Juegos y rarezas matemáticas

Una historia de triángulos y probabilidad
Ficción con unos toques de Lakatos y Sanderson

A story of triangles and probability
Fiction with a touch of Lakatos and Sanderson

Dionisio Pérez

Revista de Investigación

Volumen XV, pp. 095–106, ISSN 2174-0410 Recepción: 10 Jul'24; Aceptación: 9 Oct'24

1 de abril de 2025

Resumen

Este artículo presenta un problema relacionado con Geometría y la Teoría de Probabilidad desde el punto de vista de un diálogo entre profesores y estudiantes un tanto peculiares.

Palabras Clave: Relatos Matemáticos, triángulos, probabilidad, resolución de problemas

Abstract

This paper presents a problem related to Geometry and Probability Theory from the point of view of a dialogue between teachers and students, both peculiar.

Keywords: Mathematical Stories, triangles, probability, problem solving

Asistimos a varias sesiones de un curso a medio camino entre la Geometría y la Teoría de probabilidad. El profesor dirige las clases dejando que sean los alumnos los actores principales y limitándose a ejercer un papel de moderador. Los alumnos son inteligentes y reflexivos, pero también locuaces y discutidores (a veces, incluso beligerantes y corrosivos).

Día primero.

El profesor está planteando un problema a la clase:

- Profesor.- Ésta es la cuestión que tienen que investigar: *¿cuál es la probabilidad de que un triángulo tenga sus tres ángulos agudos?*

  Mediten detenidamente y expongan sus conclusiones, que serán sometidas a crítica por parte de toda esta asamblea.

- Alef (al cabo de unos segundos).- La cuestión así planteada es demasiado vaga para que pueda tener un sentido preciso: ¿a qué se refiere cuando dice 'un triángulo' sin más, de qué posible universo se escoge: del de todos los que han sido dibujados alguna vez, de todos los imaginables? Por otra parte, no se indica con qué procedimiento se elige, como dando a entender que se hace al azar; pero 'al azar' es una expresión ambigua: habría que precisar de alguna manera qué distribución de probabilidad se emplea para esa elección. En resumen, lo primero que hay que hacer es formular la cuestión con rigor matemático.

- Profesor.- He formulado la pregunta de una forma intencionadamente difusa para que sean ustedes quienes le den el sentido que les parezca razonable y discutan tanto ese sentido como las conclusiones a las que lleguen. De hecho, la intervención de Alef responde perfectamente a mis expectativas iniciales.

- Bet.- Pues yo creo, al contrario que Alef, que la cuestión no adolece de ninguna vaguedad; para mí está clara como el día: se eligen tres puntos en el plano de manera independiente y de forma que la probabilidad de que un punto caiga en una cierta región sea proporcional al área de esa región (técnicamente, una distribución uniforme de probabilidad) y se estudia la proporción del número de triángulos acutángulos entre todos los posibles. Otra cosa es que ese cálculo resulte fácil o difícil.

- Alef.- La ingenuidad de Bet sólo puede compararse con su ignorancia. Por una parte, propone dividir dos cantidades infinitas: el número de triángulos acutángulos entre el de todos los triángulos (ya nos explicará cómo pretende conseguirlo), y por otra desconoce que no existe una distribución uniforme de probabilidad si el soporte tiene medida infinita.

- Guímel.- Seguramente en las palabras de Bet hay más enjundia de la que pretende ridiculizar el sarcasmo de Alef, y que la frase 'probabilidad de que un triángulo sea acutángulo' tiene una interpretación natural y sencilla, y puede que incluso sea fácil de calcular. Sin duda, Alef nos puede iluminar al respecto.

- Alef.- Desde luego que sí. Puesto que tres puntos determinan una circunferencia (salvo en el caso de que estén alineados, que no considero por tener probabilidad nula), la pregunta podría - y debería - formularse en estos términos:

  Dada una circunferencia, se eligen 3 puntos al azar sobre ella. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo que determinan sea acutángulo?

  Aclararé lo que quiero decir por 'al azar': en primer lugar, la elección se hace de manera independiente (tal como señaló atinadamente Bet), y en segundo lugar, la probabilidad de que un punto sea escogido dentro de un arco es proporcional a la longitud de ese arco (dicho con otras palabras, se sigue una distribución uniforme de probabilidad, lo que ahora sí tiene sentido, al ser finita la longitud de la circunferencia). También precisaré que 'el triángulo que determinan' significa 'el triángulo cuyos vértices son esos puntos' (por si acaso algún tiquismiquis me quisiera acusar de ambigüedad).

