Juegos y rarezas matemáticas

Pasos hacia un conocimiento físico-matemático naturalizado

Steps toward naturalized physical-mathematical knowledge

José Vico Martín

Revista de Investigación

Pensamient Matemátic MAIC

Volumen XV, pp. 107−133, ISSN 2174-0410
Recepción: 18 Mar'24; Aceptación: 13 ene'25

1 de abril de 2025

Resumen

Una investigación académica de este autor sobre los presupuestos didácticos de una muestra de alumnos, inscritos en un master para el profesorado de educación secundaria, ha confirmado unos rasgos físico-matemáticos excesivamente formalistas y, casi siempre, muy alejados de los modelos circunstanciales de la realidad natural humana. Este artículo propone, en cambio, una práctica docente del profesorado que fundamente la sintaxis simbólica utilizada, en tres de las componentes principales del entendimiento humano: espacio, tiempo y materia/causalidad. Constituyentes, las tres, del principio de razón suficiente de las realidades cognoscibles.

Palabras Clave: definiciones circunstanciales, escala humana, cuánto por uno, ficciones matemáticas, ontología de la matemática.

Abstract

An academic investigation by this author on the didactic budgets of a sample of students, enrolled in a master's degree for secondary education teachers, has confirmed certain forms, classic and routine, used in the transmission of physical-mathematical knowledge specific to the educational level noted. The generally observed features coincide in excessively formalistic physical-mathematical conceptions and, almost always, very far from the circumstantial models of human natural reality. This article proposes, instead, a teaching practice for teachers that bases the symbolic syntax used on three of the main components of human understanding: space, time and matter/causation. Constituents, all three, of the principle of sufficient reason of knowable realities.

Keywords: circumstantial definitions, Human scale, How much for one, Mathematical fictions, Ontology of mathematics..

1. Una experiencia didáctica de partida: concepciones matemáticas y físicas de la Educación Secundaria en estudiantes de Máster de Profesorado

Este artículo se inspira, íntegramente, en experiencias personales de quien lo redacta. La pretensión del encabezamiento alude, por eso, a un recorrido histórico, paulatino y personal —durante cuarenta años de práctica docente— hacia un cambio de enfoque, más circunstancial y menos formalizado, desde el que contemplar dos de las creaciones intelectuales más entrelazadas de la humanidad: una ciencia fáctica del mundo; la física, por un lado; y otra lógico-formal de sus modelos, la matemática, por otro.

Vaya por delante, además, que el presente artículo se refiere, en lo institucional, al nivel académico de la Educación Secundaria en España (entre 15 y 18 años) y, en lo curricular, al olvido, en la didáctica científica generalmente utilizada, de las habituales circunstancias que las actividades humanas proveen en su contacto habitual con la naturaleza.

Con el tiempo, una primera constatación se ha ido imponiendo: la desconexión, paulatina y permanente, de la necesaria continuidad bio-psicológica del yo —aquello que condiciona el entendimiento humano— con buena parte de las circunstancias en las que se presentan los fenómenos físico-matemáticos que habitualmente se utilizan en la educación institucional. Un caso real puede servir de ejemplo introductorio:

En uno de los apartados de un cuestionario presentado a 50 estudiantes de un máster en formación del profesorado, y que se detallará más adelante, se propuso la siguiente cuestión: "Explique, brevemente, lo que es el seno de un ángulo".

Tan solo 19, entre 50, fueron las respuestas aceptables, aunque en forma operacional (cateto opuesto partido por hipotenusa en un triángulo rectángulo). Nadie tenía un concepto circunstancial; como este, por ejemplo

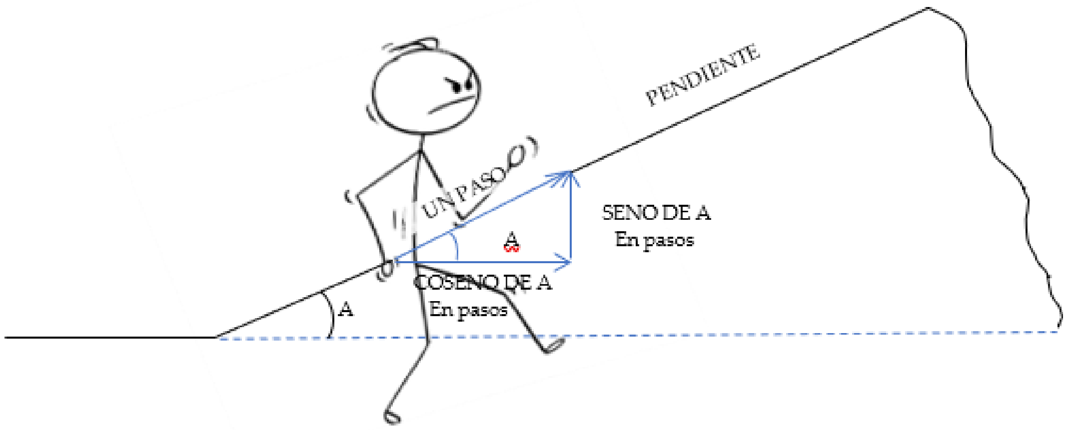

Figura 1. Trigonometría a escala humana.

El objetivo propuesto en este artículo es, entonces, doble: a) ofrecer la experiencia que proporciona un largo ejercicio profesional, y b) proponer una innovación educativa que tomara, en alta consideración a la historia y a la filosofía de la ciencia como referentes fundamentales en la transmisión del conocimiento y los valores humanos. Ambas acciones dirigidas preferentemente tanto a profesores ya en activo, como a quienes aspiran a serlo. Por eso quien esto escribe ha tenido la oportunidad de realizar un sencillo experimento con un grupo de alumnos de nivel universitario, graduados en ciencias varias.

Estos fueron la descripción, la composición, la amplitud y la procedencia de la muestra, la cuestión propuesta, la categorización de las respuestas y, por último, los resultados obtenidos.

1.1 Cuestionario sobre didácticas matemáticas específicas en la educación secundaria. Estadístico 1[1]

- Año del trabajo de campo: 2023
- Procedencia académica de los participantes: grado universitario en matemáticas y ciencias experimentales
- Estatuto académico de los participantes en el momento de la prueba: curso de posgrado como Máster Oficial en Profesorado de Educación Secundaria de España.
- Promotor y gestor de la investigación: autor de este artículo como profesor jubilado de bachillerato.
- Contacto con los encuestados: mediación de una de las profesoras del máster.
- Estudio de un caso: "Explique brevemente lo que es el seno de un ángulo".
- Descripción del estadístico:
    - Composición de la muestra: 50 alumnos con un grado universitario en ciencias.
    - Distribución de la muestra por titulaciones: 2 alumnos de Arquitectura; 1 de Arquitectura Técnica; 11 de Biología; 4 de Ciencias Ambientales y del Mar; 13 de Matemáticas; 12 de Química y 7 sin datos del grado.
    - Categorías de clasificación cualitativa de las respuestas.
        - NA (Naturalismo alto) = Descripción verbal; metafórica; por analogía, generalización empírica, holística y a escala humana.
        - ND (Naturalismo débil) = Interpretación fenoménica de fórmulas matemáticas.
        - FA (Formalismo alto) = Modelos matemáticos correctos; solución correcta; utilización del cuanto por uno.
        - FD (Formalismo débil) = Exposición tecnológica, fáctica o formalista incompleta.

[1] Autor de este artículo, febrero 2023

- SR = Sin respuesta; exposición formalista incorrecta; "sí" o "no" escueto; y respuesta no pertinente o ilegible.

- Clasificación de resultados.

Tabla 1. Frecuencias absolutas y relativas por titulación, categorías y totalidad de la muestra (50 alumnos) (solo para la cuestión 5c: "Explique brevemente lo que es el seno de un ángulo")

Titulaciones	*NA*	*ND*	*FA*	*FD*	*SR*
Arquitectura	-	-	-	1	1
Arquitectura Técnica	-	-	-	-	1
Biología	-	-	-	-	11
CC. Amb. Y Mar.	-	-	1	1	2
Matemáticas	-	-	8	2	3
Química	1	-	1	1	9
Sin datos de grado	-	-	1	1	5
Muestra total	1	0	11	6	32
Frecuencias relativas	2%	0	22%	12%	64%

