https://doi.org/10.24844/EM3701.04

Lo exponencial en la Escuela Secundaria de Adultos: análisis de invariantes operatorios

The exponential in adult secondary school: analysis of operational invariants

Patricia Sureda,[1] María Rita Otero[2]

Resumen: En este trabajo se analizan las respuestas a una tarea sobre variaciones exponenciales crecientes, obtenidas en 28 cursos de tres escuelas secundarias de adultos (ESA), con el fin de identificar qué invariantes operatorios utilizan en la acción al resolver tareas que requieren de invariantes operatorios (IO) exponenciales. La conceptualización de este tipo de variaciones es imprescindible para comprender varias de las situaciones sociales actuales como, por ejemplo, la forma en que se extiende una pandemia como la del virus COVID-19 y la forma en que aumenta la deuda que genera el interés de una tarjeta de crédito cuando se paga, por ejemplo, el monto mínimo. El análisis de las soluciones evidencia una mayor presencia de IO lineales en la resolución de la tarea, de los IO exponenciales necesarios.

Palabras clave: *Teoría de los Campos Conceptuales - Invariantes Operatorios - Variación Exponencial – Adultos – Secundaria*

Fecha de recepción: 10 de octubre de 2022. **Fecha de aceptación**: 12 de febrero de 2025.

[1] Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Núcleo de Investigación en Educación Matemática (NIEM), Instituto Superior de Ingeniería del Software de Tandil (ISISTAN-UE), Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, psureda@niem.exa.unicen.edu.ar, https://orcid.org/0009-0004-6223-4424.

[2] CConsejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar, https://orcid.org/0000-0002-1682-9142.

Abstract: In this work we analyze the responses to a task on exponential growth, obtained in 28 courses from three adult secondary schools (ESA), in order to identify which operational invariants in action use the students when solving tasks that require exponential operational invariants. The conceptualization of this type of variations is essential to understand many of the current social situations, such as, for example, the way in which a pandemic such as the COVID-19 virus spreads and the way in which the debt of a credit card increases, when paying, for example, the minimum amount. The analysis of the solutions shows a greater presence of linear operational invariants in the resolution of the task, than of the necessary exponential operational invariants.

Keywords: *Conceptual Fields Theory - Operational Invariants - Exponential Variation - Adults - Secondary*

1. INTRODUCCIÓN

Debido a que algunas de las situaciones a las que nos confronta la vida social en la actualidad se modelizan mediante variaciones exponenciales, resulta cada vez más importante que las nociones básicas del campo exponencial estén disponibles, al menos en acto, en los esquemas de los ciudadanos. Para comprender cómo aumenta la cantidad de contagiados de COVID-19, entender a qué se refieren los medios masivos de comunicación cuando insisten en la necesidad de "aplanar la curva de contagios", comprender los datos difundidos por los medios originados en modelos epidemiológicos, biológicos, el crecimiento demográfico, la forma en que aumenta la cantidad de dinero puesto a interés compuesto, la deuda que genera el interés de una tarjeta de crédito cuando se paga el monto mínimo, la inflación, la deflación, la propagación de enfermedades −y su desaparición−, la difusión de un rumor, o de un virus informático etc.; se necesitan invariantes operatorios exponenciales de diversa complejidad. Pero ¿dónde, cómo y cuándo se adquieren dichos invariantes operatorios?

Cuando un sujeto se enfrenta a una situación nueva, lo hace a partir de los esquemas que tiene disponibles, ya sean estos adecuados o no para tratar con ella. Se sabe que estas situaciones son erróneamente tratadas como lineales (Sureda y Otero; 2015, 2013; Karrer y Magina, 2000; Villarreal *et al.*, 2005; Ledezma, 2017), lo cual produce que no se tomen las precauciones adecuadas para que el contagio de una enfermedad no se expanda, o en otro ámbito, que no se dimensione el valor y el crecimiento de una gran deuda en la tarjeta de crédito, que no se podrá honrar. Para que una persona disponga de invariantes operatorios cualesquiera, tiene que haber enfrentado y tenido experiencia en situaciones que los requieran. Aquí, el ámbito de experiencia cubre, simultáneamente, la experiencia de vida o "cotidiana" (en la familia, el trabajo, etc.). Pero, en el caso de los invariantes operatorios exponenciales: ¿alcanza con que los ciudadanos sean expuestos a este tipo de situaciones en la cotidianeidad para adquirirlos, o dichos invariantes requieren ser enseñados a partir de situaciones que los convoquen, por ejemplo, en un proceso de escolarización formal?

Esta investigación se realiza en la escuela secundaria de adultos, con el propósito de analizar los invariantes operatorios que el campo de experiencias de los estudiantes les ha provisto para tratar variaciones exponenciales. En particular, se analizan los invariantes operatorios como parte fundamental de los esquemas, porque son los que dirigen la acción del sujeto en situación. Para ello, se describen, analizan y discuten, las resoluciones de los estudiantes de dicha escuela, cuando tienen que resolver una tarea de variación exponencial creciente.

2. TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES

Este trabajo se enmarca en la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990; 2007a; 2007b; 2009; 2011; 2013a; 2013b; Sureda y Otero, 2011; Otero, Fanaro, Sureda, Llanos, y Arlego, 2014). Se describen a continuación algunos elementos teóricos que fundamentan el trabajo: situación, campo de experiencia y campo conceptual, esquema, invariantes operatorios, conocimiento predicativo y operatorio.

Situación: El concepto de situación no es el de situación didáctica, pero si el de tarea. Así, toda situación compleja puede ser analizada como una combinación de tareas, de las que debe conocerse su naturaleza y dificultades. La dificultad de una tarea no es ni la suma ni el producto de las diferentes subtareas involucradas, pero el desempeño en cada subtarea afectará necesariamente el desempeño en general (Vergnaud, 1990; 2013b).

Campo de Experiencia y Campo Conceptual: La experiencia es el encuentro del sujeto con situaciones, pero es tan amplio y contiene tantas situaciones y registros de actividad, que resulta prácticamente imposible analizarlo como un sistema. Este planteo permite designar subcampos de experiencias empleando las nociones teóricas estrechamente vinculadas de situación, esquema y concepto. Un campo conceptual recorta un subcampo de experiencias cuyo dominio progresivo implica una variedad de conceptos, de esquemas y de representaciones simbólicas en estrecha conexión; y el conjunto de los conceptos que contribuyen a dominar esa variedad de situaciones, que puede ser muy grande (Vergnaud, 2013b). Correlativamente una situación no se analiza con la ayuda de un solo concepto, sino de varios. Estos conceptos forman sistemas, cuya organización es, asimismo, progresiva, eventualmente nunca concluida como, por ejemplo, el campo conceptual de las variaciones exponenciales, de las cuales las variaciones exponenciales crecientes solo son una pequeña parte. En este trabajo se propone una única tarea, que resulta apropiada para identificar ciertos invariantes operatorios utilizados en la acción.