- Profesor.- No cabe duda de que Alef ha reformulado la cuestión de una forma muy precisa, aunque es discutible que sea la única manera aceptable de traducir la pregunta que yo lancé. En todo caso, es un avance notable.

- Alef.- Desde luego, es la única formulación aceptable por una mente clara y rigurosa. Además, ese planteamiento convierte la solución en algo obvio: la respuesta es $p = 1/4$, evidentemente.

- Dálet.- Sin hacer caso de la petulancia de Alef, he abordado el asunto con otro enfoque y he calculado esa probabilidad fácilmente: la respuesta que he obtenido es $p = 1/4$ (aunque yo no diría que sea evidente).

- Profesor.- Agradezco a Dálet el tono educado de su intervención. ¿Le importaría exponer sus argumentos?

- Dálet.- Para empezar, no he considerado ninguna circunferencia en la que situar los puntos, sino que he pensado en la forma del triángulo directamente, para la cual no tiene ninguna importancia dónde esté situado ni cuánto midan sus lados, sino solamente los ángulos, así que llamé α, β y γ a los tres ángulos del triángulo.

  Naturalmente, como su suma es fija: π, sólo hay que considerar dos de ellos (los dos primeros, por ejemplo), que han de cumplir las condiciones $0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi$ y $\alpha + \beta < \pi$ (para que γ sea un ángulo admisible). De esa manera, considero α, β como un par de variables aleatorias que siguen una ley uniforme en la región $0 < \alpha, 0 < \beta, \alpha + \beta < \pi$, que es un triángulo en el plano α, β, con vértices en los puntos $(0,0), (\pi, 0)$ y $(0, \pi)$. La función de densidad de la variable aleatoria bidimensional α, β es constante en ese triángulo (el valor de la constante es $2/\pi^2$, pero eso no es relevante).

  La recta vertical $\alpha = \pi/2$ corta en ese soporte una región triangular (a su derecha) correspondiente a los triángulos con el ángulo α obtuso; análogamente, la recta horizontal $\beta = \pi/2$ corta una zona triangular (arriba) correspondiente a los triángulos con el ángulo β obtuso, y la recta oblicua $\alpha + \beta = \pi/2$ corta otra región triangular (por debajo) correspondiente a los triángulos de ángulo γ obtuso. Queda en el centro una última zona, también triangular, que corresponde a los triángulos con los tres ángulos agudos. Como las cuatro partes son iguales, resulta que a los triángulos acutángulos les corresponde una cuarta parte del área total del soporte, lo que significa que la probabilidad de que un triángulo arbitrario sea acutángulo es $1/4$ (de regalo, la probabilidad de que sea obtusángulo es $3/4$ y la de que sea rectángulo es 0, porque esos triángulos están codificados por tres segmentos, cuya área es nula).

- Profesor.- Un enfoque original y sugestivo. Me gustaría oír sus comentarios.

- He.- Parece que Dálet ha encontrado la manera de castigar la arrogancia de Alef, mostrando una interpretación diferente de la cuestión, al tiempo que llega al mismo resultado numérico, $p = 1/4$.

- Vau.- Yo he abordado el desafío de un modo parecido a Dálet, pero desde otro ángulo (si me permiten el inocente juego de palabras). Comienzo por observar que el carácter (acutángulo, rectángulo u obtusángulo) de un triángulo viene determinado por el mayor de sus ángulos. Por eso, en lugar de considerar α, β y γ, sólo tengo en cuenta el mayor de ellos, al que llamo θ. Naturalmente, ese ángulo no puede valer menos de $\pi/3$ ni más de π, por lo que θ se puede ver como una variable aleatoria uniforme en el intervalo de $\pi/3$ a π. Un triángulo será acutángulo cuando θ sea menor de $\pi/2$, por lo que la probabilidad buscada es el cociente entre $\pi/2 - \pi/3 = \pi/6$ y $\pi - \pi/3 = 2\pi/3$, que es $1/4$. La conclusión es la misma, pero el tratamiento del problema es más elemental.

- He.- Minimalista, diría yo. Decididamente, hay más de una traducción posible del enunciado inicial al lenguaje riguroso de las Matemáticas, pero hay que conceder al valor $p = 1/4$ una ventaja sobre otras opciones.