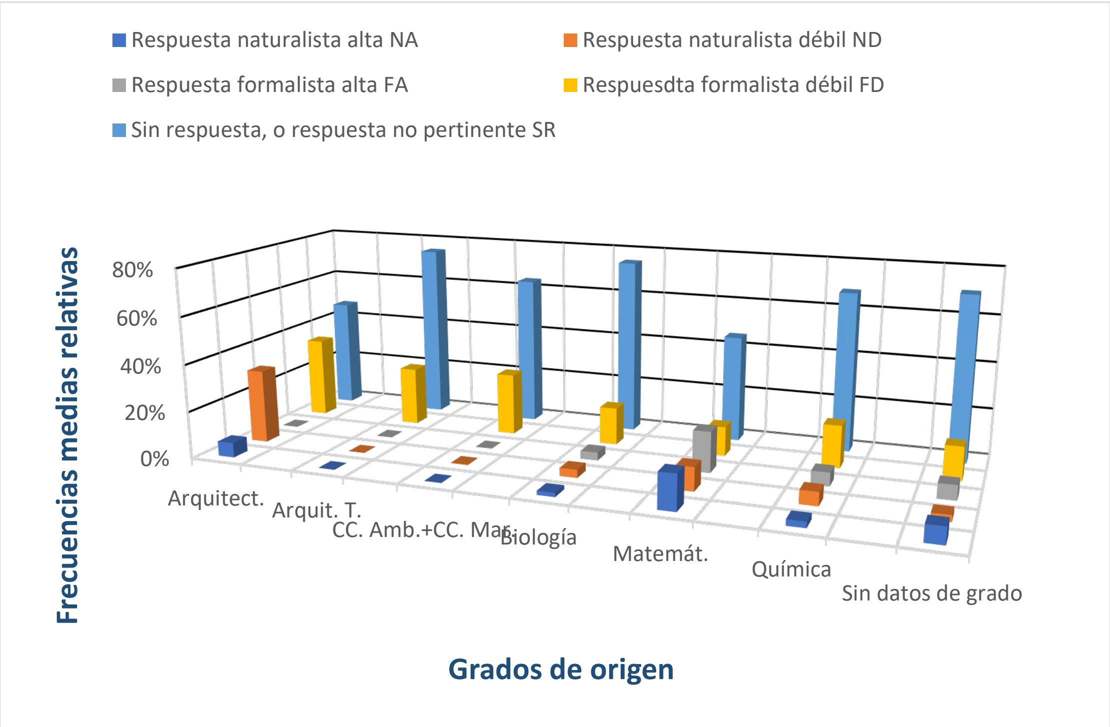

Figura 2. Educación matemática. Diagrama de columnas para la totalidad de los ítems (16) del cuestionario

1.2 Análisis de la respuesta a la pregunta "Explique brevemente lo que es el seno de un ángulo"

Observando las frecuencias relativas por titulación y categorías (tabla 1) de izquierda a derecha, las dos primeras cifras que llaman inmediatamente la atención es un escuálido 2% de cuestiones resueltas en modo naturalista alto y ninguna en forma de un naturalismo débil.

La hipótesis inicial del estudio, en cuanto que el dominio de formalismo es casi absoluto, se confirma plenamente: 17 del total de respuestas habidas (18) son de estilo formalista

En el resto de la muestra, 32 alumnos en la categoría "sin respuesta" es, con mucho la más llamativa. Casi dos tercios de los encuestados con titulación universitaria en ciencias han olvidado las nociones básicas de la trigonometría que debieron haberles enseñado en la ESO y repetido en el bachillerato.

Aunque muy complicado, un interesante estudio, al respecto, sería conocer cómo hubieran sido las respuestas si, en su momento, a los alumnos se les hubiera propuesto la figura 1 (trigonometría a escala humana) como "imagen" del seno de un ángulo.

En cualquier caso, sí es afirmable en nuestro cuestionario, que, quienes todavía recuerdan algo de la noción de seno de un ángulo, lo asocian exclusivamente a una rutinaria operación aritmética. A la que, por otra parte, ninguno de los cincuenta estudiantes asigna significado conceptual alguno: diecinueve son las soluciones "formalmente" acertadas y ninguna respuesta natural.

Mención aparte merece otro de los resultados sorprendentes. Y es que, nadie de entre los titulados en bilogía, se acuerde de lo que significa el seno de un ángulo: ni de forma circunstancial, ni memorística. ¿Sirvió de algo lo que, a este respecto, les enseñaron en secundaria?

Igual que, como llamativa resulta, además, la situación de tres de los trece titulados en matemáticas, un 23%, con errores o sin respuesta en el elemental ítem trigonométrico propuesto.

Llegados a las tercera y cuarta de las categorías, las que engloban las respuestas "formalistas altas (FA)" y "formalistas débiles (FD)" llama la atención la baja proporción de aciertos completos o parciales —solo 17 entre 50— nada menos que en un concepto geométrico que, precisamente, tenemos ante nosotros casi todos los días.

Por eso, en alusión a la ausencia de rememoración conceptual y aplicación práctica de tantas vivencias humanas habituales con el seno de un ángulo, se utiliza el entrecomillado para la condición formalista que se achaca a las definiciones calificadas como "FA" y "FD". Algunos actos cotidianos pueden servir de recordatorio.

Basta con caer en la cuenta, de la alta probabilidad, de que los encuestados —jóvenes, todos ellos— hubieran visitado en los días anteriores alguno de los centros comerciales que poseen escaleras mecánicas. Amén de ser una práctica generalizada, ninguno, sin embargo, parece darse cuenta de eso como origen circunstancial humano de la mayoría de las ficciones matemáticas que se divulgan constantemente: que moverse por un plano inclinado, por ejemplo, produce el mismo resultado[2] —y es más cómodo— que realizar un movimiento vertical y

[2] A "producir un mismo resultado" asigna este autor el significado que se esconde con la ortodoxa utilización de "descomposición/composición" de fuerzas y movimientos.

otro horizontal con el mismo origen y final que el primero. En todo caso, nuestro intelecto no puede ir más allá que a "imaginarlos" con la ficción procedimental de sentido contrario al llamado "principio de superposición".

Tampoco nadie, en el orden cuantitativo, parece darse cuenta de que la mayor o menor utilidad de cada escalera o pendiente, que es subir o bajar, se puede medir —y es más útil su uso matemático— en "cuanto por uno" (sugiero poner: tanto por uno. También en lo siguiente. O, dicho de otro modo: cuantos metros/pasos/palmos/cm… subo (o bajo) por cada metro/paso/palmo/cm de avance sobre la pendiente o escalera. Visto así, uno se percata de inmediato que, a cada metro/paso, etc. de avance por ella, a la altura ganada —o perdida, en el caso de bajar— le corresponde siempre una dimensión menor que un metro/paso, etc. Mira por dónde, por eso nos repitieron tantas veces, que el seno de un ángulo, y también el coseno, son siempre menores que un cuanto por uno. Lo que, en el fondo, significa algo tan obvio como que, cualquiera que sea una pendiente, sus proyecciones horizontal y vertical son siempre más cortas que ella. Evidencia palmaria que, sin embargo, no es fácilmente evocable desde la definición ortodoxa de "cateto opuesto partido por hipotenusa". Tal vez de ahí pudiera proceder la alta tasa de errores observados en la investigación narrada.

Física y matemáticas circunstanciales y a escala humana son, por eso mismo, mucho más útiles para la inmensa mayoría de las situaciones prácticas.

Además de que, con el procedimiento que aquí se defiende (el seno y el coseno como la longitud vertical —subida o bajada— del uno, y el desplazamiento horizontal, del otro; ambos cuando recorremos 1 km, 1 m, 1 cm, … etc. en pendiente), no es necesaria demostración alguna para la aplicación directa del teorema de Pitágoras a su forma trigonométrica. La relación $sen^2 a + cos^2 a = 1$ es inmediata: la suma de los cuadrados del cuanto por uno de desplazamiento vertical y del cuanto por uno del horizontal, serán siempre el "uno" del patrón de medida del desplazamiento natural.

Desde este artículo, repetimos, se pretende llamar la atención justamente en el origen natural de la totalidad de los conceptos matemáticos y, por utilizar uno de tantos ejemplos posibles del uso de un seno o un coseno. Ambos implican siempre una circunstancia material humana (movimientos oblicuos de objetos, resistencia de materiales, transmisión de radiaciones, etc.). Que su modelo mental haya consistido en la forma geométrica conocida como triángulo rectángulo es una ficción como tantas otras de nuestras realidades físicas: son muy escasas las realidades naturales geométricamente regulares.

Ampliando en un caso más el análisis de la investigación que se comenta, otra de las cuestiones propuestas preguntaba "¿Sabría usted demostrar el Teorema de Pitágoras con una cuerda?" A excepción de un graduado en arquitectura, que había oído o leído algo al respecto, ninguno de los estudiantes encuestados sabía de la utilidad histórica de la cuerda de doce nudos (el triángulo sagrado egipcio) para trazar perpendiculares perfectas en construcción o agrimensura; o hasta demostrar, incluso, el mismo teorema de Pitágoras. Pareciera como si el entendimiento ecológico de los sabios clásicos de otras épocas hubiera sido secuestrado por los modelos y algoritmos aritméticos abstractos, cuando las sencillas proporciones (3-4-5 y sus proporcionales) de estos triángulos permiten cálculos que, con simples sumas, restas y fracciones pueden sustituir, con aproximación suficiente a las complicadas potencias y raíces del Teorema de Pitágoras.

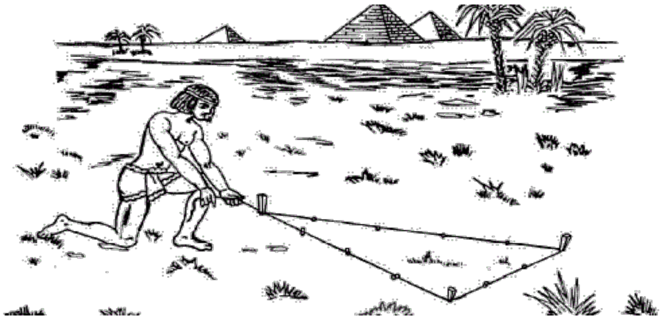

Figura 3 Ugarte, Alberto. https://www.geogebra.org/m/nfkuxems

Así, por derivación natural de las vivencias humano-ambientales, las tres "razones directas", que así se llaman al seno, coseno y tangente, pueden ser mucho mejor modeladas —también, claro está, las inversas— a partir de los fenómenos circunstanciales que suceden en la vida de las personas. Las aburridas y volátiles operaciones aritméticas, como se hace habitualmente en la inmensa mayoría de los círculos académicos, solo pueden justificar su existencia en la posibilidad de su manejo materialmente utilitario por medio de patrones gráficos, artilugios mecánicos o máquinas. Nunca, sin embargo, serán capaces de fomentar la creatividad humana por generalización empírica, ni sus implicaciones a escala humana, si no es con referencias continuadas al contexto general de la biosfera.

