secundarios).

En el EOS, el argumento (objeto), como enunciado que permite validar una proposición o respaldar un procedimiento, es el resultado de un proceso de argumentación o secuencia de acciones que da lugar a este discurso oral o escrito (Godino et al., 2019). La argumentación es el "proceso colectivo o individual que, de acuerdo con reglas compartidas, apunta a una conclusión mutuamente aceptable acerca de la veracidad o falsedad de una aserción" (Molina et al., 2019, p. 95). En este proceso, se desarrollan acciones propias del quehacer matemático, como inducir, proponer analogías, abducir propiedades de hechos empíricos para la formulación de conjeturas, proveer pruebas deductivas de hechos previamente conjeturados y comunicar los resultados (Molina y Samper, 2019). En estas acciones están implicadas configuraciones de objetos y procesos de naturaleza algebraica, que permiten abordar la dialéctica entre lo informal y lo formal en el estudio de la demostración en el contexto educativo.

Modelo del Razonamiento Algebraico Elemental

El modelo de RAE desarrollado en el EOS (Godino et al., 2014; Godino et al., 2015) describe la actividad matemática en términos del grado de formalización de los objetos y procesos matemáticos implicados, facilitando un análisis microscópico de las prácticas institucionales o personales que se ponen en juego en el estudio de la demostración. Los criterios para delimitar los niveles están basados en la presencia de objetos de naturaleza algebraica (relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones y estructuras), las representaciones usadas, el grado de generalidad de estos objetos y el cálculo analítico implicado en la actividad matemática. Además, el reconocimiento de la naturaleza algebraica en las prácticas matemáticas viene ligado a la identificación de los procesos de: a) generalización, de la que emergen objetos intensivos en relación dialéctica con los correspondientes extensivos; b) unitarización o reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias; c) formalización y ostensión, es decir, nombramiento mediante diferentes sistemas de representación de las nuevas entidades; d) transformación, es decir, la intervención de objetos intensivos en procesos de cálculo analítico y nuevas generalizaciones. Se establecen los siguientes niveles:

- Nivel 0 (N0). Ausencia de razonamiento algebraico. Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad (números naturales) usando lenguajes natural, numérico, icónico o gestual.
- Nivel 1 (N1). Se comienzan a reconocer propiedades de las operaciones y el significado relacional del signo igual, emergiendo el concepto de equivalencia. En tareas funcionales, se reconoce una regla general mediante lenguajes no simbólicos.
- Nivel 2 (N2). Se usan representaciones simbólicas para representar objetos intensivos ligados a la información contextual; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = C$ $(A, B, C \in \mathbb{R})$. En tareas funcionales, se reconoce una regla

general pero no se opera con variables para obtener formas canónicas de expresión.

- Nivel 3 (N3). Aparecen formas consolidadas de razonamiento algebraico. Los símbolos se usan de manera analítica, sin referirse a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables; se resuelven ecuaciones del tipo $Ax + B = Cx + D$ $(A, B, C, D \in \mathbb{R})$.
- Nivel 4 (N4). Se utilizan parámetros y coeficientes variables para expresar familias de ecuaciones y funciones, lo que implica discriminación del dominio y rango de la función paramétrica. Se opera con variables, pero no con parámetros.
- Nivel 5 (N5). Describe la actividad matemática en la que se realizan cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen parámetros juntamente con otras variables.
- Nivel 6 (N6). El último grado de generalidad es el trabajo con estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial o grupo) o el álgebra de funciones (suma, multiplicación, composición de funciones genéricas).

Reconocer niveles de algebrización en las prácticas desarrolladas en una situación de demostración permite definir significados parciales y establecer relaciones jerárquicas entre ellos en función de su complejidad e interdependencia.

METODOLOGÍA

En este trabajo, realizado bajo un paradigma descriptivo, se usa una metodología esencialmente cualitativa, con la intención de describir e interpretar las competencias y dificultades de estudiantes con la demostración. Empleamos el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) de los informes de los estudiantes, apoyado en las categorías del EOS (prácticas, objetos, procesos, niveles RAE). La primera autora de este trabajo realizó el análisis a priori de la tarea de evaluación (resolución, descripción de las prácticas, objetos, procesos y niveles RAE), que fue después revisado y completado (cuando fue necesario) por la segunda autora. A continuación, ambas realizaron de manera independiente el análisis descriptivo de los informes de los estudiantes y finalmente, de manera conjunta, discutieron sus discrepancias, acordando las categorías resultantes del análisis, en un proceso cíclico e inductivo, característico de la investigación cualitativa. De igual forma, las investigadoras consensuaron los criterios de pertinencia que después aplicarían para analizar la adecuación de las respuestas de los estudiantes.

Contexto y participantes

Los participantes fueron 31 estudiantes (codificados como E1, E2, ..., E31) que accedieron al primer curso universitario de las carreras de grado profesorado y licenciatura en matemáticas y licenciatura en física en una universidad argentina (año 2023). Su nivel de desempeño en matemáticas era estándar según los resultados de los cursos de nivel secundario.

La implementación se realizó en las actividades de ingreso desarrolladas durante un mes en la asignatura Matemática Discreta para introducir a los estudiantes en los contenidos. En el cuadernillo de ingreso a la asignatura se plantean algunos objetivos referidos a los procesos de argumentación como “poner en evidencia procesos propios de la matemática como detectar regularidades, formular ejemplos y contraejemplos, agotamiento de posibilidades, inducir, conjeturar, generalizar, entre otros” (Markiewicz, 2023, p. 2). Además, se abordan elementos de la lógica proposicional y la lógica de primer orden, necesarios para proceder en el desarrollo de demostraciones.

La profesora proporcionó el problema a los estudiantes para que lo resolvieran y entregaran de forma individual, para ello contaron con 50 minutos.

Instrumento de recogida de datos

En este trabajo mostramos el análisis de uno de los problemas propuestos (Figura 1), que posibilita la puesta en funcionamiento de diversos procesos argumentativos.

Si a y b son dos números enteros:
a) Completa $(a-b)^2 =$ ____ con una expresión algebraica a la derecha del igual, de manera que la igualdad resulte verdadera para todo valor de a y b. Justifica tu respuesta.
b) Completa $(a-b)^2 =$ ____ con una expresión algebraica a la derecha del igual, de manera que la igualdad siempre resulte falsa para todo valor de a y b. Justifica tu respuesta.
c) Completa $(a-b)^2 =$ ____ con una expresión algebraica a la derecha del igual de manera que la igualdad resulte a veces verdadera y otras veces falsa. Da un ejemplo en que resulte verdadera y otro en que resulte falsa. Justifica tu respuesta.
d) ¿Cuándo es cierto que $(a+b)^2 > a^2 + b^2$? Justifica tu respuesta.