- Zayn.- Me desagrada el cariz que van tomando los discursos presentados. Un triángulo está hecho de segmentos: tres lados que tienen sus longitudes y a los que aquí se pretende condenar al exilio. Al parecer, un triángulo se reduce a unos ángulos (como si no los formasen los lados del triángulo, y no se dedujese la amplitud de aquellos de las longitudes de estos) o, peor aún, a uno solo. Esos no son triángulos reales, sino apenas unos fantasmas, meras sombras de los triángulos auténticos. ¿Es que nadie va a considerar aquí los lados de los triángulos, con sus longitudes?

- Profesor.- Animo a Zayn o a cualquier otro a defender ese enfoque.
- Jet.- Me gustaría exponer otra solución. Aunque me temo que no será del agrado de Zayn y sí de Alef (quizá), puesto que para estudiar los triángulos los inscribo en una circunferencia.
- Profesor.- Dejaremos para mañana la versión de Jet. Creo que por hoy ya hemos tenido suficiente.

Día segundo.

- Profesor.- Buenos días. Espero que hayan asimilado los discursos de ayer y que vengan dispuestos a seguir con el programa. Tiene la palabra Jet.
- Jet.- Gracias, profesor. Quiero empezar haciendo unas observaciones elementales, que serán útiles en mi exposición.
- Profesor.- Adelante. Agradecemos todas las observaciones que nos faciliten el seguimiento de sus tesis.
- Jet.- En primer lugar, la naturaleza del triángulo definido por tres puntos situados sobre una circunferencia depende de la posición del centro de ésta respecto al triángulo: el triángulo es rectángulo cuando el centro está situado sobre uno de sus lados (en concreto, en el centro de la hipotenusa), es acutángulo cuando el centro queda en el interior del triángulo, y es obtusángulo cuando queda fuera.
- Alef.- Eso es una consecuencia evidente del teorema del ángulo inscrito; no veo la necesidad de mencionar obviedades.
- Profesor.- Quizá sea innecesario para usted, pero no me parece que esté de más recordarlo.
- Jet.- En segundo lugar, para saber si el centro de la circunferencia queda dentro del triángulo ABC o no, conviene tener en cuenta los puntos antipodales de los vértices. Intentaré ser preciso, quizá a costa de la brevedad.
- Bet.- En la disyuntiva entre claridad y concisión, elegir siempre la primera. Es mi lema.
- Jet.- Dos puntos, A y B, sobre una circunferencia determinan dos arcos: uno más corto, al que llamaré AB, y otro más largo, que denominaré BA. El punto A′, antipodal de A (es decir, el otro extremo del diámetro que pasa por A), y el B′, antipodal de B, definen otros dos arcos: A′B′ y B′A′, de la misma longitud que AB y BA respectivamente. Pues bien, para que el centro de la circunferencia quede en el interior del triángulo ABC (es decir, para que ABC sea acutángulo) es condición necesaria y suficiente que C se halle situado en el arco A′B′. Seguramente Alef encontrará obvia esta segunda observación, que he juzgado oportuno hacer explícita.
- Alef.- ¿Acaso no lo es? Pero no se prive de seguir haciendo observaciones triviales, si es su gusto: tenemos mucho tiempo por delante.
- Jet.- La tercera (y última) observación es que me serviré del plano complejo para situar los objetos. Así, la circunferencia en la que se localizarán los puntos será la circunferencia unidad y los puntos serán de la forma $P = e^{it}$ donde t puede tomar cualquier valor real. Además, me apoyaré en la simetría del problema tanto como pueda para simplificarlo.
- Alef.- Alabo ambas decisiones. Que no digan que lo único que hago es protestar (llaman así a lo que no es sino señalar sus debilidades o incongruencias).

- Jet.- Pues bien, vamos al grano. El primero de los tres puntos puede ser cualquiera: la simetría permite que lo tome como el punto $1 = 1 + 0i$ de la circunferencia unidad en $\mathbb{C}$. El segundo será un punto arbitrario, que escribiré como $A = e^{iX}$ donde X es una variable aleatoria distribuida uniformemente entre 0 y π.

- Bet.- ¿Cómo que entre 0 y π? ¿No debería ser entre 0 y 2π? ¡Ah, ya veo! Está utilizando una vez más la simetría: si A estuviera en la mitad sur de la circunferencia sencillamente cambiaría el norte por el sur.