Richard Feynman[3], premio Nobel de física en 1965, incluyó lo siguiente en su discurso de recepción del premio:

> *Siempre me parece extraño que las leyes fundamentales de la física, cuando se descubren, puedan aparecer en tantas formas diferentes idénticas al principio y que luego, con una pizca de matemáticas, pueda mostrarse la relación entre ellas… Es algo que he aprendido de la experiencia. Siempre hay otra manera de decir lo mismo que no se parece en nada a la manera en que se había dicho antes…Creo que de algún modo es una representación de la simplicidad de la naturaleza. No sé lo que significa que la naturaleza escoja esas curiosas formas, pero tal vez es una manera de definir la simplicidad .*

Valdrá la pena señalar también, a título de ejemplo, otra de las cuestiones planteadas a los estudiantes de máster, y que fueron generalmente mal resueltas; esta, por ejemplo: " ¿Qué significado tiene la expresión: 8€/2€? ". Y es importante notar de antemano que lo que la pregunta solicitaba es un "significado", no una fórmula, un cálculo, o un resultado.

Las respuestas fueron variadas; pero todas ignoraron algunos posibles significados, circunstanciales. Por ejemplo, que 8 pueden ser los euros ganados y 2 los invertidos, con lo cual: 8€/2€ = 4 euros de beneficio por cada uno de inversión. O —una única persona lo respondió así— "que estemos haciendo montoncitos de 2 euros, con lo que, con 8 € salen 4 montoncitos".

He aquí cómo, en la cuestión propuesta, "4" posee entidad concreta: son "montoncitos"; ese es otro posible significado. Todas las fracciones de este tipo (mismas unidades en el numerador que en el del denominador) sí poseen dimensiones, sean éstas materiales o conceptuales. En el mundo natural, no existen referencias relativas no objetivables. Decir que el seno de una pendiente de 30º vale 1/2 puede significar al menos, dos cosas: a) que la elevación o descenso

[3] Publicado en: Krauss, Lawrence M. Descubrir a Richard Feynman. Biografía científica. Barcelona: RBA Libros, S. A., 2012, p. 29.

por una pendiente de 30º es siempre la mitad de la pendiente recorrida o, lo que es lo mismo, b) que, por un metro de pendiente recorrida, se sube o baja medio metro. Se trata, en definitiva, de un cuanto por uno, como se decía más arriba: un algo por cada unidad de otro algo.

Similares fueron, a propósito de esto mismo, otras de las respuestas en relación a fracciones de esta clase. Valga una breve lista de "curiosas" respuestas sobre la misma fracción 8€/2€

- "…la realidad palpable impide dividir € entre €"
- "Me resulta curioso que en la fracción operemos con unidades"
- "4 €", (sin añadir nada más)
- "4 … y no sé si la unidad se mantiene"
- "4, aunque esta operación carece de sentido en la realidad"
- "4 … los euros se eliminan unos con otros"
- "4 …no tiene unidades, es solo 4…"
- "Pondría: $\nexists$ 8€/2€ "

Con todo, el 4, como respuesta y sin añadir nada más, es la más repetida. Y una única (recordamos que entre 50) y la mejor de todas: "Tenemos 8€ y queremos hacer montones de 2€ para repartirlos…"

1.3 Un ejemplo físico y su interpretación matemática. El fenómeno de la refracción de la luz y la Ley de Snel[4]

Un caso más, en defensa de las inferencias circunstanciales, sobre todo en física, que aquí se postulan, puede ilustrar sus ventajas frente a las notaciones simplemente matemáticas. Se trata de la llamada ley de Snel para la refracción de la luz.

Como es sabido, el efecto de la refracción de la luz se produce cuando un haz de la misma (también del resto de energías ondulatorias) experimentan una desviación al pasar de un medio que las conduce a otro de distinta densidad. Añádase a esto el hecho de que, cuando la densidad del segundo medio es mayor que la del primero, el haz de luz se desvía con un ángulo menor que el de incidencia. Comportándose al revés cuando el segundo medio es menos denso que el primero.

En esta desviación, experimentalmente se comprueba siempre que, midiendo los ángulos, el seno del de incidencia y el seno del de refracción son proporcionales a un factor n cuyo valor depende de la naturaleza de los dos medios de transmisión de las ondas y de la naturaleza de las propias ondas. Matemáticamente, se suele expresar como $sen\, i = n\, sen\, r$ y, por lo tanto: $n = \frac{sen\, i}{sen\, r}$ En cuyo caso, $sen\, i$ [i = ángulo de incidencia] dividido por $sen\, r$ [r = ángulo de refracción] son los "cuantos" de $sen\, i$ que corresponden a cada uno de los "cuantos" de $sen\, r$. Cosa que llama la atención por cuanto parece que lo más coherente sería partir del resultado o "salida" del fenómeno —la luz refractada— y comparar esta con la luz inalterada, antes del

[4] Utilizamos "Snel" en lugar de "Snell", por el nombre original de su autor Willebrord Snel, antes de ser latinizado como Snellius.

fenómeno. Aunque, claro está, entonces $n = \frac{sen\, r}{sen\, i}$; es decir, n = cuantos de r (salida) por cada cuanto de i (entrada).

Paralelamente, lo mismo ocurre con la definición física —comprobada, también experimentalmente— del índice de refracción, como $n = \frac{c}{v}$ con lo que, de esta manera, se están ofreciendo los cuantos de una constante absoluta, c, en el vacío, por cada uno de los cuantos de sus variables en lugar de hacerlo al revés, como parecería más lógico. Eso sí, del modo ortodoxo n es siempre mayor que 1, puesto que cualquier otro medio será siempre de mayor densidad que el vacío, y la velocidad de la luz en él menor que c.

Digamos, por último, que, lo que aquí defendemos como "circunstancial", sería considerar la contracción lineal de los puntos del haz luminoso refractado hacia la normal a la superficie de separación de los dos medios, por cada unidad de separación de los de incidencia. O sea, considerar $n = \frac{sen\, r}{sen\, i} < 1$. Lo que estaría en consonancia definiendo n como v/c; en donde v es la velocidad de la luz en el medio de transmisión material, y c es la velocidad de la luz en el vacío. De este modo, y partiendo del índice de refracción del agua pura de 1,33:

- Si $n = \frac{c}{v}$, nagua = (300.000 km/s)/(224 900 km/s) = 1,333 ≈ 4/3; lo que indica que, en el vacío, la velocidad de la luz es (4)/3 mayor que en el agua; dato que resulta poco representativo de la acción del agua sobre la luz.
- Si $n = \frac{v}{c}$; nagua = (224.900 km/s)/(300.000 km/s) = 0,74966 ≈ 0,75 = 3/4; cuyo significado, que la velocidad de la luz en el agua disminuya a los 3/4 de la del vacío[5] , es claramente indicador (circunstancial) de la acción del agua sobre la luz.

De igual manera, en la figura 4 se observa la contracción de la longitud de r en relación a la longitud de i para el caso de refracción aire-agua, ilustración que da una idea intuitiva del fenómeno.

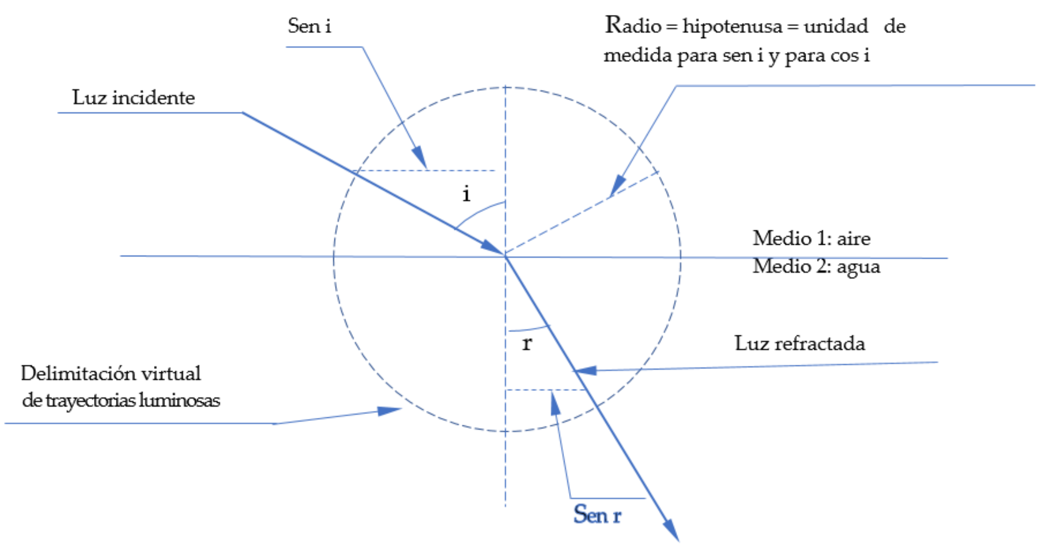

Figura 4. Ley de Snel naturalizada

[5] En el aire es prácticamente la misma: [Caire = 299.705 km/s; Cvacío = 299.792 km/s]

Hasta aquí, lo que podría tomarse como una representación "físico-circunstancial" que trata de explicar de otro modo las características formales "asignadas" a la refracción, y que son las que figuran en todas las referencias manejadas por el autor.

Este autor, sin embargo, aboga por una descripción[6] menos abstracta y formalista y mucho más natural y fenomenológica; "circunstancial", la estamos llamando y, para lo cual se ha elaborado el esquema anterior que reproduce un modelo del proceso.