Figura 1. Tarea propuesta. Fuente: ítems a), b) y c) adaptados de Sessa (2005, p. 90), ítem d) adaptado de Markiewicz (2023, p. 5).

La tarea está planteada en un contexto algebraico de tratamiento de expresiones, ecuaciones e inecuaciones. En los ítems a) y b) se trata de completar con una expresión algebraica para formular y justificar una regla general válida, respectivamente falsa, para todo valor de a y b. En el ítem c) se debe escribir una expresión algebraica a la derecha del signo igual de forma que se obtenga una igualdad cierta en un determinado conjunto de valores. Finalmente, el ítem d) lleva a conjeturar cuándo es cierta una propiedad y argumentar su validez.

Mientras que en los ítems a) y b) los símbolos literales actúan como números generalizados (Ely y Adams, 2012), pues todos los valores de sustitución deben dar lugar a un enunciado verdadero o falso, en c) y d) se debe buscar una relación entre los parámetros a y b, determinando los rangos de valores para los que se cumple una determinada propiedad.

Además de recopilar las soluciones escritas al problema propuesto, entrevistamos a siete estudiantes que manifestaron dificultades representativas del resto de los participantes: planteamiento de expresiones algebraicas que no cumplían las condiciones solicitadas en los tres primeros ítems y propuesta de conjeturas incorrectas sobre el rango de validez de una fórmula en el último. En los tres primeros ítems, las preguntas motivaban la búsqueda de contraejemplos a su respuesta escrita, o reconocer cuándo una expresión que consideraban, por ejemplo, siempre verdadera o siempre falsa, lo era según los valores de los símbolos literales. En el caso del ítem d), además de buscar contraejemplos que evidenciaran la falta de validez de las conjeturas propuestas, se motivaba a los estudiantes a reconocer la insuficiencia de la prueba en casos particulares para argumentar de manera general.

Criterios de pertinencia

Se adoptan los siguientes grados de pertinencia para las respuestas de los participantes:

- Correcta (C). En los ítems a), b) y c), se considera una respuesta correcta si se brinda una expresión algebraica que satisfaga la condición solicitada y se argumenta su validez general (por ejemplo, ver Figura 5). En el ítem d), una respuesta es correcta si se establece una conjetura correcta sobre las condiciones en las que la desigualdad es válida y se argumenta de manera general. Por ejemplo:

  > *Tenemos que* $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$*, o sea que* $a^2 + b^2 + 2ab > a^2 + b^2$*, o sea que si simplificamos tenemos que* $2ab > 0$*, pero en el caso que* a *y* b *tengan signos opuestos* $2ab$ *sería negativo, o sea, en este caso* $2ab < 0$*, entonces no siempre* $(a+b)^2 > a^2 + b^2$*, para que esto ocurra* $a > 0$ *y* $b > 0$ *(E31)*

- Parcialmente correcta (PC). En los ítems a), b) y c), una respuesta se considera parcialmente correcta si incluye una expresión algebraica que satisfaga la condición solicitada, aunque la argumentación dada no permite valorar la validez general. Por ejemplo, E10 para a) "$(a-b)^2 = \sqrt[3]{(a-b)^6}$, ejemplo $(4-5)^2 = \sqrt[3]{(4-5)^6} = 1$". En el ítem d), una respuesta es parcialmente correcta si se elabora una conjetura adecuada (cuándo será cierto que $(a+b)^2 > a^2 + b^2$) pero la argumentación no permite valorar la validez general (Figura 10).
- Incorrecta (I). En algún otro caso (por ejemplo, los mostrados en las Figuras 2 y 3).

RESULTADOS

En esta sección se describen las argumentaciones empleadas por los estudiantes y los niveles RAE asociados, analizando sus logros y limitaciones. Los resultados de parte de las entrevistas realizadas con algunos de los participantes ayudan a interpretar la fuente de los errores que manifestaron en sus escritos.

En la Tabla 1 se muestra el grado de pertinencia de las soluciones de los participantes según las estrategias empleadas. Observemos que, de los 31 estudiantes, seis no respondieron al ítem a), tres al ítem b), siete al d) y solo 13 resolvieron el ítem c).

Tabla 1
Grado de pertinencia según las estrategias

Estrategia	Grado de pertinencia											Total
	Ítem a			Ítem b		Ítem c			Ítem d			
	I	PC	C	I	C	I	PC	C	I	PC	C	
Abductiva	0	0	0	5	0	0	0	0	4	2	0	11
Inductiva	4	1	0	3	0	1	0	6	4	0	0	19
Deductiva	4	0	6	7	1	0	0	0	2	0	1	21
Deductiva por contraejemplo	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	0	4
Conjetura sin argumentación	9	1	0	12	0	3	3	0	6	1	0	35
Total	17	2	6	27	1	4	3	6	19	4	1	90

Nota. I = Incorrecta; PC = Parcialmente Correcta; C=Correcta.

Como se observa en la Tabla 1, los participantes tuvieron dificultades para resolver los ítems a), b) y d) correctamente. No solo algunos no respondieron, sino que el 81,8 % de las 77 prácticas correspondientes a estos tres ítems fueron incorrectas. En el ítem c), aunque menos de la mitad de los participantes proporcionó respuesta, la mayoría fueron categorizadas como parcialmente correctas y correctas (69,23 % de las 13 prácticas). Las estrategias predominantes en los ítems a) y b) fueron las de conjetura sin argumentación (41,5 % de las 53 prácticas), mayoritariamente incorrectas, y las deductivas (33,96 %), principalmente correctas en el ítem a). En el ítem c), prevalecieron las estrategias inductivas (53,84 %), generalmente correctas, y en el ítem d), las conjeturas sin argumentación (29,16 %) y las estrategias abductivas (25 %), ambas incorrectas en su mayoría.

Por otro lado, nos interesa analizar el nivel de formalización desarrollado según los tipos de estrategias empleadas (Tabla 2), valorando si existe relación con la pertinencia en la solución a la tarea (Tabla 3).

Según muestra la Tabla 2, las prácticas matemáticas son esencialmente de nivel 4 RAE (un 62,22 % de las prácticas, repartidas fundamentalmente entre conjeturas sin argumentación o deductivas), debido al uso de parámetros; o de nivel 0 RAE (un 28,89 % de las prácticas, en su mayoría asociadas a argumentaciones inductivas), debido a la particularización o el uso de ejemplos con números enteros concretos. Son anecdóticas las prácticas de carácter proto-algebraico incipiente de nivel 1 RAE, vinculadas a la expresión en lenguaje natural de reglas generales, o aquellas de nivel 5 RAE (en argumentaciones deductivas) en las que se opera con parámetros.