- Guímel.- Bet se ha salvado de una reprimenda de Alef por los pelos.

- Jet.- Cierto, Bet. El tercer punto ya no puede beneficiarse de esa simetría, puesto que la elección de A escoge ya un semicírculo, por lo que escribiré $B = e^{iY}$ donde Y es una variable aleatoria distribuida uniformemente entre $-\pi$ y π, independiente de X.

  Lo que queda es casi rutinario, y similar a lo que expuso antes Dálet: la variable aleatoria bidimensional (X, Y) sigue una distribución uniforme en el rectángulo $[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Los triángulos acutángulos corresponden a aquellos valores de Y que sitúan al punto B en el arco que delimitan los puntos antipodales de 1 y A, es decir, -1 y $-A = e^{i(X-\pi)}$. Eso es tanto como pedir que Y esté entre $-\pi$ y $-X$, o lo que es lo mismo $X + Y < 0$. Esa condición se traduce en el soporte de las variables aleatorias (el rectángulo $[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$) por un triángulo que ocupa exactamente la cuarta parte del rectángulo. De nuevo llegamos a la conclusión habitual: $p = 1/4$.

- Guímel.- $1/4$ se está convirtiendo en el vencedor por aclamación de este torneo.

- Tet.- No quisiera ser impertinente, pero creo que puedo mejorar el argumento de Jet, con unos ligeros retoques.

- Jet.- Adelante, Tet, no sea tímido. No me va a molestar oír un razonamiento más fino que el mío, al contrario: espero aprender de su versión.

- Tet.- En realidad, es casi todo igual a lo expuesto por Jet, con la particularidad de que distingo dos casos o escenarios, según B esté en la mitad norte de la circunferencia o en la sur. Evidentemente, la probabilidad de cada unos de esos escenarios es $1/2$. Además, en el primero de ellos, el triángulo no es acutángulo, porque el centro del círculo queda fuera de él, al estar los tres puntos en la misma mitad de la circunferencia. Por tanto, me fijo en el segundo supuesto, en el cual $B = e^{iY}$ está en la mitad sur, es decir, $Y \in [-\pi, 0]$.

  En definitiva, el soporte de la densidad de (X, Y) no es ahora el rectángulo $[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ que manejaba Jet, sino su mitad inferior: el cuadrado $[0, \pi] \times [-\pi, 0]$. La condición $X + Y < 0$ ya explicada por Jet representa exactamente la mitad del cuadrado, así que la probabilidad de que el triángulo sea acutángulo es el segundo escenario (cuando B está en la mitad sur) es $1/2$.

  Para rematar sólo hay que invocar el teorema de la probabilidad total: la probabilidad buscada es la suma de la probabilidad de cada escenario por la probabilidad condicionada por él, esto es $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

- Jet.- Bravo, Tet. Me ha gustado la idea de dividir el problema en dos escenarios y aplicar el teorema de la probabilidad total.

- Guímel.- Yo no tengo nada que añadir a esta tertulia tan instructiva, pero quiero manifestar una inquietud que tengo respecto al resultado tan redondo (o quizá debería decir 'tan cuadrado'). Si hubiese salido un valor más 'raro' (qué sé yo, $\pi/5 - 1/3$ o $log(2)$) no me habría sorprendido, pero el valor $1/4$ es demasiado especial, no sé cómo explicarlo. Es igual a $1/2$ por $1/2$, como si el resultado dependiese del lanzamiento de dos monedas.

- Alef.- La intervención de Guímel no puede ser más atinada, porque es exactamente eso lo que sucede; el que un triángulo sea acutángulo o no lo sea sólo depende de que al lanzar una moneda dos veces salga cruz la primera vez y cara la segunda.
- He.- Apostaría a que Alef está intentando desesperadamente sorprendernos con algún truco de magia de bolsillo para quedar por encima de los demás. Su ego está sufriendo demasiado con las brillantes intervenciones anteriores.
- Alef.- Haré caso omiso de sus insidiosas frases, que apenas alcanzan el umbral de mi atención y procederé a sostener mis palabras con una demostración concluyente.
- Profesor.- Estoy deseando oírla, pero tendremos que esperar a mañana. La sesión de hoy ha sido agotadora.

Día tercero.