Pero, ¿cuál es su significado físico-natural, además de las relaciones escuetamente matemáticas?, ¿qué fenómenos cualitativos son los que dan fundamento al patrón exclusivamente trigonométrico que se enseña casi en exclusiva?, ¿por qué no aparecen, en ninguno de los esquemas utilizados, ¿las realidades físicas —las separaciones lineales— entre los haces de luz y el eje virtual?

En el modelo gráfico anterior (figura 4) se han querido proponer los siguientes hechos didácticos:

- El paso de la luz desde el aire a cualquier otro medio transparente sigue siempre el mismo patrón cualitativo de "quebradura".
- Aun sin variar el ángulo de incidencia, sí varía el de refracción con los distintos medios refractores utilizados.
- Para cada medio refractor, el ángulo de refracción se mantiene constante cuando el de incidencia también lo hace7.
- $sen\ i$ y $sen\ r$, han sido representados en su versión geométrica natural. O sea, como la menor distancia trazada desde un punto cualquiera del rayo luminoso al eje de referencia.
- En todos los casos prácticos, la velocidad de la luz en el aire se toma con su valor en el vacío, por su mínima diferencia[8].

Y, en estas condiciones, la definición matemática de n como $\frac{sen\ i}{sen\ r}$, se podría naturalizar, en cuanto por uno, de dos maneras:

- Una forma débil, la formalmente utilizada pero que subvierte el orden de sucesión del principio de causalidad, como: Desviación lineal (en metros, cm. mm…) del rayo incidente por un (m, cm, mm …) de desviación del rayo refractado.
- Una forma naturalizada, que, al menos, respeta el orden de sucesión del principio de causalidad, tal como desviación lineal (en m, cm. mm…) del rayo refractado por un (m, cm, mm…) de desviación del rayo incidente.

Obviamente, en este último caso de inferencia, siguiendo el orden de sucesión desde el principio de causalidad, la formulación matemática del índice de refracción habría de ser n = $\frac{sen\ r}{sen\ i}$ = *desviación lineal de la luz refractada por una unidad (m, cm, mm … etc.) de recorrido de la luz incidente*. Lo que implicaría, claro está, que $n < 1$, tanto en la figura como en cualesquiera de los casos del paso de la luz desde un medio de menor a otro de mayor densidad.

[6] Nótese que no llamamos "explicación" a lo que sigue.

[7] Damos preferencia al consecuente (el cambio) frente al antecedente, las condiciones iniciales.

[8] $c_{vacío}$ = 299 792 458 m/s; y c_{aire} = 299.705.543 m/s

En otros contextos físicos, una situación similar a la que se propone, se da, por ejemplo, en los casos de la dilatación térmica. El coeficiente de dilatación lineal [a] se determina experimentalmente como el incremento de longitud por unidad de variación de la temperatura y de la longitud inicial. Así: a = $\frac{\Delta L}{\Delta T \text{ L0,}}$. Es decir: El "índice" de un fenómeno como cuanto del "consecuente" por unidades del "antecedente".

2. Ciertas complejidades didácticas y el Principio de razón suficiente

Si se echa una ojeada a las expresiones físicas en "cuantos por uno" más habituales:

velocidad, $v = \frac{d}{t}$; aceleración, $a = \frac{v}{t}$; masa, $m = \frac{f}{a}$; potencia, $P = \frac{T}{t}$; presión, $p_r = \frac{f}{S}$; densidad, $d = \frac{m}{vol}$; caudal, Q= $\frac{vol}{t}$; intensidad de corriente eléctrica, $I = \frac{q}{t}$; capacidad de carga eléctrica, $C = \frac{Q}{V}$, …; con la misma estructura fraccionaria, en "cuantos por uno", se pueden expresar, tanto definiciones formales, como fenómenos y propiedades físicas. Siempre bajo el Principio de razón suficiente más alguno, o varios, de sus tres componentes básicos: espacio, tiempo y causalidad.

No sabemos, en la mayoría de los casos, qué pueda ser aquello a lo que llamamos "causa". Y las definiciones se limitan, por necesidad, a relacionar efectos o materia ya conocidos —o *establecidos* intuitiva o experimentalmente *a priori* —con su evolución espacio-temporal.

Así, en realidad, la masa es, por ejemplo, una abstracción condicionada a una aceleración condicionada, a su vez a una fuerza; la velocidad lo mismo con respecto a la distancia y al tiempo; la potencia, un trabajo condicionado, a su vez, por una fuerza aplicada durante un tiempo; y, así, sucesivamente: tautologías, en definitiva, que no dicen nada nuevo sobre sus numeradores porque tan solo los refieren, directa o indirectamente a sus respectivos denominadores por la intervención —suponemos— de una causa, el tiempo y el espacio. Los tres componentes básicos, como queda dicho, del *Principio de razón suficiente.*

3. Dos fundamentos epistemológicos oportunos: la Crítica de la razón pura, y El mundo como voluntad y representación

Si, como reza el título del presente artículo, su objetivo primordial es abogar por una naturalización de la ciencia de la que, cada día nos alejamos más, y con funestas consecuencias. Si la inmisericorde robotización a la que estamos sometidos los seres humanos nos está convirtiendo en manipuladores de datos en lugar de experimentadores de circunstancias vitales. Y si, los jóvenes estudiantes continúan embebidos en un mar de pantallas. Si todo esto no se revierte en favor de una vuelta a las circunstancias genuinamente humanas, y a sus mínimas formulaciones algorítmicas, el transhumanismo más radical puede acabar con la razón y con la emotividad: el Homo sapiens convertido en absoluto Homo faber.

Por eso, la Crítica de la razón pura, de Kant y El mundo como voluntad y representación, de Arthur Schopenhauer se añaden, aquí, como dos oportunos apoyos epistemológicos naturales de lo que se acaba de defender. Ambas, las dos referencias anunciadas, se han elegido en virtud de su complementación perceptual y su oportunidad cognitiva.

"El mundo es mi representación": esta es la verdad que vale para todo ser viviente y cognoscente, aunque solo el hombre puede llevarla a la conciencia reflexiva abstracta: y cuando lo hace realmente surge la reflexión filosófica.

[…] lo único que constituye el otro aspecto del mundo […] es, de parte a parte voluntad.[9]

Con esto, su primera verdad, la representación, Schopenhauer muestra, por ejemplo, un caso clarísimo de intuición pura que resulta perfecto para la concepción de las dos primeras, y las más antiguas, de las ramas de la matemática, la aritmética y la geometría.

Que la aritmética se basa en la intuición pura del tiempo no es tan evidente como que la geometría está basada en la del espacio. Pero se puede demostrar del siguiente modo. Toda numeración consiste en establecer repetidamente la unidad: cada vez la caracterizamos con una palabra distinta con el único fin de saber siempre cuántas veces la hemos establecido: estas son las cifras. Pero la repetición solo es posible por medio de la sucesión: y esta, es decir, la secuencia, se basa inmediatamente en la intuición del tiempo y solo gracias a él resulta un concepto comprensible: así que también la numeración es posible solo por medio de él[10].

Además, y para mayor abundamiento, Schopenhauer echa mano del pedagogo Pestalozzi quien enseñaba a multiplicar como "dos veces 2 es cuatro veces uno". Y, naturalmente, la palabra "veces" implica siempre una evocación temporal.

Uno cree importante, a partir de aquí, explicitar con mayor detalle las conjunciones intelectuales entre el tiempo, el espacio y la ley de causalidad "cuya aplicación [la ley de la causalidad] supone las otras dos formas emparentadas con ella, el espacio y el tiempo [y que] solo mediante la unión de las tres se llega a la representación objetiva"

Así que nada mejor, para eso, que reproducir los predicados de la tabla de características propias del tiempo, el espacio y la materia. Su lectura y reflexión resulta del máximo interés para cualquiera que pretenda captar —sobre todo si luego se quiere transmitir— algunas de las esencias de las leyes de la naturaleza mejor expresadas; esas que conforman los cerebros humanos y de cuya práctica están las escuelas tan necesitadas. Se trata de los Praedicabilia a priori del tiempo, el espacio y la materia. Una transcripción, la tabla 2, que, en el contexto educativo, consideramos imprescindible.

[9] Schopenhauer, Arthur. El mundo como voluntad y representación. Traducción, introducción y notas de Pilar López de Santa María. Madrid: Editorial Trotta, S. A., 2004, pp. 51-52.

[10] Ibidem pp. 64-65.

Tabla 2. Praedicabilia a priori del tiempo, el espacio y la materia.