Tabla 2
Estrategias según los niveles RAE

Estrategia	Frecuencia												Total
	Ítem a			Ítem b			Ítem c		Ítem d				
	N0	N4	N5	N0	N1	N4	N0	N4	N0	N1	N4	N5	
Abductiva	0	0	0	1	0	4	0	0	1	3	2	0	11
Inductiva	5	0	0	3	0	0	6	1	3	1	0	0	19
Deductiva	0	9	1	0	1	7	0	0	0	0	2	1	21
Deductiva por contraejemplo	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	1	0	4
Conjetura sin argumentación	0	10	0	0	0	12	0	6	4	1	2	0	35
Total	5	19	1	4	1	23	6	7	11	5	7	1	90

Nota. N0 = Nivel 0 de RAE; N1 = Nivel 1 de RAE; N4 = Nivel 4 de RAE; N5 = Nivel 5 de RAE.

Como se puede observar en la Tabla 3, el carácter más o menos algebraico de la actividad matemática no determina la pertinencia de la solución. La actividad matemática en el 69,56 % de las respuestas correctas y parcialmente correctas se sitúa en un nivel 4 o 5 (mayormente deductivas y conjeturas sin argumentación), pero también eran de este nivel el 62,68 % de las respuestas incorrectas (más de la mitad conjeturas sin demostración, pero también deductivas y abductivas).

Tabla 3
Pertinencia según los niveles RAE

Estrategia	Frecuencia												Total
	Ítem a			Ítem b			Ítem c		Ítem d				
	N0	N4	N5	N0	N1	N4	N0	N4	N0	N1	N4	N5	
Incorrecta	4	13	0	4	0	23	1	3	11	5	3	0	67

Tabla 3

Pertinencia según los niveles RAE

Estrategia	Frecuencia												Total
	Ítem a			Ítem b			Ítem c		Ítem d				
	N0	N4	N5	N0	N1	N4	N0	N4	N0	N1	N4	N5	
Parcialmente correcta	1	1	0	0	0	0	0	3	0	0	4	0	9
Correcta	0	5	1	0	1	0	5	1	0	0	0	1	14
Total	5	19	1	4	1	23	6	7	11	5	7	1	90

Finalmente, en la Tabla 4 se describen los tipos de respuestas incorrectas detectadas en las producciones. En el 47,76 % de las soluciones se observa un uso inadecuado de propiedades aritméticas, identidades notables o cálculos sintácticos (ver Figuras 2, 3 o 9). En menor medida, se introducen nuevos literales en la expresión propuesta (un 11,94 % del total de las prácticas, fundamentalmente en los tres primeros ítems, ver Figura 4), se proponen rango de valores de validez incorrectos (7,46 % del total, principalmente en c) y d), ver Figura 8) o se enuncian fórmulas siempre falsas en b) o siempre verdaderas en c) (20,89 % del total, ver Figura 6).

Tabla 4

Tipos de respuestas incorrectas

Ítem	Descripción	Frecuencia
a	Fórmula solo válida para valores particulares de a y b obtenida por un mal uso de propiedades aritméticas o de cálculo sintáctico	8
	Uso de la identidad incorrecta $(a-b)^2 = (a-b) \times (a+b)$ para deducir $(a-b)^2 = a^2 - b^2$	4
	Inclusión de nuevos literales en la expresión propuesta.	3
	Uso de la identidad incorrecta $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ para deducir $(a-b)^2 = (a-b) \times (a+b)$	2
b	Fórmula válida en valores particulares de a y b derivada de propiedades aritméticas	6
	Se considera $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ siempre falsa	5
	Se considera $(a-b)^2 = (a+b)^2$ siempre falsa	4
	Se considera $(a-b)^2 = a^2 + b^2$ siempre falsa	4

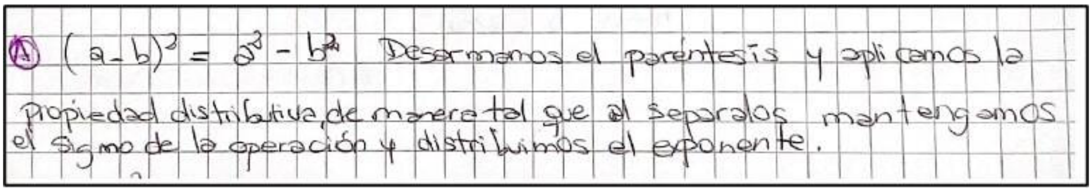
Tabla 4

Tipos de respuestas incorrectas

Ítem	Descripción	Frecuencia
	Uso de una identidad notable incorrecta	4
	Inclusión de nuevos literales en la expresión propuesta	3
	No reconocer que b no puede ser 0 en la expresión $\frac{a}{b}$	1
c	Inclusión de nuevos literales en la expresión propuesta	2
	Proponer una identidad verdadera para todo valor de a y b	1
	Rango incorrecto de valores de validez de la fórmula.	1
d	Uso inadecuado de la propiedad: si $x < y$ entonces $x^2 < y^2$, para argumentar que $(a+b)^2 > a^2 + b^2$ es siempre verdadera	4
	Rango incorrecto de valores de validez de $(a+b)^2 > a^2 + b^2$	4
	Usar $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ como garantía para asegurar la falsedad de la propiedad	3
	Propuesta de contraejemplo inadecuado	3
	Afirmar la validez de $(a+b)^2 > a^2 + b^2$ mediante un caso particular	1
	Usar $(a+b)^2 < a^2 + b^2$ como garantía para asegurar la falsedad de la propiedad	1

A continuación, se presentan ejemplos representativos de las estrategias seguidas por los estudiantes según la argumentación empleada (Tabla 1), identificando el nivel RAE asociado (Tabla 2) en base a los objetos y procesos implicados y los conflictos más frecuentes (Tabla 4).

El tipo de respuesta errónea más frecuente en el ítem a) lleva a generar expresiones que son solo válidas para determinados valores de los símbolos literales (frecuentemente cuando uno de ellos es 0 y el otro está en función de él). En este caso, se observa el uso inapropiado de reglas de procedimiento o propiedades, por ejemplo, con el cuadrado de un número negativo, el uso de paréntesis ($(a-b)^2 = (a+1-b+1)^2$, E21) o especialmente con la propiedad distributiva, observado también en investigaciones previas con estudiantes universitarios (Larios-Osorio et al., 2021; Mujib, 2015). Por ejemplo, en la Figura 2 se muestra la respuesta de E24, quien emplea una argumentación deductiva incorrecta. El error radica en el uso inadecuado de la propiedad distributiva en el tratamiento analítico de la expresión $(a-b)^2$. En su solución, los símbolos literales actúan como parámetros y no se opera con ellos, por lo que el nivel RAE es 4 (Godino et al., 2015).



A) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ Desarmamos el paréntesis y aplicamos la propiedad distributiva de manera tal que al separarlos mantengamos el signo de la operación y distribuimos el exponente.

