

SENTIDOS ATRIBUÍDOS AOS DESENHOS DO MODELO DE BARRAS DE SINGAPURA NA LITERATURA

Luiz Augusto Richit e Adriana Richit

Essa revisão de literatura busca responder à questão: Quais os sentidos associados aos desenhos do Modelo de Barras de Singapura são revelados pela literatura sobre a temática? O material empírico do estudo foi constituído mediante busca realizada nas plataformas Scopus e ERIC, resultando em 15 artigos. A análise, de natureza interpretativa-qualitativa, evidenciou que os desenhos do Modelo de Barras assumem distintos sentidos a partir dos autores analisados. Esses sentidos revelam distintas dimensões que caracterizam o Modelo de Barras e ampliam a compreensão sobre os processos matemáticos relacionados ao seu uso sob a perspectiva do ensino da Matemática.

Palavras-chave: Desenhos; Matemática de Singapura; Modelo de Barras de Singapura; Representações visuais; Resolução de problemas

Meanings attributed to drawings of the Singapore Bar Model in the Literature

This literature review seeks to answer the question: What are the meanings associated with the drawings of the Singapore bar model method revealed by the literature on the issue? The empirical material for the study was compiled through a search carried out on the Scopus and ERIC platforms, resulting in 15 articles. Interpretative-qualitative analysis showed that the drawings of the bar model assume different meanings based on the analyzed authors. These meanings reveal different dimensions that characterize the bar model method and broaden the understanding of the mathematical processes related to its use from the perspective of mathematics teaching.

Keywords: Drawings; Problem-solving; Singapore Bar Model; Singapore Mathematics; Visual representations

Sentidos atribuídos a los dibujos del Modelo de Barras de Singapur en la literatura

Esta revisión de literatura intenta responder la pregunta: ¿Cuáles los sentidos asociados a los dibujos del Modelo de Barras de Singapur son revelados por la literatura sobre la temática? El material empírico del estudio fue obtenido a través de una búsqueda realizada en las plataformas Scopus y ERIC, resultando en 15 artículos. El análisis interpretativo-cualitativo ha demostrado que los dibujos del Modelo de Barras asumen distintos sentidos entre los autores. Estos sentidos revelan diferentes dimensiones que caracterizan al Modelo de Barras y amplían la comprensión sobre los procesos matemáticos en relación a su uso desde un punto de vista de la enseñanza de las Matemáticas.

Términos clave: Dibujos; Matemáticas de Singapur; Modelo de Barras de Singapur; Representaciones visuales; Resolución de problemas

Uma reforma educacional iniciada pelo Ministério da Educação de Singapura em 1978-1979 deu origem, em 1981, a um Novo Sistema Educacional (Kaur, 2015, 2019). Naquele contexto, a baixa proficiência na resolução de problemas de estudantes de 2º a 4º anos do ensino escolar regular do referido país (Englard, 2010; Kho et al., 2009; Spencer e Fielding, 2015) levou o professor Tek Hong Kho, em 1982, a inovar um método: modelos visuais para representar e resolver problemas verbais (*word problems*¹) (Kaur, 2019). O método apresentado por Kho (1987) tornou-se conhecido entre professores e alunos em Singapura como ‘*Model’ Method*’ (Looi e Lim, 2009; Ng e Lee, 2008) e nomeando como Modelo de Barras em português (Baldin, 2018; Richit e Richit, 2022) e em espanhol (Urbano et al., 2016). À época, a única coleção de livros didáticos de Singapura passou a incorporar, a partir de 1983, o Modelo de Barras em sua série *Primary Mathematics* 4A (Kaur, 2019; Kho et al., 2014; Ng, 2003). A bem-sucedida inclusão do Modelo de Barras como recurso instrucional em seus materiais didáticos se estendeu aos materiais escolares do 1º ao 4º anos (Kaur, 2019), e subsequentemente, para todo o primário (Kho et al., 2014) —do 1º ao 6º anos.

Nas décadas seguintes, o proeminente desempenho em Matemática obtido por estudantes de Singapura em avaliações como o PISA (*Programme for International Student Assessment*) e TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) chamaram atenção internacionalmente (Beckmann, 2004;

1 Referidos em português como ‘problemas verbais’ ou ‘problemas de palavras’, *word problems* caracterizam problemas que apresentam as seguintes características: descrições verbais em língua natural de situações-problema típicas do contexto escolar e para a qual a resposta pode ser obtida ou derivada diretamente das informações do problema (por exemplo, não envolvem estimativa, suposição ou pesquisa) (Verschaffel, 2020).

Kaur, 2019; Urbano et al., 2016), aspecto esse que mobilizou uma série de pesquisas sobre o ensino e sobre os materiais instrucionais no referido país.

Como consequência, resultados de estudos comparativos sobre livros didáticos de Singapura, conduzidos por diferentes autores (Beckmann, 2004; Cai et al., 2005; Cai et al., 2011; Martín et al., 2022; Vicente et al., 2020; Yeap et al., 2006), evidenciaram o uso de diagramas e representações visuais como um dos diferenciais que sustentam os melhores resultados em Matemática dos estudantes de Singapura, levando a uma ‘descoberta’ internacional do Modelo de Barras.

A presença do Modelo de Barras nos materiais didáticos escolares de Singapura ao longo das últimas décadas (Fan e Zhu, 2007; Ng, 2022) e a crescente atenção que esse Modelo tem recebido ao redor do mundo (Baysal e Sevinç, 2020; Garzon e Casinillo, 2021; Morina e Vondrová, 2021; Reyhani et al., 2020; Richit e Richit, 2022; Sunde et al., 2020; Thiyaagu, 2013; Urbano et al., 2016) fazem atualmente do Modelo de Barras a ‘joia da coroa’ do ensino de Matemática de Singapura (Ng, 2022).

As pesquisas centradas no uso do Modelo de Barras em diferentes contextos e anos escolares (Abdullah et al., 2017; Garzon e Casinillo, 2021; Kaur, 2019; Morin, 2017; Ng, 2015) ressaltam a sua versatilidade e efetividade para resolução de problemas verbais em distintos tópicos curriculares da Matemática (Kho et al., 2009; Richit e Richit, 2022). Os resultados desses estudos corroboram a afirmação de que os desenhos utilizados no Modelo de Barras não são simples ilustrações (Kaur, 2019). Ao contrário, os desenhos manifestam distintos sentidos quando tomados a partir de processos matemáticos e da aprendizagem matemática. Ao mesmo tempo, discussões a respeito dos sentidos atribuídos aos desenhos do Modelo de Barras são uma lacuna na literatura atual. Nessa perspectiva, realizamos uma pesquisa bibliográfica com objetivo de sintetizar os sentidos atribuídos aos desenhos do Modelo de Barras e os discutimos nesse texto. Essa análise pode trazer contribuições às discussões sobre a temática, desde o ponto de vista do ensino e do conhecimento do professor para o uso do Modelo de Barras, bem como da compreensão das nuances e perspectivas de uso e sobre a aprendizagem matemática dos estudantes relacionada a esses sentidos.

QUADRO TEÓRICO

Modelo de Barras de Singapura: os três modelos de Kho (1987)

A publicação intitulada *Mathematical models for solving arithmetic problems* (Kho, 1987) é considerada o texto pioneiro que apresenta o Modelo de Barras a partir de sua implementação em Singapura na década de 1980 (Kaur, 2019). Nesse texto, Kho (1987) apresenta três modelos para resolver problemas no domínio da aritmética: o modelo Parte-Todo (*Part-Whole model*), o modelo de Comparação (*Comparison model*) e o modelo de Modificação ou modelo Antes-depois (*Change model* ou *After-Before model*). Esses modelos visuais, sob a denominação Modelo de Barras, são utilizados no contexto das quatro operações matemáticas básicas (Beckmann, 2004) e originalmente não pressupõem o uso de incógnitas representadas por letras (Ho e Lowrie, 2014; Ng, 2003, 2004). Por meio do Modelo, os estudantes representam, de forma visual, as quantidades e as relações de problemas verbais de Matemática (Kaur, 2019; Kho et al., 2014; Ng, 2004; Ng e Lee, 2009) e descobrem qual(is) operação(ões) devem realizar sobre os valores numéricos para resolver o problema (Beckman, 2004).

O Modelo de Barras tem se mostrado uma estratégia promissora para resolução de problemas verbais (Cheong, 2002; Kaur, 2019), além de favorecer a compreensão das relações e conceitos matemáticos (Richit e Richit, 2022). Nessa perspectiva, uma vez concebido no contexto da resolução de problemas, o Modelo de Barras é descrito pela literatura a partir desse objetivo inicial e de seus modelos retangulares, a exemplo de Cheong (2002), Kaur (2019), Ng e Lee (2009), Richit e Richit (2022) e Urbano et al. (2016). A figura 1 (a, b, c) sintetiza, no contexto da aritmética², os três modelos de barras de Kho, para os quais um detalhamento adicional é apresentado por Richit e Richit (2022).

² A literatura descreve o uso do Modelo de Barras no contexto aritmético como aquele relacionado à resolução de problemas que envolvem as quatro operações fundamentais sem uso de notações algébricas.