DEL TIEMPO	DEL ESPACIO	DE LA MATERIA
1) Solo hay un tiempo y todos los diferentes tiempos son partes del mismo	1) Solo hay un espacio, y todos los diferentes espacios son partes del mismo.	1) Solo hay una materia, y todos los diferentes materiales son distintos estados de la materia: en cuanto tal, se llama *sustancia.*
2) Los diferentes tiempos no son simultáneos sino sucesivos.	2) Los diferentes espacios no son sucesivos sino simultáneos.	2) Las materias de diferentes tipos (materiales) no lo son por la sustancia sino por los accidentes.
3) No puede hacerse abstracción del tiempo, pero sí puede abstraerse todo de él.	3) No puede hacerse abstracción del espacio, pero sí puede abstraerse todo de él.	3) No puede pensarse la negación de la materia, pero sí la de todas sus formas y cualidades.
4) El tiempo tiene tres períodos: pasado presente y futuro que forman dos direcciones con un punto de indiferencia.	4) El espacio tiene tres dimensiones: altura, anchura y profundidad.	4) La materia existe, es decir, actúa, según todas las dimensiones del espacio y a lo largo de todo el tiempo, por lo que une y llena ambos; en eso consiste su esencia: es, pues, en todo, causalidad.
5) El tiempo es divisible hasta el infinito.	5) El espacio es divisible hasta el infinito.	5) La materia es divisible hasta el infinito.
6) El tiempo es homogéneo y un *continuum*: es decir, ninguna parte del tiempo es distinta de las demás ni está separada de ellas por nada que no sea tiempo.	6) El espacio es homogéneo y un *continuum*: es decir, ninguna parte del mismo es distinta de las demás ni está separada de ellas por nada que no sea espacio	6) La materia es homogénea y un *continuum*: es decir, no consta de partes originalmente diferentes (homeomerías) ni originariamente separadas (átomos); no está, pues, compuesta de partes que estén esencialmente separadas por nada que no sea materia.
7) El tiempo no tiene comienzo ni fin, sino que todo comienzo y fin están en él.	7) El espacio no tiene límites, sino que todos los límites están en él.	7) La materia no tiene origen ni término, sino que todo nacer y perecer están en ella.
8) En virtud del tiempo contamos.	8) En virtud del espacio, medimos.	8) En virtud de la materia, pesamos.
9) El ritmo existe sólo en el tiempo.	9) La simetría existe sólo en el espacio.	9) El equilibrio existe sólo en la materia.
10) Conocemos *a priori* las leyes del tiempo.	10) Conocemos *a priori* las leyes del espacio.	10) Conocemos *a priori* las leyes de la sustancia de todos los accidentes.
11) El tiempo es intuible *a priori*, aunque solo bajo la figura de una línea.	11) El espacio es inmediatamente intuible *a priori*.	11) La materia es *a priori* solamente pensada.

12) El tiempo no tiene duración, sino que pasa tan pronto como existe.	12) el espacio no puede perecer, sino que permanece siempre.	12) Los accidentes cambian, la sustancia permanece.
13) El tiempo es incesante	13) El espacio es inmóvil.	13) La materia es indiferente al reposo y al movimiento, es decir, no está originariamente inclinada a ninguno de ellos.
14) Todo lo que existe en el tiempo tiene una duración.	14) Todo lo que existe en el espacio, tiene un lugar.	14) Todo lo material tiene una actividad.
15) El tiempo no tiene duración, sino que toda duración existe en él, y es el permanecer de lo permanente, en oposición a su curso incesante.	15) El espacio no tiene movimiento, sino que todo movimiento existe en él, y es el lugar del cambio de lo móvil, en oposición a su inconmovible reposo.	15) La materia es lo permanente en el tiempo y lo móvil en el espacio: medimos la duración comparando lo que está en reposo con lo movido.
16) el movimiento sólo es posible en el tiempo.	16) El movimiento sólo es posible en el espacio.	16) El movimiento sólo le es posible a la materia.
17) La velocidad está, para un mismo espacio, en relación inversa con el tiempo.	17) La velocidad está, para un mismo tiempo, en relación directa con el espacio.	17) La *cantidad de movimiento* está, para una misma velocidad en relación geométrica directa con la materia (masa).
18) El tiempo no es mensurable directamente, por sí mismo, sino solo indirectamente a través del movimiento, en cuanto aquello que existe a la vez en el espacio y el tiempo: así miden el tiempo el movimiento del Sol y el del reloj.	18) El espacio es directamente mensurable por sí mismo, e indirectamente a través del movimiento en cuanto aquello que existe a la vez en el tiempo y en el espacio.	18) La materia, como tal, (la masa) es mensurable, es decir, determinable en su cantidad, solo indirectamente, a saber, mediante la *cantidad de movimiento* que recibe y emite al ser impulsada o atraída.
19) El tiempo es omnipresente: cada parte de él está en todas partes, es decir, en todo el espacio a la vez.	19) El espacio es eterno: cada parte de él existe en todo tiempo.	19) La materia es absoluta: no puede nacer ni perecer, no su *quantum* aumentar o disminuir.
20) En el tiempo, por sí solo, todo sería sucesivo. 21) El tiempo hace posible el cambio de los accidentes.	20) En el espacio, por sí solo, todo sería simultáneo. 21) El espacio hace posible la permanencia de la sustancia.	20), 21) La materia une el efímero flujo del tiempo con la persistente inmovilidad del espacio: por eso es la sustancia permanente de los accidentes cambiantes. Esos cambios los determina, para cada lugar y tiempo, la causalidad, que conecta así el tiempo y el espacio, y constituye toda la esencia de la materia.
22) Cada parte del tiempo contiene todas las partes de la materia.	22) Ninguna parte del espacio contiene la misma materia que otra.	22) Pues la materia es tan persistente como impenetrable.

23) El tiempo es el *principium individuationis.*	23) El espacio es el *principium individuationis.*	23) Los individuos son materiales.
24) El ahora no tiene duración.	24) El punto no tiene extensión.	24) El átomo no tiene realidad.
25) El tiempo en sí es vacío e indeterminado.	25) El espacio, en sí, es vacío e indeterminado.	25) La materia en sí no tiene forma ni cualidad, es por lo mismo inerte, es decir, indiferente al reposo y el movimiento, o sea, indeterminada.
26) Cada instante está condicionado por el anterior y existe solo en cuanto este ha dejado de existir. (Principio de razón del ser en el tiempo).	26) Mediante la situación de cualquier límite en el espacio con respecto a cualquier otro, podemos determinar estrictamente su situación con respecto a todos los posibles. (Principio de razón del ser en el espacio)	26) Ningún cambio en la materia puede producirse si no es debido a otro que le precede: por eso un primer cambio y un primer estado de la materia son tan impensables como un comienzo del tiempo o un límite del espacio (Principio de razón del devenir).
27) El tiempo hace posible la aritmética.	27) El espacio hace posible la geometría.	27) La materia, como lo móvil en el espacio, hace posible la foronomía.
28) El elemento simple de la aritmética es la unidad.	28) El elemento simple de la geometría es el punto.	28) El elemento simple de la foronomía es el átomo.

Por último, y sin perder de vista el objetivo que preside la redacción de este artículo, veamos un contraste didáctico entre ciertas prácticas y algunas teorías: he aquí, en este sentido, un antecedente claro de Kant a los *praedicabilia* de Schopenhauer acabados de transcribir:

Si llamamos sensibilidad a la receptividad que nuestro psiquismo posee, siempre que sea afectado de alguna manera, en orden a recibir representaciones, llamaremos entendimiento a la capacidad de producirlas por sí mismo, es decir, a la espontaneidad del conocimiento. Nuestra naturaleza conlleva el que la intuición sólo pueda ser sensible. La capacidad de pensar el objeto de la intuición es, en cambio, el entendimiento.

[…]Ninguna de estas propiedades es preferible a la otra: sin sensibilidad ningún objeto nos sería dado y, sin entendimiento, ninguno sería pensado. Los pensamientos sin contenido son vacíos; las intuiciones sin concepto son ciegas […]. Las dos facultades o capacidades no pueden intercambiar sus funciones. Ni el entendimiento puede intuir nada, ni los

sentidos pueden pensar nada. El conocimiento únicamente puede surgir de la unión de ambos[11].

" […] sin sensibilidad ningún objeto nos sería dado y, sin entendimiento, ninguno sería pensado. (Kant, Immanuel, 2005, p. 93)

Extraordinaria, la anterior sentencia que, al estilo de la Academia de Platón con la geometría, habría de figurar en el frontispicio de todo sistema educativo:

Por eso, porque la cicatería naturalista académica actual se mantiene a machamartillo, a uno le parece más oportuno que nunca denunciar la persistente pereza del hombre para liberarse de su "culpable incapacidad", en palabras del propio Kant:

La incapacidad significa la imposibilidad de servirse de su inteligencia sin la guía de otro. Esta incapacidad es culpable porque su causa no reside en la falta de inteligencia sino de decisión y valor para servirse de sí mismo de ella sin la tutela de otro. ¡Sapere aude! ¡Ten el valor de servirte de tu propia razón![12]

Precisamente, son las deficiencias didácticas y las excesivas normativas burocráticas académicas vividas por este antiguo profesor, las que han orientado este trabajo y el consiguiente ensayo experimental que, sucintamente, se ha presentado en el capítulo uno.

4. La matemática adaptable a las realidades objetivas. Mario Bunge

Uno no descubre nada nuevo si afirma que, en la formación de los estudiantes de las ciencias fácticas en general, y de la matemática, en particular, priman, de manera dominante, las dialécticas lógico-formales abstraídas, a posteriori, de las circunstancias cotidianas de la vida. Muchos, demasiados profesores, utilizan los objetos matemáticos como si, de verdad, estuvieran presentes en la naturaleza. Aceptan, como realidad, la metáfora galileana de un mundo escrito en caracteres matemáticos. Han olvidado, en el caso de que sí la conocieran, esta sentencia antropológica de Kant que se citaba más arriba y que condiciona categóricamente el intelecto humano —y hasta los instintos animales— a la experiencia sensible.

" […] sin sensibilidad ningún objeto nos sería dado y, sin entendimiento, ninguno sería pensado. (Kant, Immanuel, 2005, p. 93)

Aunque, claro está, no resulta nada fácil leer filosofía cuando está tan poco prestigiada "¿para que sirve?", es la pregunta más frecuente en muchos de los niveles del sistema educativo español. Por eso, por la ignorancia de los orígenes del entendimiento y la pereza intelectual, se utiliza mayoritariamente una didáctica al revés: recitar definiciones, leyes y teorías para

[11] Kant, Immanuel. Crítica de la razón pura. Introducción, traducción, notas e índices de Pedro Ribas. Madrid: Santillana Ediciones Generales, S.L. 2005, p. 93. (A: páginas de la primera edición de 1781 y B: páginas de la segunda edición de 1787).

[12] Kant, Immanuel. Filosofía de la historia. Prólogo y traducción de Eugenio Imaz. México: Fondo de Cultura Económica, 1987, p. 25: ¿Qué es la Ilustración? 1784.

exponer; y ejercitar, después teóricamente, sus aplicaciones prácticas. El carro delante de los bueyes. Y, así, a los estudiantes se les pasa, de este modo por alto, que todas las leyes científicas son fruto de las experiencias humanas. Y que, en particular y, además, la matemática misma tendría muy poco sentido sin una realidad objetiva que la motivara. Mario Bunge, el físico y matemático argentino, epistemólogo y filósofo de la ciencia, así lo afirmaba en uno de sus magníficos libros:

> *Permítame el lector repetir una perogrullada: la verdad matemática es esencialmente relativa o dependiente del contexto. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras vale para los triángulos planos, pero no para los esféricos y no todas las álgebras son conmutativas o, siquiera, asociativas.*
>
> *[…] Por último, admitamos que el problema de la verdad, si bien resulta central en la ciencia y la filosofía, es periférico en la matemática. Tal como ha expresado Mac Lane (1986)[13], no es adecuado preguntar si una pieza matemática es verdadera. Las preguntas adecuadas son si es correcta, "fructífera" [responsive] (o sea, si resuelve un problema o hace avanzar una línea de investigación), iluminadora, promisoria o relevante para la ciencia para o para algunas actividades humanas[14].*

5. Algunas aportaciones ejemplares más en la ontología de las matemáticas

En relación con lo anterior, a este autor le vienen a la mente tres testimonios importantes: el primero, historicista y de procedencia rusa[15]; el segundo, los escritos del sabio francés Henri Poincaré y, como tercero, los del alemán David Hilbert. Los tres podrían perfectamente personalizar un recorrido entre dos de los posibles extremos en un continuo histórico-epistemológico del desarrollo del saber matemático. La aportación rusa como representante de un amplio naturalismo intuitivo, histórico y, por eso mismo, a escala humana; Henri Poincaré sirviéndose de la intuición, como una apoyatura conceptual consistente; y David Hilbert, categórico defensor de una matemática inventada a *priori*, axiomática y radical desde sus inicios.

Siguiendo, entonces, el mismo orden de cita de los tres autores que se proponen, la estructura narrativa de este apartado se ceñirá, por razones de espacio, a una sola de las tres categorías fundamentales del pensamiento matemático. De entre la *aritmética, la geometría y el análisis*, trataremos de glosar lo más destacable que de la primera, la aritmética, caracteriza el pensamiento de cada uno de los autores elegidos.

[13] Se refiere a: Mac Lane, Saunders, 1986. Mathematics: Form and Function. Nueva York, Springer -Verlag.

[14] Bunge, Mario (2006). A la caza de la realidad. La controversia sobre el realismo. Barcelona, Editorial Gedisa, S. A. p. 271.

[15] Nos referimos a: Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev. La matemática: su contenido, métodos y significado. Versión española de Manuel López Rodríguez. Madrid: Alianza Editorial, 1985.

5.1 Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev. La matemática: su contenido, métodos y significado

Desde su primera edición (en ruso y en 1956) hasta la primera traducción española (Alianza Editorial, 1973) que tomaremos, ahora, como referencia, se han publicado bastantes reediciones más; lo que da lugar a la consideración de la importancia de una obra que, en tres tomos, expone una visión general de la matemática de una calidad histórica, abarcadora y didáctica extraordinaria. Bastante de la práctica docente de este autor estuvo inspirada en sus lecturas. Como esta, por ejemplo:

> *Tal es el camino general de la ciencia: a partir de lo que la experiencia proporciona directamente, pasa a generalizaciones y abstracciones, volviendo luego otra vez a la experiencia como instrumento para un conocimiento más profundo de la esencia de los fenómenos; y al proporcionar así la explicación de fenómenos conocidos y la predicción de otros nuevos, guía la actividad práctica de los investigadores y a su vez encuentra en ello su propia justificación y la fuente de su futuro desarrollo.*[16]

"La experiencia, como medio para un conocimiento más profundo de la esencia de los fenómenos" constituye el lema de la obra y se remarca de nuevo, casi al final de la obra, cuando se trata el tema 10 sobre *la geometría abstracta y el espacio real,* en el capítulo dedicado a las geometrías no euclidianas, ya casi al final de la obra. El valor de la experiencia —repetimos— preside, de principio a fin, la totalidad de la obra: "El espacio es euclidiano con suficiente aproximación en dominios que son pequeños comparados con la escala cósmica" (*Ib.* p. 226 y 227). Dominios que son, precisamente, los únicos en los que la escala humana nos permite desarrollarnos.

Son —añadimos aquí—, la materia y sus objetos lo que da sensibilidad al concepto de "espacio". Y, dado que es toda la materia la que está sometida a continuos cambios, esas modificaciones son, paralelamente a la idea de espacio, lo que facilita las nociones del tiempo. No, desde luego, de un tiempo absoluto, sino del que se puede asociar a cada uno de los procesos observables. Si acaso, se podría presentir una cierta intuición del tiempo como lo circunstancial ineludible a las totalidades de sucesos posibles.

Respecto a la intencionalidad de la obra rusa, mucho antes, en los inicios, se nos advierte que:

> *En este libro nuestro propósito será el de dar a conocer y aclarar el contenido concreto de conceptos tales como los ya mencionados*[17]*, de modo que el lector pueda convencerse por sí mismo de que todos ellos están relacionados con la vida real, tanto en su origen como en sus aplicaciones.*[18]

---

[16] Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev, M. A., y otros. La matemática: su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza Editorial, S.A. (tres tomos), 1973, p. 227 tomo tres.

[17] Alude el autor a los conceptos de la geometría, a los de números reales, racionales, irracionales, complejos, funciones, diferenciales etc. etc., que cita algunas líneas arriba.

[18] Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev, M. A., y otros, ob. cit. p.18.

Y, en este sentido, destacamos algunos de los contenidos concretos a los que se refiere el capítulo *Aritmética,* en el tomo I,

a – Es fácil reconocer el carácter abstracto de la matemática. Operamos con números abstractos sin preocuparnos de cómo relacionarlos en cada caso a casos concretos (p. 17).

b — El concepto de número (por el momento hablaremos sólo de números enteros positivos) fue elaborado muy lentamente, (p. 24).

c — A un nivel inmediatamente superior, el número aparece ya como una propiedad de una colección de objetos, aunque no se distingue todavía de la colección en cuanto "número abstracto", en cuanto número no relacionado con objetos concretos. (p. 24).

d – El número de objetos de una colección dada es propiedad de la colección, pero el número real en sí, "el número abstracto" es una propiedad abstraída de la colección concreta y considerada simplemente en sí misma, al igual que "negrura" o "dureza" (p. 25).

e – Las operaciones con números aparecen como reflejo de las relaciones entre los objetos concretos. Esto se observa incluso en los nombres de los números. Por ejemplo, entre ciertos indios americanos el número veintiséis se pronuncia como "encima de dos dieces coloco un seis (p. 26).

f — Experimentalmente se descubrió que una suma

no depende del orden de los sumandos y que el resultado de contar un conjunto dado de objetos no depende del orden en que se cuente hecho que se refleja en la identidad esencial de los números "ordinal" y "cardinal: primero, segundo tercero, y uno, dos tres. De este modo los números aparecen no como entidades separadas e independientes sino relacionadas unas con otras, (p .26).

g — En general, no aparecieron como entidades separadas, sino como un sistema con sus relaciones mutuas y sus reglas.

El objeto de la aritmética es exactamente éste, el sistema de números con sus relaciones mutuas y sus reglas. Los números abstractos en sí no tienen propiedades tangibles y en general se puede decir muy poco sobre ellos. […] De hecho, las propiedades de un número dado consisten precisamente en sus relaciones con otros números (p. 27).

La nota al pie número 5 de la misma página 27 amplía lo anterior diciendo que *"Cualquier abstracción, eliminada su base concreta, […] carece de sentido en "sí misma"; sólo existe en sus relaciones con otros conceptos […] sin ellas la abstracción pierde todo su contenido y significado, es decir, sencillamente no existe*[19]*.*

h — El concepto de número, como el de cualquier otro concepto abstracto no tiene una imagen inmediata; no puede ser exhibido, sino sólo concebido en la mente.

[19] ibidem p. 27.

i — La sucesión de números aparece como indefinidamente prolongable, y con ello entra en la matemática la noción de infinito (p. 28).

j — La historia de los conceptos de la aritmética muestra cuán equivocado es el punto de vista idealista de que surgen del "pensamiento puro", de la "intuición innata, de la contemplación de formas a priori o algo similar (p. 35).

k — […] los métodos de la lógica y los conceptos de la aritmética, fueron elaborados y fijados en nuestro conocimiento tras tres mil años de experiencia práctica, sobe la base de regularidades objetivas del mundo que nos rodea (p. 36).

Una síntesis de la selección expuesta sobre la aritmética la expresan perfectamente los propios autores:

"Resumiendo, la realidad es concreta; y resulta particularmente importante recordar este hecho en relación con la matemática debido precisamente a su abstracción" (p. 37).

5.2 Henri Poincaré. La ciencia y su método

Hace ya más de 100 años, Henri Poincaré escribía esto,

Muchos [de los alumnos] no habrán comprendido si no encuentran alrededor de ellos, en la práctica o en la naturaleza, la razón de ser de tal o cual explicación matemática. Bajo cada palabra quisieran poner una imagen visible; es preciso que la definición evoque esa imagen, que a cada estado de la demostración la vean transformarse y evolucionar. Con esta condición solamente comprenderá y retendrán. A menudo, ellos mismos se hacen la ilusión; escuchan los razonamientos, miran las figuras; se imaginan haber comprendido y no han hecho más que ver[20].

Y, a los efectos de las pretensiones de este artículo, y porque son afirmaciones como estas las que han inspirado ampliamente las concepciones didácticas del autor, parece muy oportuno señalar que, para uno de los grandes de la matemática del siglo XX, fuera la intuición la guía más firme para un conocimiento objetivo como fundamentación de las conceptualizaciones matemáticas.

El fin principal de la duda matemática es desarrollar ciertas facultades del espíritu, y, entre ellas la intuición. Es merced a ella que el mundo matemático permanece en contacto con el mundo real; y, cuando las matemáticas puras pudieran prescindir de ella, sería preciso siempre tener recursos para salvar el abismo que separa el símbolo de la realidad[21].

Y, en eso, y porque no todo el mundo posee semejante habilidad en el mismo grado, se basa nuestra conjetura de la utilidad de la naturalización del aprendizaje de la ciencia físico-

[20] Poincaré, Henri. Sobre la ciencia y su método. Ciencia y método; El espacio; Últimos pensamientos.

Traducciones de M. García Miranda, L. Alonso, A. B. Besio y J. Banfi. Prólogo de José Manuel Sánchez Ron. San Viçens dels Horts (Barcelona), 1997. Círculo de Lectores, S. A. p. 126.

[21] Poincaré, Henri. Ob. cit. p. 218..

matemática. El utilísimo acceso intelectual a la proporcionalidad, por ejemplo, se simplifica notablemente con la intuición de la constancia o variación del *cuanto de efecto por unidad de causa,* en los problemas directos, y del *cuanto de causa por unidad de efecto*, en los problemas inversos; mucho más complejos e interesantes, por cierto.

> *Muchos fenómenos obedecen a una ley de proporcionalidad. Pero ¿por qué? Porque en esos fenómenos hay algo que es muy pequeño. La ley simple observada no es entonces más que la traducción de esta regla analítica general conforme a la cual el crecimiento infinitamente pequeño de una función es proporcional al crecimiento de la variable*[22].

Precisamente es esta magistral observación la que está en el origen conceptual de todos los procesos de la proporcionalidad: lo que aquí se ha denominado como "cuanto por uno" y que en la inmensa mayoría de los textos científicos aparece con la amorfa denominación de "constante de proporcionalidad". Uno ha experimentado largamente la versión *causal* en formato de "cuanto", para los efectos por unidad de causa, y comprobado su eficacia por su amplio espectro de aplicación —siempre se tiene la posibilidad de diseñar los *tamaños* prácticos de los patrones unitarios. Ni que decir tiene, además, que la coherencia de la observación anterior de Poincaré sobre que "el fin principal de la duda matemática es desarrollar ciertas facultades del espíritu, y, entre ellas la intuición", es imprescindible para que que las ficciones matemáticas se mantengan en permanente contacto con los hechos objetivos del mundo real al que, aquellas, tratan de representar.

Atrevida afirmación, esta, que probablemente —al menos por experiencia propia— pondría los pelos de punta a bastantes de los compañeros de profesión. Como, de forma parecida, se aboga aquí por un conocimiento básicamente a escala humana. También en esto, el sabio francés se pronunciaba, claramente, a favor de la escala humana:

> *¿Es bueno advertirles [a los alumnos y sobre la mecánica ordinaria] que no es más que aproximada? Sí, pero más tarde; cuando hayan penetrado hasta la médula, cuando hayan tomado el hábito de no pensar sino por ella, cuando no corran el riesgo de olvidarla, entonces se podrá sin inconvenientes mostrarles los límites.*
>
> *Es con la mecánica común como deben vivir, es la única que tendrán siempre que aplicar; cualquiera que sean los progresos del automovilismo, nuestros coches no alcanzarán jamás las velocidades donde ella no sea verdadera. La otra no es más que un lujo y no se debe pensar en lujos sino cuando no se corra el riesgo de perjudicar lo necesario.*[23]

En resumidas cuentas: a) lógica, como método generalizador, sí; pero…

b) después de haber estimulado la intuición desde el trato directo con la experiencia natural y "*no pensar sino por ella*".

Habilidades intelectuales, por cierto, tan poco estimuladas desde la pedagogía institucional que, valga añadir una anécdota representativa sobre una de las respuestas al cuestionario aludido en el apartado segundo de este artículo.

Esta era la pregunta número 5c, del bloque 2, sobre didácticas específicas en matemáticas:

[22] Poincaré, Henri, ob. cit. p. 8.

[23] Ibid. p. 219.

¿Tienen algo que ver entre sí, las derivadas y la proporcionalidad?

Recordemos que 50 era en número de alumnos y posibles respuestas para el ítem 5c del bloque 2.

Y, estos, fueron los resultados:

46 cuestiones sin respuesta.

3 "Creo que sí", pero sin argumentar.

1 solo acierto bien argumentado.

Aunque los resultados de la investigación se expresan por sí mismos, especialmente difíciles de entender resultan la ausencia de respuesta en los dos alumnos (la totalidad de arquitectura); en los once (la totalidad) de los alumnos de biología; en los 10 de matemáticas (la muestra era de 13 alumnos); y en los once (la muestra era de 12) alumnos de química. Sobre todo, si se tiene en cuenta que se trata de disciplinas científicas en las que las generalizaciones empíricas son la base metodológica de su alcance cognitivo.

Motivados, en fin, por la digresión anterior, es, por lo demás, tanta la calidad pedagógica de Poincaré, que uno no resiste al impulso de agregar una más de sus experiencias, fácilmente extrapolables a una matemática naturalizada a escala humana:

Este, por ejemplo, en relación a las formas habituales de las definiciones y sus posibilidades de ser comprendidas:

> *[…] En las escuelas primarias, para definir una fracción, se corta una manzana o una torta.*
>
> *En la Escuela Normal Superior, por el contrario, o en las facultades, se dirá: una fracción es el conjunto de dos números enteros separados por un trazo horizontal; se definirá por convenciones que pueden sufrir estos números; se demostrará que las reglas de estas operaciones […, etc., etc.].*
>
> *Tales son las definiciones que encontráis en un libro con justicia admirado y muchas veces coronado: Los Grundlagen der geometrie, de Hilbert. Veamos, en efecto cómo comienza: "Pensemos tres sistemas de cosas que llamaremos puntos, rectas y planos". ¿Qué son estas cosas? No lo sabemos, y no tenemos que saberlo. Todo lo que tenemos derecho a saber es lo que nos enseñan los axiomas, este, por ejemplo: "Dos puntos diferentes determinan siempre una recta" […] Así "estar situado sobre una recta está definido como sinónimo de determinar una recta[24]. He aquí un libro que me parece muy bueno, pero que no recomendaría a ningún estudiante de instituto[25].*

5.3 Un Contrapunto: el formalismo radical de David Hilbert

Pero la última cita no es, como en tantas otras cuestiones humanas, ni la única ni la indiscutible metodología para la transmisión de la ciencia. Aunque sí la más cercana a las circunstancias reales de nosotros, los humanos. En la evolución histórica de la matemática, de sus tres facetas más relevantes: su fundamentación formal, sus métodos de enseñanza y su

[24] Nótese el estilo circular de la definición

[25] Ibid. p. 121.

aplicabilidad utilitaria; la primera ha ocupado mucho del tiempo —tal vez demasiado—, de los matemáticos.

Los empeños para encontrar criterios suficientes que llevaran a la aceptación indiscutible de las verdades matemáticas han sido constantes desde los primeros tiempos. Recuérdese, si no, al propio Euclides de Alejandría, cuyos *Elementos* siguen gobernando eficazmente, por su consistencia racional y su aplicabilidad práctica, todos los procesos de la geometría aplicada a escala humana.

Y es que, la matemática tiene —y ha tenido siempre— un halo de soberbia. Y quienes, a lo largo de la historia, han tomado la coherencia absoluta de sus resultados como muestra del orden universal y hasta cuasi divino; Platón y los Pitagóricos, por ejemplo; han perpetuado la aureola de superioridad de sus argumentos frente a las "vulgaridades" específicamente humanas. David Hilbert, puede ser un buen representante, como contrapunto a la matemática naturalista, que se está postulando aquí.

Un libro suyo, *Fundamentos de las Matemáticas*[26], Comienza como aparece en esta imagen.

Los textos que conforman la presente antología abarcan un período de más de 30 años (1899-1930) en las investigaciones de Hilbert acerca de los fundamentos de las matemáticas. En ellos podemos observar el desarrollo de sus ideas en torno a esta problemática: la axiomatización como el método propio de las matemáticas, la justificación del infinito y la necesidad, en vista de la aparición de las paradojas en la teoría de conjuntos y las subsecuentes disputas en torno a la validez de la aritmética transfinita y la lógica misma, de darles un fundamento seguro y definitivo con la *metamatemática* o teoría de la demostración. En este proyecto, tanto lógico como matemático, la reflexión filosófica desempeña un papel importante y así vemos como la filosofía de Kant constituye un pilar tan importante como el cálculo lógico de Frege y Rusell. Este intento, conocido como el programa de Hilbert, es el origen del formalismo en la filosofía de las matemáticas y constituye un punto de referencia ineludible para el estudio histórico de estos problemas.

Figura 5. Comienzo de la obra 'Fundamentos de las matemáticas' de Hilbert

[26] Hilbert, David. Fundamentos de las Matemáticas. México: Impresión Tipográfica Fenian, S.A. de C.V. Primera edición en español: 1993. Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.

https://tienda.fciencias.unam.mx/es/inicio/35-fundamentos-de-las-matematicas-9786070220500.html

5.4 Dos versiones extremas: el formalismo radical de David Hilbert y la biología del conocer, de Humberto Maturana

En el texto anterior se puede leer, en relación con las concepciones de Hilbert, que "En ellos [los textos que conforman la presente antología] podemos observar el desarrollo de sus ideas entorno a a esta problemática: la axiomatización como el método propio de las matemáticas, la justificación del infinito y la necesidad […] de darles un fundamento seguro y definitivo con la *metamatemática* o teoría de la demostración[27]".

Si se recogen, ahora, las radicales argumentaciones axiomáticas en las que semejante *metamatemática* se apoya, se puede ejercitar una comparativa funcional con esto otro:

> *El aprender tiene que ser algo diferente del captar algo externo, puesto que no se puede dar el captar algo externo, ya que, en la interacción, lo que a uno le pasa, depende de uno*[28].

Categórica afirmación, de Humberto Maturana, que responde a la estructura del sistema nervioso —experimentada largamente por el biólogo chileno y sus colaboradores— y cuyos resultados indican que

> *"[…] el sistema nervioso (o el organismo) no ha sido diseñado por nadie, es el resultado de una deriva filogenética de unidades centradas en su propia dinámica de estados. Lo adecuado, por lo tanto, es reconocer el sistema nervioso como una unidad definida por sus relaciones internas en las que las interacciones sólo actúan modulando su dinámica estructural, esto es, como una unidad con clausura operacional"*[29].

Con lo que, la comparativa propuesta, se resuelve constatando dos extremos muy significativos entre un método axiomático sumamente abstracto y fuera de toda realidad natural, y una comprobación biológica, histórica y experimental, de las funciones, estructuras y organización de los sistemas nerviosos de los seres vivos en el seno de una evolución filogenética con una teleonomía fundamental: la conservación homeostática necesaria, al servicio de la *autopoiesis* de la vida: "el sistema nervioso (o el organismo) [concluye Maturana] no ha sido diseñado por nadie, es el resultado de una deriva filogenética de unidades centradas en su propia dinámica de estados".

¿Cómo es posible compaginar, entonces, "la axiomatización como el método propio de las matemáticas…" con las investigaciones biológicas sobre el sistema nervioso?

Por eso hemos llamado "contrapunto" a algunas de las afirmaciones *a priori* por las que, David Hilbert pretende llegar a la fundamentación básica de las ciencias exactas. Exactitud que, desde luego, estará asegurada en la medida en que fuera firme la aceptación de sus premisas. Dicho de otro modo: predicar exactitud a partir de axiomas no deja de ser un juicio analítico: una tautología.

---

[27] Hilbert, David, ob. cit. p. 8.

[28] Maturana, Humberto. El sentido de lo humano. Dolmen Ediciones, S. A., Octava edición, 1996, p. 228.

[29] Maturana, Humberto y Varela, Francisco. El árbol del conocimiento. Las bases biológicas del entendimiento humano. Buenos Aires, Grupo Editorial Lumen, 2003, p. 113.

Veamos algunos ejemplos aportados por el propio Hilbert:

> *Los axiomas no son considerados como proposiciones verdaderas, evidentes y que no requieren demostración; un axioma no es tal sino en combinación con los otros axiomas; su carácter deriva del hecho de que sea independiente de, y consistente con, dos demás. Es decir, a partir de los axiomas, no deberá concluirse una contradicción y, ningún axioma podrá derivarse de los restantes*[30].

Con el imprescindible respeto al personaje, a uno le viene a la memoria este comentario de un profesor de su juventud que, declaraba así la definición geométrica de "punto":

> *"El punto es la intersección de dos rectas; luego:*
> *Corolario: ¡Cuánto más gordas son las rectas (y dibujaba una gruesa "X") más gordo es es punto!"*

Por último, y a modo de alusión concreta, he aquí algunos de los axiomas tomados literalmente de la obra en cuestión[31]:

> *El enfoque que consideramos adecuado y necesario para la fundamentación no sólo de las matemáticas puras sino en general de todo el pensamiento, la comprensión y la comunicación científicas, puede entonces expresarse en una frase diciendo: en un principio, era el signo.*
>
> *[…] El signo 1 es un número.*
>
> *Un signo que comienza y termina por 1, de modo que siempre que el signo 1 aparezca antes del final sea seguido de +, y siempre que tengamos + le siga 1 es también un número.*
>
> *De acuerdo con lo anterior, los signos*
>
> *1 + 1*
>
> *1+ 1 + 1*
>
> *son números*
>
> *Estos numerales o signos numéricos [Zahlzeichen] son, en realidad, números y constituyen enteramente a éstos, convirtiéndose ahora ellos mismos en objeto de nuestro estudio. Pero los numerales carecen por completo de cualquier otro significado fuera de éste*
>
> *Aparte de estos signos, nos serviremos de otros que sí tienen un significado y poseen una función comunicativa. Del signo 2, por ejemplo, como una abreviatura de 1 + 1, de 3 en lugar de 12 + 1 + 1, etc. Además de éstos, usaremos los signos = y > que resultan de utilidad para la comunicación de afirmaciones. De esta manera, v.gr.*

---

30 Hilbert, A. ob. cit. p. 10.

31 Hilbert, ob. cit. pp. 45 y 46.

2 + 3 = 3 + 2

No es una fórmula, sino que tiene solamente la función de comunicar (tomando en cuenta las abreviaturas que hemos introducido) que 2 + 3 y 3 + 2 son, en realidad, uno y el mismo signo, esto es: 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Tampoco

3 > 2

es una fórmula, sino que sirve exclusivamente para comunicar el hecho de que el signo 3, esto es, 1+1+1 es más extenso que el signo 2, es decir, 1+1 o, lo que es lo mismo, que este último es un segmento de aquel[32]*.*

A partir de aquí, acabamos de entrar en un nuevo mundo matemático que dejamos al lector para el entendimiento y valoración circunstancial humana que considere oportunos.

Referencias

[1] ALEKSANDROV, KOLMOGOROV Y LAURENTIEV; A. D., A. N., M. A., 1985. *La matemática: su contenido, métodos y significado, pp. 18, 27, 227* Tomo III. Versión española de Manuel López Rodríguez, Alianza Editorial, Madrid.

[2] BUNGE. Mario, 2006. *A la caza de la realidad*. La controversia sobre el realismo, p. 271. *Editorial Gedisa, S. A., Barcelona.*

[3] FEYNMANN, Richard, 2012. *Descubrir a Richard Feynman, Biografía científica, p. 29.* Publicado en Krauss, Lawrence M., RBA Libros, S. A., Barcelona.

[4] KANT, Immanuel, 2005. *Crítica de la razón pura.* Introducción, traducción, notas e índices de Pedro Ribas, Santillana Ediciones Generales, S.L., Madrid.

[5] KANT, Immanuel, 1987. *Filosofía de la historia*, p. 93. Prólogo y traducción de Eugenio Imaz. Fondo de Cultura Económica, México.

[6] KRAUSS, Lawrence M., *2012. Descubrir a Richard Feynman.* Biografía científica, p. 29. RBA Libros, S. A., Barcelona,.

[7] HILBERT, David, 1993. *Fundamentos de las Matemáticas.* pp. 8, 10, 45, 46, 121 Primera edición en español. Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. México, D.F.

[8] HILBERT, David. Web: https://tienda.fciencias.unam.mx/es/inicio/35-fundamentos-de-las-matematicas-9786070220500.html

[9] MATURANA, Humberto, 1996. *El sentido de lo humano,* p. 228, Dolmen Ediciones, S. A., Octava edición, Santiago de Chile.

[10] MATURANA, Humberto y VARELA, Francisco, *2003*. *El árbol del conocimiento*. Las bases biológicas del entendimiento humano, *Grupo Editorial Lumen, Buenos Aires.*

[32] Hilbert, ob. cit. pp. 45 y 46.

[11] POINCARÉ, Henri, 1997. *Sobre la ciencia y su método. Ciencia y método; El espacio; Últimos pensamientos.* Traducciones de M. García Miranda, L. Alonso, A. B. Besio y J. Banfi. Prólogo de José Manuel Sánchez Ron. Círculo de Lectores, S. A., San Viçens dels Horts (Barcelona).

[12] SCHOPENHAUER, Arthur, 2004. *El mundo como voluntad y representación*. Traducción, introducción y notas de Pilar López de Santa María. *Editorial Trotta, S. A., Madrid.*

[13] SCHOPENHAUER, Arthur, 2003. *Praedicabilia a priori del tiempo, el espacio y la materia*. El mundo como voluntad y representación II, complemento, pp. 51, 52, 64, 65, 68. *Traducción, introducción y notas de Pilar López de Santa María, Editorial Trotta.*

[14] VICO MARTÍN, José. Cuestionario sobre didácticas matemáticas específicas en la educación secundaria. *No publicado.*

Sobre el autor:
Nombre: José Vico Martín
Email: vico.martin@hotmail.com
Institución: Universidad de la Coruña, España