Figura 2. Respuesta de E24 al ítem a. Argumentación deductiva. Nivel 4 RAE. Incorrecta.

En sus prácticas se combinan procesos de idealización y representación con la generalización, pues se parte de a y b enteros concretos arbitrarios y mediante el uso de una propiedad general (aplicada no adecuadamente), se obtiene una regla general para todo entero.

En la entrevista realizada por la investigadora (I) a E24, la estudiante reconoce el error de haber aplicado la propiedad distributiva en la resta:

> *Claro, yo hice la propiedad distributiva pero no se aplicaba en este caso, porque se aplica en la multiplicación, en la suma y en la resta no se aplica. Pero en el momento no me salía, la apliqué y después me di cuenta que estaba mal aplicada (E24)*

También, en esta entrevista, se evidencian dificultades relacionadas con la definición abstracta de la potencia de un entero, y la necesidad de particularizar la base.

I: ¿Qué significa el cuadrado de un número?

E24: Es la cantidad de veces por la que se multiplica la base.

I: En este caso, ¿qué significará $(a-b)^2$? ¿Cómo lo podemos escribir?

E24: No responde.

I: Fijémonos, ¿por qué podemos decir que tres al cuadrado es nueve?

E24: Porque multiplicas dos veces la base, por sí mismo.

I: Entonces con esa idea, ¿qué podrías hacer con la expresión $(a-b)^2$?

E24: Tengo que reemplazarla por números donde a sea mayor que b, ¿no?

I: No hace falta, debemos buscar una expresión algebraica general. ¿Quién es la base acá $(a-b)^2$?

E24: Primero tengo que restar.

I: No hace falta que resuelvas, no importa cuánto da, es algo general.

I: Esta expresión (señala $a-b$) es la base, entonces elevarla al cuadrado significa que vamos a multiplicar dos veces ¿a quién?

E24: A $a-b$

I: ¿$a - b$ por quién?

E24: Por $a - b$.

Las fórmulas dadas para el ítem a) con mayor frecuencia son $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ y $(a - b)^2 = (a - b) \times (a + b)$, derivadas principalmente de una interpretación inapropiada de las identidades notables asociadas. En otros casos, recurren como garantía a una de estas reglas para deducir otra identidad igualmente inapropiada. Por ejemplo, E30 incluye "$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$, apliqué la propiedad distributiva". Como se observa en la Figura 3, E15 aplica la misma expresión general incorrecta en un caso particular ($(3 - 4)^2$ como $(3 - 4) \times (3 + 4)$) para validar una expresión general, que solo es cierta si $b = 0$ o $a = b$. La argumentación inductiva es inapropiada pues, además, la comprobación en un caso particular no es suficiente para asegurar la validez general de la regla. Las prácticas se fundamentan en operaciones con números enteros particulares y la aplicación de propiedades por lo que su nivel RAE es 0 (Godino et al., 2015). Se combinan procesos de generalización y representación en la explicitación de la regla general $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, con procesos de particularización en la consideración de un caso particular de la regla $(a - b)^2 = (a - b) \times (a + b)$.

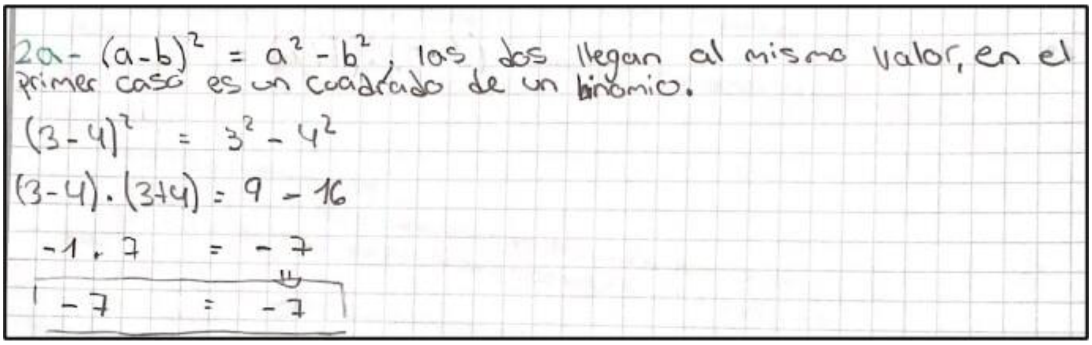


Figura 3. Respuesta de E15 al ítem a. Argumentación inductiva. Nivel 0 RAE. Incorrecta.

Finalmente, generan expresiones que llevan a introducir nuevos símbolos literales que se validan mediante valores particulares (ver Figura 4).

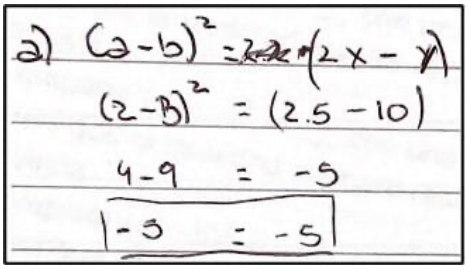


Figura 4. Respuesta de E17 al ítem a. Argumentación inductiva. Nivel 0 RAE. Incorrecta.

Con relación a las respuestas correctas para el ítem a), las fórmulas generadas con mayor frecuencia son $(a-b)^2 = (a-b) \times (a-b)$ y $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \times b$. En la Figura 5 se muestra la respuesta de E19, quien propone una argumentación deductiva que le permite generar la regla $(a-b)^2 = 2a \times (-b) + a^2 + b^2$. En sus prácticas, se reconocen dos aspectos del significado relacional del signo igual reconocidos por Jones et al. (2012): el de sustitución (reemplazo de una representación por otra) y el de mismidad (lo que está a la izquierda y a la derecha del signo igual significan lo mismo, son dos formas de expresar la misma cuenta). Se opera con los símbolos literales, que actúan como números generalizados, por lo que el nivel RAE es 5.

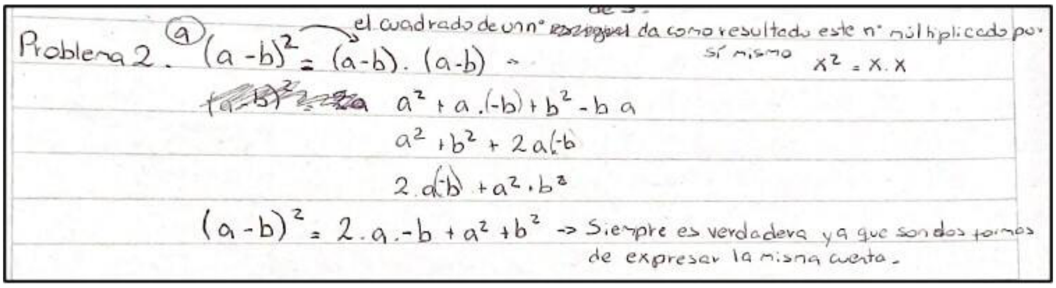


Figura 5. Respuesta de E19 al ítem a. Argumentación deductiva. Nivel 5 RAE. Correcta.