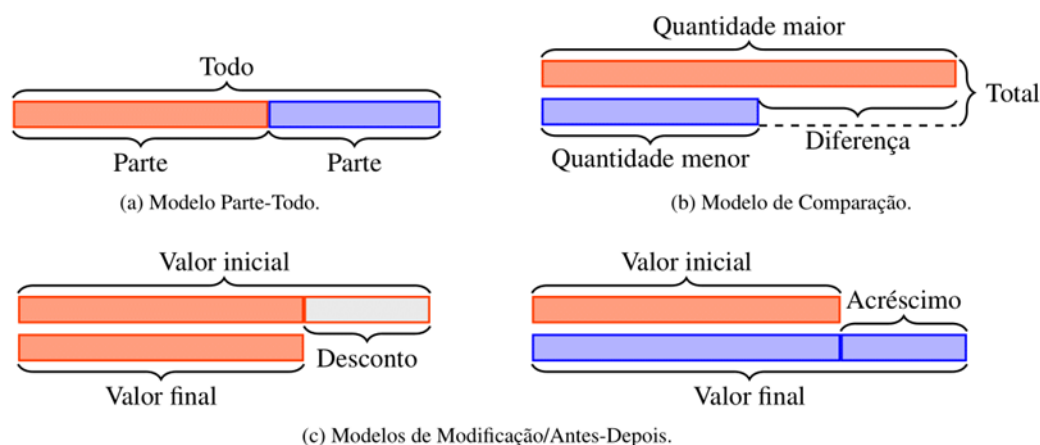


Figura 1. Modelos pictóricos-padrão do Modelo de Barras formulados a partir de Richit e Richit (2022)

Esses modelos podem ser usados na representação e resolução de problemas verbais que envolvem os conceitos parte-todo, comparação e mudança de valores, isoladamente ou de forma combinada, de acordo com as relações estabelecidas entre as quantidades na situação-problema.

Aspectos teóricos do Modelo de Barras

Segundo Kaur (2019), o trabalho de Kho (1987) é a primeira publicação que aborda os três modelos propostos pelo professor Tek Hong Kho. Assim, uma vez que Kho (1987) não forneceu justificativas teóricas em seu trabalho de apresentação dos três modelos de barras (Kaur, 2019), diferentes aproximações teóricas relacionadas a aspectos que caracterizam o próprio Modelo de Barras passaram a ser traçadas por autores singapurenses (e.g., Cheong, 2002; Kaur, 2019; Ng, 2004). Tais elaborações manifestam-se a partir de alinhamentos teóricos possíveis com base nas dimensões envolvidas com o uso dessa estratégia visual e nos princípios que orientam o ensino da Matemática em Singapura. Por exemplo, Kaur (2019) hipotetiza uma correlação do Modelo de Barras com o currículo de Davydov por estabelecerem uma relação estreita com o desenvolvimento do pensamento algébrico (Ng e Lee, 2009). Apesar disso, nos anos iniciais em Singapura, o uso do Modelo de Barras ocorre sem a introdução de incógnitas na forma simbólica de letras (Kaur, 2019), o que contrasta com o Currículo de Davydov, que preconiza usar equações algébricas para representar e resolver problemas verbais de duas etapas desde o primeiro ano escolar (Ng e Lee, 2009).

Por outro lado, um marco notável do ensino da Matemática de Singapura refere-se à adoção de um ensino conduzido segundo a abordagem Concreto-Pictórica-Abstrata ou CPA (Kaur, 2015, 2019; Kho et al., 2014; Looi e Lim, 2009). Com raízes nos trabalhos do psicólogo estadunidense Gerome Bruner, a abordagem CPA se sustenta na compreensão de Bruner de que a aprendizagem segue três fases de representação: ativa, icônica e simbólica (Lioe e Fang, 2010).

Nesse contexto, o Modelo de Barras, utilizado como uma estratégia mediadora da etapa Pictórica (representação icônica) (Kaur, 2019; Looi e Lim, 2009), reafirma e sustenta-se na abordagem CPA adotada em Singapura desde a década de 1980 (Kaur, 2015; Kho et al., 2014).

Já nos anos 1990, a articulação da aprendizagem via Resolução de Problemas e o Modelo de Barras (Fan e Zhu, 2007), atribuiu ao Modelo o sentido de uma ‘demonstração compreensível’ para a estratégia heurística de Resolução de Problemas de Pólya (Urbano et al., 2016) adotada para o ensino da Matemática em Singapura (Fan & Zhu, 2007). A partir de então, os materiais didáticos passaram a incluir o Modelo de Barras nos processos de resolução de problemas (Kaur, 2019) baseados na abordagem de Pólya (understand-plan-do-check), constituindo-o como uma heurística própria de resolução de problemas (Kaur, 2019; Ng e Lee, 2009).

Atualmente, a monografia *The Singapore Model Method for Learning Mathematics* (Kho et al., 2009) constitui-se na obra mais completa que aborda o Modelo de Barras (Kaur, 2019). Elaborada conjuntamente pelo Ministério da Educação de Singapura e a *Marshall Canvendish Education*, sendo os autores Tek Hong Kho, Shu Mei Yeo e James Lim, foi publicada em 2009 e serve de livro base para professores interessados em compreender e utilizar o Modelo de Barras na resolução de problemas verbais da Matemática.

Mais recentemente, Kho et al. (2014) afirmam que os modelos parte-todo e comparação são formas pictóricas baseados parcialmente nos esquemas parte-todo e comparação, os quais foram estudados por Greeno para resolução de problemas verbais no contexto da adição e subtração. Kho et al. (2014) também esclarecem que os modelos parte-todo e de comparação foram desenvolvidos para incluir multiplicação e divisão, bem como fração, razão e porcentagem nos livros didáticos da Matemática de Singapura. Ng e Lee (2009) explicam que o processo de resolução de problemas via Modelo de Barras é uma extensão do modelo de processamento, desenvolvido por Kintsch e Greeno (1985), para resolver problemas verbais baseado em dois modos de representação (representação de informação baseada em texto e representação abstrata do problema) para três fases: Textual, Estrutural (Modelo de Barras) e Procedimental-Simbólica. Nesse modelo de resolução de problemas, a leitura e a compreensão do enunciado (fase Textual) são seguidas pela estruturação de esquemas visuais que representam o problema (fase Estrutural). Dessas representações visuais se segue a escolha de operações e

cálculos com as quantidades expressas na forma simbólica, caracterizando a fase Procedimental-Simbólica nesse modelo de resolução de problemas.

Assim, embora o Modelo de Barras não tenha sido fundamentado por Kho (1987) em seu trabalho de apresentação (Kaur, 2019), a literatura subsequente fornece evidências de que o Modelo de Barras tem uma história consolidada na Matemática de Singapura e no desenvolvimento do currículo da Matemática do país (Kaur, 2019).

CONTEXTO E QUESTÃO E PESQUISA

Autores em Singapura descrevem o Modelo de Barras dando ênfase a distintos aspectos que o caracterizam no âmbito da resolução de problemas verbais. Adicionalmente, autores influenciados por esses trabalhos e a partir de suas próprias experiências acabam revelando que, a esses diagramas visuais, são atribuídos distintos sentidos. A literatura disponível explicita-o como ‘ferramenta’, ‘abordagem’, ‘estratégia’, ‘heurística’, ‘representação’, ‘equação pictórica’, ‘abordagem visual’, entre outros, revelando assim, que os desenhos do Modelo de Barras assumem distintos sentidos entre esses autores. Ainda que essas compreensões estejam associadas a propósitos didáticos do uso do Modelo de Barras em aulas de Matemática, aos desenhos do Modelo de Barras são atribuídos diferentes sentidos pelos autores, sentidos estes que se estabelecem em razão das circunstâncias em que se manifestam e dos processos cognitivos mobilizados na resolução de problemas verbais. Assim, mediante o objetivo de evidenciar e discutir os sentidos atribuídos aos desenhos do Modelo de Barras, desenvolvemos uma pesquisa bibliográfica conduzida pela seguinte questão norteadora:

Quais os sentidos associados aos desenhos do Modelo de Barras de Singapura são revelados pela literatura sobre a temática?

A fim de responder a essa questão, buscamos por artigos que sistematizassem discussões sobre a resolução de problemas verbais, sobretudo envolvendo estudantes, de modo a aproximar os resultados da nossa análise (busca por ‘sentidos’) ao contexto da sala de aula. Centramos a busca na base de dados *Scopus* como forma de constituir um *corpus* de análise de alta qualidade e impacto acadêmico na educação matemática global. A busca na plataforma Eric complementou a busca realizada na plataforma *Scopus*, recuperando artigos resultantes de pesquisa educacional, com rigor teórico e metodológico, que pudessem complementar o *corpus* de análise.

METODOLOGIA

Protocolo de Busca

A busca foi realizada nas bases de dados *Scopus* e *ERIC*, em junho-julho de 2023, mediante o uso dos descritores: *Model Method*, *Bar Model*, *Bar Model Method*, *Problem-solving* e *Singapore*. A partir dos operadores booleanos AND e OR, dois arranjos foram empregados na busca. O primeiro foi “*Model Method*” OR “*Bar Model*” OR “*Bar Model Method*” AND “*Problem-solving*”; e o segundo foi “*Model Method*” OR “*Bar Model*” OR “*Bar Model Method*” AND “*Singapore*”. Na ocasião da busca foram recuperados 161 títulos na base *Scopus* pelo primeiro arranjo e nenhum pelo segundo. Para a pesquisa na base de dados *ERIC* empregamos a restrição de referências revisadas por pares (*peer review only*), utilizando apenas a estrutura de busca “*Model Method*” OR “*Bar Model*” OR “*Bar Model Method*” AND *Singapore*, que retornou 698 títulos. Essa escolha foi deliberada para restringir a busca, dado a baixa especificidade do rastreamento do primeiro arranjo, que retornou cerca de uma dezena de milhar de manuscritos na plataforma *ERIC*. Todos os textos recuperados mediante a busca nas duas bases compuseram o *corpus* bruto da pesquisa, sobre o qual aplicamos os critérios de seleção para compor o *corpus* final.

Crítérios de seleção

Os resultados da busca nas duas plataformas foram submetidos à avaliação a fim de compor o *corpus* final. Inicialmente, os documentos tiveram o título e o resumo avaliados a fim de excluir textos não relacionados à temática (considerou-se apenas os artigos que envolvessem resolução de problemas verbais via Modelo de Barras). Ao todo, 151 documentos foram excluídos dos 161 resultados obtidos pela busca na *Scopus* e 684 documentos foram excluídos a partir dos 698 registros obtidos na plataforma *ERIC*, totalizando 835 exclusões, conforme ilustra a figura 2.

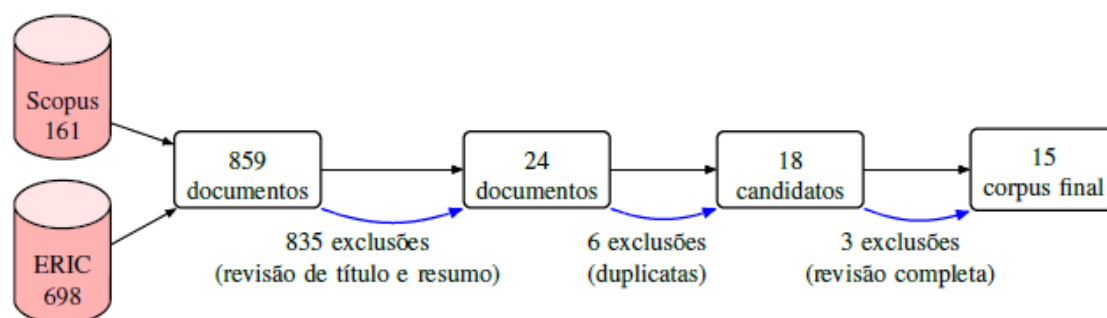


Figura 2. Processo de composição do *corpus* da pesquisa

A seguir, das 24 referências remanescentes foram excluídos 6 títulos duplicados, resultando em 18 documentos, os quais passaram por uma leitura completa. Nessa fase, 3 trabalhos foram excluídos porque priorizamos trabalhos que reportavam o

uso do Modelo de Barras na resolução de problemas matemáticos em práticas escolares, excetuando-se os ensaios teóricos baseados em literatura. A data de publicação ou o idioma não foram fatores de exclusão de literatura. Ao final desse processo, 15 artigos revisados por pares constituíram o *corpus* final da pesquisa. Esses documentos foram analisados a fim de constituir evidências para responder a questão norteadora, conforme explicita a seção seguinte.

Abordagem da análise dos resultados

A análise, de natureza qualitativa-interpretativa conforme Bodgan e Biklen (1994), foi guiada segundo a análise de conteúdo de Bardin (2016). Para produção de dados para responder à questão norteadora, foram elaboradas fichas de leitura (Richit, Ponte e Quaresma) para cada um dos artigos do *corpus* da pesquisa. A elaboração de fichas de leitura teve por objetivo realizar a caracterização de cada manuscrito e subsidiar a definição das categorias de análise seguindo Bardin (2016). Para isso, compuseram as fichas de leitura, no formato tabular, elementos de identificação e caracterização geral dos artigos (título, ano, autoria, revista, metodologia, objetivos, participantes e conclusões) e excertos e amostras identificadas como potenciais subsídios a responder a questão de pesquisa (a partir dos resultados e discussões dos manuscritos).

Os excertos extraídos dos trabalhos foram analisados e deram suporte à identificação de unidades temáticas, que, no processo de interpretação, subsidiaram a elaboração das seis categorias apresentadas nesse texto, nenhuma das quais foi pré-estabelecida. Essas categorias, embora nominadas em consonância com as concepções inferidas nos artigos analisados, foram constituídas *a posteriori* mediante a interpretação qualitativa do *corpus* da pesquisa.

RESULTADOS

Corpus final da pesquisa

A aplicação dos critérios de exclusão sobre o referencial recuperado pela busca deu origem ao corpus final da pesquisa. Os 15 artigos, revisados por pares, estão sistematizados na tabela 1.

Tabela 1

Corpus final da pesquisa com os artigos ordenados segundo o ano de publicação

Autor(es)/Ano	Título	Revista/Journal
Fan e Zhu (2007)	From convergence to divergence: the development of mathematical problem solving in research, curriculum, and classroom practice in Singapore	ZDM

Tabela 1

Corpus final da pesquisa com os artigos ordenados segundo o ano de publicação

Autor(es)/Ano	Título	Revista/Journal
Lee et al. (2007)	Strategic differences in algebraic problem solving: Neuroanatomical correlates	Brain Reaserch
Khng e Lee (2009)	Inhibiting interference from prior knowledge: Arithmetic intrusions in algebra word problem solving	Learning and Individual Differences
Looi e Lim (2009)	From bar diagrams to letter-symbolic algebra: a technology-enabled bridging	Journal of Computer Assisted Learning
Ng e Lee (2009)	The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems	Journal for Research in Mathematics Education
Lee e Ng (2011)	Neuroscience and the Teaching of Mathematics	Educational Philosophy and Theory
Ho e Lowrie (2014)	The model method: Students' performance and itseffectiveness	The Journal of Mathematical Behavior
Naroth e Luneta (2015)	Implementing the Singapore Mathematics Curriculum in South Africa: Experiences of Foundation Phase Teachers	African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education
Morin et al. (2017)	The Use of a Bar Model Drawing to Teach Word Problem Solving to Students With Mathematics Difficulties	Learning Disability Quarterly
Kaur (2019)	The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems	ZDM
Xin (2019)	The effect of a conceptual model-based approach on 'additive' word problem solving of elementary students struggling in mathematics	ZDM
Clement e Auslander (2021)	The Singapore Modeling Method: Possibilities for Improving Elementary Teacher Mathematics Preparation	PRIMUS

Tabela 1

Corpus final da pesquisa com os artigos ordenados segundo o ano de publicação

Autor(es)/Ano	Título	Revista/Journal
Baysal e Sevinç (2022)	The role of the Singapore bar model in reducing students' errors on algebra word problems	International Journal of Mathematical Education in Science and Technology
Sevinç e Lizano (2022)	Bar model method as a problem-solving heuristic: an investigation of two preservice teachers' solution paths in problems involving ratio and percentage	Mathematics Education Research Journal.
Koning et al. (2022)	Model method drawing acts as a double-edged sword for solving inconsistent word problems	Educational Studies in Mathematics

Os textos foram analisados a fim de constituir evidências para responder a questão de pesquisa, bem como para realizar a caracterização dessas produções.

Caracterização do corpus da pesquisa

A análise do *corpus* da pesquisa evidenciou duas fases principais envolvendo as publicações sobre o Modelo de Barras. A primeira fase envolve a publicação prioritária de textos sobre o tema por autores de Singapura (2007-2015). Na segunda fase (2016-2022), a maioria das publicações (6/7) foi realizada por pesquisadores de outras partes do mundo. A figura 3 apresenta os manuscritos ordenados de acordo com o ano de publicação segundo essas duas fases e ilustra a relação de citações entre os trabalhos (dentro do *corpus* da pesquisa) para a qual a direção de cada seta indica a direção de citante para citado.

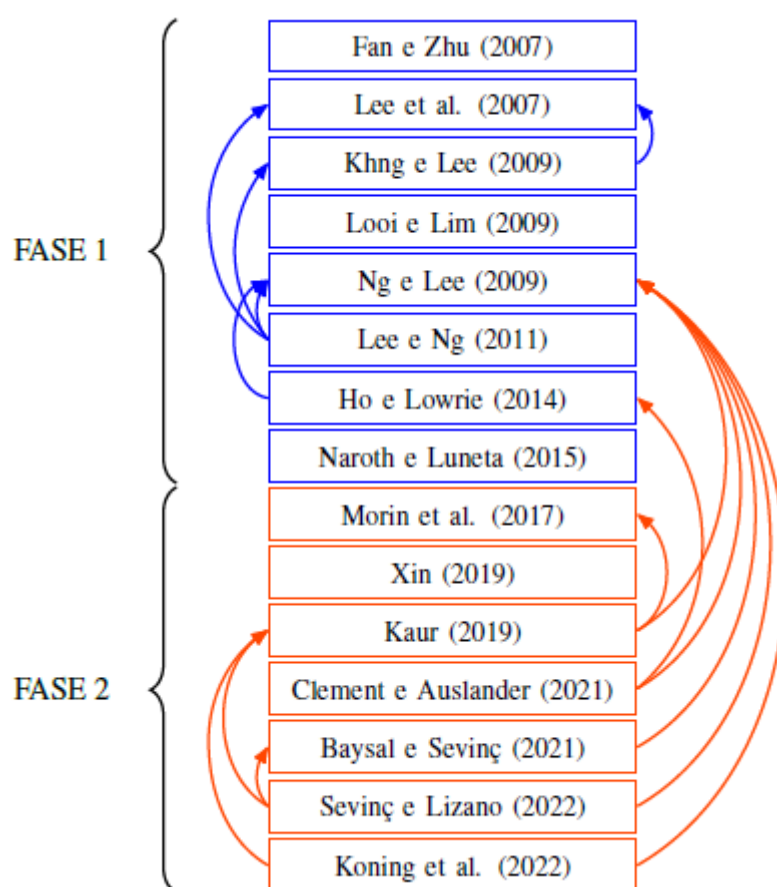


Figura 3. Trabalhos e rede de citações no corpus de pesquisa

A análise da rede de citações no *corpus* da pesquisa revelou que os trabalhos da segunda fase têm embasamento especialmente no texto de Ng e Lee (2009). Esse aspecto sugere a influência dos referidos autores sobre as publicações mais recentes envolvendo o Modelo de Barras. Nessa perspectiva, excetuando-se Morin et al. (2017), todas as obras que receberam citação de outras obras após 2009 citaram Ng e Lee (2009). Isso vincula o contato com Ng e Lee (2009) mediante as referências intermediárias (Baysal e Sevinç, 2022; Ho & Lowrie, 2014; Kaur, 2019) que esses autores (Clement e Auslander, 2021; Koning et al., 2022; Sevinç & Lizano, 2022) citaram.

Além disso, a análise dos artigos de Baysal e Sevinç (2022), Clement e Auslander (2021), Ho e Lowrie (2014), Koning et al. (2022) e Sevinç e Lizano (2022) evidenciou as influências de Ng e Lee (2009). Por exemplo, Sevinç e Lizano (2022) analisaram resolução de problemas via Modelo de Barras dada por professores de matemática no âmbito das três fases (Textual, Estrutural e Procedimental-Simbólica) discutidas por Ng e Lee (2009). Baysal e Sevinç (2022) analisaram a efetividade do Modelo de Barras na redução de erros na resolução de problemas algébricos mediante a promessa de que o Modelo melhora a

compreensão e desempenho dos estudantes, conforme as observações de Ng e Lee (2009) no contexto singapurense.

Koning et al. (2022) investigaram o efeito do Modelo de Barras sobre o desempenho de estudantes na resolução de problemas verbais de linguagem inconsistente que envolvem comparação (pelo modelo de comparação, ver figura 1(b)). A investigação foi conduzida de forma a avançar a discussão trazida pelos autores Ng e Lee (2009), que reconheceram estar discutindo um modelo teórico direcionado a esses mesmos problemas verbais, porém de linguagem consistente³.

Ho e Lowrie (2014) motivam-se na relação entre a efetividade do Modelo de Barras e as dificuldades do seu uso reportados por Ng e Lee (2009), a partir do que investigam o seu uso e efetividade na resolução de problemas provenientes de instrumentos de avaliação matemática de Singapura e Austrália com alunos de Singapura. O trabalho de Clement e Auslander (2021) busca entender os efeitos do uso do Modelo de Barras sobre o conhecimento e autoeficácia matemáticos em um curso universitário de Matemática, estendendo a compreensão sobre a efetividade do uso do Modelo de Barras discutida por Ng e Lee (2009).

Assim, dentro do *corpus* da nossa pesquisa, o trabalho de Ng e Lee (2009) influenciou as investigações dos pesquisadores da segunda fase, seja por fornecer detalhamento para o Modelo de Barras ou/e por discutir os processos de resolução de problemas. Além disso, Dr. Kerry Lee assina a metade dos trabalhos relacionados à primeira fase das publicações sobre o Modelo.

Categorias de Análise

Mediante a leitura cuidadosa dos 15 artigos que compuseram o *corpus* de pesquisa e a elaboração das fichas de leitura, seis categorias se constituíram como potenciais reveladoras dos sentidos atribuídos aos desenhos do Modelo de Barras de Singapura nos processos de resolução de problemas matemáticos e da aprendizagem. Essas categorias emergiram da análise interpretativa dos textos selecionados e estão sistematizadas e descritas na tabela 2. As categorias, constituídas a partir do processo de análise, foram formuladas em diálogo com os sentidos manifestados nos trabalhos que compuseram o *corpus* do trabalho, mobilizando, portanto, terminologias adotadas pelos autores.

³ “Problemas verbais de linguagem consistente são aqueles em que as relações comparativas tais como ‘a mais que’ estão de acordo com a operação aritmética para solução”, i.e., adição; enquanto que nos inconsistentes isso não ocorre (Ng e Lee, 2009, p. 290).

Tabela 2

Categorias de análise constituídas a partir da análise sistemática do corpus de pesquisa

Categoria	Descrição sucinta
Ferramenta visual de tomada de decisão operacional	Os desenhos são tomados como suporte à escolha acurada de quais são as operações que devem ser realizadas sobre as quantidades do problema.
Heurística de resolução de problemas	Os desenhos do Modelo de Barras são tomados como uma parte integrante do processo de resolução heurística de problemas, seguindo as fases de Polya.
Representações pictóricas mediadoras	Os desenhos do Modelo de Barras assumem o sentido de mediadores icônicos (representação pictórica) na abordagem CPA, fazendo o papel de representações intermediárias entre concreto e abstrato (ancorado na concepção de representação de Jerome Bruner).
Equações pictóricas	Os desenhos do Modelo de Barras articulam a noção de incógnita e pensamento algébrico, trazendo consigo a possibilidade de externar processos e manipulações operatórias de forma equivalente à manipulação de sentenças algébricas dadas na forma de igualdades e equações.
Representação dos objetos matemáticos	Os desenhos do Modelo de Barras são compreendidos como representações abstratas de objetos matemáticos subjacentes e os quais devem ser transpostos de um enunciado a uma representação figurativa.
Abordagem visual para relações numéricas	Os modelos de barras assumem o sentido de modelos visuais que destacam a estrutura das relações numéricas dos problemas. A ênfase, nesse caso, está nas relações numéricas e no potencial visual do uso do modelos de barras para externá-las.

As categorias constituídas não são excludentes entre si, mas buscam dar destaque aos aspectos e processos cognitivos reportados nos trabalhos analisados. Complementarmente, essas categorias abarcam aspectos enfatizados pelos autores dentro do processo de resolução de problemas verbais de Matemática. Dessa forma, em cada trabalho manifestam-se evidências que estão vinculadas a mais do que uma dessas categorias. A prevalência dos sentidos desvelados nos artigos, expressos nas categorias de análise explicitadas na tabela 2, estão apresentadas na tabela 3.

Tabela 3

Autores fundamentantes das categorias de análises.

Autoria	Ferramenta visual de tomada de decisão operacional	Heurística de resolução de problemas	Representações pictóricas mediadoras	Equações pictóricas	Representação dos objetos matemáticos	Abordagem visual para relações numéricas
Fan e Zhu (2007)		■				
Lee et al. (2007)				■		
Khng e Lee (2009)			■			
Looi e Lim (2009)			■	■	■	■
Ng e Lee (2009)	■	■	■	■	■	■
Lee e Ng (2011)			■			■
Ho e Lowrie (2014)	■	■	■		■	■
Naroth e Luneta (2015)			■			
Morin et al. (2017)			■			
Kaur (2019)	■	■	■		■	■
Xin (2019)	■		■			■
Clement e Auslander (2021)	■	■	■	■		■
Baysal e Sevinç (2022)			■	■		■
Sevinç e Lizano (2022)	■					■
Koning et al. (2022)					■	■

DISCUSSÃO

As categorias de análise são discutidas a seguir.

Ferramenta visual de tomada de decisão operacional

No contexto da resolução de problemas, “uma solução pelo Modelo de Barras envolve um aspecto operacional, além de um aspecto representacional” (Sevinç e Lizano, 2022, p. 2)⁴. O destaque dado ao aspecto operacional é revelado na afirmação de que os desenhos do Modelo de Barras “são claramente projetados para ajudar a decidir quais operações usar” (Beckmann, 2004, p. 43). A figura 4 ilustra essa dimensão do uso do Modelo de Barras no contexto da resolução de problemas verbais (nesse caso envolvendo frações), caracterizando-o como uma ferramenta visual de tomada de decisão operacional.

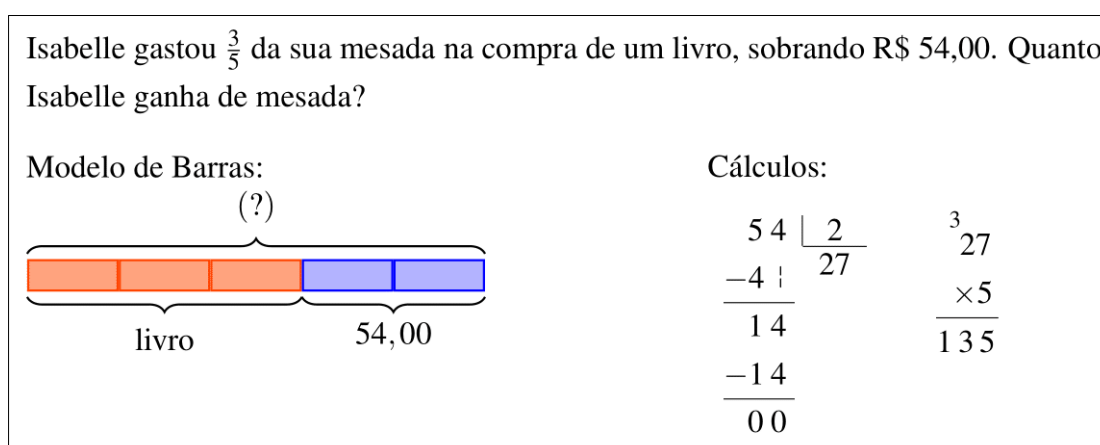


Figura 4. Modelo de Barras como ferramenta visual de tomada de decisão operacional

Como explicita a figura 4, o Modelo de Barras produzido para representar o problema compreende os valores numéricos e por meio dele, as operações pertinentes podem ser selecionadas. Nesse caso, obter o total solicitado envolve determinar a unidade pictórica. Assim, o modelo produzido pode apoiar a tomada de decisões operacionais sucessivas: dividir 54 por 2 para encontrar a unidade pictórica (27), e multiplicar o valor da unidade pictórica (27) por 5 para obter o total 135. A figura 5, na etapa “3 Responder” (no lado direito), pode servir como um exemplo complementar.

Essa perspectiva evidencia que os desenhos do Modelo de Barras estabelecem uma ferramenta visual de resolução de problemas (Kaur, 2019). Essa designação

⁴ Todas as referências do *corpus* de pesquisa foram escritas em inglês. Dessa forma, as citações diretas do texto são traduções por nós realizadas.

funciona como uma analogia, uma vez que ‘uma ferramenta é operacionalizada com objetivo de produzir um resultado pretendido’. No contexto da resolução de problemas, operacionalizar os dados a fim de obter a resposta envolve a seleção correta das operações, isto é, uma tomada de decisão operacional conceitualmente sólida (Clement e Ausland, 2021). Por essa razão, “a operação para resolução é determinada a partir do modelo, não mais apostando em qual operação usar” (Xin, 2019, p. 148), já que o Modelo de Barras torna “mais clara a tomada de decisões [operacionais] para a resolução de problemas” (Clement e Ausland, 2021, p. 9). Esses aspectos elucidam que, dentre os sentidos próprios dos desenhos do Modelo de Barras, um deles refere-se à compreensão de que o Modelo não mostra como resolver um problema, mas apoia a seleção e tomada de decisão operacional relacionada aos dados numéricos (Sevinç e Lizano, 2022). Esse aspecto é ressaltado na afirmação de que os desenhos do Modelo de Barras “não se destinam a ajudar os alunos na execução de operações, mas a ajudá-los a decidir quais operações usar” (Clement e Auslander, 2021, p. 2).