- Profesor.- Buenos días. Espero que hayan descansado bien, tras la densa jornada de ayer. Por mi parte, estoy impaciente por oír cómo Alef nos explica en qué sentido el problema se reduce al lanzamiento de dos monedas. Alef, tiene usted la palabra.
- Alef.- Gracias. Aprovecharé algunas de las ideas elementales que expuso ayer Jet, tales como situar los objetos en el plano complejo, aprovechar las simetrías y deducir el carácter del triángulo de la posición que ocupe el origen (el centro de la circunferencia) respecto a dicho triángulo. Por consiguiente, empiezo señalando que los tres puntos escogidos serán A, B y C, donde $C = 1$, tal como se hizo ayer.

  En cuanto a los puntos A y B, no necesito escribirlos como e^{is} y e^{it}, aunque pueden hacerlo así si lo desean. Lo que sí haré es señalar un hecho evidente (visto el gusto de esta clase por las obviedades): que al elegir un punto, se está eligiendo también el diámetro que pasa por ese punto, y que un punto y su antipodal determinan el mismo diámetro en la circunferencia. Lo subrayo porque la clave de mi tesis consiste en desglosar la elección de un punto sobre la circunferencia en dos pasos: primero se escoge un diámetro (lo que se podría describir por medio de una variable aleatoria uniforme entre 0 y π, pero lo considero innecesario) y después se elige uno de sus dos extremos (lo que se modeliza con el lanzamiento de una moneda).

  Desde luego, si un extremo, P, está en el hemisferio norte, su antípoda, P', estará en el hemisferio sur, y viceversa; de modo que planteo la elección de los puntos A y B de la siguiente manera: primero elijo dos diámetros al azar (ya saben: con una distribución uniforme de probabilidad entre 0 y π) y luego lanzo una moneda dos veces; la primera vez para decidir qué extremo escojo de uno de los diámetros y la segunda para hacer lo mismo con el otro. Cuando el resultado del lanzamiento sea 'cara' elegiré el extremo situado más al norte, y cuando sea 'cruz', el otro extremo. Lo explicaré con detalle, aunque se alargue la explicación, siguiendo el lema de Bet.
- Bet.- Es una decisión prudente.
- Alef.- Decía que el primer paso era elegir dos diámetros, que es tanto como señalar dos puntos al azar, P y Q, en el hemisferio superior. Los ordenaré llamando P al que queda a la derecha, de modo que al recorrer la circunferencia en sentido positivo partiendo del punto 1 nos encontramos sucesivamente con $P, Q, -1, -P, -Q$ y volvemos al punto de partida. Lanzo la moneda una vez para decidir si el punto A será P o $-P$: cara significará que $A = P$, mientras que si sale cruz tomaremos $A = -P$; un segundo lanzamiento servirá para decidir si $B = Q$ (cuando salga cara) o $B = -Q$ (si sale cruz).

¿En qué casos cae el centro de la circunferencia en el interior del triángulo ABC? Como señaló acertadamente Jet, eso sucede cuando el punto $C = 1$ está en el arco menor determinado por los puntos A' y B', lo cual sólo sucede si A y B están situados en distintos hemisferios y además en las posiciones más lejadas de C, es decir, cuando $A = -P$ y $B = Q$. Dicho de otro modo, si la moneda cae primero de cruz y luego de cara, como dije ayer (pese a la incredulidad de He, que me acusaba de pretender engañarles con algún juego de manos). Sugiero a quien no lo vea claro aún que haga un sencillo dibujo, que escriba P y Q como e^{is} y e^{it} con $0 < s < t < \pi$, y que calcule las longitudes de los diferentes arcos.

- Profesor.- Quod erat demonstrandum. Confieso (con gusto) que la disertación de Alef ha superado mis expectativas. Me agrada especialmente cómo surge de manera inesperada una variable aleatoria discreta (representada por el lanzamiento de la moneda) al estudiar una cuestión cuya naturaleza es evidentemente continua. Lo cual contribuye a explicar el peculiar resultado $p = 1/4$. Me quito el sombrero.
- Alef.- Así como antes no me afectaron las invectivas maliciosas de algunos, tampoco me conmueven ahora los halagos, pero agradezco sus palabras por lo que tienen de reconocimiento a lo único que aquí importa: que se arroja luz sobre el problema planteado.
- Yod.- Lamento interrumpir estos momentos de éxtasis para echar (quizá) un jarro de agua fría sobre el entusiasmo general, pero he obtenido un resultado diferente de los anteriores. Según mis cálculos, la probabilidad de que un triángulo sea acutángulo no es $1/4$, sino casi un 43 %: exactamente $2 - \frac{\pi}{2}$.
- Profesor.- ¡Excelente! Acaba usted de dejar caer una bomba en medio de la ciudad. Esperaremos a mañana para detonarla.