Esquema: Las situaciones se resuelven utilizando esquemas y una mayor cantidad de esquemas le permite al sujeto abordar situaciones más complejas. El esquema no es una conducta, pero tiene la función de generar la actividad y la conducta en situación. Los componentes del esquema son:

- Una meta (o varias), submetas y anticipaciones.
- Reglas de acción, de captación, y control de la información.
- Los invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto).
- Las posibles inferencias.

Los invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto), son en particular, la base conceptual implícita (o explícita) de los esquemas debido a que permiten seleccionar la información pertinente y, a partir de ella y de la o las metas a atender, inferir las reglas de acción más adecuadas para abordar una situación (Vergnaud, 1990, 2013b). En consecuencia, las decisiones que tome un alumno ante una determinada situación van a depender del esquema activado, pero más específicamente de los conceptos en acto y teoremas en acto disponibles en su vasto campo de experiencia. Las distintas metas y las distintas reglas de acción para recabar información y de control asociadas a cada tipo de situación son igualmente esenciales para la asimilación de nuevas situaciones y para la adaptación de los esquemas (Vergnaud, 2013b).

Invariantes Operatorios: Los invariantes operatorios son conceptos y teoremas en acto. Los conceptos en acto son categorías pertinentes, y como tal no son susceptibles de verdad o falsedad, sino solamente de la pertinencia o de la no pertinencia. En cambio, un teorema en acto es una proposición dada por verdadera en la actividad e influye directamente sobre ella. La relación entre teoremas y conceptos es dialéctica, en el sentido que no hay teorema sin conceptos y no hay concepto sin teorema. Recíprocamente, los teoremas en acto son constitutivos de los conceptos en acto ya que, sin proposiciones dadas por verdaderas, los conceptos estarían vacíos de contenido. Pero es importante reconocer que un concepto en acto siempre participa de innumerables teoremas en acto, cuya formación puede espaciarse en un largo período del tiempo, en el curso de la experiencia y del desarrollo. El estudio del desarrollo de las competencias durante el aprendizaje muestra que el mismo concepto puede, según el estado de su elaboración, ser asociado con teoremas numerosos, ricos y, hasta eventualmente falsos. Por otra parte, es importante destacar que un concepto en acto no es un concepto, ni un teorema en acto un teorema. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su verdad, pero esto no es lo que sucede con la mayor cantidad de invariantes operatorios. Los conceptos y los teoremas en acto que un sujeto puede hacer explícitos son apenas un pequeño porcentaje, en comparación con la cantidad de conocimiento implícito que utiliza en la acción, y que es en gran parte inconsciente. Sin embargo, la observación de la actividad en situación permite inferir algunos conceptos y teoremas en acto (conscientes o no) que guían la acción del sujeto en situación. Esto justifica el análisis y la identificación de los invariantes operatorios en las resoluciones de los estudiantes a una tarea que implica una variación exponencial creciente. Pues solo tenemos acceso relativo a la actividad observable, o al producto de ella.

La identificación de los invariantes operatorios que guían la acción en situación en la tarea que proponemos aquí, nos permitirá determinar si alcanza con la experiencia "cotidiana" que los ciudadanos tienen con las situaciones exponenciales, para construir los invariantes operatorios que las requieren, o si la conceptualización de este tipo de variaciones requiere necesariamente de una enseñanza formal, y si es así, de qué tipo.

3. PREGUNTA DE LA INVESTIGACIÓN

¿Cuáles son los invariantes operatorios que utilizan los estudiantes de la escuela secundaria de adultos (ESA) cuando resuelven una tarea que involucra variaciones exponenciales crecientes?

4. METODOLOGÍA

4.1 Descripción de la tarea y su resolución

Se diseñó una tarea que involucra variaciones exponenciales. La tarea es la siguiente:

Situación: Tu mamá te propone que si colaboras con ciertas tareas del hogar ella podría pagarte cada día, durante 30 días. Ella te ofrece una de estas dos formas de retribución:

Forma 1: 1 centavo el primer día, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día, y así sucesivamente.

Forma 2: 100 pesos por día.

g) A primera vista cuál forma elegirías como la más conveniente para vos, y por qué (entregan esta respuesta).
h) Ahora analiza más detenidamente cuál te conviene más y por qué. (deja todo registrado en la hoja pues este análisis es el que más nos interesa)
i) ¿En qué se diferencia una forma de retribución de la otra?

La situación plantea deliberadamente dos tipos de variaciones en las formas de pago, una exponencial diaria y otra invariante.

En la primera forma de pago, el problema se puede resolver multiplicando recursivamente la cantidad de dinero del día anterior por dos y anotándolo secuencialmente. La relevancia de este proceso de multiplicar recursivamente y registrar para la construcción de la variación exponencial, ya ha sido documentado por otros autores (Weber, 2002; Confrey y Smith, 1994); aun cuando la distancia que hay entre ésta y su prolongación a potencias reales es enorme (Sureda y Otero; 2019). Pero dado que la generación de invariantes operatorios exponenciales tiene una oportunidad al calcular y registrar, se quiere analizar si es posible identificarlos en esta resolución.

En la segunda forma de pago, la cantidad de dinero es la misma para cada día, y la forma de resolver es sencilla, pues para saber cuánto se gana durante los treinta días basta con multiplicar: 100×30=3000. Esta forma de pago pretende que el estudiante tenga la oportunidad de reconocer qué, la técnica que funciona para la segunda forma de pago, y que es la que usualmente las personas utilizan en su experiencia diaria, no es la misma que para la primera, y que por lo tanto tendrá que usar otra.

Las tareas: En el primer inciso se les solicitó a los estudiantes que realicen una anticipación, y que entreguen la hoja. Esto se hizo con el propósito de acceder a los primeros invariantes operatorios que el problema dispara en el estudiante. ¿Podrá el sujeto anticipar que los centavos pueden llegar a ser una gran cantidad de dinero con el paso de los días? Si lo hacen, estaremos dispuestos a reconocer que tienen algún invariante operatorio exponencial (tabla 2). Luego, en el inciso b) se les pide qué, en otra hoja, donde se repite el mismo enunciado del problema, realicen una justificación para decidir cuál forma de pago les conviene más. El fin es poder inferir cuales invariantes operatorios guían la resolución, y si se modifican con respecto a la anticipación. Pues, una cosa es que ellos puedan adelantar que la multiplicación puede llegar a darles una gran suma de dinero, pero otra, es que ellos cuenten con los invariantes operatorios necesarios para verificarlo. En el último inciso se espera que los estudiantes puedan diferenciar un tipo de variación de la otra y explicitarlo.