E19 emplea los conceptos de números enteros, cuadrado (el cuadrado de un número da como resultado este número multiplicado por sí mismo), suma, diferencia, producto, equivalencia de expresiones algebraicas y propiedades distributiva y conmutativa de la suma en $\mathbb{Z}$. Los procesos de materialización y representación para evocar con los ostensivos a y b dos enteros concretos arbitrarios se combinan con procesos de descomposición para operar analíticamente sobre la expresión $(a-b)^2 = (a-b) \times (a-b)$ y de generalización para explicitar una regla general.

En el ítem b) los estudiantes debían generar una fórmula que fuera siempre falsa. Sin embargo, obtienen fórmulas que son válidas para algunos valores de a y b, por ejemplo, es frecuente encontrar $(a-b)^2 = 2(a-b)$, considerando como E4 que una expresión algebraica al cuadrado significa que se multiplica por sí misma, no por 2. Cuando proponen que $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ es siempre falsa, se basan como E19 en que la propiedad distributiva solo se aplica a multiplicación y división o como E27 en que la potencia no es distributiva en la suma ni en la resta.

En la entrevista con E19, la estudiante reconoce el error en el uso de la propiedad distributiva y propone un contraejemplo que le permite ver que la igualdad se cumple, reconociendo finalmente que es válida cuando $a = b$.

I: ¿No habrá algún valor de a y b para el cual esto no sea falso?

E19: Ah, bueno, puede ser para el cero. O sea, si a y b son cero, cero menos cero es cero y cero al cuadrado es cero, y cero al cuadrado menos cero al cuadrado es cero..

I: Además del cero, ¿se te ocurre algún otro ejemplo?

E19: El uno también.

I: ¿Algún otro?

E19: Claro, si a y b son iguales.

I: ¿Cuál es tu conclusión entonces?

E19: Si a y b son iguales, la igualdad sí se cumple.

Aquellos que afirman que $(a - b)^2 = (a + b)^2$ es siempre falsa se refieren a que la suma y la resta son operaciones contrarias y, por tanto, las expresiones generadas nunca podrían ser equivalentes, tal como se muestra en la Figura 6. E18 emplea una argumentación abductiva basando su argumento en una posible explicación que justifica su conclusión (Arce y Conejo, 2019). Es incorrecta porque para $a = 0$ o $b = 0$ la igualdad es válida, por lo que no es falsa para todo valor de a y b. Los símbolos literales actúan como parámetros, pero no se opera con ellos, siendo esto indicativo de nivel 4 RAE.

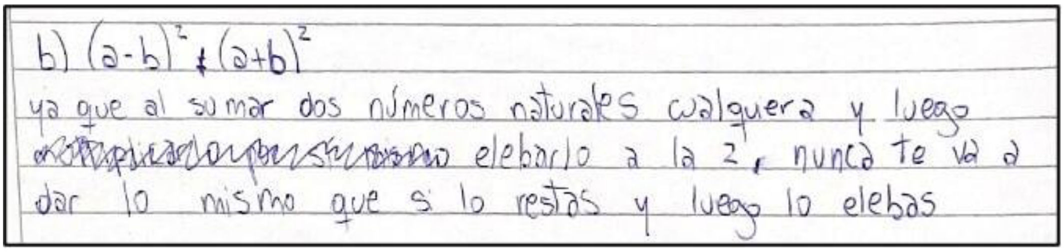

b) $(a-b)^2 \neq (a+b)^2$
ya que al sumar dos números naturales cualquiera y luego
elebarlo a la 2, nunca te va a
dar lo mismo que si lo restas y luego lo elebas

Figura 6. Respuesta de E18 al ítem b. Argumentación abductiva. Nivel 4 RAE. Incorrecta.

En otros casos, cuando indican que $(a - b)^2 = a^2 + b^2$ es siempre falsa, comprueban su falsedad en un caso particular. Es significativo que algunos participantes usaron como identidad válida $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, pero después la manipularon, considerando que como a es distinto de a^2, entonces la expresión $(a - b)^2 = a - b^2$ será falsa.

Además, se observaron nuevamente dificultades con las identidades notables, por ejemplo, se observa en la entrevista con E30, quien propuso en el escrito

“ $(a-b)^2 = [(a+b) \times (a-b)] + 1$ porque si $a = b$ entonces $a \neq b + 1$ ”, reconociendo “me confundí porque interpreté esa $(a-b)^2$ como $a^2 - b^2$, que son dos cosas totalmente distintas”.

En el ítem c), aunque únicamente respondieron 13 estudiantes, hubo mayor número de respuestas correctas o parcialmente correctas. Utilizan fundamentalmente la fórmula $(a-b)^2 = a^2 - b^2$, con argumentaciones inductivas que muestran un caso particular que hace verdadera la igualdad y otro que la hace falsa, como muestra la Figura 7.

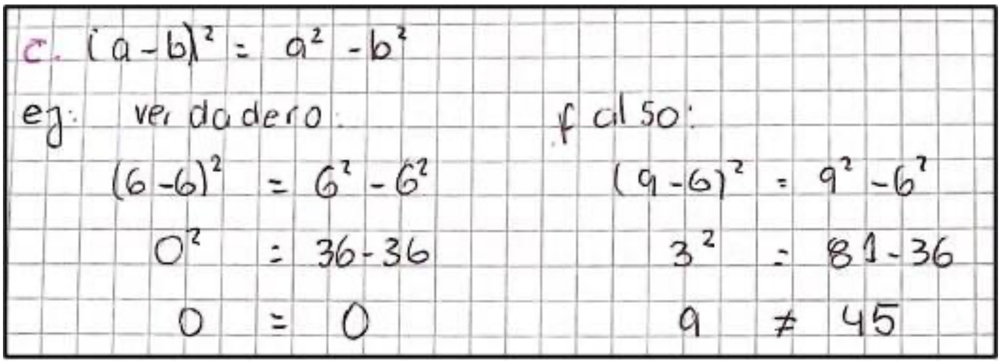


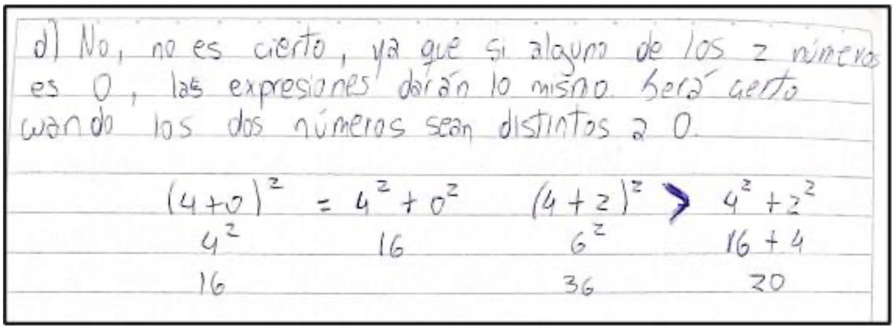
Figura 7. Respuesta de E4 al ítem c. Argumentación inductiva. Nivel 0 RAE. Correcta.