Día cuarto.

- Profesor.- Buenos días. Ayer disfrutamos de una sesión excelente, con la brillante exposición de Alef y la sorprendente intervención de Yod, anunciando un valor inesperado para la probabilidad p. No creo exagerar si digo que nos dejó a todos en ascuas, así que cedo la palabra a Yod para que nos explique cómo llega a ese resultado.
- Yod.- Gracias, profesor. El camino por el que llegué a ese valor de p es muy sencillo, siempre que uno esté dispuesto a salirse de lo que están haciendo los demás. En lugar de fijarme en los ángulos del triángulo o en la circunferencia que pasa por sus vértices, consideré las longitudes de sus lados: x, y, z.
- Zayn.- ¡Bravo por Yod! Al fin vuelven el sentido común y la sensatez a esta sala. No está todo perdido.
- Yod.- Naturalmente, esas longitudes han de ser positivas y obedecer a la desigualdad triangular: la suma de dos de ellas tiene que ser mayor que la otra. Planteado así, la región del espacio tridimensional que describen esas condiciones no es acotada, lo que supone un primer obstáculo que salvé tomando como unidad de medida la longitud del lado mayor. De esa manera, sólo tenía que considerar dos longitudes, x, y, que constituyen una variable aleatoria bidimensional uniforme en la región definida por $0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y > 1$, que es una zona triangular de vértices $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$; su área es $1/2$, por lo que la función de densidad vale 2 sobre ese soporte.

  Para identificar qué trozo corresponde a los triángulos acutángulos, sólo hay que recordar el teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 1$ es la fórmula que identifica el arco de circunferencia correspondiente a los triángulos rectángulos; por debajo quedan aquellos en que los cuadrados de los catetos suman menos que el de la hipotenusa ($x^2 + y^2 < 1$), que son los obtusángulos, y por encima están representados los acutángulos.

El área del segmento circular correspondiente a los primeros es igual a la del cuadrante del círculo menos el triángulo: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, por lo que la probabilidad de que un triángulo sea obtusángulo es el doble de esa cantidad (recordemos que la función de densidad vale 2), $\frac{\pi}{2} - 1$. La probabilidad de que sea acutángulo es lo que le falta para llegar a 1: $p = 2 - \frac{\pi}{2}$ (evidentemente, la probabilidad de que sea rectángulo es 0, como correponde al arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, que tiene área nula).

- Zayn.- En cuanto alguien ha estudiado los triángulos como debe hacerse, dando protagonismo a sus lados (gracias, Yod), hemos empezado a oír hablar de Geometría: Pitágoras, segmentos circulares; que asomase el número π era casi inevitable. No puedo estar más satisfecho.
- Alef.- La naturaleza humana es fascinante: que alguien pueda felicitarse de ver cómo una cantidad irracional usurpa el lugar que antes ocupaba legítimamente una fracción tan bella como 1/4 sólo se comprende desde la infinita diversidad de los gustos. Por mi parte, retrocedo con horror ante el espectáculo de esos números cuya parte decimal es interminable y no está sujeta a regularidad alguna.
- Kaf.- En ese caso, me temo que voy a aumentar su disgusto. Yo he seguido un camino similar al de Yod, aunque con algunas diferencias, y el valor que he calculado para p es aún más exótico. Me sale algo inferior al 30 % (con más precisión, $0'295587...$); exactamente es $p = log(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 2$.
- Alef.- Una vez que se abren las puertas a la insensatez, toda abominación tiene la entrada franca.
- Guímel.- El logaritmo que aparece, ¿es el decimal o el neperiano?
- Kaf.- El logaritmo neperiano, naturalmente. Si están interesados, les cuento como llegar a ese resultado. Es muy breve.
- Profesor.- Adelante, Kaf, por favor.
- Kaf.- Al igual que Yod, Me fijé en las longitudes de los lados, pero tomé como unidad de medida la longitud del lado mediano, en vez de la del mayor.
- Bet.- Disculpe la interrupción: ¿por qué no eligió el lado menor?
- Kaf.- Ésa fue mi primera intención, pero la descarté porque al imponer las condiciones sobre las longitudes de los otros dos lados (que su diferencia fuese menor que 1, esencialmente) obtenía una banda infinita, lo que impedía definir una distribución uniforme de probabilidad, como deseaba.
- Bet.- Ya veo, gracias. Y al elegir el lado mediano, ¿no se topó con ese mismo obstáculo? Al fin y al cabo, aún queda un lado mayor, cuya longitud podría ser tan grande como se quisiera.
- Kaf.- En realidad, no. Llamando x a la longitud del lado menor e y a la del mayor, tenemos las condiciones $0 < x < 1 < y$, pero también $y < x + 1$, para que puedan formar un triángulo, de modo que y está acotado. En realidad, esas desigualdades determinan una región triangular de vértices $(0, 1), (1, 1)$ y $(1, 2)$ en la cual podemos definir una distribución uniforme de probabilidad: la función de densidad vale 2 sobre ese soporte, al igual que en el modelo de Yod.