La resolución: La tarea requiere primeramente reconocer que en la *forma de pago 1*, la cantidad de dinero cambia cada día. Esto implica, por una parte, identificar en el enunciado la "regla" con la que aumenta la cantidad de dinero, y, por otra parte, darse cuenta que para calcular cuánto va a cobrar durante los 30 días, es necesario además de calcular, registrar el pago diario durante ese tiempo. Una posible forma de registro, que no necesariamente usaron los estudiantes, es la siguiente:

Tabla 1. Cálculo de la *forma de pago 1*, día a día

Forma de Pago 1									
Día	**Cobro ($)**	**Día**	**Cobro ($)**	**Día**	**Cobro ($)**	**Día**	**Cobro ($)**	**Día**	**Cobro ($)**
1	0,01	7	0,64	13	40,96	19	2.621,44	25	167.772,16
2	0,02	8	1,28	14	81,92	20	5.242,88	26	335.544,32
3	0,04	9	2,56	15	163,84	21	10.485,76	27	671.088,64
4	0,08	10	5,12	16	327,68	22	20.971,52	28	1.342.177,28
5	0,16	11	10,24	17	655,36	23	41.943,04	29	2.684.354,56
6	0,32	12	20,48	18	1.310,72	24	83.886,08	30	5.368.709,12
								Total	**10.737.418,23**

El cálculo diario de la cantidad de dinero que implica multiplicar recursivamente la cantidad de dinero del día anterior por dos, requiere el uso de un conjunto de teoremas en acto vinculados a la multiplicación y la notación necesarios, para construir los IO vinculados a la rapidez del crecimiento de las variaciones exponenciales. El cálculo recursivo, y su notación permite apreciar que este crecimiento es "lento" o suave al principio, pero en un momento dado comienza a crecer muy rápidamente, realmente rápido. En esta situación, esto sucede luego del día 19. Hay también otros IO relacionados con la no linealidad, que aun sin ser exponenciales, genéticamente parecen precederlos (Sureda y Otero, 2013), como es por ejemplo que la cantidad de dinero cambia cada período (en este caso, un día).

Por otra parte, como la resolución de la *forma de pago 2* implica una cantidad de dinero fija, que no varía día a día, ella se sostiene sobre invariantes operatorios que se han generado durante un largo proceso de construcción, a partir de situaciones cotidianas que requieren, en su gran mayoría, utilizar invariantes operatorios y variaciones constantes y/o lineales. Este tipo de esquemas es el que las personas suelen utilizar tanto para las variaciones lineales como no lineales (Sureda y Otero, 2013; de Bock, van Doorem, Janssens y Verschaffel (2002); de Bock, Verschaffel y Janssens, 1998; 2002). Por esta razón, y buscando que los estudiantes descarten los esquemas lineales para la primera forma de pago, es que se plantea una forma de variación exponencial, y una constante.

Descripción de la implementación

La situación se propuso a estudiantes de la escuela secundaria de jóvenes y adultos (ESA) que en Argentina se denomina CENS, cuyas edades se ubican en el intervalo de 18 a 67 años de edad. Esta secundaria (ESA) comprende un período de tres años (1°, 2° y 3°) y nuclea a personas que quieren retomar o iniciar los estudios secundarios. En este trabajo se analizan las resoluciones (N=162) de los estudiantes de los tres años de secundaria.

El problema se administró en tres escuelas secundarias de adultos donde los estudiantes cursan en forma presencial. Uno de los colegios se encuentra en el centro de la ciudad y los otros dos en un barrio periférico. En total fueron 28 cursos de todas las modalidades, de 1ro. a 3er. año, de los cuales recogimos 162 resoluciones. Las resoluciones corresponden a todos los alumnos presentes en cada curso, el día que se aplicó el problema en cada institución. Para llevar a cabo el estudio se tomaron entre 20 y 30 minutos de la clase de cada profesor de la escuela, sin previo aviso. Es decir, a los estudiantes no se le dieron clases teóricas previas, ni fueron preparados de antemano para resolver la tarea. En la presentación se les solicitó que a los fines de la investigación dejaran todo escrito en la hoja (no borrar, a lo sumo tachar). Se les presentó el problema en dos hojas distintas y se les pidió que anticiparan la mejor opción sin hacer cuentas y entregaran la respuesta en la primera hoja. Luego, se les solicitó escoger la mejor opción habiendo hecho previamente las cuentas en la segunda hoja. Para ello disponían del uso de la calculadora del teléfono móvil. Al final, debido a la curiosidad e interés que despertaba, el investigador resolvía el problema con el grupo de clase. Debido a restricciones institucionales, las intervenciones no fueron registradas ni en audios, ni en videos.

Las 162 respuestas se analizaron utilizando el constructo de invariante operatorio (IO) propuesto en el marco teórico y se clasificaron en exponenciales o no-exponenciales. Los protocolos que se describen son seleccionados como ejemplos por su representatividad dentro de la categoría. La nomenclatura utilizada para su descripción es: (Número de estudiante en la muestra: Edad: Año de Escuela Secundaria de Adultos que cursa). Por ejemplo (A1:34:2) sería el estudiante 1, de 34 años de edad y quien está cursando el segundo año de la ESO.

En primer lugar, se clasificaron de forma inductiva las respuestas según el tipo de pago que eligieron, y se apartaron las hojas que habían sido entregadas en blanco. Esto se hizo tanto para las anticipaciones como para la resolución en sí. Una vez diferenciadas se realizó una tabla (tabla 2) a fin de clasificar el tipo de resolución. El análisis permitió diferenciar las resoluciones entre: a) los que no realizaron ningún tipo de cálculo (primera columna); b) los que solo resolvieron la forma de pago 2, esto es la que solo requería del cálculo (segunda columna); c) los que realizaron algunos cálculos para ambas formas de pago, pero utilizando las mismas técnicas (tercera columna); d) y quienes calcularon ambos tipos de pagos con las técnicas adecuadas para cada uno (cuarta columna). Por ejemplo, un estudiante que no realiza cálculos es el estudiante A15, quien tiene 18 años, y cursa el 2do. año de secundaria para adultos.

Tabla 2. Ejemplo de tabla para clasificar resoluciones

No calculan	Calculan FP2	Calculan Ambas Lineales	Calculan FP1 y FP2
A15:18:2	A27:35:1	A26:37:1	A24:19:1
A22:19:2	A42:22:1	A29:42:1	A6:45:2
...	...	...	...

La tabla 2 permitió contabilizar los tipos de respuestas de cada uno, e inferir luego, un conjunto de teoremas en acto para cada tipo de resolución. La contabilización se realiza haciendo uso de la frecuencia relativa, debido al interés de este trabajo en resaltar para cada caso, la cantidad de respuestas en las que se advierte cada tipo de teorema en acto, respecto del total.

5. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Las respuestas que se obtuvieron por año escolar fueron 61/162 de primer año, 70/162 de segundo año y 31/162 de tercero. La menor cantidad de resoluciones del último año se debe al desgranamiento escolar.

Tabla 3. Cantidad de resoluciones por año que cursa

Año Escolar	Frecuencia Relativa
1ro.	61/162
2do.	70/162
3ro.	31/162

En esta sección se analizan las respuestas de los estudiantes a las dos partes de la tarea. Esto es, la primera parte en que se les solicitó dar una respuesta sin hacer las cuentas (anticipación) y entregar la hoja; y la segunda parte de la tarea en la cual tenían que resolver el problema haciendo las cuentas y entregarlas. Se analiza primero las respuestas en las que anticiparon qué forma de pago les convenia, pero sin hacer las cuentas.