E4 particulariza la regla general $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ para mostrar un ejemplo que la hace verdadera y otro que la hace falsa. La actividad matemática es de naturaleza aritmética, pues intervienen operaciones entre números enteros, lo cual es indicativo de nivel 0 RAE.

En este ítem, las soluciones de nivel 4 de RAE corresponden a aquellas en las que los estudiantes dan una regla general que involucra parámetros, pero no operan con ellos para obtener formas canónicas. Por ejemplo, E30 propone “$(a-b)^2 = a^2 + b^2$ [es a veces verdadera y a veces falsa]”. Fija el valor de uno de los parámetros $b = 0$ y se basa en la propiedad “$(a-0)^2 = a^2 + 0$” para deducir que su fórmula es válida siempre que uno de ellos sea 0. Después propone un ejemplo que hace falsa la igualdad ($a = 2$ y $b = 1$).

Los estudiantes que proponen fórmulas incorrectas en el ítem c) escriben expresiones que son siempre válidas o enuncian reglas que incluyen nuevos símbolos literales, por ejemplo, E6 propone $(a-b)^2 = c - (a-b)^c$ sin mayor justificación.

En el ítem d) se observan frecuentemente conjeturas sin argumentación, que los llevan a proponer un rango de valores de validez de la fórmula incorrecto o parcial, por ejemplo, “será cierto siempre y cuando no influyan números negativos” (E12), o “será cierto cuando b [sea] mayor que a" (E21). En menor medida, se observan conjeturas incorrectas argumentadas de manera inductiva, tal como se puede observar en la Figura 8. E18 refuta la veracidad general de la desigualdad mediante un contraejemplo ($a = 4$ y $b = 0$), empleando una argumentación inductiva para afirmar una conjetura incorrecta (que la desigualdad es cierta cuando los dos números son distintos a 0), y comprobando su conjetura únicamente cuando ambos son positivos.



d) No, no es cierto, ya que si alguno de los 2 números es 0, las expresiones darán lo mismo. Será cierto cuando los dos números sean distintos a 0.

$(4+0)^2 = 4^2+0^2$ $(4+2)^2 > 4^2+2^2$

4^2 16 6^2 $16+4$

16 36 20

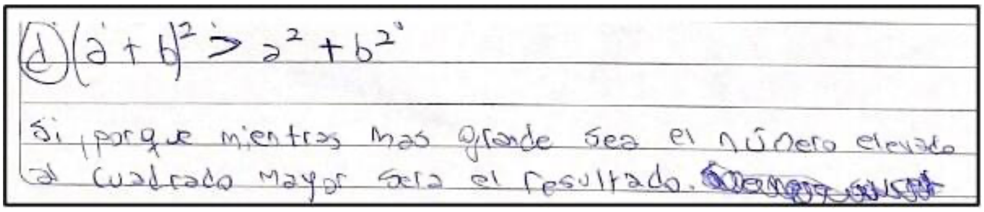
Figura 8. Respuesta de E18 al ítem d. Argumentación inductiva. Nivel 1 RAE. Incorrecta.

La actividad del estudiante se considera proto-algebraica de nivel 1, pues expresa la regla general en lenguaje natural, emplea el sentido de mismidad del signo igual y la relación de orden en números enteros.

En la entrevista con E18, el estudiante reaccionó favorablemente ante la propuesta de un contraejemplo a su conjetura inicial "será cierto cuando los dos números sean distintos a cero", dando cuenta que:

> *No será cierto siempre. No lo es cuando uno de los dos es cero, o cuando los dos son cero o cuando uno de los dos es negativo. Porque si los dos son positivos y los dos son negativos está bien (E18)*

También es usual que justifiquen mediante argumentaciones abductivas la veracidad de la desigualdad dada para todo a y b (incorrecto), probablemente debido a un análisis deficiente de la conjetura (García y Morales, 2013) o al uso de garantías incorrectas, como se muestra en la Figura 9.



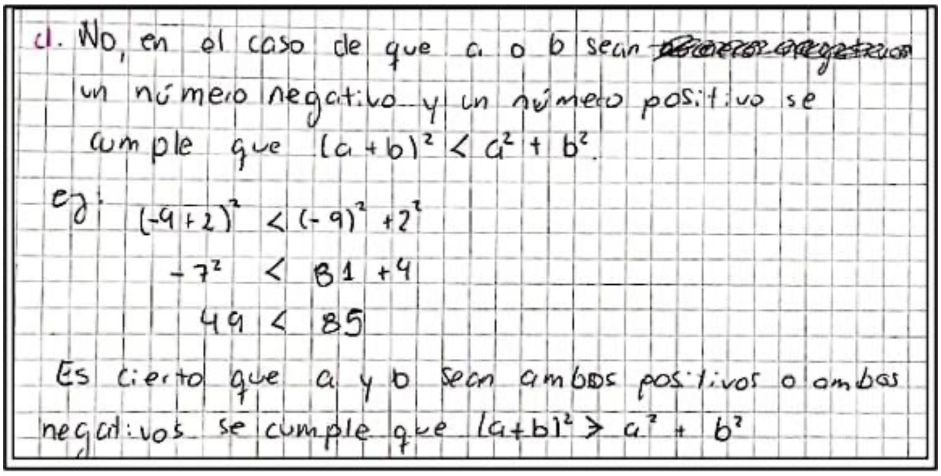
d) $(a+b)^2 > a^2+b^2$

Si, porque mientras mas grande sea el número elevado al cuadrado mayor será el resultado.

Figura 9. Respuesta de E26 al ítem d. Argumentación abductiva. Nivel 1 RAE. Incorrecta.

Destaca la aplicación inadecuada de la propiedad: si $x < y$ entonces $x^2 < y^2$ que, si bien es válida para números naturales, no lo es sobre números enteros. E26 expresa una propiedad general en lenguaje natural por lo que el nivel de RAE es 1. Aunque la propiedad sea cierta en un conjunto dado, no es una garantía que se pueda aplicar para derivar la conclusión pretendida.

Con menor frecuencia se presentaron respuestas parcialmente correctas, como se observa en la Figura 10, donde E4 emplea una argumentación deductiva por contraejemplo para mostrar que la desigualdad no siempre es válida (toma $a = -9$ y $b = 2$ para mostrar que no siempre $(a + b)^2 > a^2 + b^2$) y expresa una regla general correcta para dar cuenta los casos donde es válida, aunque no la argumenta. Los símbolos literales actúan como parámetros, pero no se opera con ellos, por lo que el nivel de RAE es 4.



d. No, en el caso de que a o b sean ~~[illegible]~~ un número negativo y un número positivo se cumple que $(a+b)^2 < a^2 + b^2$.

ej: $(-9+2)^2 < (-9)^2 + 2^2$

$-7^2 < 81 + 4$

$49 < 85$

Es cierto que a y b sean ambos positivos o ambos negativos se cumple que $(a+b)^2 > a^2 + b^2$

Figura 10. Respuesta de E4 al ítem d). Deductiva por contraejemplo. Nivel 4 RAE. Parcialmente correcta.

E4 emplea los conceptos de números enteros, suma, cuadrado y relación de orden, transitando por procesos de particularización en la consideración de un caso particular que permite refutar la conjetura, y de generalización, que llevan a la regla general "[siempre] que a y b sean ambos positivos o ambos negativos se cumple $(a + b)^2 > a^2 + b^2$".

Discusión y conclusiones

Desde el campo de la Educación Matemática se considera la demostración como un aspecto fundamental de la enseñanza y aprendizaje de la disciplina (Knuth et al., 2019; Mariotti et al., 2018; Staples y Conner, 2022; Stylianides et al., 2023). Además, se insiste en que promover la participación de los estudiantes en los procesos argumentativos asociados a la demostración es esencial para los procesos de aprendizaje en general y de las matemáticas en particular (Knipping y Reid, 2019).

Los investigadores en Educación Matemática han abordado tanto la importancia de las demostraciones en la práctica matemática como las dificultades que enfrentan los estudiantes al intentar construir demostraciones. Sin embargo, la mayoría del trabajo sobre demostraciones implica tareas que instan a los estudiantes a demostrar un resultado dado, cuando el trabajo matemático lleva a enfrentarse a la elección de intentar probar o intentar refutar una afirmación (Lew y Zazkis, 2019). Dada la importancia de las conjeturas en la práctica matemática experta, y el hecho de que las conjeturas son intrínsecamente tareas de pensamiento matemático auténtico, es importante analizar cómo estudiantes universitarios generan, prueban o refutan conjeturas (Lew y Zazkis, 2019).

Con esta idea, propusimos a estudiantes que accedían a las carreras de grado de matemáticas y física en una universidad argentina, una situación que involucraba la formulación y justificación de proposiciones en un contexto algebraico. Los resultados muestran que, en muchas ocasiones, los estudiantes respondieron a los ítems a), b) y d) enunciando reglas sin argumentarlas y, en muchas otras, recurrieron a argumentaciones inductivas o abductivas que, si bien son fundamentales en la exploración y comprensión de conjeturas, no permiten validar el conocimiento matemático de manera general (Arce y Conejo, 2019; Knuth et al., 2019; Molina y Samper, 2019). Este tipo de prácticas marcan fuertes distancias conceptuales con la actividad argumentativa pretendida en el nivel superior (Larios-Osorio et al., 2021). Por otro lado, aunque también se observaron argumentaciones deductivas, necesarias para el desarrollo formal de demostraciones (Alfaro-Carvajal et al., 2019), en muchos casos fueron incorrectas debido al uso como garantía de propiedades falsas (identidades erróneas sobre el cuadrado de la diferencia en los dos primeros ítems o la propiedad si $x, y \in \mathbb{Z},\ x < y$ entonces $x^2 < y^2$ en el último). Algunos de estos errores pueden estar motivados por la aplicación mecánica de técnicas algebraicas sin reflexionar sobre sus significados (Vega-Castro et al., 2012) o por descuidar la importancia del conjunto en el que una propiedad tiene validez (Pedemonte, 2008). La insistencia a la hora de argumentar afirmaciones falsas (Lew y Zazkis, 2019) observada en el ítem d) muestra también la necesidad de reforzar el papel de los ejemplos y los contraejemplos en el proceso de demostración.

Aunque un mayor número de estudiantes no resolvieron el ítem c), la mayoría de los que respondieron lo hicieron de forma correcta empleando estrategias inductivas (tal como motivaba el enunciado) o parcialmente correcta proponiendo conjeturas adecuadas sin argumentación. Al igual que en algunos casos de los otros ítems, se evidencia que los estudiantes asumen la suficiencia de la prueba en casos particulares para asegurar la validez general de una afirmación (Stylianides y Stylianides, 2017), sin reflexionar sobre los elementos que son necesarios y suficientes para construir una demostración.

El análisis de sus prácticas matemáticas en términos del grado de formalización muestra una actividad matemática de naturaleza algebraica (esencialmente de nivel 4 RAE) en la mayoría de las producciones, aunque también se observaron argumentaciones informales con carácter aritmético. Nos ha permitido comprobar, en contra de lo esperado, que el carácter más algebraico no garantiza un mayor éxito en la resolución de la tarea, lo que se justifica en cierta medida por la alta presencia de conjeturas sin demostración.

A pesar de las dificultades observadas en los escritos, las entrevistas realizadas a los estudiantes les permitieron tomar conciencia de sus errores y reconstruir argumentos inicialmente incorrectos o incompletos. En particular, los siete estudiantes construyeron contraejemplos válidos que refutaban las fórmulas cuestionadas, y propusieron conjeturas apropiadas, avanzando en algunos casos hacia la argumentación de estas. Invitar a los estudiantes a compartir sus pensamientos y proporcionar explicaciones adicionales a las manifestadas en sus escritos permite, por un lado, que los profesores accedan a su comprensión sobre la demostración (Zhuang y Conner, 2022) y por otro, que los mismos estudiantes avancen desde una forma mecanizada en su forma de pensar hacia una más reflexiva (Barreiro et al., 2008).

Este trabajo pone al descubierto la necesidad de brindar oportunidades al alumnado para participar en situaciones que involucren diferentes procesos argumentativos desde sus primeros años de formación, con el objetivo de lograr un aprendizaje consolidado de la demostración. De cara a futuras investigaciones, consideramos necesario ampliar este estudio con estudiantes de educación secundaria y de otras carreras universitarias, así como también mejorar y ampliar la variedad de tareas propuestas a los estudiantes, de manera que nos ayude a comprender globalmente los significados que poseen ante los procesos argumentativos asociados a la demostración.

Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y FEDER, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

Referencias

Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P. y Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: Significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia, 33*(2), 55-75. https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: Relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática.* Una empresa docente. https://hal.science/hal-00520133v1

Barreiro, P., Falsetti, M., Formica, A., Marino, T. y Mellincovsky, D. (2008). Estudio cualitativo del aprendizaje de la validación en matemática: Avances en base al análisis de protocolos de clase. *Revista Educación Matemática*, *23*, 1-17. https://doi.org/10.33044/revem.10441

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-22. https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844182013

Burgos, M. y Godino, J. D. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática, 31*(3), 117-150. https://doi.org/10.24844/em3103.05

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. https://digibug.ugr.es/handle/10481/1581

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. y Francisco, R.T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 401-429. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Crespo, C., Farfán, R. y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: Una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME*, *13*(3), 283-306.

Ely, R. y Adams, A. E. (2012). Unknown, placeholder, or variable: What is x? *Mathematics Education Research Journal, 24*(1), 19-38. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0029-9

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Journal for the Study of Education and Development: Infancia y Aprendizaje,* 33(1), 89-105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Gaita, R. y Wilhelmi, M. R. (2019). Desarrollo del razonamiento algebraico elemental mediante tareas de recuento con patrones. *Bolema, 33*(63), 269-289. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a13

García, O. y Morales, L. (2013). El contraejemplo como recurso didáctico en la enseñanza del cálculo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática: UNIÓN*, 35, 161-175.

Giayetto, M., Markiewicz, M. E. y Etchegaray, S. (2023). Personal meanings in the formulation and argumentation of conjectures by high school students. *Uniciencia, 38*(1), 1-21. https://doi.org/10.15359/ru.38-1.1

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The ontosemiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática - AIEM, 8*, 117-142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P. y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 3-21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C. y Dowens, M. (2012). Substitution and sameness: Two components of a relational conception of the equals sign. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*(1), 166-176. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.05.003

Knipping, C. y Reid, D. A. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in Mathematics Education* (pp. 3-31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_1

Knuth, E., Zaslavsky, O. y Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *The Journal of Mathematical Behavior, 53*, 256-262. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.002

Larios-Osorio, V., Spíndola-Yáñez, P. I., Cuevas-Salazar, O. y Castro, J. (2021). Conflictos semióticos y niveles de algebrización en aspirantes a Ingeniería. *Educación Matemática, 33*(3), 263-289. https://doi.org/10.24844/em3303.10

Lew, K. y Mejía-Ramos, J. P. (2019). Linguistic conventions of mathematical proof writing at the undergraduate level: Mathematicians' and students' perspectives. *Journal for Research in Mathematics Education, 50(2)*, 121-155. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.2.0121

Lew, K. y Zazkis, D. (2019). Undergraduate mathematics students' at-home exploration of a prove-or-disprove task. *The Journal of Mathematical Behavior, 54*, 100674. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.09.003

Mariotti, M., Durad-Guerrier, V. y Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in Mathematics Education: Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 75-89). Routledge.

Markiewicz, M. E. (2023). *Integración a la cultura académica profesorado y licenciatura en matemática discreta* [Manuscrito no publicado]. Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina.

https://drive.google.com/file/d/1Rhj1HpAetn8gHl90QBvT7oRe0bHlmk_H/view
Markiewicz, M. E., Milanesio, B. y Etchegaray, S. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática: UNIÓN, 17*(62), 1-21.
Marraud, H. (2007). La analogía como transferencia argumentativa. *THEORIA. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science, 22*(2), 167-188. https://doi.org/10.1387/theoria.466
Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: Un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484
Molina, O. y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema, 33*(63), 109-134. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a06
Morales-Ramírez, G., Rubio-Goycochea, N. y Larios-Osorio, V. (2021). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema, 35*(70), 664-689. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06
Mujib, A. (2015). Analysis of student difficulties in constructing mathematical proof on discrete mathematics course. En T. Hidayat, A. Widodo, W. Sopandi, R. Rosjanuardi, A. Jupri y L. Riza (Eds.), *Proceedings of International Seminar on Mathematics, Science, and Computer Science Education* (pp. 49-55). Universitas Pendidikan Indonesia.
Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education, 40*(3), 385-400. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0085-0
Pedemonte, B. y Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 104-122. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.008
Rocha, H. (2019). Mathematical proof: From mathematics to school mathematics. *Philosophical transactions of the royal society: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *377*(2140), 20180045. https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0045
Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra.* Libros del zorzal.
Soler-Álvarez, M. y Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 191-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1026
Staples, M. y Conner, A. (2022). Introduction: Conceptualizing argumentation, justification, and proof in mathematics education. En K. Bieda, A. Conner, K. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and Consequences of Mathematical*

Argumentation, Justification and Proof (pp. 1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6

Stylianides, A. J., Bieda, K. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En A. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 315-351). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2017). Based Interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 119-127. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Moutsios, A. (2023). Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. *ZDM Mathematics Education*, *56*(1), 47-59. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237-266). NCTM

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME, 15*(2), 233-258.

Zhuang, Y. y Conner, A. (2022). Secondary mathematics teachers' use of students' incorrect answers in supporting collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 26*(2), 208-231. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2067932

Bettina Milanesio
Universidad Complutense de Madrid, España
bettinamilanesio@gmail.com

María Burgos
Universidad de Granada, España
mariaburgos@ugr.es

Recibido: marzo, 2024. Aceptado: octubre, 2024
doi: 10.30827/pna.v19i3.30473

ISSN: 1887-3987

HOW UNIVERSITY STUDENTS FORMULATE AND ARGUE ALGEBRAIC IDENTITIES

Bettina Milanesio and María Burgos

Proving is an indispensable practice in mathematical work, so a fundamental objective of mathematics education should be for students to produce, understand, and appreciate proofs by participating in proof practices throughout their education. Although proof is present in secondary level mathematics classes, students at higher levels still exhibit significant difficulties in developing proofs with the expected degree of formality, particularly in the algebraic context.

The aim of this study is to analyze the argumentative processes associated with proof proposed by students at the beginning of their university studies when faced with a situation involving algebraic identities. This situation offers the opportunity to implement various argumentative processes, such as the use of examples and counterexamples, formulating conjectures, searching for conditions to satisfy conjectures, and proposing proofs to validate them. We use in an articulated way the model of levels of algebraic reasoning, developed in the Ontosemiotic Approach, to analyze the degree of formalization and generality of the objects and processes involved in the argumentations proposed by students, and Toulmin's model to identify and classify the proposed argumentative structures.

The results show that despite mathematical activity being essentially algebraic in nature, students do not develop arguments that allow for the validation or falsification of the proposed algebraic identities. Contrary to expectations, we have found that a more algebraic nature does not guarantee greater success in solving the task, which is partially justified by the high presence of conjectures without proofs.

The difficulties encountered originate fundamentally from considering proof in particular cases as sufficient and the inappropriate use of procedural rules or properties. Despite these difficulties observed in their writing, discussions conducted in some interviews allowed students to recognize their mistakes and reconstruct initially incorrect or incomplete arguments.

This study highlights the need to provide students with opportunities to participate in situations involving argumentative processes from the early years of their education to achieve a consolidated understanding of the proof.