Assim, “usando o diagrama, o aluno então escolhe um procedimento para cálculo” (Kaur, 2019, p. 152) de forma que podem usar “a estrutura do modelo para ajudá-lo a construir um conjunto apropriado de procedimentos aritméticos, passo a passo, para resolver” o problema (Ng e Lee, 2009, p. 285). Nessa direção, sendo o Modelo de Barras “uma ferramenta útil, a utilização da ferramenta precisa estar associada à compreensão da mecânica de funcionamento e da função da ferramenta” (Ho e Lowrie, 2014, p. 97).

Heurística de resolução de problemas

Sob significativa influência de conferências e discussões sobre ‘resolução de problemas’ na década de 1980, o currículo da Matemática de Singapura passou a adotar como tema central a resolução de problemas a partir de 1990 (Fan e Zhu, 2007). De forma integrada a esse processo, heurísticas para resolução de problemas foram listadas no currículo de Singapura, dentre as quais destaca-se a heurística ‘desenhar um diagrama/modelo’ (Ho e Lowrie, 2014; Kaur, 2019) ou ‘*Model Method*’ (Fan e Zhu, 2007, Ng e Lee, 2009). Apesar do Modelo de Barras ser uma das muitas formas de resolução de problemas que se baseia no uso de desenhos e diagramas, os processos de resolução de problemas que o envolve constituem-se em uma heurística característica do ensino de Singapura. Esse sentido próprio do Modelo de Barras como indissociável da heurística de resolução de problemas tem influenciado outros autores. Por exemplo, Clement e Ausland (2021, p. 10) explicitam que o *model method* se constitui em “um ‘exemplo por excelência’ de uma heurística de resolução de problemas”.

A figura 5, inspirada em materiais escolares produzidos pela *Marshall Canvendish Education* (edição dos EUA) e fundamentado na literatura bibliográfica analisada, ilustra a heurística ‘desenhar um modelo (de barras)’ típico de materiais didáticos e da resolução de problemas em Singapura, i.e., *model method*.

Uma floricultura tem 354 rosas e 79 menos rosas do que tulipas. Quantas rosas e tulipas há ao todo nessa floricultura?

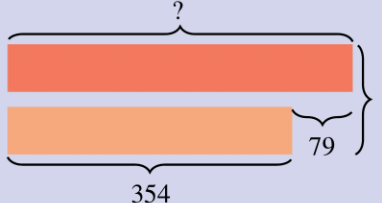
1 Entender o problema	Quantas são as rosas? Há mais rosas ou tulipas? Quantas são as rosas a menos? O que preciso encontrar?	
2 Planejar o que fazer	Eu posso desenhar um mo- delo de barras para comparar as quantidades	
3 Responder ao problema	tulipas  $\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 354 \\ + 79 \\ \hline 433 \end{array}$ $354 + 79 = 433$ Há 433 tulipas. $354 + 433 = 787$ Há 787 tulipas e rosas ao todo. $\begin{array}{r} 354 \\ + 433 \\ \hline 787 \end{array}$	
4 Verificar se sua resposta está correta	$433 - 79 = 354$ Há 354 rosas. $787 - 433 = 354$ Há 354 rosas. Minha resposta está correta. 	

Figura 5. Exemplo da heurística de resolução de problema ‘desenhar um modelo (de barras)’ aplicada a um problema verbal escolar

Fan e Zhu (2007) explicam que “a heurística de resolução de problemas, especialmente o chamado ‘model method’, um termo mais amplamente utilizado para resolução de problemas, recebeu muita atenção nos programas de estudos, na investigação e no ensino em sala de aula [em Singapura]” (p. 1). Isso implica que em Singapura, referir-se ao model method é referir-se ao Modelo de Barras e a

resolução heurística de problemas usando-o. Nesse sentido, o Modelo de Barras não se dissocia das heurísticas de resolução de problemas, pois o Modelo é usado para representar as relações quantitativas dos problemas e o processo de resolver problemas, por sua vez, é conduzido via heurística alinhada à abordagem de Pólya.

Representações pictóricas mediadoras

Uma importante característica da experiência matemática dos estudantes em Singapura é o ensino conduzido segundo a abordagem CPA (Naroth e Luneta, 2015). Nessa abordagem, os desenhos do Modelo de Barras são tomados como representações de transição, recebendo o sentido de *representações pictóricas mediadoras* da fase Pictórica da abordagem CPA (Ho e Lowrie, 2014; Naroth e Luneta, 2015). Para elucidar a perspectiva de representações pictóricas intermediárias entre o concreto e o simbólico, apresentamos a figura 6, que sugere as três fases C-P-A de representação no contexto da aquisição da notação simbólica de comparação ($>$) de números naturais.

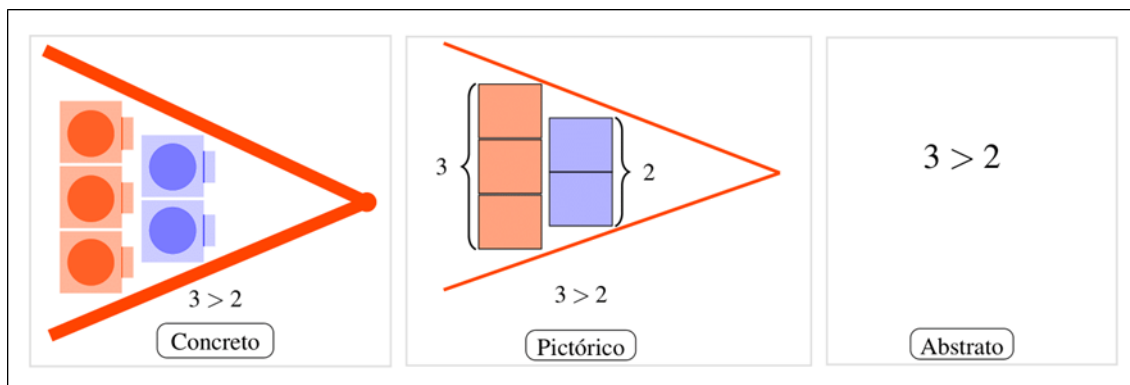


Figura 6. Ilustração da abordagem CPA no contexto da comparação de números naturais (elaborado pelos autores)

Os desenhos do Modelo de Barras (etapa Pictórica) são mencionados como representações de transição, envolvendo progressivas generalizações de seu uso no contexto da aritmética (Khng e Lee, 2009; Lee e Ng, 2011) e, também, na passagem para a álgebra simbólica (Clement e Auslander, 2021; Khng e Lee, 2009; Ng e Lee, 2009). No primeiro caso, o Modelo de Barras é usado no âmbito da contagem (correspondência um-para-um) e generalizado no âmbito da resolução de problemas verbais, para ‘modelos de barras contínuos’ (Morin et al., 2017). Para ilustrar esse aspecto, trazemos o exemplo mostrado na figura 7, adaptado de Baldin (2018, p. 41).

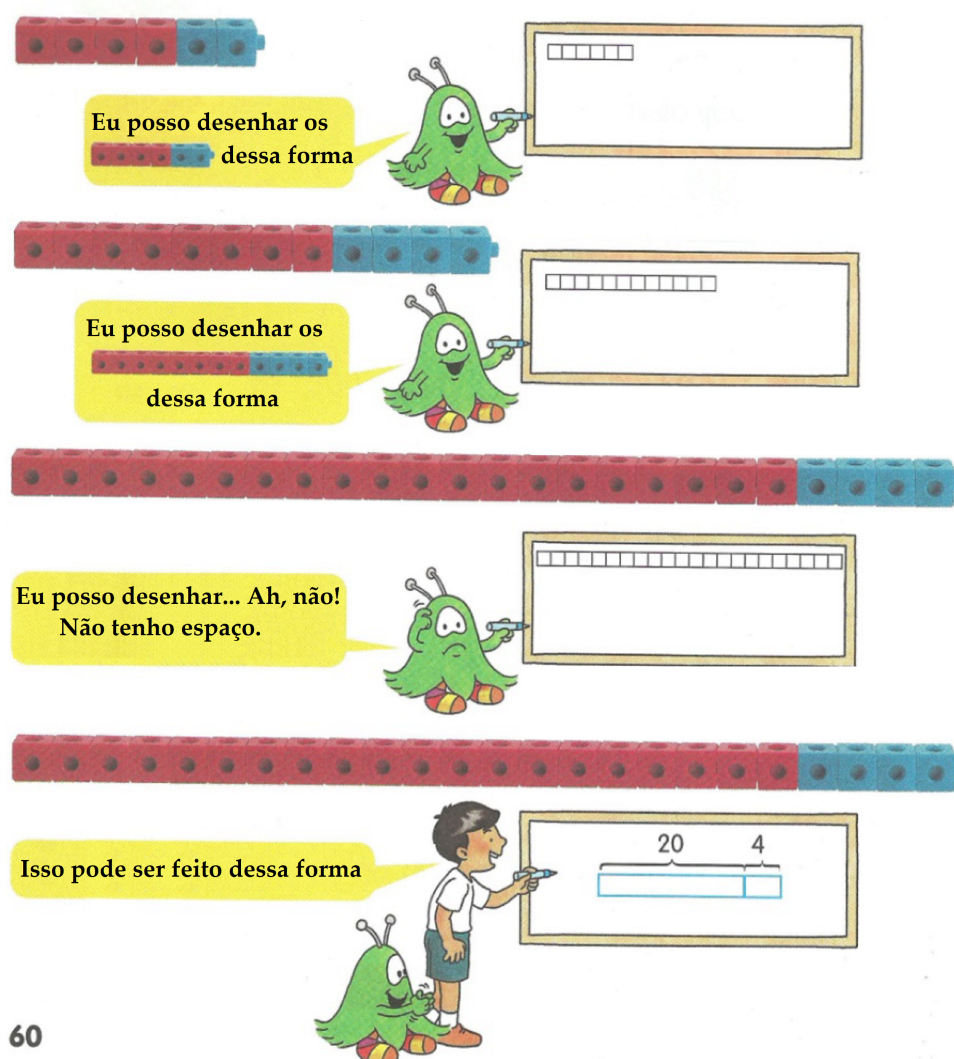


Figura 7. Transição entre representação concreta e representação pictórica pelo Modelo de Barras (incluindo a transição entre barras discretas para contínuas)

A figura 7 explicita a transição das representações concretas para representações pictóricas com o Modelo de Barras, assim como elucida a progressão para representações pictóricas mais genéricas dos números naturais no âmbito do Modelo de Barras. Apesar disso, observamos que a maior ênfase ao papel do Modelo de Barras como representação pictórica mediadora, no corpus da pesquisa, é a transição para o uso de representações simbólicas algébricas. Por exemplo, Clement e Auslander (2021, p. 2) vislumbram, no Modelo de Barras, “o potencial de preencher a lacuna, muitas vezes intimidante, entre aritmética e álgebra”, uma vez que o Modelo de Barras apoia a escrita de equações algébricas (Khng e Lee, 2009). Nessa direção, Baysal e Sevinç (2022) observaram que o Modelo de Barras explicita as incógnitas e a relação delas com as quantidades, favorecendo a escrita correta de equações algébricas.