5.1 Análisis y resultados de la anticipación

Los alumnos deben anticipar sin hacer las cuentas, qué forma de pago les conviene más, escribirla y entregar la hoja. Hay un grupo de 19/162 estudiantes que entregaron sus hojas vacías. Luego, las respuestas que se obtuvieron se clasificaron en dos grupos (tabla 4): Aquellos que eligieron la primera forma de pago (FP1) como la que más les convenía (23/143), y los que eligieron la segunda forma de pago (120/143). De acuerdo con las justificaciones que presentaron durante la elección se infiere que los que eligieron la *forma de pago 1* poseen algún tipo de invariante operatorio exponencial que sostiene esa afirmación, en contraposición con los que eligieron la segunda forma de pago.

Tabla 4. Anticipación

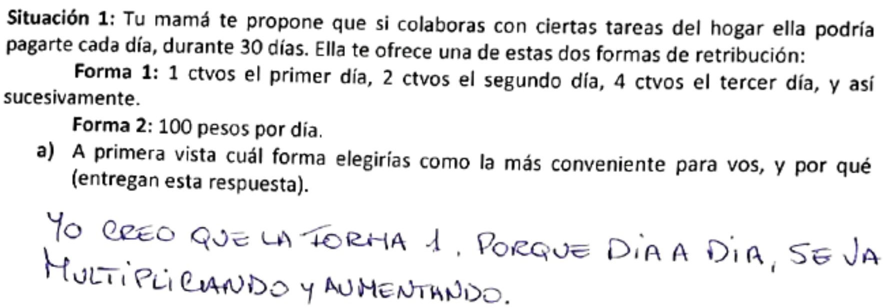
Anticipación	Frecuencia Relativa
Invariantes Operatorios Exponenciales	$\frac{23}{162} = 0{,}14$
Invariantes Operatorios No Exponenciales	$\frac{120}{162} = 0{,}74$
No respondió	$\frac{19}{162} = 0{,}12$

Las respuestas en las que es posible inferir invariantes operatorios que presentan en su génesis una posibilidad para la construcción de la variación exponencial (tabla 5), son aquellas en las se que propone pagarles un centavo el primer día, dos el segundo, cuatro el tercero, y así sucesivamente.

Tabla 5. IO vinculados a la justificación de la elección FP1

Anticipación: IO vinculados a la elección de FP1	**Frecuencia Relativa**
"Porque día a día se va multiplicando". "Comienza con centavos, pero como se va multiplicando, puede llegar a ser más que la suma".	$\frac{7}{23}$
"Se va duplicando y al final es mucho más".	$\frac{3}{23}$
"Porque al final tengo más dinero". "Porque al final se hace más cantidad".	$\frac{8}{23}$
"Se comienza con centavos, pero la cantidad puede ser mayor".	$\frac{2}{23}$
"Puede aumentar, no es siempre el mismo monto".	$\frac{3}{23}$
Total	$\frac{23}{23}$

A continuación, se describen las filas de la tabla. En la primera fila hay un grupo de siete (7/23) estudiantes que anticipan que, aunque con esta forma de pago comienzan cobrando centavos pueden llegar a cobrar más que con la otra forma de pago debido a que "día a día se va multiplicando y aumentando" (ver en figura 1 la resolución del estudiante A5:20:2; quien tiene 20 años y cursa 2do. año de la ESA). Esto evidencia IO vinculados a las características de la multiplicación en la base de sus decisiones.



Situación 1: Tu mamá te propone que si colaboras con ciertas tareas del hogar ella podría pagarte cada día, durante 30 días. Ella te ofrece una de estas dos formas de retribución:

Forma 1: 1 ctvos el primer día, 2 ctvos el segundo día, 4 ctvos el tercer día, y así sucesivamente.

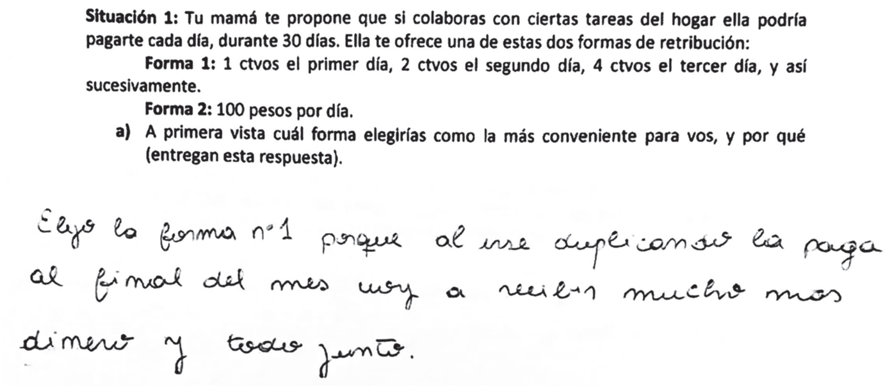
Forma 2: 100 pesos por día.

a) A primera vista cuál forma elegirías como la más conveniente para vos, y por qué (entregan esta respuesta).

YO CREO QUE LA FORMA 1. PORQUE DIA A DIA, SE VA MULTIPLICANDO Y AUMENTANDO.

Figura 1. Elección de la primera forma de pago sin cálculos (estudiante A5:20:2).

Luego, hay un reducido número de estudiantes (3/23) que fundamentan su elección en la duplicación. Por ejemplo, el estudiante A28:19:2 (quien tiene 19 años y cursa 2do. año de la ESA) afirma que elige "la forma de pago n°1 porque al irse duplicando la paga al final del mes voy a recibir mucho más dinero y todo junto" (figura 2).


Situación 1: Tu mamá te propone que si colaboras con ciertas tareas del hogar ella podría pagarte cada día, durante 30 días. Ella te ofrece una de estas dos formas de retribución:

Forma 1: 1 ctvos el primer día, 2 ctvos el segundo día, 4 ctvos el tercer día, y así sucesivamente.

Forma 2: 100 pesos por día.

a) A primera vista cuál forma elegirías como la más conveniente para vos, y por qué (entregan esta respuesta).

Elijo la forma n°1 porque al irse duplicando la paga al final del mes voy a recibir mucho mas dinero y todo junto.

Figura 2. Elección de la primera forma de pago sin cálculos (estudiante A28:19:2).