El resto es similar, aunque los cálculos son algo más complicados: los triángulos rectángulos responden a la igualdad $x^2 + 1 = y^2$, que es la ecuación de una hipérbola; los acutángulos corresponden a la zona situada por debajo: $y^2 < x^2 + 1$ o $y < \sqrt{x^2+1}$. Para hallar la probabilidad p, tenemos que calcular el área de esa parte del soporte y multiplicarla por 2, lo que supone un pequeño ejercicio de integración.

- Alef.- Abandonar el sendero de la claridad y la sencillez tiene un precio que está empezando a pagar: ahora se ve obligado a calcular la integral de $\sqrt{x^2+1}$ entre 0 y 1, que no es inmediata, por más que usted lo denomine 'un pequeño ejercicio'.

- Kaf.- Reconozco sin ambages que el cálculo no es inmediato, como sucedía al abordar el problema al modo de Yod, pero tampoco es una tarea extenuante: un cambio de variable mediante el seno hiperbólico es suficiente para llegar al resultado: una primitiva de la función $\sqrt{x^2+1}$ es $\frac{1}{2}[log(x + \sqrt{x^2+1}) + x\sqrt{x^2+1}]$. Evaluando en 0 y en 1, se obtiene el valor de la integral: $\frac{1}{2}[log(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}]$.

- Guímel.- Pero ¡ese resultado es mayor que 1! ¿cómo es posible?

- Kaf.- Eso es debido a que hemos calculado el área por debajo de la rama de hipérbola y por encima del eje de abscisas (entre 0 y 1), cuando en realidad hay que fijarse en la parte que queda dentro del soporte, es decir, por encima de la recta $y = 1$; eso lo conseguimos restando 1 al resultado anterior (por el cuadrado que queda debajo). Finalmente, multiplicamos por 2 y ya tenemos el anhelado valor de la probabilidad: $p = log(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 2$.

- Alef.- Ayer se unió a la fiesta el número π, invitado por Yod; hoy, Kaf ha traído al número e bajo el disfraz del logaritmo neperiano y del seno hiperbólico. No me extrañaría que en cualquier momento vinieran la razón áurea o la constante de Euler-Mascheroni. Contemplo el panorama con ánimo abatido: donde antes reinaban la armonía y la belleza de los sencillos números naturales y sus razones cabe ahora cualquier aberración. Quédense ustedes con sus insensatos resultados, pero no pretendan desterrarme del paraíso de los elegantes argumentos geométricos y los sencillos resultados racionales.

- Lámed.- No se lo tome tan a la tremenda, amigo Alef, que su jardín se mantiene en perfectas condiciones (y yo no me privo de sus frutos, como el magnífico argumento que usted mismo expuso aquí no hace mucho). Pero no deje de disfrutar también de otros paisajes. Por mi parte, celebro los enfoques de Yod y Kaf, que nos han conducido por nuevos caminos a destinos inesperados. Y aplaudiría si de repente alguien decidiera mostrarnos otras vías y otros valores de la probabilidad que estamos investigando.

- Mem.- Recojo la ovación de Lámed, puesto que me propongo defender la tesis de que p puede tomar razonablemente cualquier valor comprendido entre 0 y 1.

- Nun.- Cuando parece que ya está todo dicho, alguien viene a sorprendernos con una nueva ocurrencia.

- Profesor.- Oigamos lo que tiene que decirnos Mem, que me tiene intrigado. No es que haya llegado a un nuevo valor de p, sino a todos a la vez; quisiera saber cómo.