Assim, uma vez que o Modelo de Barras funciona como um mediador pictórico para representações abstratas da notação algébrica (Xin, 2019), Narothe e Luneta (2015) pontuam que o Modelo de Barras “pode ajudar os alunos a fazer a transição da aritmética para a álgebra nas séries posteriores” (p. 8). Por outro lado, ao problematizar a passagem da aritmética para álgebra simbólica com letras, Looi e Lim (2009) comentam que, embora o Modelo de Barras envolva representações pictóricas da fase intermediária da abordagem CPA, as representações algébricas podem ser intrinsecamente dependentes das representações pictóricas. Nesse sentido, Looi e Lim (2009) afirmam que, “na verdade, os estudantes empregaram uma tradução literal dos modelos para equações algébricas, e algumas das suas equações não teriam sentido sem os modelos” (p. 359). Apesar dos obstáculos introduzidos pela passagem da aritmética para álgebra no contexto do Modelo de Barras (Looi e Lim, 2009), essas discussões evidenciam que o Modelo serve como uma representação intermediária para a representação das equações na álgebra simbólica (Ho e Lowrie, 2014; Kaur, 2019), assumindo o sentido de *representação pictórica mediadora* entre representação concreta e simbólica. Nesse sentido, a mediação do Modelo de Barras pode envolver tanto a notação e operações no âmbito da aritmética quanto na transição para escrita de equações na álgebra simbólica (com o uso de letras).

Equações pictóricas

A resolução de problemas verbais pressupõe a descoberta dos valores desconhecidos solicitados no contexto da situação-problema. Assim, quando os estudantes estão resolvendo problemas usando o Modelo de Barras, é esperado que representem corretamente as informações do enunciado no Modelo (Baysal e Sevinç, 2022; Ng e Lee, 2009) e “encontrem o valor desconhecido analisando as relações entre as barras” (Looi e Lim, 2009, p. 358). Esse aspecto destaca que os retângulos do Modelo de Barras estão representando as quantidades desconhecidas (Lee et al., 2007) e, também, que seus comprimentos servem como analogia aos números que estão representando. Clement e Aulander (2021) observaram que “quando se trata de ensinar crianças, elas são muito visuais e, às vezes, não conseguem entender da maneira algébrica” (p. 9), vendo o Modelo de Barras como uma oportunidade de abordar “a mesma coisa de maneira diferente” (Clement e Aulander, 2021, p. 9). Isso evidencia que o Modelo de Barras é tomado como um substituto antecipado e equivalente das equações dadas na forma algébrica, ou, como *equações pictóricas*.

Essa perspectiva do Modelo e Barras como equações visuais equivalentes (Lee et al., 2007; Ng e Lee, 2009) é explicitada por Looi e Lim (2009): “O desenho do modelo torna-se uma equação pictórica que representa o enunciado” (p. 359), de

modo que a “equação pictórica é equivalente a uma equação algébrica” (p. 359). Nessa direção, Lee et al. (2007) esclarecem que enquanto o Modelo de Barras “faz o uso de informações pictóricas e alfanuméricas para representar informações, a álgebra simbólica faz uso exclusivo de informações alfanuméricas” (p. 163). Em acréscimo, Lee et al. (2007) explicam que “a principal diferença é a forma como as incógnitas são representadas: como caixas retangulares no Modelo de Barras e como letras, x ou y, na álgebra simbólica” (p. 164).

Por fim, o sentido de equação equivalente pictórica é aprofundada em Ng e Lee (2009). Para esses autores, a relação de correspondência entre elementos do Modelo de Barras e elementos simbólicos de representação algébrica é destacada. Isso pode ser ilustrado por meio do Modelo de Barras que representa o problema verbal mostrado na figura 8.

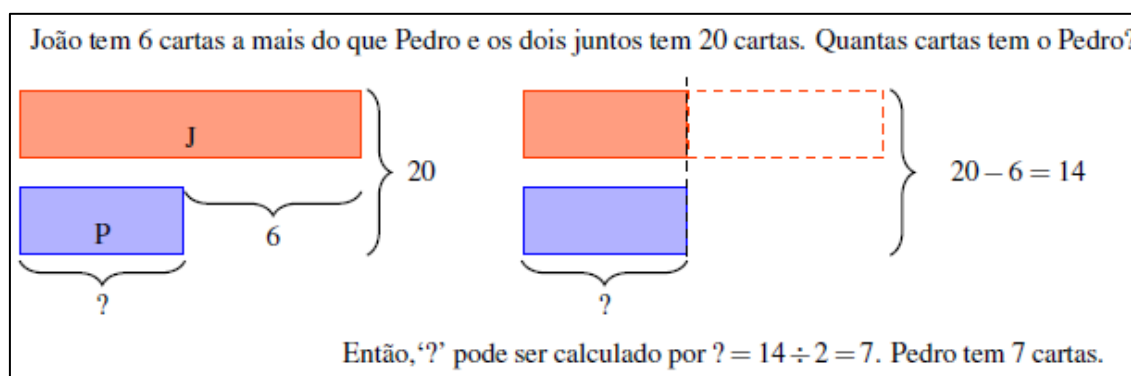


Figura 8. Modelo de Barras (comparação aditiva) como ‘equação pictórica em manipulação’

Tomando-se como referência a figura 8, pode-se compreender o sentido de ‘equação pictórica’ atribuída aos desenhos do Modelo de Barras, conforme destaca o excerto:

O desenho do modelo é uma forma de equação pictórica em que, se uma certa quantidade conhecida é removida do lado esquerdo da chave, então, a mesma quantidade precisa ser removida do lado direito da chave. A chave funciona como se fosse o pivô de uma balança ou o sinal de igual de uma equação algébrica (Ng e Lee, 2009, p. 297).

Considerando-se o excerto acima e a figura 8, observa-se que no Modelo de Barras “os retângulos representam o valor das incógnitas” (Ng e Lee, 2009, p. 284) e “servem como análogos visuais [de equações algébricas] que capturam todas as informações [quantitativas] em um problema verbal” (Ng e Lee, 2009, p. 285) às quais estabelecem equivalências entre si. Esses aspectos evidenciam que, entre os

sentidos atribuídos aos desenhos do Modelo de Barras pelos autores, um deles é o de *equações pictóricas* ou *equações pictóricas* análogas às equações algébricas.

Representação dos objetos matemáticos

A literatura consultada evidencia que os desenhos do Modelo de Barras estão relacionados à conversão de informação matemática dada na forma textual para uma representação visual. Nessa direção, Ng e Lee (2009) assinalam que “o model method [i.e., o Modelo de Barras] concentra-se no cerne da solução do problema verbal - a importância da representação” (p. 284). Essa afirmação estabelece a base para um dos sentidos que o Modelo de Barras possui entre os autores: o de representar os objetos matemáticos em uma forma visual.

Uma vez que “a(s) relação(ões) entre as quantidades na situação-problema é representada de forma esquemática, ou seja, uma representação da situação-problema usando retângulos” (Ho e Lowrie, 2014, p. 89), o Modelo de Barras “tem como objetivo descrever a situação conforme apresentada no problema verbal em questão” (Looi e Lim, 2009, p. 358). Esses aspectos apontam para uma compreensão de que “os modelos não são, em realidade, os objetos do problema verbal, mas representam quantidades e relações entre quantidades” (Kaur, 2019, pp. 152-153). A constituição da representação visual das quantidades e relações entre elas a partir do problema verbal, nas figuras 4 e 5, servem como exemplos dessa perspectiva.

Esse sentido atribuído aos desenhos do Modelo de Barras pode ser sintetizado nas palavras de Ho e Lowrie (2014): “retângulos são usados no model method para representar quantidades específicas na situação do problema” (p. 92), o que evidencia que “o model method exige que o solucionador de problemas converta palavras em uma representação visual” (p. 92) de modo que “cada retângulo representa uma variável diferente (e sua quantidade) do problema verbal” (Koning et al., 2022, p. 30). Assim, uma vez que os elementos do problema podem não ter relação com retângulos e comprimentos de retângulos, os desenhos do Modelo de Barras aparecem como representações dos objetos matemáticos (números, quantidades, incógnitas, variáveis, etc.) do problema. Essas considerações evidenciam o Modelo de Barras como um tipo de representação visual do objeto matemático para além do sentido de representação pictórica mediadora no contexto da abordagem CPA, destacando a compreensão de representação dos objetos matemáticos.

Abordagem visual para relações numéricas

A ênfase dada aos desenhos do Modelo de Barras como representações visuais de relações entre as quantidades (Kaur, 2019) evidenciam que esses desenhos são tomados como *abordagem visual para relações numéricas*. Por exemplo, Ho e Lowrie (2014) afirmam que o Modelo de Barras “usa retângulos para ajudar o solucionador de problemas a ver visualmente as declarações relacionais entre as quantidades na situação-problema” (p. 89), o que indica que os desenhos do Modelo de Barras ajudam na compreensão do problema (Sevinç e Lizano, 2022) e de suas relações quantitativas (Lee e Ng, 2011), combatendo erros e equívocos comuns (Clement e Auslander, 2021). Isso porque, enquanto os estudantes estão elaborando seus diagramas, os desenhos ajudam a compreender melhor os dados do problema e as relações quantitativas, dar sentido ao problema e matematizar a situação, mesmo que não conduza aos cálculos sob notações simbólicas e procedimentais (Sevinç e Lizano; 2022).

Adicionalmente, Baysal e Sevinç (2022) observaram que o aspecto visual do modelo facilitou a motivação, compreensão e transformação das informações apresentadas como texto, evidenciando que os desenhos do Modelo de Barras podem assumir a função de apoiar a compreensão de relações entre as quantidades. Por exemplo, Xin (2019) afirma que o Modelo de Barras ajudou os estudantes a estabelecerem o conceito de unidade composta e a compreensão da relação quantitativa parte-todo, “juntando duas barras curtas para formar uma barra longa” (Xin, 2019, p. 148). Nesse sentido, Xin (2019) observou, por exemplo, que os estudantes passam rapidamente dos enunciados para equações após contatarem com o modelo parte-todo, evidenciando que os modelos de barras possibilitam um aprofundamento da compreensão das relações quantitativas. O mesmo foi observado com o modelo de comparação (ver figura 1(b)) que propicia estabelecer, de forma visual, significados para as relações comparativas “a mais que” e “a menos que” (Xin, 2019). Assim, o Modelo de Barras pode ser usado para introduzir ou dar sentido às relações numéricas, por exemplo, estabelecer o significado da notação 2:3 e que relação existe entre essas quantidades, como mostra a figura 9.

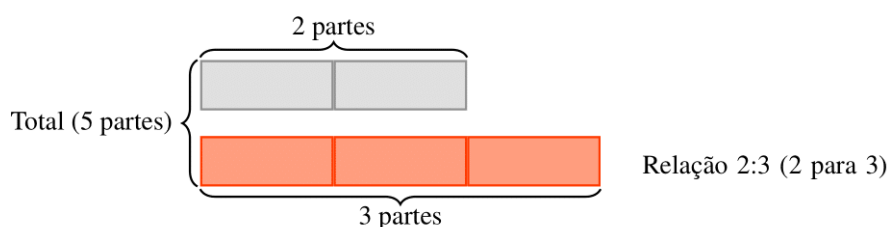


Figura 9. Relações numéricas estabelecidas na razão 2:3 por meio do Modelo de Barras

De forma similar ao apresentado na figura 9, o modelo de comparação apresentado na figura 1, pode ser usado para estabelecer de forma visual o sentido das relações quantitativas introduzidas por ‘a mais do que/a mais que’ e ‘a menos do que/a menos que’. Assim, o Modelo de Barra possibilita a visualização da estrutura relacional das quantidades presentes em um problema (Looi e Lim, 2009). Esse aspecto pode ser também evidenciado em Ng e Lee (2009). Referindo-se a introdução do Modelo de Barras no currículo de Matemática de Singapura, Ng e Lee (2009) explica que: “Acreditava-se que se as crianças recebessem os meios para visualizar um problema verbal [...], a estrutura [das relações numéricas] subjacentes ao problema seria tornada evidente” (p. 284) por meio do uso do Modelo. Dessa forma, “depois que as crianças compreendessem a estrutura do problema, seria mais provável que fossem capazes de resolvê-lo” (Ng e Lee, 2009, p. 284), uma vez que o Modelo de Barras “ajuda a ver através de relações que eles não conheciam antes, encoraja-os a considerar informações adicionais” (Koning et al., 2022, p. 33).

O potencial do Modelo de Barras na visualização das relações numéricas dos problemas, evidenciado entre os autores, estabelece que entre os sentidos que esses autores atribuem aos desenhos do Modelo está o de abordagem visual para relações numéricas. Nessa perspectiva, o Modelo de Barras propicia a visualização, compreensão das relações e apresentação visual de relações numéricas entre quantidades presentes em situações-problemas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise evidenciou distintos sentidos atribuídos aos desenhos do Modelo de Barras. Esses sentidos, vinculados à resolução e representação de problemas verbais matemáticos, são: ferramenta visual de tomada de decisão operacional, heurística de resolução de problemas, representações pictóricas mediadoras, equações pictóricas, representação dos objetos matemáticos e abordagem visual para relações numéricas.

Com o sentido ferramenta visual de tomada de decisão operacional o Modelo de Barras pode ser tomado como uma estratégia que auxilia a escolha das operações a serem realizadas sobre as quantidades de um problema. Como heurística de resolução de problemas, o Modelo de Barras integra a heurística ‘desenhar um modelo de barras’ para resolver um problema. No sentido representações pictóricas mediadoras, o Modelo de Barras é tomado como uma representação de transição entre representação concreta e abstrata na abordagem CPA. No sentido de equações pictóricas, os desenhos do Modelo de Barras são

compreendidos como equivalentes visuais de equações algébricas. O sentido de representação dos objetos matemáticos mostra que esses desenhos são representações visuais para quantidades e relações que não têm relação factual com ‘retângulos’. Por fim, os desenhos do Modelo de Barras também se manifestam como abordagem visual para relações numéricas que possibilitam estabelecer e compreender as relações entre as quantidades de forma visual. No *corpus* da pesquisa, os sentidos mais recorrentes são representações pictóricas mediadoras e abordagem visual de relações numéricas. Essa prevalência entre os autores pode ser atribuída, respectivamente, à influência de autores de Singapura por reforçarem a abordagem CPA e, no segundo caso, devido à ênfase dada, em Singapura, à estrutura das relações numéricas e sua abordagem na forma de modelos visuais.

Assim, os sentidos atribuídos aos desenhos do Modelo de Barras apontam para distintos aspectos relacionados à aprendizagem: a importância das representações, transição entre representações, estrutura das relações, visualização e mobilização de conhecimentos e notações matemáticas no âmbito da Matemática escolar e resolução de problemas verbais. É importante ressaltar que esses sentidos evidenciam compreensões atreladas ao contexto de uso e intencionalidade dos autores e que não são excludentes entre si, uma vez que os sentidos podem coexistir no âmbito dos processos de resolução de problemas. Ao evidenciar os sentidos atribuídos aos desenhos do Modelo de Barras, também estão sendo reveladas distintas dimensões do seu uso no âmbito da resolução de problemas verbais. Esses sentidos envolvem processos matemáticos que fazem parte do repertório de habilidades matemáticas a serem desenvolvidas pelos estudantes e, assim, corroboram a promessa do Modelo de Barras para aprendizagem da Matemática. Além disso, contribuem para caracterizar ‘o que é o Modelo de Barras de Singapura’, complementando a discussão apresentada em Richit e Richit (2022).

Como limitações do estudo, percebemos que o *corpus* de pesquisa constituído evidencia um número reduzido de manuscritos que efetivamente tratam do Modelo de Barras entre os resultados da busca. Assim, esse número reduzido de artigos pode limitar os sentidos atribuídos aos desenhos do Modelo de Barras identificados entre os autores. Uma vez que a maioria dos textos é de autores de Singapura ou influenciados por Ng e Lee (2009), esses sentidos podem revelar uma visão associada à experiência de Singapura. Dessa forma, estudos futuros podem ser conduzidos para ampliar essa perspectiva à medida que a literatura seja incrementada com novas publicações. Uma possibilidade é investigar os sentidos

atribuídos aos desenhos do Modelo de Barras sob a ótica dos próprios estudantes que os utilizam para representar e resolver problemas verbais em Matemática.

Por fim, a análise evidenciou que a adoção, em sala de aula, do Modelo de Barras na resolução de problemas verbais não é trivial, pois está atrelado a diferentes processos cognitivos de representação e da resolução heurística de problemas. Isso aponta para a necessidade de preparação adequada do professor que ensina Matemática por meio do Modelo de Barras, para a qual esse texto pode fornecer um compêndio sistematizado de processos cognitivos imbricados nos ‘sentidos atribuídos aos desenhos do Modelo de Barras’.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro (Processo 402748/2021-2).

REFERÊNCIAS

- Abdullah, A. H., Abidin, N. L. Z. e Mokhtar, M. (2017). Using Thinking Blocks to Encourage the Use of Higher Order Thinking Skills among Students When Solving Problems on Fractions. *International Journal of Educational and Pedagogical Sciences*, 11(2), 342-348. <https://dx.doi.org/10.5281/zenodo.1339872>
- Baldin, Y. Y. (2018). Desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo de escola básica: caso de modelagem pictórica da Matemática de Singapura. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 17, 31-44.
- Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo*. Edições 70.
- Baysal, E. e Sevinç, S. (2020). An alternative approach to solving algebra word problems: Singapore bar model method. *Inonu University Journal of the Faculty of Education*, 21(2), 942-962. <https://doi.org/10.17679/inuefd.709349>
- Baysal, E. e Sevinç, S. (2022). The role of the Singapore bar model in reducing students' errors on algebra word problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(2), 289-310. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1944683>
- Beckmann, S. (2004). Solving algebra and other story problems with simple diagrams: a method demonstrated in grade 4-6 texts used in Singapore. *The Mathematics Educator*, 14(1), 42-46.
- Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto editora.

- Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F. e Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37, 5-15. <https://doi.org/10.1007/BF02655892>
- Cai, J., Ng, S. F. e Moyer, J. C. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*, 25-41. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_3
- Cheong, Y. K. (2002). The model method in Singapore. *The Mathematics Educator*, 6(2), 47-64.
- Clement, G. e Swars Auslander, S. (2022). The Singapore Modeling Method: Possibilities for Improving Elementary Teacher Mathematics Preparation. *PRIMUS*, 32(10), 1125-1139. <https://doi.org/10.1080/10511970.2021.1993396>
- Englard, L. (2010). Raise the bar on problem solving. *Teaching children mathematics*, 17(3), 156-163.
- Fan, L. e Zhu, Y. (2007). From convergence to divergence: the development of mathematical problem solving in research, curriculum, and classroom practice in Singapore. *ZDM*, 39, 491-501. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0044-1>
- Garzon, J. R. e Casinillo, L. F. (2021). Visualizing mathematics: the use of block models for strategic problem solving. *Journal of Education Research and Evaluation*, 5(1), 112-117. <https://doi.org/10.23887/jere.v5i1.30888>
- Ho, S. Y. e Lowrie, T. (2014). The model method: Students' performance and its effectiveness. *The Journal of Mathematical Behavior*, 35, 87-100. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.06.002>
- Kaur, B. (2015). The model method: A tool for representing and visualising relationships. Em X. Sun, B. Kaur e J. Novotna (Eds.), *Conference proceedings of ICMI Study 23: Primary mathematics study on whole numbers* (pp. 448-455). ICMI e University of Macau.
- Kaur, B. (2019). The why, what and how of the 'Model' method: A tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM*, 51(1), 151-168. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-1000-y>
- Khng, K. H. e Lee, K. (2009). Inhibiting interference from prior knowledge: Arithmetic intrusions in algebra word problem solving. *Learning and Individual Differences*, 19(2), 262-268. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.01.004>
- Kho, T. H. (1987). Mathematical models for solving arithmetic problems. Em S.-T. Ong e C.-M. Chai (Ed.), *Proceedings of the 4th Southeast Asian conference on mathematics education (ICMI-SEAMS)* (pp. 345-351). Institute of Education in Singapore.
- Kho, T. H., Yeo, S. M. e Fan, L. (2014, 28 - 30 July). *Model method in Singapore primary mathematics textbooks*. [Conference paper] 2014 International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT2014), Southampton, United Kingdom.

- Kho, T. H.; Yeo, S. M. e Lim, J. (2009). *The Singapore model method for learning mathematics*. Marshall Cavendish Education.
- Kintsch, V. e Greeno, J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129.
- Koning, B. B., Boonen, A. J., Jongerling, J., van Wesel, F. e van der Schoot, M. (2022). Model method drawing acts as a double-edged sword for solving inconsistent word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 111(1), 29-45. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10150-8>
- Lee, K. e Ng, S. F. (2011). Neuroscience and the Teaching of Mathematics. *Educational Philosophy and Theory* 43(1), 81-86. <https://doi.org/10.1111/j.1469-5812.2010.00711.x>
- Lee, K., Lim, Z. Y., Yeong, S. H., Ng, S. F., Venkatraman, V. e Chee, M. W. (2007). Strategic differences in algebraic problem solving: Neuroanatomical correlates. *Brain Research*, 1155, 163-171. <https://doi.org/10.1016/j.brainres.2007.04.040>
- Lioe, L. T. e Fang, Y. (2010, April/May). *Overcoming challenges in mathematical problem solving in student-pair work settings: Cases from Singapore* [Paper presentation]. American Educational Research Association Annual Meeting (AERA), Denver, Colorado, USA. <https://hdl.handle.net/10497/17203>
- Looi, C. K. e Lim, K. S. (2009). From bar diagrams to letter-symbolic algebra: a technology-enabled bridging. *Journal of Computer Assisted Learning*, 25(4), 358-374. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2009.00313.x>
- Martín, S. V., Verschaffel, L. e Baz, M. R. (2022). Dificultad de los problemas aritméticos verbales de los libros de texto singapurenses y españoles. *Avances de Investigación en Educación Matemática* (22), 137-156. <https://doi.org/10.35763/aiem22.4412>
- Morina, Q. e Vondrová, N. (2021). Block model approach and its effect on word problem solving, a case study. *Broadening experiences in elementary school mathematics*, 310-320.
- Morin, L. L., Watson, S. M., Hester, P. e Raver, S. (2017). The use of a bar model drawing to teach word problem solving to students with mathematics difficulties. *Learning Disability Quarterly*, 40(2), 91-104. <https://doi.org/10.1177/0731948717690116>
- Naroth, C. e Luneta, K. (2015). Implementing the Singapore mathematics curriculum in South Africa: Experiences of foundation phase teachers. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 19(3), 267-277. <http://dx.doi.org/10.1080/10288457.2015.1089675>
- Ng, S. F. (2003). How secondary two express stream students used algebra and the model method to solve problems. *The Mathematics Educator*, 7(1), 1-17.
- Ng, S. F. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary mathematics curriculum. *The Mathematics Educator*, 8(1), 39-59.

- Ng, S.F. (2015). How a Singapore Teacher Used Videos to Help Improve Her Teaching of the Part-Whole Concept of Numbers and the Model Method. Em Ng, S. (Ed.), *Cases of Mathematics Professional Development in East Asian Countries. Mathematics Teacher Education* (Vol. 10, pp. 61-82). Springer.
- Ng, S. F. (2022). The model method: Crown jewel in Singapore mathematics. *Asian Journal for Mathematics Education*, 1(2), 147-161. <https://doi.org/10.1177/27527263221107526>
- Ng, S. F. e Lee, K. (2008). As long as the drawing is logical, size does not matter. *The Korean Journal of Thinking and Problem Solving*, 18(1), 67-82.
- Ng, S. F. e Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 282-313. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0282>
- Reyhani, E., Yaftian, N. e Rezaei, A. (2020). Effect of Teaching Problem Solving with Emphasis on Drawing Strategy upon word problems Solving Performance of Seventh Grade Students. *New Educational Approaches*, 14(2), 87-108. <https://doi.org/10.22108/nea.2020.119242.1405>
- Richit, A., Ponte, J. P. D. e Quaresma, M. (2021). Aprendizagens profissionais de professores evidenciadas em pesquisas sobre estudos de aula. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(70), 1107-1137. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a26>
- Richit, L. A. e Richit, A. (2022). O Modelo de Barras de Singapura na Resolução de Problemas Aritméticos e Algébricos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36(73), 697-724. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a05>
- Sevinç, S. e Lizano, C. (2022). Bar model method as a problem-solving heuristic: an investigation of two preservice teachers' solution paths in problems involving ratio and percentage. *Mathematics Education Research Journal*, 1-25. <https://doi.org/10.1007/s13394-022-00427-9>
- Spencer, R. e Fielding, H. (2015). Using the Singapore Bar Model to support the interpretation and understanding of word problems in Key Stage 2. Em G. Adams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 35(3), 114-119.
- Sunde, P. B., Jóelsdóttir, L. B. e Pedersen, P. L. (2020). Blokmodellen: en overset repræsentation i dansk matematikundervisning? *MONA-Matematik-og Naturfagsdidaktik*, 21-21.
- Thiyagu, K. (2013). Effectiveness of Singapore math strategies in learning mathematics among fourth standard students. *Vetric Education*, 1, 1-14.
- Urbano, S., Fernández, J. A. e Fernández, M. P. (2016). El modelo de barras: una estrategia para resolver problemas de enunciado en Primaria. *Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología*, 3(1), 23-37.

- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. e Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM*, 52, 1-16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>
- Vicente, S., Sánchez, R. e Verschaffel, L. (2020). Word problem solving approaches in mathematics textbooks: a comparison between Singapore and Spain. *European journal of psychology of education*, 35(3), 567-587. <https://doi.org/10.1007/s10212-019-00447-3>
- Xin, Y.P. The effect of a conceptual model-based approach on ‘additive’ word problem solving of elementary students struggling in mathematics. *ZDM Mathematics Education* 51, 139–150 (2019). <https://doi.org/10.1007/s11858-018-1002-9>
- Yeap, B. H., Ferrucci, B. J. e Carter, J. A. (2006). Comparative study of arithmetic problems in Singaporean and American mathematics textbooks. Em F. K. S. Leung, K.-D. Graf e F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions-A Comparative Study of East Asia and the West: The 13th ICMI Study* (pp. 213-225).

Luiz Augusto Richit
Universidade Federal do Rio Grande
do Sul, Brasil
luizaugustorichit@gmail.com

Adriana Richit
Universidade Federal da Fronteira
Sul, Brasil
adrianarichit@gmail.com

Recibido: Dezembro, 2023. Aceptado: Outubro, 2024
doi: 10.30827/pna.v19i3.29667



ISSN: 1887-3987

MEANINGS ATTRIBUTED TO DRAWINGS OF THE SINGAPORE BAR MODEL IN THE LITERATURE

Luiz Augusto Richit and Adriana Richit

The (bar) model method (MM) is a visual strategy that uses pictorial rectangles to represent the numerical relationships of word problems. Current literature argues that authors attribute different meanings to these drawings. In this text, we present a literature review guided by the research question: What are the meanings associated with the drawings of the Singapore bar model revealed by the literature on the issue? To systematize the meanings assigned to the drawings of the bar model in the literature, we searched for peer-reviewed articles in the ERIC and Scopus databases. At the end of the selection process, 15 articles comprised the research corpus. During the analyses of the works, reading sheets were prepared to constitute evidence to answer the research question. Qualitative-interpretative analysis of the results revealed six categories of analysis that dialogue with the analyzed authors and encompass fundamental aspects involved in solving verbal problems. These categories were: a visual tool for operational decision-making (focus on the MM role to accurate operational choice over numerical data), problem-solving heuristics (MM as an infusion with Polya's problem-solving heuristics), mediating pictorial representations (pictorial drawings mediating between concrete and abstract in the CPA approach, based on Jerome Bruner's representation phases), pictorial equations (visual analogs of algebraic equations, its unknowns and their operational properties), representation of mathematical objects (understanding of drawings as representations of abstract mathematical objects, unrelated to rectangles) and visual approach to numerical relations (focus on the relational structure of quantities and their schematic structuring in the form of visual models). Through this mapping, we demonstrate that adopting the bar model in the classroom to solve verbal problems is not trivial and is linked to different cognitive processes of representation and heuristic problem solving. This points to the need for adequate preparation of teachers who teach mathematics through the bar model, for which this text provides a systematic compendium of cognitive processes intertwined in the “meanings attributed to the drawings of the bar model”.