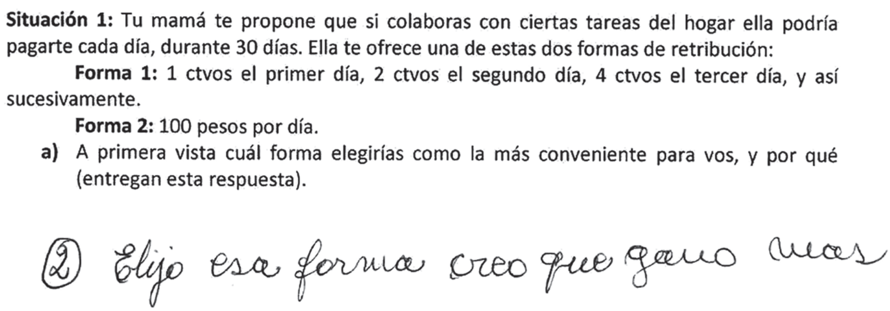
En este grupo de soluciones los IO refieren a un caso particular de multiplicación: la duplicación, y este concepto está en la base del ingreso al campo exponencial discreto que se propone en esta situación. Luego, hay varias soluciones que justifican su elección en la cantidad final de dinero (10/23). Estas, aunque permiten suponer la existencia de invariantes operatorios que posibilitan anticipar correctamente que con la primera forma de pago tendrán más ganancia, no nos brinda la información suficiente para afirmar que su elección se sostiene sobre la duplicación, la multiplicación, o algún otro IO similar. Finalmente, el resto de los IO se refieren a la posibilidad de que la cantidad de dinero varía día a día (3/23), lo cual se sostiene sobre IO no lineales, necesarios para la construcción de los exponenciales (Autor1 y Autor2, 2013).

Las respuestas en las que no es posible inferir invariantes operatorios exponenciales son las de los estudiantes que eligieron la **Forma de Pago 2**, esto es 120 (120/162) respuestas. De estas soluciones hay 6 estudiantes que no justificaron su elección, y de las restantes 114 inferimos los invariantes operatorios de la tabla 6. Se considera que este conjunto de invariantes operatorios vinculados a la elección de la segunda forma de pago se apoya sobre esquemas no exponenciales.

Tabla 6. IO vinculados a la justificación de la elección FP2

Anticipación: IO vinculados a la elección de FP2	**Frecuencia Relativa**
“Gano más” “en 30 días es más cantidad”	89/114
“Es más clara”	2/114
“Los pesos valen más que los centavos” “Los centavos valen mucho menos que los pesos” “Los centavos no valen nada”	23/114
Total	114/114

A continuación, se describen las filas de la tabla. En la primera fila una gran parte de los estudiantes (89/114) afirman que eligieron los cien pesos por día “porque ganan más” (ver en figura 3 la resolución del estudiante A21 de 66 años, quien cursa 1er. año). Esta elección parece orientada por cálculos o nociones matemáticas.



Situación 1: Tu mamá te propone que si colaboras con ciertas tareas del hogar ella podría pagarte cada día, durante 30 días. Ella te ofrece una de estas dos formas de retribución:

Forma 1: 1 ctvos el primer día, 2 ctvos el segundo día, 4 ctvos el tercer día, y así sucesivamente.

Forma 2: 100 pesos por día.

a) A primera vista cuál forma elegirías como la más conveniente para vos, y por qué (entregan esta respuesta).

2 Elijo esa forma creo que gano mas

Figura 3. Elección de la segunda forma de pago sin cálculos (A21:66:1).

Sin embargo, no parecen entender cómo aumentan los centavos, pues requiere de IO exponenciales. La elección de los restantes estudiantes (25/114), parece responder a aspectos vinculados únicamente a la comparación entre el valor de los pesos versus los centavos: “con los centavos no ganaría mucha plata” (ver en figura 4 la resolución del estudiante A31 de 32 años, quien cursa 1er. año).

Situación 1: Tu mamá te propone que si colaboras con ciertas tareas del hogar ella podría pagarte cada día, durante 30 días. Ella te ofrece una de estas dos formas de retribución:

Forma 1: 1 ctvos el primer día, 2 ctvos el segundo día, 4 ctvos el tercer día, y así sucesivamente.

Forma 2: 100 pesos por día.

a) A primera vista cuál forma elegirías como la más conveniente para vos, y por qué (entregan esta respuesta).

Elijo la forma 2 Porque me parece que pagan lo que Vale la ayuda, encambio con los Sentavos no juntaria mucha plata.

Figura 4. Elección de la segunda forma de pago sin cálculos (A31:32:1).

En todos los casos estas resoluciones (120/162) evidencian la ausencia de IO exponenciales. Finalmente hay 16 estudiantes que **no eligen ninguna forma de pago.**

5.2 Análisis y resultados de la resolución de la tarea

Una vez que entregaron las anticipaciones, los estudiantes debían evaluar mediante los cálculos necesarios, qué forma de pago les convenía más. Entre las respuestas que se obtuvieron se encuentran aquellas en las que los estudiantes no escribieron ningún cálculo (43/162) y los que sí lo hicieron (119/162).

En las 43 soluciones (43/162) que **No registran cálculos** hay algunos que entregaron las hojas vacías y otras en donde los estudiantes respondieron que no sabían cómo hacer la tarea. Mientras que a los 119 protocolos (119/162) en los que se **Registraron cálculos**, los clasificamos en las siguientes categorías:

Tabla 7. Clasificación de resoluciones según la forma de calcular.

En los que no es posible inferir Invariantes Operatorios Exponenciales		En los que es posible inferir Invariantes Operatorios Exponenciales	
a) No se registran cálculos.	43/162	e) Utilizan los cálculos adecuados para cada forma de pago.	33/162
b) Calculan solo los 100 pesos por día (FP2).	49/162		
c) Calculan FP1 con las mismas técnicas que las utilizadas en FP2.	26/162		
d) Calculan el pago exponencial (FP1) sumando cierta cantidad a cada día.	10/162		
Total	128/162	**Total**	33/162

Según esta clasificación en más de las 4/5 parte de las resoluciones de los estudiantes adultos no se advierten invariantes operatorios exponenciales (categorías: (a), (b), (c) y (d)). Es decir, estos estudiantes no lograron resolver la forma de pago 1 mediante estrategias exponenciales, ni tampoco disponen de las herramientas básicas de notación y cálculo, necesarias para construir lo exponencial. Así, mientras que en la categoría (a) no es posible inferir IO, en las categorías (b), (c) y (d) se infirieron algunos invariantes operatorios no exponenciales según se describen a continuación para cada categoría.

b) De las 49 (49/162) resoluciones en las que los estudiantes **calculan únicamente la forma de pago 2 (FP2),** mediante el cálculo 100×30=3000, se infirieron los IO que ya habíamos descrito en la tabla 3. Estos son: *El pago es cien pesos cada día; La cantidad de dinero es la misma cada día; La cantidad total de dinero a cobrar se obtiene multiplicando el cobro diario por los 30 días de trabajo*. Por ejemplo, la resolución del estudiante A22, de 54 años, quien cursa tercer año de la escuela secundaria (A22:54:3), hace el cálculo 30×100=3000 y explica que los centavos no existen (figura 5).

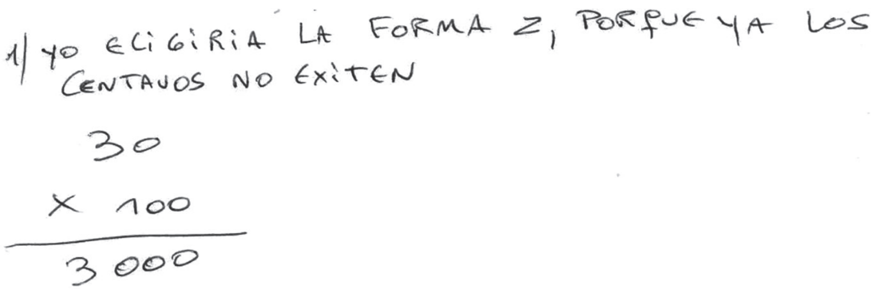
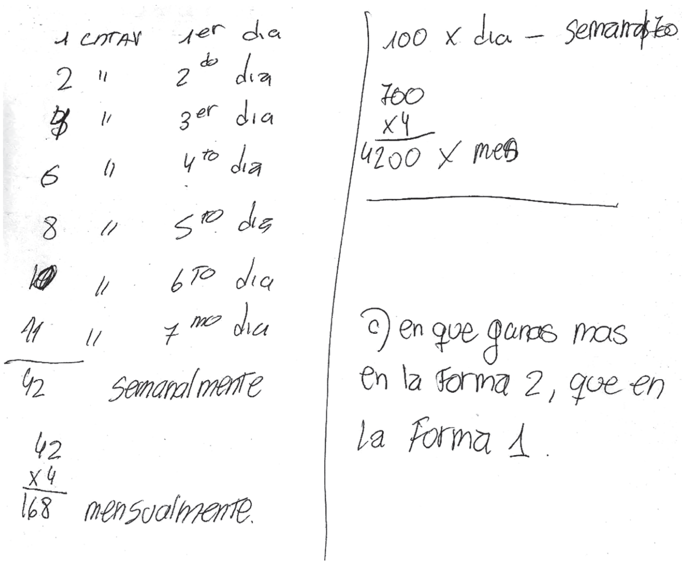


Figura 5. Cálculo de la forma de pago 2 por el estudiante A22:54:3.

Esta solución indica la presencia de invariantes operatorios relativos al cobro constante y también la ausencia de invariantes operatorios vinculados a la rapidez con que aumentan los centavos.

c) En las 26 resoluciones (26/162) que los estudiantes **resuelven la primera forma de pago (FP1)** con las mismas técnicas que en la forma de pago 2 (FP2) se infirió el invariante operatorio: "Aumenta la misma cantidad en cada período de tiempo". Esto se debe a que tal como se ve, en la figura 6, los estudiantes determinan la cantidad de centavos para un periodo de tiempo y la multiplican por la cantidad de veces que consideren necesario para resolver la tarea. Por ejemplo, el estudiante A61:23:2 (estudiante A61, de 23 años y que cursa segundo año de la secundaria de adultos) suma los centavos para la primera semana, suponiendo que a partir del segundo día aumenta dos centavos cada día, y el último día un centavo (copiando la relación entre el primer y segundo día): 1+2+4+6+8+10+11=7 (figura 6). Así en lugar de proponer que el día 4 la cantidad de dinero a cobrar es 8, y luego 16, etc. y sumarlos, el estudiante suma los primeros siete días y los multiplica por cuatro semanas 42×4=168.



1 cntav 1er dia
2 " 2do dia
3 " 3er dia
6 " 4to dia
8 " 5to dia
10 " 6to dia
11 " 7mo dia
42 semanalmente

42
x4
168 mensualmente.

100 x dia – semanal 700

700
x4
4200 x mes

c) en que ganas mas en la forma 2, que en la forma 1.

Figura 6. Resolución de ambas formas de pago con técnicas similares (estudiante A61:23:2).

Luego calcula la segunda forma de pago multiplicando 100 pesos por 28 días. La cantidad de días que toma para hacer los cálculos es de 28, en lugar de los treinta días que dice el enunciado. La similitud en las resoluciones de ambas formas de pago hace suponer un esfuerzo por adaptar la forma de pago 1 a la forma de pago 2. Para ello supone que la cantidad de dinero que se obtiene, por semana o por día es fija, y por lo tanto se la puede multiplicar por la cantidad de días o semanas para saber el total. Estos cálculos muestran también la ausencia de invariantes operatorios exponenciales.

d) En las 10 resoluciones (10/162) en las que los estudiantes **calculan el pago exponencial (FP1) sumando cierta cantidad a cada día** es posible inferir al invariante operatorio "La cantidad de dinero no es la misma cada día". Para ello se tienen los siguientes dos tipos de respuestas. Una en el cual los estudiantes sumaban dos centavos cada día (como es el caso del estudiante A49:19:2); y otra en la que sumaban uno. De este último tipo se muestra en la figura 7 la solución del estudiante A3:26:2 (estudiante A3, de 26 años que cursa el segundo año de la secundaria de adultos), en la que se puede ver que la suma de los centavos aumenta en uno cada día. Así, el primer día tiene 1 centavo, al cual le suma 2 centavos del segundo día, y luego le suma 3 centavos del tercer día, y así sucesivamente, para terminar afirmando que al final de los 30 días tendrá 409 centavos. En este caso se advierte que el estudiante modifica la cantidad de centavos del tercer día, al colocar 3 centavos, en lugar de los 4 centavos que decía el enunciado.

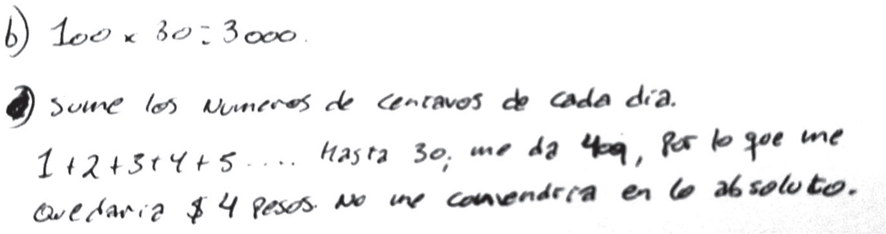


Figura 7: Resolución de ambas formas de pago con técnicas similares (estudiante A3:26:2).

Así, a pesar de que este grupo de estudiantes resolvieron la tarea únicamente mediante sumas, es posible inferir la emergencia de un invariante operatorio no lineal, ya que se advierte un aumento del dinero en cada período. Sin embargo, este IO es asimilado a un esquema lineal, lo cual resulta insuficiente para dar cuenta de la situación exponencial.

e) Finalmente, se describen las únicas 33 respuestas en las que fue posible inferir algún tipo de Invariante Operatorio Exponencial. Según el análisis los IO son los siguientes (tabla 8).

Tabla 8. IO exponenciales inferidos en las resoluciones que tienen los cálculos adecuados para cada forma de pago.

Invariantes Operatorios vinculados a lo exponencial para esta tarea	**Frecuencia Relativa**
"El pago de cada día se obtiene multiplicando el día anterior por 2". "Para poder calcular la suma total hay que registrar el monto día por día". "El valor diario es diferente para cada día".	29/162
"Cada día obtengo el doble que el día anterior". "El valor diario es diferente para cada día".	4/162
Total	33/162

Este grupo de estudiantes resolvió la tarea con los cálculos adecuados para cada forma de pago. Por ejemplo, en la figura 8 se muestra la resolución del estudiante A32:20:1, quien multiplica los 100 pesos diarios por 30, que es la cantidad de días. Esta resolución evidencia la presencia de los invariantes operatorios adecuados para esta forma de pago (ver tabla 3). Mientras que para la forma de pago 1 calcula multiplicando recursivamente por dos, la cantidad de dinero del día anterior, treinta veces; y suma al final la cantidad de dinero diaria para los treinta días.

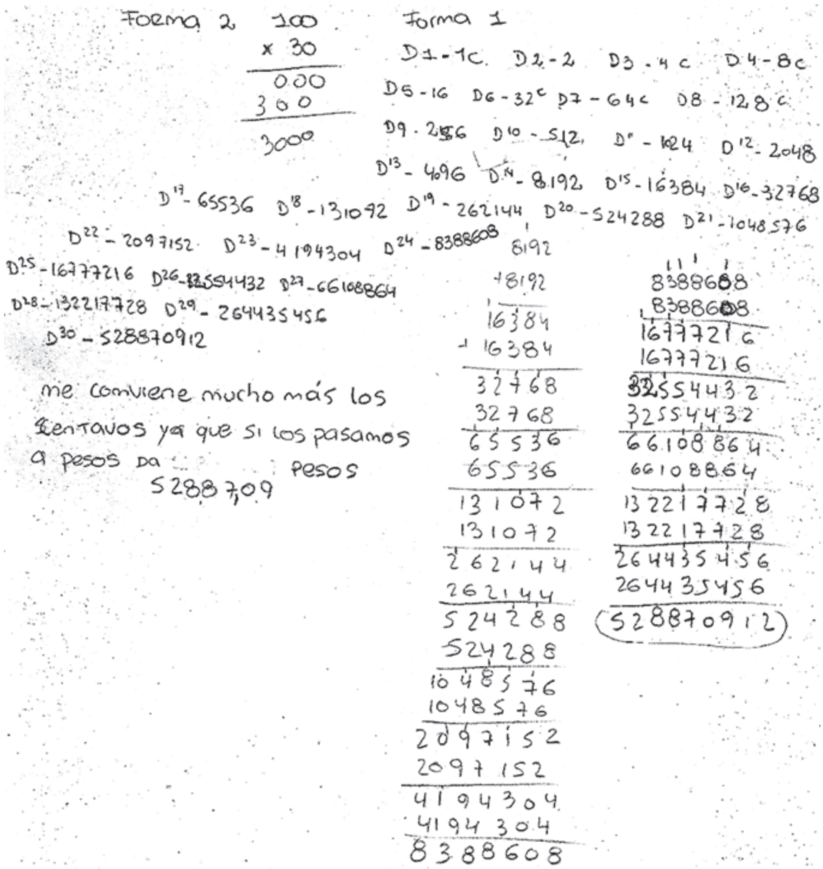


Figura 8. Cálculo exponencial de F1 y lineal de F2 por el estudiante A32:20:1.

Este tipo de solución la formularon 29 de los 33 estudiantes que resolvieron la tarea adecuadamente. De ellas fue posible inferir los invariantes operatorios de la primera fila de la tabla 9: “El pago de cada día se obtiene multiplicando el día anterior por 2”; “Para poder calcular la suma total hay que registrar el monto día por día”; “El valor diario es diferente para cada día”. Mientras que en la figura 9 se muestra una de las 4 soluciones de las que es posible inferir los IO de la segunda fila: “Cada día obtengo el doble que el día anterior”; “El valor diario es diferente para cada día”.

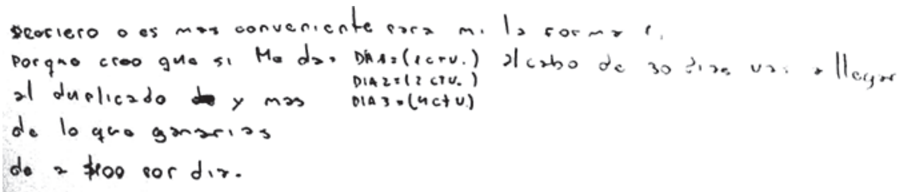


Figura 9. Cálculo exponencial de F1 y lineal de F2 por el estudiante A38:18:2.

Una diferencia importante entre los dos tipos de soluciones radica en el sistema de registración. Ya que, mientras para el primer grupo es importante registrar para poder llegar a la solución, para el segundo grupo, alcanza con darse cuenta de que el siguiente valor se obtiene duplicando el anterior, y que el resultado al final de los treinta días será grande, o al menos más grande que los 3000 pesos considerados en la forma de pago 2. En ambos casos es posible inferir que, de una u otra manera, los estudiantes llegan a la conclusión de que hay un momento en que el aumento de la cantidad de dinero crece abruptamente. Esto requiere contar con algún tipo germinal de invariante operatorio exponencial. Así, estas 33 soluciones muestran evidencias de la coexistencia de invariantes operatorios lineales, no lineales y exponenciales.

6. DISCUSIÓN

Los resultados del análisis de las 162 respuestas, pertenecientes a estudiantes de tres escuelas secundarias de adultos, muestran que en solo 23 de ellas se encuentran indicios de algún tipo de invariante operatorio no lineal o exponencial. Este número es muy bajo si se tiene en cuenta que la situación propuesta para generar numéricamente la variación exponencial, requiere realizar un cálculo de multiplicación recursiva y registrar. Es decir, en términos de conceptualización del campo exponencial es una situación elemental, aunque en términos culturales sea el producto de una extendida génesis conceptual. La contracara de este magro resultado, es que en la mayoría de las soluciones (128/162) no fue posible inferir invariantes operatorios exponenciales. Estas respuestas tampoco muestran estrategias para resolver la tarea mediante el cálculo, registro y ordenamiento de las cantidades diarias de cobros, aun cuando por ser una tarea vinculada al cálculo de dinero, forma parte del campo de experiencia de los estudiantes adultos y sería esperable un desempeño mejor, que no ocurrió.

Si contamos la cantidad de soluciones exponenciales en cada uno de los tres años de la escuela de adultos (Primero, Segundo y Tercero), los resultados muestran que el año de escolarización no afecta la frecuencia relativa de las soluciones de los estudiantes (tabla 9). Esto es, no se advierte una mejora en la registración y el cálculo, relacionada con el tiempo que los estudiantes estuvieron expuestos a la escolarización.

Tabla 9. cantidad de respuestas exponenciales según el año que cursa.

Año de la escuela secundaria de adultos	Cantidad de estudiantes por año	Cantidad de soluciones exponenciales	Frecuencia relativa de soluciones exponenciales por año
primero	61	6	$\frac{6}{61} = 0{,}1$
segundo	70	22	$\frac{22}{70} = 0{,}3$
tercero	31	5	$\frac{5}{31} = 0{,}2$
Total	162	33	

Esto permite discutir el papel de la escuela en las prácticas de cálculo y registración: ¿Por qué será que los estudiantes no poseen dichas técnicas? ¿Esta ausencia es imputable a ellos o es un problema didáctico? Al parecer, el tipo de situaciones que los estudiantes adultos enfrentan en la escuela no requiere la escritura numérica ni algebraica ni una respuesta elaborada y no inmediata. Por otro lado, a los estudiantes adultos el cálculo mental les resulta eficaz en la vida cotidiana o bien no perciben su insuficiencia cuando tienen que decidir sobre situaciones de comprar un bien en cuotas o tomar un préstamo. Por todo lo expuesto, sin escritura matemática parece casi imposible que se conceptualice el campo exponencial.

Sin embargo, dicha conceptualización no se agota con saber registrar para desarrollar conceptos del campo exponencial, es decir es necesario que la enseñanza formule ciertas preguntas en situación, por ejemplo: ¿cuánto cobrarías si abandonas el trabajo el día 18 en la opción 1 y en la dos? O también ¿qué sucede si restas el dinero correspondiente a períodos consecutivos?

Por otra parte, si contamos la cantidad de respuestas exponenciales según un cierto rango etario, los resultados muestran que la frecuencia relativa de las soluciones exponenciales no se ve afectada (tabla 10), confirmando lo que se viene discutiendo.

Tabla 10. cantidad de respuestas exponenciales según la edad.

Edad	Cantidad de estudiantes	Cantidad de soluciones exponenciales	Frecuencia relativa de soluciones exponenciales por edad
18 − 25 años	97	25	$\frac{25}{97} = 0{,}3$
26 − 49 años	55	6	$\frac{6}{55} = 0{,}2$
50 − 67 años	10	2	$\frac{2}{10} = 0{,}2$
Total	162	33	

CONCLUSIONES

Respecto al objetivo de este trabajo que es identificar qué invariantes operatorios utilizan estudiantes adultos en la acción, al resolver tareas que requieren de invariantes operatorios (IO) exponenciales: los resultados muestran que solo 33 de los 162 estudiantes adultos dieron una respuesta de la cual se podían inferir los invariantes operatorios exponenciales necesarios para resolver este problema. Este número representa solo el 20 por ciento del total. A su vez esto último es independiente del año de escolarización y de la edad. Por otra parte, el trabajo muestra que 128 estudiantes, de los 162, trataron el problema con técnicas de las cuales se pueden inferir teoremas en acto lineales. Esto es, ellos están suponiendo que el aumento se da de una forma constante, como sería por ejemplo, 2, 4, 6, 8, 10, 12,..., etc.; cuando en realidad el aumento tiene una forma exponencial: 2, 4, 8, 16, 32, 64,..., etc. Esta cantidad de estudiantes, 128, representa el 80 por ciento de total. Es decir, el 80 por ciento de estos adultos trató un problema que requiere invariantes operatorios exponenciales, con invariantes operatorios inadecuados. Y dado que este porcentaje es el resultado de llevar la misma tarea a 28 cursos de tres escuelas de enseñanza secundaria para adultos, de una ciudad del centro de la provincia de Buenos Aires, es posible inferir que la experiencia de vida, que uno puede vincular a la edad, no los prepara mejor para resolver este tipo de variaciones. Aun cuando la vida presenta algunas oportunidades para tratar con ellas (y que ya citamos en la introducción). Estos resultados, aunque modestos son pioneros es esta problemática, y permiten concluir que lo exponencial es una variación de difícil conceptualización que requiere más que las situaciones que presentan algunas experiencias de la vida. La conceptualización de lo exponencial requiere de una enseñanza escolar específica que en principio permita comprender su variación numérica.

REFERENCIAS

De Bock, D., L.Verschaffel y D. Janssens (1998). The Predominance of the Linear Model in Secondary School Pupils' Solutions of Word Problems Involving Length and Area of Similar Plane Figures. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(1), 65-83.

De Bock, D., L.Verschaffel y D. Janssens (2002). Improper Use of Linear Reasoning: An in-Depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(3), 311-334.

de Bock, D., W. van Doorem, D. Janssens y L. Verschaffel (2002). The Effects of Different Problem Presentations and Formulations on the Illusion of Linearity in Secondary School Students. *Mathematical Thinking and Learning, 4*(1), 65-89.

Confrey, J. y E. Smith (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 135-164.

Karrer, M. y S. Magina (2000). Uma sequencia de ensino para a introdução de logaritmo: estudo exploratório usando a calculadora. *Boletim de Educação Matemática, 13*(14), 18-31.

Ledezma, C. (2017). *Estudio de la Modelación con Función Exponencial para Estudiantes de Segundo Año Medio, según el Modelo de Blomhøj y Højgaard*. Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Facultad de Ciencias, Instituto de Matemáticas. Chile. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-2500/UCC2618_01.pdf

Otero M. R.; Fanaro M.; Sureda P.; Llanos C.; Arlego M., (2014). *La Teoría de los Campos Conceptuales y la Conceptualización en el aula de Matemática y Física*. Editorial Dunken.

Sureda, P., y Otero, M. R. (2019). Construcción de la Función Exponencial a partir de la Potenciación. *Revista SIGMA*, *15*(1), 1–15. https://revistas.udenar.edu.co/index.php/rsigma/article/view/4903

Sureda P. y Otero M. R. (2015). Solving Exponential Situations and Conceptualization. *Educação Matemática Pesquisa, 17*(2), 5-28. São Paulo. Brasil. http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/19322/pdf

Sureda, P. y Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Revista Educación Matemática, 25*(2), 89-118. https://www.redalyc.org/pdf/405/40528961005.pdf

Sureda, P., y Otero, M. R. (2011). Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *6*(1),1-14. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273319419011

Villarreal, M. E., Esteley, C. B., y Alagia, H. R. (2005). As produções matemáticas de estudantes universitários ao estender modelos lineares a contextos não-lineares, *Bolema - Boletim de Educação Matemática, 23*(18), 23-40.

Vergnaud, G. (2013a). Conceptual Development and Learning. *Qurriculum, 26*, 39-59.

Vergnaud, G. (2013b). Pourquoi la théorie des champs conceptuels ? *Infancia y Aprendizaje*, *36*(2), 131-161.

Vergnaud, G. (2011). La pensée est un geste Comment analyser la forme opératoire de la connaissance. *Enfance, 01*, 37–48.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*, 83-94. https://doi.org/10.1159/000202727

Vergnaud, G. (2007a). ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? *Investigações em Ensino de Ciências*, *12*(2), 285-302.

Vergnaud, G. (2007b). Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. En *Actas Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática*. Tandil.

Vergnaud, G. (1990). La Teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10*(2), 133-170.

Weber, K. (2002) Students' understanding of exponential and logarithmic functions. En D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant Y K. Nooney (eds.), *Proceedings of the 24th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Autor de correspondencia

Patricia Sureda

Dirección: Núcleo de Investigación en Educación Matemática (NIEM), Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), Pinto 399, Tandil. C.P: 7000. Buenos Aires, Argentina.
psureda@niem.exa.unicen.edu.ar