- Mem.- En realidad, es muy simple. Un triángulo tiene una base y un vértice opuesto a ella. Si la perpendicular a la base trazada desde ese vértice cae dentro de la base, el triángulo es acutángulo; si cae fuera, será obtusángulo, y si cae en uno de los extremos será un triángulo rectángulo.

- Alef.- Mal empezamos. La altura puede caer dentro de la base y aun así ser un triángulo rectángulo u obtusángulo.

- Mem.- Tiene usted razón, Alef, y lamento haber sido tan descuidado. Estaba pensando en triángulos cuya altura fuese suficientemente grande (al menos, la mitad de la longitud de la base), y por eso patiné. Lo expondré con más detalle, aunque tenga que alargarme más de lo que querría.

- Bet.- De nuevo, la claridad es preferible a la brevedad. No falla.

- Mem.- Situaré el segmento que sirve de base sobre el eje de abscisas, con el origen en su centro y tomaré como unidad de medida la distancia del centro a un extremo; así, la base es el segmento $[-1, 1]$ del eje de abscisas. El vértice opuesto puede ser cualquier punto $P = (x, y)$ con $y \neq 0$. La simetría nos autoriza a pensar que y es positivo. Supondré por ahora que $y > 1$; de ese modo, el punto P está fuera de la circunferencia unidad y el ángulo en P es agudo, con lo que la frase que pronuncié al principio (y que Alef censuró, con toda la razón) es cierta: si la perpendicular a la base trazada desde P cae dentro de la base, el triángulo es acutángulo; si cae fuera, será obtusángulo, y si cae en uno de los extremos será un triángulo rectángulo.

- Alef.- Ahora sí.

- Mem.- Puesto que el pie de la perpendicular es el punto $(x, 0)$, lo que sucede es que el triángulo es obtusángulo cuando $|x|$ es mayor que 1, es rectángulo si $x = \pm 1$ y es acutángulo cuando $-1 < x < 1$. El valor de y no juega ningún papel, por lo que podemos olvidarnos de él. La probabilidad de que un triángulo sea acutángulo es $p = p(-1 < x < 1)$.

- Nun.- ¿Qué sentido tiene esa probabilidad $p(-1 < x < 1)$? Puesto que x puede tomar cualquier valor real, no es posible que siga una distribución uniforme.

- Mem.- Precisamente, ahí está el quid de la cuestión: ¿qué distribución de probabilidad seguirá x? Dado que no puede ser uniforme, deberemos pensar en alguna otra, y la opción obvia es una normal. Si x sigue una ley $N(0, 1)$, entonces la probabilidad $p(-1 < x < 1)$ viene dada por la función de distribución, Φ: $p = p(-1 < x < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$, que podemos leer en una tabla de la distribución normal: $0'3174$ (redondeando; el valor exacto se expresa mediante la integral de la función de densidad).

  Pero si la varianza no es 1, sino que x sigue una ley $N(0, \sigma)$, entonces la probabilidad $p(-1 < x < 1)$ es igual a $\Phi(1/\sigma) - \Phi(-1/\sigma) = 2\Phi(1/\sigma) - 1$, que tiende a 1 cuando σ tiende a 0 y a 0 cuando σ tiende a infinito. Como la función Φ es continua, esa probabilidad adopta todos los valores entre 0 y 1, con tal de elegir σ adecuadamente.

  Y eso es todo.

- Nun.- Se olvida de discutir el caso $y < 1$.

- Mem.- En realidad es una variante de lo anterior algo más complicada. Cuando y es menor que 1, los valores de x que corresponden a triángulos acutángulos ocupan una zona más pequeña (pues hay que considerar la posibilidad de que el ángulo en P sea obtuso). Creo que la complicación adicional no merece la pena.

- Profesor.- Ésa es también mi opinión. Si les parece, podemos dar por cerrado este tema: hemos discutido por activa y por pasiva maneras de entender los triángulos y de estudiar la probabilidad de que sean acutángulos. Hemos descubierto enfoques y argumentos ingeniosos, elegantes, sorprendentes y hasta frustrantes en ocasiones. Los objetivos que me planteaba cuando les propuse la pregunta han sido cubiertos muy de sobra. Gracias a todos.

Sobre el/los autor/es:
Nombre: Dionisio Pérez Esteban
Correo electrónico: dionisio.perez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid.