



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Departament de Matemàtica Aplicada

Títol: Modelos flexibles para la valoración de la eficiencia

Memoria presentada por: M.^a Leonor Pla Ferrando

Directora: Dra. Trinidad Casasús Estellés

Julio 2013

Para: Jorge, Pablo y Jordi

AGRADECIMIENTOS

A Juan Carlos por su amistad, confianza, paciencia, asesoramiento, por su buen hacer y por haberme puesto en contacto con Trini y Vicente.

Gracias a los tres, con vuestros consejos, orientaciones, apoyo y ánimo, ha sido posible realizar este trabajo; me habéis mostrado una forma de ver las matemáticas y disfrutar trabajando.

A mis amigos que durante estos años se han interesado por mi trabajo, y a los compañeros de la unidad departamental y de la EPSA, que me han animado.

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia a través del proyecto de investigación TIN2008-06872-C04-02.

Resumen

El objetivo en esta Memoria ha sido el análisis de eficiencia de un determinado sector empresarial, teniendo en cuenta dos problemas casi siempre presentes, y de naturaleza muy diferente, por una parte, que los datos que se manejan pueden ser imprecisos y, por tanto, afectar al resultado de cualquier estudio de eficiencia y, por otra parte, el deseo de ordenar las empresas (Unidades De Toma de Decisión) atendiendo a la medición de su eficiencia.

Para la medición de la eficiencia se ha recurrido a la metodología no paramétrica del Análisis Envolvente de datos (DEA) aplicandola a empresas del sector textil muy cercanas a nosotros. Ahora bien, dado que consideramos que siempre existe alguna incertidumbre o un posible error en la medición de algunos datos (inputs y outputs), introducimos la limitación de la certeza con el tratamiento fuzzy de los datos, métodos que no requieren conocer ni aplicar hipótesis sobre distribuciones de probabilidad de esos datos, que dicho sea de paso, podría no ser factible bajo determinados supuestos de incertidumbre.

Pero además de la medir la eficiencia pretendemos proporcionar más información que la mera separación dicotómica entre empresas eficientes o no eficientes. Para ello desarrollamos y aplicamos los modelos de super-efficiency-fuzzy y cross-efficiency-fuzzy, que nos permiten establecer una ordenación bajo incertidumbre.

Con este trabajo hemos realizado un estudio amplio de la eficiencia bajo incertidumbre. Se observa que los resultados obtenidos aplicando los distintos métodos son similares. Además, estos métodos proporcionan más información sobre las unidades estudiadas que las que proporciona un solo índice de eficiencia. Estos métodos pueden ser aplicables a otros tipos de empresas, aportando nueva información que puede ayudar u orientar en la toma de decisiones de sus gestores.

Abstract

The aim of this work has been to analyse the efficiency of a particular business sector, this is, the textile sector in the Alcoià and zone. In this analysis we have specifically taken into account two problems always present, and very different in nature, one from the other. On one hand, the data handled can be imprecise and, therefore, affect the outcome of any study of efficiency. On the other hand, our goal is to organise companies (Decision-Making Units) according to their efficiency scores.

We have applied the Data Envelopment Analysis, a non parametric methodology, for the study of the efficiency of those textile companies, a zone located very close to us. However, since we believe that there is some uncertainty or a possible error in the measurement of some data (input and output), we have dealt the limitation of certainty with the treatment as fuzzy data, method that does not require you to know or apply assumptions about probability distribution of these data, which incidentally, might not be feasible under certain assumptions of uncertainty.

Our goal is not just to measure the efficiency, we also intend to provide more information rather than the separation between efficient companies and not efficient. To do this we develop and apply models of super-efficiency-fuzzy and cross-efficiency-fuzzy, which allow us better differentiate and give a certain order among the firms, taking into account the implicit uncertainty.

With this work, we have conducted a comprehensive study of the efficiency under uncertainty. The results obtained by applying the different methods are similar but, in addition, these methods provide more information about the studied units than the one provided with the single index of efficiency. These methods can be applicable to other types of companies, providing new information that can help in the manager's decision-making.

Resum

L'objectiu d'aquesta Memòria ha sigut l'anàlisi d'eficiència d'un determinat sector empresarial, tenint en compte dos problemes quasi sempre presents, i de naturalesa molt diferent, d'una banda, que les dades que utilitzades poden ser imprecises i, per tant, afectar el resultat de qualsevol estudi d'eficiència i, d'altra banda, el desig d'ordenar les empreses (Unitats de Presa de Decisió) atenent al mesurament de la seua eficiència.

Per al mesurament de l'eficiència s'ha recorregut a la metodologia no paramètrica de l'Anàlisi Envoltant de Dades (DEA) aplicant-la a empreses del sector tèxtil del nostre entorn. Ara bé, atés que considerem que sempre hi ha alguna incertesa o un possible error en el mesurament d'algunes dades (inputs i outputs), introduïm la limitació de la certesa amb el tractament fuzzy de les dades, mètodes que no requereixen conèixer ni aplicar hipòtesi vers distribucions de probabilitat d'eixes dades, que a més a més, podria no ser factible davall determinats supòsits d'incertesa.

Però a més de mesurar l'eficiència pretenem proporcionar més informació que la mera separació dicotòmica entre empreses eficients o no eficients. Per a això desenrotllem i apliquem els models de super-efficiency-fuzzy i cross-efficiency-fuzzy, que ens permeten establir una ordenació baix incertesa.

Amb este treball hem realitzat un estudi ampli de l'eficiència baix incertesa. S'observa que els resultats obtinguts aplicant els distints mètodes són semblants. A més, aquests mètodes proporcionen més informació vers les unitats estudiades que les que proporciona un sol índex d'eficiència. Aquests mètodes poden ser aplicables a altres tipus d'empreses, aportant nova informació que pot ajudar i orientar en la presa de decisions dels seus gestors.

Índice

1. INTRODUCCIÓN	1
2. REVISIÓN DE TÉCNICAS DE MEDICIÓN DE LA EFICIENCIA	7
2.1 Entorno económico. Conceptos Microeconómicos.	7
2.1.1 Ámbito.....	7
2.1.2 Características de las empresas y procesos textiles.....	9
2.1.3 Escasez y elección. La curva de posibilidades de producción	14
2.1.4 La función de producción.....	18
2.1.5 La función de utilidad. Representación de las preferencias.	23
2.2 Definición de eficiencia.....	24
2.3 Medición de la eficiencia.....	26
2.4 Descripción de modelos de estimación de la eficiencia.....	30
2.5 Planteamiento de nuestro problema.....	36
3. MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS. ANÁLISIS ENVOLVENTE DE DATOS	37
3.1 Introducción.....	37
3.2 Fundamentos.....	38
3.3 Modelos	41
3.3.1 MODELO CCR.....	41
3.3.2 Ampliación rendimientos de escala: Modelo DEA BCC	49
4. DEA EN LA INCERTIDUMBRE	53
4.1 Introducción.....	53
4.2 Teoría conjuntos fuzzy	55
4.2.1 Ordenación de números fuzzy.....	61

4.3 Modelos DEA fuzzy	66
4.3.1 Modelo DEA fuzzy. Enfoque basado en α -cortes.....	68
4.3.2 Modelo DEA fuzzy. Enfoque clasificación fuzzy	72
5. APLICACIONES DEA FUZZY	79
5.1 Introducción.....	79
5.2 Clasificación de las DMUs	81
5.3 Super-efficiency DEA	85
5.4 Cross-efficiency DEA.....	88
5.5 Modelo cross-efficiency fuzzy basado en el modelo de Kao y Liu.....	93
6. CASO EMPRESAS TEXTILES Y RESULTADOS	101
6.1 Descripción.....	101
6.2 Aplicación de los modelos DEA a las empresas del sector textil	104
6.2.1 Modelo DEA CCR dual orientación input	104
6.2.2 Modelo DEA fuzzy	107
6.2.3 Modelo DEA Super-efficiency-fuzzy.....	113
6.2.4 Modelo DEA cross-efficiency.....	116
6.2.5 Modelo cross-efficiency fuzzy	119
CONCLUSIONES	131
PROBLEMAS ABIERTOS Y FUTURAS INVESTIGACIONES	135
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	139
APÉNDICES.....	153

Capítulo 1

Introducción

La evaluación de la eficiencia ha adquirido en los últimos años un gran interés en el ámbito empresarial, entendiéndose por eficiencia el uso más adecuado de los recursos disponibles para obtener la mayor cantidad de productos o beneficios posibles. En este sentido, la eficiencia está ligada al aprovechamiento óptimo de los recursos.

La competitividad de las empresas, entendida como que el coste final del producto coincida con la voluntad de pago del potencial cliente, si bien no es sinónimo de eficiencia, al menos ésta se erige en un determinante directo de su nivel de competitividad (Coll et al.2007), en un elemento de especial importancia para el análisis del posicionamiento competitivo de las empresas, así como en un método que fija de modo esencial sus estrategias (Duch 2006).

La utilización eficiente de los recursos productivos representa una estrategia que permite a la empresa mejorar su rentabilidad. Así pues, no cabe separar completamente la eficiencia y el conjunto de acciones posibles para ser competitivos; al contrario, su presencia facilita la competitividad y, por ello, la existencia de competidores induce a la búsqueda de la eficiencia (Porter 1990), aunque también es cierto que la eficiencia no agota el conjunto de estrategias para el logro de la competitividad.

Entre los métodos más utilizados para la medición de la eficiencia se encuentra el Análisis Envolvente de Datos (DEA), que surge como una extensión del tra-

bajo de Farrell (1957) que proporciona una medida satisfactoria de la eficiencia productiva. La metodología DEA se ha conformado como una importante herramienta de análisis en el estudio de la eficiencia y un elevado número de extensiones y mejoras de la metodología inicial han incrementado notablemente la flexibilidad para tratar una amplia variedad de problemas.

Las técnicas tradicionales de análisis de eficiencia asumen que los planes de producción se conocen con precisión y se desarrollan bajo la hipótesis de que los valores de los inputs y los outputs son determinados con certeza. Sin embargo en el mundo real muchos procesos de producción involucran a menudo inputs y outputs que son muy difíciles de medir de una forma precisa, lo que sugiere que la disponibilidad de una metodología que permita el tratamiento de datos imprecisos podría resultar de gran utilidad. El tratamiento de la incertidumbre en los modelos DEA puede hacerse desde planteamientos estocásticos o bien desde planteamientos fuzzy (Kao y Liu 2000, Guo y Tanaka 2001). El planteamiento estocástico (Olesen 1995) requiere conocer o suponer y justificar alguna distribución de probabilidad sobre el error cometido en los datos o las ineficiencias. El planteamiento fuzzy es el que abordamos en nuestro trabajo porque no requiere ninguno de estos condicionamientos y la metodología es fácilmente ampliable a diferentes y variadas situaciones reales. Pensamos que puede ser de gran utilidad práctica. Sin embargo, rara vez se tiene en cuenta que, para tomar decisiones, puede no ser suficiente conocer simplemente si la empresa usa los recursos de manera más eficiente, por ello nos proponemos además establecer una clasificación de las empresas a partir de la ordenación fuzzy de sus eficiencias que puede utilizarse como una primera aproximación al estudio de la competitividad relativa entre ellas.

En este trabajo consideraremos un conjunto de empresas del sector textil de las que queremos determinar su eficiencia. Partimos de inputs y outputs críspos y aplicaremos el modelo desarrollado por Charnes Cooper y Rhodes (1978). Teniendo en cuenta que al analizar la eficiencia nos encontramos con problemas de naturaleza diferente como:

- imprecisión en los datos,
- imprecisión en el concepto de eficiencia,
- pretender ordenar las unidades de toma de decisión a partir de un índice fuzzy,

trabajaremos con modelos fuzzy, siendo nuestro objetivo poner de manifiesto que los nuevos métodos ofrecen, sin duda, una visión más completa de la valoración y clasificación de las DMUs bajo incertidumbre y pueden ser útiles para los departamentos de gestión y dirección de las empresas.

Comenzamos en el capítulo segundo, *Revisión de técnicas de medición de la eficiencia*, situando el entorno económico. Empezamos describiendo las características de las empresas y de los procesos textiles, pasando a continuación a introducir algunos conceptos microeconómicos necesarios para desarrollar la noción de eficiencia. Describiremos también formalmente la función de producción indicando los axiomas matemáticos que debe cumplir tales como continuidad, derivabilidad, convexidad entre otros. Centrado el entorno económico, pasamos a definir y diferenciar la eficiencia asignativa, la eficiencia de producción y la eficiencia técnica. Los métodos utilizados para medir la eficiencia se pueden clasificar atendiendo a un enfoque paramétrico, que supone conocer una forma funcional para la función de producción (ver trabajos Aigner et al. 1977, Meeusen et al. 1977, etc.), o siguiendo un enfoque no paramétrico en el que no se requiere conocer una función de producción que la describa, y las estimaciones se obtienen a partir de técnicas de programación matemática (normalmente lineal) (ver trabajos iniciales de Charnes Cooper y Rhodes 1978, Banker, Charnes y Cooper 1984). En nuestro caso, el estudio para medir la eficiencia, se ha realizado siguiendo un enfoque no paramétrico, el análisis envolvente de datos (DEA), método en el que no necesitamos conocer la función de producción.

El tercer capítulo se dedica a describir el modelo DEA desarrollado por Charnes, Cooper y Rhodes (CCR de ahora en adelante). Empezando con los fundamentos en los que se basa el Análisis Envolvente de Datos se exponen a continuación el modelo DEA CCR en su forma fraccional, dada la complejidad en la resolución los mismo autores desarrollan la forma lineal y posteriormente los problemas duales asociados. Si en el análisis se busca incrementar la productividad, una orientación output parecería adecuada. Si en cambio el interés es la reducción de coste es más coherente utilizar una orientación input. Cada uno de esos planteamientos se corresponde con un problema matemático diferente.

La descripción completa de un sistema real requerirá seguro más detalle y, por tanto, más variables de las que cualquier humano podría reconocer, procesar y

comprender simultáneamente y no sólo por el elevado número que requeriría sino por la precisión en la medición de esas variables.

En los últimos años han aparecido algunos modelos que permiten calcular la eficiencia teniendo en cuenta la incertidumbre. Estos modelos utilizan o bien técnicas probabilísticas o bien técnicas fuzzy. Consideramos que los números fuzzy son muy adecuados para introducir la incertidumbre en los modelos DEA.

Dedicamos el capítulo 4, *DEA en la Incertidumbre*, a algunos modelos que permiten calcular la eficiencia teniendo en cuenta la incertidumbre. Para ello en primer lugar se introduce con rigor algunos conceptos de la teoría fuzzy. Desarrollamos a continuación la ordenación de números fuzzy, definiendo la relación de orden fuzzy-max y la relación de orden h-posibilístico, finalizando esta sección con un resumen de los diferentes modelos DEA fuzzy, describiendo en concreto dos modelos basados en sendos enfoques diferentes, el enfoque basado en α -cortes a partir del modelo propuesto por Kao y Liu (2000) y el enfoque de clasificación fuzzy a partir del modelo propuesto por León, Liern, Ruíz y Sirvent (2003).

En todo momento nuestro objetivo es la ordenación de unidades eficientes bajo incertidumbre, esto nos lleva a plantearnos diferentes aplicaciones que se desarrollan en el capítulo 5, *Aplicaciones fuzzy*. Tras una revisión de los procedimientos de clasificación de unidades eficientes que existen en la literatura (Adler 2002), observamos que la mayoría de los procedimientos lo hacen desde un planteamiento crisp, y si bien hay trabajos de ordenación con números fuzzy, en el caso particular de la cross-efficiency existe muy poco. Nuestra propuesta es realizar clasificaciones de DMUs eficientes partiendo de inputs y outputs fuzzy, de este modo introducimos la incertidumbre en el estudio. Centramos nuestro trabajo en tres aplicaciones, que se usan como segunda etapa, una vez obtenidos los índices de eficiencia al aplicar el modelo DEA CCR con orientación input o el modelo DEA CCR fuzzy. Una primera aplicación es ordenar las DMUs a partir de los resultados de eficiencia fuzzy obtenida al utilizar el modelo DEA- fuzzy basados en α -cortes. Dado que ordenar las DMUs implicará ordenar los números fuzzy, exponemos algunos métodos de ordenación de números fuzzy que posteriormente utilizaremos. Una segunda propuesta de clasificación es la utilización del modelo de super-efficiency fuzzy, realizando posteriormente la ordenación de los números fuzzy.

Como tercera opción, mucho más novedosa, introducimos el desarrollo del modelo cross efficiency y el de cross-efficiency fuzzy. Teniendo en cuenta que el modelo de cross efficiency trabaja con el DEA lineal, adaptamos el modelo de cross-efficiency fuzzy a partir del modelo fuzzy de Kao y Liu y comparamos ambos. Con estas tres propuestas, presentamos tres aplicaciones diferentes del DEA fuzzy.

Una vez desarrollados los modelos DEA fuzzy, el capítulo 6 se dedica a la aplicación numérica. Después de describir las empresas textiles situadas en L'Alcoia y el Comtat, pasamos a referir las variables (inputs y outputs) que se han considerado y que creemos que representan apropiadamente la actividad productiva de las empresas. A continuación implementamos cada uno de los modelos DEA, descritos en los capítulos anteriores y analizamos los resultados obtenidos. Usamos para ello el programa GAMS (General Algebraic Modeling Sistem), software desarrollado por A. Brooke, D. Kendrick y A. Meeraus.

Finalizamos la memoria con las conclusiones obtenidas. Con este trabajo se ha mostrado una visión muy extensa y bastante completa de la valoración y clasificación de las DMUs bajo incertidumbre que puede ser muy útil para los departamentos de gestión y dirección de las empresas textiles, pero también de otro tipo de empresas puesto que la incertidumbre es inherente al mundo empresarial y cada vez es más difícil tener datos apropiados para aplicar otras metodologías.

Capítulo 2

Revisión de técnicas de medición de la eficiencia

2.1 Entorno económico. Conceptos Microeconómicos.

En primer lugar situamos el sector industrial sobre el cual trabajaremos. Pasando a continuación a introducir y recordar sucintamente algunos conceptos microeconómicos, a fin de situar el entorno económico considerado a lo largo del trabajo y que se perfila como necesario para establecer la base y los conceptos matemáticos adecuados para su desarrollo y mejoras posteriores.

2.1.1 **Ámbito**

El sector textil-confección, (GV 2008) como sector englobado en los llamados “tradicionales” se caracteriza por ser una actividad de demanda débil, con un bajo nivel de intensidad tecnológica. Esta demanda débil se explica, precisamente, porque en este tipo de actividades, el esfuerzo tecnológico realizado por las empresas se relaciona de forma directa con las posibilidades de expansión de sus mercados.

Otra característica tradicional en la estructura y funcionamiento productivo de este sector es la preeminencia de pequeñas y mediana empresas (PYMEs) especia-

lizadas, que presentan una clara tendencia a la concentración geográfica, buscando economías externas y de alcance.

Numerosos trabajos confirman que cuestiones como la historia industrial del territorio, el tamaño del mercado local y la difusión del conocimiento explican este tipo de aglomeraciones (Callejón y Costa, 1995 y 1996 y Rodríguez, 2000), presentes tanto en el caso de España (Cataluña y Comunidad Valenciana, principalmente) como en la mayoría de países europeos (Lombardía y Toscana en Italia, Nord Pas de Calais en Francia, Nottinghamshire en Inglaterra, etc.).

En el caso europeo, la pequeña dimensión empresarial ha llevado a la tendencia a la concentración territorial de actividades altamente especializadas en distintas fases del proceso productivo que, de esta forma, aprovechan las economías externas de escala y las derivadas de la acción conjunta, propiciando la aparición de lo que la literatura ha llamado distritos industriales (Becattini, 1989) y *clusters* (Porter, 1990). Las empresas ubicadas en estos clusters comparten, utilizan y contribuyen a una base territorial común de capacidades técnicas, conocimientos y de habilidades, poniendo sus excesos de capacidad productiva a disposición de las demás y controlando, implícita y explícitamente, la calidad del conjunto, conservando una flexibilidad, una velocidad de respuesta y un grado de motivación que empresas mayores y más importantes encuentran difícil de emular (Becattini, 1989). Además, en estos clusters se suele dar una fuerte concentración de servicios avanzados de apoyo, tanto públicos como privados (institutos tecnológicos, centros de formación, universidades, servicios de consultoría avanzada, asociaciones empresariales, etc.) que actúan incrementando las ventajas competitivas del territorio y, por ende, de las empresas ubicadas en él.

En las últimas décadas la producción textil ha estado presente como motor del desarrollo industrial en muchas de las zonas más avanzadas de Europa (Cervera 2001). Es el caso de Cataluña (Vallès, Maresme, Anoia), áreas del norte de Italia (Biella, Veneto) y centro (Prato, Carpi), sur-oeste de Bélgica, norte de Francia (Nord Pas de Calais), centro de Inglaterra (Nottingham), etc.

Algunas de estas zonas han atravesado o están atravesando crisis profundas por la falta de capacidad de adaptación a un contexto mundial ante el cual no es fácil mantener una industria textil competitiva en Europa. Sin embargo, algunas áreas han conseguido mantenerse fuertes gracias al dinamismo, inversión, especialización e innovación que las ha caracterizado.

Este es el caso del principal foco textil de la Comunidad Valenciana, siendo el textil una de las artes más arraigadas y antiguas de la Comunidad Valenciana, con una herencia de muchos siglos, en los valles de las comarcas centrales de L'Alcoià y El Comtat en la provincia de Alicante y La Vall d'Albaida en la provincia de Valencia. Esta concentración se localiza principalmente en las siguientes poblaciones y sus polígonos industriales: Alcoi, Ontinyent, Muro d'Alcoi, Cocentaina, Banyeres de Mariola, Bocairent, Albaida, Aiello de Malferit, Agullent y Alfafara.

En esta zona se ha consolidado un entramado de empresas, competitivo y muy activo, especializado en la producción de textiles para el hogar.

2.1.2 Características de las empresas y procesos textiles

Los procesos de transformación textil tienen como finalidad la fabricación y acabados de textiles.

Las tres principales operaciones que lo conforman son: la hilatura, el tisaje o tejeduría y los acabados.

Por lo que respecta al proceso de hilatura, éste tiene por objeto convertir en hilo, por diferentes técnicas de separación, desintegración y tratamiento químico, las distintas fibras textiles que serán aportadas como materia prima en forma de borra, floca, etc. Los tipos de hilatura más representativas de esta industria son las de algodón y lana, las de desperdicios y regenerados y las de fibras duras, en las que se obtiene un hilo para un mercado distinto al de las fibras textiles como pueden ser las cuerdas, sacos y arpilleras.

El grado de automatización de este proceso es relativamente elevado, centrándose la mayor parte de sus innovaciones en el refinamiento o mejora de la tecnología de medición y regulación, así como en sistemas informáticos para la planificación, el control y supervisión de la producción. La razón preferente de la introducción de estas innovaciones busca la reducción de costes a través de incrementos de la productividad, así como la mejora de la flexibilidad productiva, junto con el incremento de la calidad del producto terminado (Cotec, 2004).

Una de las principales limitaciones que presenta esta actividad es que, en un momento en el que la industria de la mayor parte de países desarrollados está intentando diversificar su producto hacia los textiles técnicos, su papel para este tipo de

procesos es muy residual, puesto que la mayor parte de las innovaciones se producen en las fibras y en los procesos de acabado.

El proceso de tisaje o de fabricación del tejido comprende todas las operaciones necesarias para la elaboración de tejidos, partiendo del hilo procedente de la fase anterior. Hasta los años 50, la principal técnica de obtención de tejidos era el telar, por medio del entrecruzamiento de los hilos procedentes de un plegador (urdimbre) y otros hilos, que van siendo dispuestos, mediante un dispositivo especial, perpendicularmente a los anteriores (trama). En la actualidad, este tipo de tejidos, conocidos como tejidos de calada, presenta estructuras más complejas como son las telas múltiples (compuestas por diversas telas simples que van uniéndose entre sí, que son, y que se emplean principalmente en tapicería), tubulares (para sacos, mangueras, cintas transportadoras, estropajos, esponjas, compresas...), multiaxiales y otros tipos de estructuras multidireccionales, que buscan la resistencia de los tejidos en todas las direcciones.

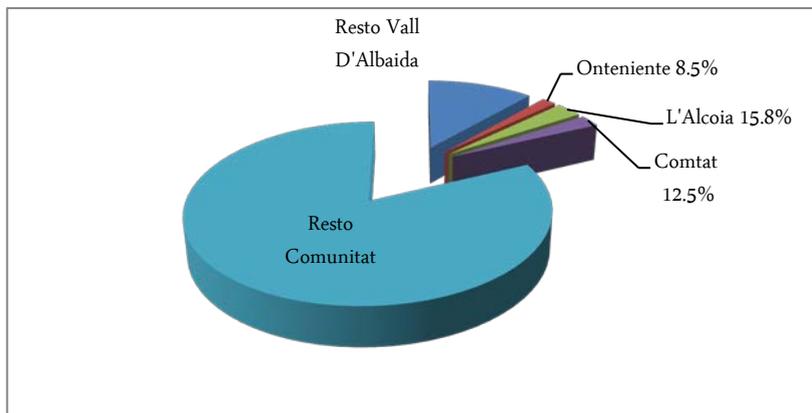
Los procesos de acabado, genéricamente denominado de “tintes, aprestos y acabados”, comprenden un conjunto de operaciones físicas, químicas y mecánicas, que se efectúan en los tejidos con el objeto de eliminar defectos, mejorar sus propiedades y cambiar su aspecto exterior. Aunque se encuadra en el segmento intermedio del proceso manufacturero textil, interviene en las distintas fases del mismo, tanto en la cabecera de las fibras, como en hilatura y/o tejeduría, y en la prenda confeccionada. Entre ellos se pueden distinguir:

- Tratamientos previos: Son el conjunto de operaciones que se realizan sobre las materias textiles antes de la tintura o la estampación, para eliminar las impurezas que las acompañan para evitar tinturas o estampaciones desiguales. Estos tratamientos previos son distintos según el tipo de fibra que se trate, la forma en que se encuentre (floc, hilo o tejido) y las impurezas que contenga.
- Tintura: La tintura tiene por objeto dar color a los productos textiles. Es un conjunto de fenómenos físico-químicos por los cuales un colorante en disolución o dispersión se acerca a la fibra, se deposita en su superficie (adsorción) penetra en su interior (absorción) y se fija, presentando cierta resistencia a salir al exterior. Cada fibra se tinte con un colorante específico.
- Estampación: Tiene por objeto colorear, con uno o varios colores, determinadas zonas de un tejido con un dibujo o motivo concreto.

- Aprestos y Acabados Convencionales: son el conjunto de operaciones que se efectúan sobre el tejido al objeto de mejorar su aspecto y propiedades finales. Entre los aprestos destacan los utilizados para evitar el encogimiento del tejido y la formación de arrugas. Entre los acabados, por su parte, los procesos más representativos son los siguientes:
- Calandrado: Tiene por objeto planchar y dar brillo al tejido.
- Perchado: Tiene por objeto producir una capa de pelo en la superficie del tejido, y se consigue con el arranque parcial de fibras de trama.
- Tundido: Se lleva a cabo para eliminar las fibras que sobresalen del tejido o igualar la altura del pelo que se obtiene en el perchado.
- Ensanchado: Se realiza para dar el ancho definitivo al tejido.
- Recubrimiento y Laminado de Tejidos: Este proceso de acabado es utilizado para dotar a los tejidos convencionales de propiedades técnicas elevadas para ser utilizados en diversos ámbitos de aplicación de los tejidos técnicos. Entre este tipo de procesos destacan la impermeabilización, la impregnación, el metalizado, la ignifugación, etc.

Respecto a la distribución de empresas por zonas de la Comunitat el 18 % de las empresas valencianas se ubican en la Vall d'Albaida, de las cuales el 8.5 %, está en Ontinyent, el 15.8 % se encuentran en L'Alcoia y, por último, en la comarca del Comtat se concentran el 12.5 %. Tal como se aprecia en la siguiente Figura.

Figura 1: Distribución de empresas en la Vall d'Albaida



La interrelación y concentración de los centenares de PYMEs valencianas permite hablar de un cluster, o distrito industrial, que concentra él solo en torno al 65 % de la producción española de textiles para el hogar.

En concreto el cluster del textil hogar de la Mariola abarca todas las fases necesarias para que el producto terminado llegue a manos del consumidor final. Esto incluye a todos los agentes que trabajan con y para los fabricantes de textil hogar (fabricantes de hilos, estampadores, tejedores, fabricantes de maquinaria, diseñadores, empresas de urdidos, transporte, comercialización, etc.).

Aunque la zona presenta algunas desventajas, como malas comunicaciones, orografía irregular, lejanía de los grandes polos de desarrollo industrial y urbano y está muy lejos de tener las características ideales para ser un polo industrial de elevado nivel en Europa, el cluster se ha desarrollado de forma espectacular. El espíritu emprendedor y la tradición textil han confluído para marcar una línea de crecimiento que no ha declinado con el tiempo, sino todo lo contrario.

La ventaja de este tipo de organizaciones espaciales (Alto Consejo GV 2008) radica en la puesta en común de los conocimientos y capacidades técnico-productivas presentes en el territorio, reduciendo la rigidez productiva existente, por ejemplo, en las grandes empresas. Esta flexibilidad dota de una capacidad de respuesta rápida a los cambios en el entorno. En este caso, además, la concentración de actividades y servicios, tanto públicos, como privados, en torno a estas zonas confiere una ventaja adicional al sector productivo, que se beneficia de su externalización y de la contención de costes que implica la ejecución de su demanda de forma conjunta. Así, a pesar de la existencia de un número muy elevado de empresas compitiendo en el mismo segmento de mercado de producto final, la formación de acuerdos tácitos y explícitos entre todos los eslabones de la cadena de valor, supone el aprovechamiento de la capacidad productiva conjunta del territorio.

También hay que destacar (Cervera 2001) que, en un radio de pocos kilómetros, todas las empresas encuentran el soporte necesario para poder llevar a cabo su operativa diaria. Existe una estructura de abastecimiento de productos y servicios que es satisfactoria a lo largo de toda la cadena textil, en ocasiones varias empresas contribuyen en etapas diferentes en la obtención del producto final.

Dada la reducida dimensión de la mayor parte de las empresas textiles valencianas resulta un factor crucial a la hora de explicar la debilidad de su posición competitiva actual. De hecho, podría decirse que la lógica de funcionamiento del distrito industrial, puede resultar muy efectiva en términos productivos, pero parece serlo menos de cara a promover modelos de organización empresarial eficientes.

La productividad de una empresa (Gumbau, M.1998), de un sector y, por tanto, de una industria depende, entre otros factores, del grado de eficiencia en el uso de los factores de producción. A pesar de su importancia, este aspecto del comportamiento de las empresas ha recibido escasa atención. Por tanto, es de sumo interés analizar y cuantificar los niveles de eficiencia así como las diferencias existentes inter e intrasectoriales.

En la literatura económica pueden encontrarse trabajos que han realizado estimaciones de la eficiencia productiva en empresas dedicadas a la fabricación utilizando técnicas de frontera entre los que cabe destacar los trabajos de Beeson y Husted (1989), Fecher y Perelman (1992) y Perelman (1995). Para el caso español, se han realizado estimaciones de la eficiencia a nivel de grandes sectores productivos en Prior (1990) en Gumbau, P.y Maudos, J. (1996), y Gumbau (1998), Coll ,V. et al., 2007, 2011 o mediante técnica no paramétricas utilizando el análisis envolvente de datos como los trabajos de Chandra, P. et al.1998, Esteban, L. et al.2002 y Coll ,V. et al.2009.

El conocimiento de las características técnicas (Arzubi A.2003), estructurales, sociales y económicas de las empresas será de interés por sí mismo. Pero, además, resulta importante realizar un diagnóstico por comparación entre empresas, para detectar dentro de ellas, cuáles son las que son más rentables, las más eficientes y/o se encuentran en mejores condiciones de subsistir a las crisis, aspecto de gran importancia en la situación económica actual.

Pasemos a continuación a introducir o recordar algunos conceptos microeconómicos, útiles para la posterior introducción del concepto de eficiencia, cuyo estudio es el principal objetivo de esta memoria.

2.1.3 Escasez y elección. La curva de posibilidades de producción

En un momento determinado del tiempo, la economía a nivel global o macroeconómico está situada en un estado estacionario caracterizado porque el sistema económico está descrito por las siguientes premisas (Segura, J. 1993):

- a) recursos y factores dados,
- b) tecnología dada y
- c) preferencias de los consumidores dadas,

y se desea establecer una asignación de recursos adecuada, para esa tecnología y las preferencias de los consumidores.

La asignación se realiza en el mercado para alcanzar el equilibrio (parcial o general) a través de la oferta y demanda.

Al hablar de producción estamos ilustrando los determinantes técnicos, aquellos que el empresario-productor debe elegir adecuadamente, no sólo desde el punto de vista físico o empresarial, sino también económico, es decir, precios de inputs y outputs o costes de producción que determinan la oferta. Esta oferta, junto a la demanda, establece la cantidad de producción y precio de equilibrio.

La teoría de la producción estudia los procesos de transformación de los inputs o factores de producción en outputs o productos finales.

A nivel microeconómico o para una industria concreta estamos situados igualmente en ese estado estacionario y, puesto que en él tenemos las premisas dadas, lo que deseamos es establecer la política empresarial adecuada.

Uno de los problemas más importantes, si no el que más, de la economía es la escasez. Los recursos económicos son limitados o escasos y nuestras necesidades materiales ilimitadas o insaciables.

Puesto que no se puede poseer todo lo que se desea, el problema de la escasez se transforma en otro problema diferente, el problema de la elección, que se puede explicar desde el punto de vista económico utilizando la llamada curva de posibilidades de producción (CPP) (Wonnacott, P. et al. 1992). Esta curva muestra la cantidad de bienes y servicios que se pueden producir a partir de los recursos disponibles (tierra, trabajo y capital). Y como estos recursos son limitados tan solo nos queda la libertad de elegir si queremos más trigo y menos maíz, más trabajadores y menos maquinaria, etc.

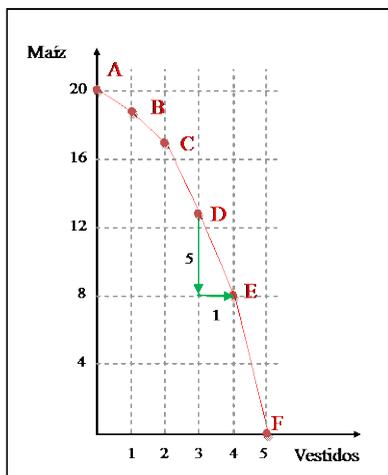
Para ilustrar este problema de elección descrito, Wonnacott, P. (1992) considera una economía básica en la que sólo se pueden producir dos bienes, vestidos de algodón y maíz. Las opciones de producción disponibles vienen dadas en la siguiente tabla en la que el coste de oportunidad de un producto no es más que la cantidad del otro bien que debe dejar de producirse para poder incrementar este producto en una unidad:

Tabla 1: Posibilidades de producción

Opciones	Vestidos (miles de millones de yardas)	Maíz (en millones de toneladas)	Coste de oportunidad (unidades de maíz que dejan de producirse para producir una unidad adicional de vestidos)
A	0	20	
B	1	19	1
C	2	17	2
D	3	13	4
E	4	8	5
F	5	0	8

Y la curva de posibilidades de producción asociada a la Tabla 1 viene dada en la Figura 2.

Figura 2: Curva de posibilidades de producción



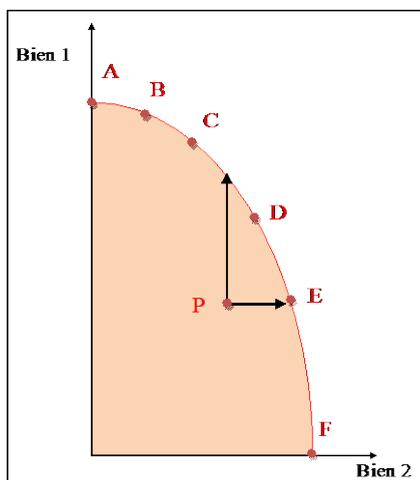
Imaginemos que estamos en la opción A. Sólo producimos un bien, maíz. Si queremos utilizar parte de la tierra para plantar algodón y confeccionar vestidos empezaremos por hacerlo en las mejores tierras para el algodón. Esto es reflejo del carácter especializado de nuestros recursos. Pero conforme deseemos producir más algodón tendremos que recurrir a utilizar tierras menos adecuadas para ese cultivo, por lo que el coste de oportunidad es creciente. Como resultado, la forma de la curva CPP es cóncava hacia el origen de coordenadas y decreciente.

En general, la curva CPP es más compleja pues se aplica a una gran cantidad de bienes, servicios y factores de producción.

La CPP es una curva frontera que muestra la cantidad máxima conjunta que puede producirse de bienes y servicios. Nosotros elegimos en qué punto de la misma queremos situarnos. Si lo alcanzamos, nuestra estructura productiva será eficiente.

Sin embargo, esta estructura productiva podría ser ineficiente, la producción real puede no ser la potencial desperdiciándose parte de nuestros recursos. Esta situación se presenta, por ejemplo, ante una situación de existencia de desempleo. Es lo que representamos en el punto P de la Figura 3:

Figura 3: Producción ineficiente

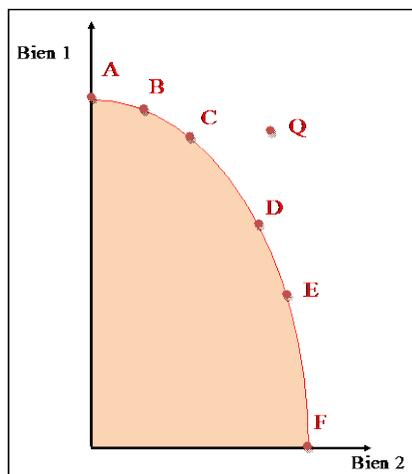


El área sombreada limitada por la CPP y los ejes muestra todas las opciones factibles o disponibles, sean o no las mejores. Pero tan solo las situadas sobre la curva CPP son eficientes porque desplazando P, bien horizontalmente hacia la derecha, bien verticalmente hacia arriba, alcanzamos una producción máxima sin coste de oportunidad.

Por tanto, la CPP muestra la escasez, la elección y el coste de oportunidad.

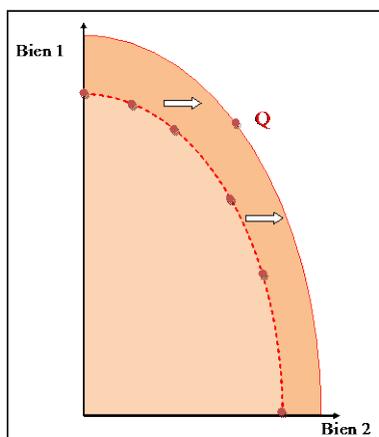
Por otra parte el punto Q representado en la Figura 4, significa una estructura productiva inalcanzable, no es posible obtener tal combinación de bienes, al menos por el momento y con la tecnología actual

Figura 4: Producción inalcanzable



La única manera de alcanzar dicho punto es con una mejora técnica, si bien no será nuestro caso a estudiar, y tan solo podría suceder con el paso del tiempo; en este ejemplo la mejora técnica podría estar determinada por un nuevo modelo de riego o un mejor fertilizante. De este modo se conseguiría que la curva CPP se desplace hacia fuera y alcance el punto Q, como se muestra en la siguiente Figura.

Figura 5: Mejora de la técnica



2.1.4 La función de producción

Pasamos ahora a la descripción formal del proceso de producción. La representación de la tecnología que expresamos a continuación se puede encontrar en Shephard (1970) y también una revisión en Banker (1984).

a) Representación de la tecnología.

Denotamos por $t = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_s)$ la $m+s$ -tupla cuyas componentes x_i , $i = 1, \dots, m$, denotan los factores o *inputs* y las componentes y_r , $r = 1, \dots, s$, los *outputs* o productos. El conjunto de estos puntos $T \subseteq \mathbb{R}^{m+s}$ representa todas las combinaciones posibles de productos y factores que se puede permitir la tecnología actual.

Este conjunto T requiere unos axiomas muy poco restrictivos:

Axioma 1. El conjunto $T \neq \emptyset$. Es decir, existe alguna actividad productiva.

Axioma 2. $T \subseteq \mathbb{R}^{m+s}$ es un conjunto cerrado. Es decir, si una sucesión de puntos de T , $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, tiene por límite el vector t_0 , éste debe pertenecer a la tecnología T , pues en otro caso no podríamos mejorar el sistema productivo.

Axioma 3. De eliminación o disponibilidad gratuita, que indica que si un vector de la tecnología es posible, cualquier otro con algún *output* menor y/o algún *input* mayor es posible también. Se expresa por:

$$\forall t \in T, \text{ si } t' \leq t \rightarrow t' \in T$$

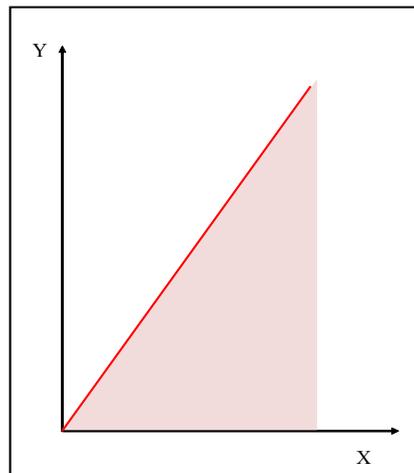
donde $t'(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, y'_1, y'_2, \dots, y'_s) \leq t(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_s)$

indica que $x'_i \geq x_i$, para $i = 1, \dots, m$, e $y'_h \leq y_h$, para $h = 1, \dots, s$.

Axioma 4. $T \subseteq (\mathbb{R}_+^{m+s} \cup \{0,0,\dots,0\})$, es decir, para producir cantidades positivas de outputs se requiere utilizar cantidades positivas de inputs si bien es posible no producir y no utilizar input.

Así para el caso de un único input y un único output la representación de la tecnología podría ser la de la Figura 6.

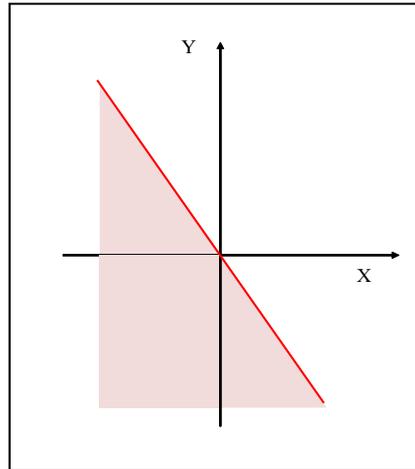
Figura 6: Representación de la tecnología



Para el caso de dos bienes, de modo que cada uno de ellos se utiliza para producir el otro y viceversa, la tecnología se describe de modo semejante, (Segura, J. 1993.), con la única salvedad de que el vector $t = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_s)$ se expresa con sus m primeras componentes negativas (consumo de inputs y las res-

tantes s positivas, producción de outputs). Si consideramos tan solo dos bienes los mismos axiomas conducen a una representación de la tecnología como la siguiente:

Figura 7: Representación de la tecnología caso de dos bienes



Los siguientes axiomas tienen que ver con la escala de la tecnología.

Axioma 5. Aditividad: $\forall t, t' \in T \rightarrow t + t' \in T$.

Axioma 6. Divisibilidad: $\forall t \in T \rightarrow \lambda t \in T$, con $\lambda \in [0, 1]$.

Axioma 7. Convexidad: $\forall t, t' \in T \rightarrow \lambda t + (1 - \lambda)t' \in T$, con $\lambda \in [0, 1]$

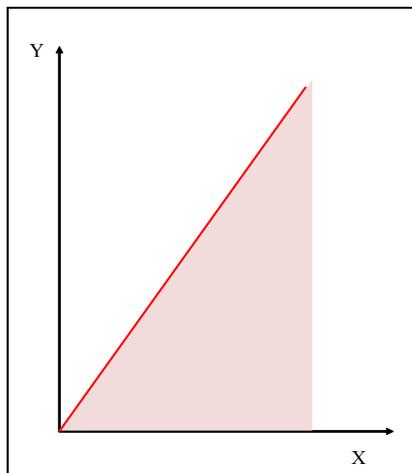
Axioma 8. Convexidad estricta:

$\forall t, t' \in T \rightarrow \lambda t + (1 - \lambda)t' \in \text{int}T$, con $\lambda \in (0, 1)$,

donde $\text{int}T$ representa el interior del conjunto cerrado T .

Los axioma 5 y 6 garantizan rendimientos constantes y la representación de la tecnología será la de la Figura 8.

Figura 8: Representación de la tecnología con rendimientos constantes



Los axiomas 6 y 8 implican rendimientos decrecientes (y son incompatibles con el axioma 5) con una representación del tipo de la Figura 9. El axioma 5, sin postular el 6, indica rendimientos crecientes de escala, véase la Figura 10.

Figura 9: Representación de la tecnología con rendimientos decrecientes

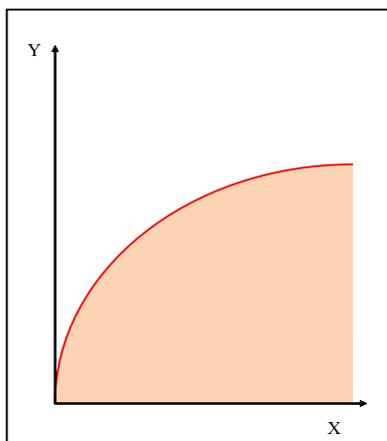
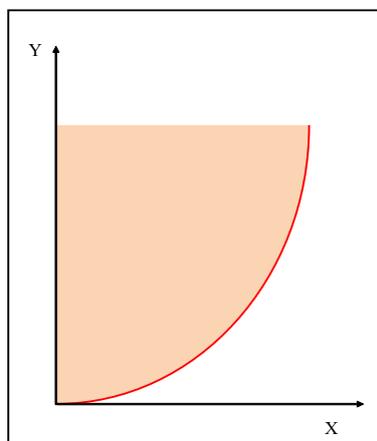


Figura 10: Representación de la tecnología con rendimientos crecientes



Si deseamos obtener un determinado nivel de producción, $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_s^*)$, el conjunto de vectores que lo permiten es

$$P(y^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_s) \in T\}$$

y si tan solo queremos los vectores eficientes escribimos la isocuantas:

$$I(y^*) = \{x \in P(y^*) : \forall y > y^*, x \notin P(y)\}$$

Los axiomas 1, 2, 3, 4 y 8 garantizan la existencia de una representación de la tecnología a partir de una función, de combinaciones productivas eficientes, continua, dos veces diferenciable y cóncava. Pero el problema con el que tropezamos en general es que se trata de una función desconocida (Segura, J. 1993).

b) Elección de un punto de la curva CPP

Puesto que cualquier punto de la curva CCP es eficiente, debemos seleccionar uno. La selección dependerá de nuestras preferencias (las del productor). Si éstas fueran precisas, concretas e invariables la decisión sería relativamente sencilla. Bastaría con añadir el Axioma 9:

Axioma 9. $\forall t, t' \in T, \quad pt > pt' \leftrightarrow tPt'$, donde P indica las preferencias del productor, y p es el vector de precios. Este axioma indica que t es preferido a t' por el mero hecho de que el beneficio asociado al mismo pt (p es el vector precio) es mayor que el beneficio pt' .

La estructura de las preferencias, representadas a través de la función de utilidad, Utilidad Esperada, es uno de los caminos habituales para resolver este tipo de problemas.

c) Naturaleza de la información

Tanto la construcción de la función de producción, apartado a), como la elección del punto de la curva más conveniente, apartado b), tienen caminos adecuados en caso de certeza. Sin embargo este supuesto es poco realista, nos movemos en un mundo de incertidumbres, no solo consecuencia del desconocimiento del futuro sino debido a mediciones inadecuadas o con errores, cambios en lo deseado por los propios agentes o incluso por la búsqueda de mayor eficiencia.

2.1.5 La función de utilidad. Representación de las preferencias.

Para definir la función de utilidad, recordemos antes algunos conceptos sobre preferencias (Segura, J. 1993).

Si llamamos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a un vector de cantidades no negativas de n bienes, la relación $x \succeq x'$ que indica que el vector x es al menos tan deseable como el vector x' , es una relación binaria que verifica las propiedades reflexiva y transitiva (preorden). Exigimos el axioma de completitud o de comparabilidad para alcanzar la estructura de orden débil:

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}_+^n, \text{ se verifica que o bien } x \succ x', \text{ o bien } x' \succ x, \text{ o bien } x \sim x'$$

donde $x \succ x'$ significa que x es preferible a x' y $x \sim x'$ significa que x es indiferente a x' .

Dado un vector x_0 , estos tres axiomas dividen el conjunto \mathbb{R}_+^n en tres subconjuntos disjuntos, los vectores x preferibles a x_0 , $B(x_0)$, los que x_0 es preferible a x , $H(x)$, y los indiferentes con x_0 , $I(x_0)$.

Además, para transformar el proceso de elección en un problema de optimización condicionada, exigimos los siguientes axiomas:

Axioma de monotonía o de no saciación:

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}_+^n, \quad x > x' \rightarrow x \succ x'$$

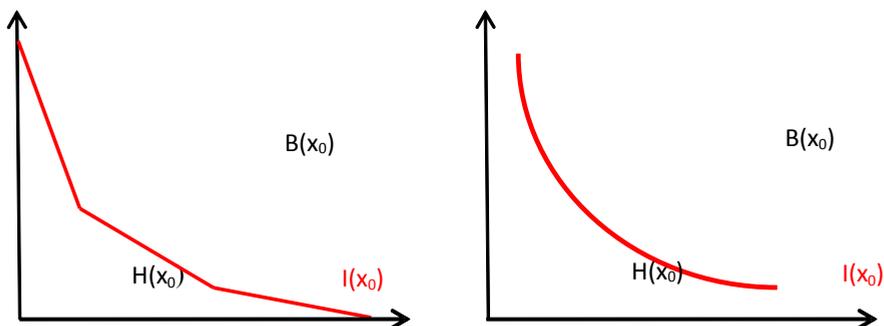
es decir, un vector será preferido a otro si tiene alguna componente mayor y las demás no menores; se preferirá mayores cantidades de cualquier bien. Garantiza que la curva de indiferencia sea decreciente y que dos curvas de indiferencia distintas no pueden tener puntos comunes.

Axioma de continuidad: Entre dos vectores indiferentes siempre existe otro vector indiferente. Así, los vectores indiferentes entre sí constituyen una frontera continua.

Axioma de convexidad:

$$\forall x, x', x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \text{ si } x, x' \succeq x_0 \rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)x' \succeq x_0, \forall \alpha \in [0, 1]$$

Figura 11: Gráfica de la curva de indiferencia para dos bienes



Si la convexidad es estricta se evitan tramos lineales en la curva de indiferencia y si exigimos diferenciabilidad de esta curva evitamos puntos angulares en ella.

A partir de aquí, la función de utilidad $U: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ se define de modo que:

1. Si $x, x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, y $x \sim x_0 \Leftrightarrow U(x) = U(x_0)$
2. Si $x, x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, y $x \succ x_0 \Leftrightarrow U(x) > U(x_0)$
3. Si $x, x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, y $x \prec x_0 \Leftrightarrow U(x) < U(x_0)$

Es pues una representación ordinal.

2.2 Definición de eficiencia

El concepto de eficiencia utilizado en Economía (Martínez, 2003) es el de optimalidad paretiana. Una asignación es eficiente, en el sentido de Pareto, cuando no es posible reasignar los recursos existentes de tal forma que algún individuo mejore sin que otro empeore. Esto se cumple cuando se garantizan las condiciones de la eficiencia en la producción, en el intercambio y la eficiencia global. La eficiencia en la producción exige la igualdad de las relaciones marginales de sustitución entre inputs para todos los bienes producidos, es decir, la tasa a la que un consumidor está dispuesto a sustituir el consumo de un bien por otro sin que varíe su nivel de utilidad y que se puede expresar

$$\left(-\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right)_{U_0} = \frac{U_j}{U_i}$$

donde U_0 indica una utilidad concreta deseada (estamos en una curva de utilidad) y expresa la variación necesaria del bien i para compensar (conservando la misma utilidad) la variación infinitesimal del bien j , y manteniendo constantes el resto de bienes.

La eficiencia en el intercambio precisa la igualdad, para todos los consumidores, de la relación marginal de sustitución entre los bienes. Por último, la eficiencia global se alcanza cuando la relación marginal de sustitución entre dos bienes cualesquiera, para todos los bienes, se iguala a la relación marginal de transformación entre esos dos bienes. Según el primer teorema fundamental de la Economía del Bienestar, bajo una serie de supuestos como, competencia perfecta, mercados completos, información perfecta, rivalidad y exclusión, el equilibrio competitivo es óptimo en el sentido de Pareto (Arrow, K.J. 1951) de tal forma que el distanciamiento respecto de esas condiciones eficientes de Pareto genera una pérdida de bienestar social (Harberger, 1954).

Nos interesa la medición de la eficiencia en la producción desde una perspectiva microeconómica. En este sentido, se pueden distinguir los siguientes tipos de la eficiencia relacionados con la producción.

En primer lugar, la eficiencia técnica es un concepto tecnológico que incide en los procesos productivos, concentrándose en las cantidades y no en los valores. Puede expresarse tanto en términos de output como de input. En el primer caso, representa la producción del máximo nivel de output posible para una combinación específica de factores y, en el segundo caso, la cantidad mínima requerida de inputs combinados en una determinada proporción para obtener un nivel dado de output.

En segundo lugar, la eficiencia asignativa implica alcanzar el coste mínimo de producir un nivel dado de producto cuando se modifican las proporciones de los factores de producción utilizados, de acuerdo con sus precios y productividades marginales¹. La ineficiencia asignativa refleja en qué medida los inputs se emplean en unas proporciones equivocadas, dados sus precios y productividades marginales.

¹ Productividad marginal es el incremento o variación que experimenta el producto total al aumentar la cantidad de factor variable en una unidad.

El elemento fundamental de la eficiencia técnica, que lo diferencia de la asignativa, es que comienza con una proporción completa de factores determinada por su tecnología y cuyo coste en factores se minimiza o cuya producción se maximiza. La proporción de factores puede variar si por ejemplo se utiliza otra tecnología, pero no lo hace debido a los precios y productividades marginales como sucede en el caso de la eficiencia asignativa. Las unidades técnicamente eficientes no son necesariamente eficientes en sentido asignativo. Así, una unidad productiva a pesar de ser eficiente en sentido técnico puede no resultar eficiente en sentido global ya que, dados los costes de los inputs, no utiliza la combinación adecuada de los mismos.

Por último tenemos la llamada ineficiencia X (Leibenstein, 1966) que es un caso especial de la ineficiencia técnica, en la medida en que la organización producirá un nivel de output inferior al máximo posible. Sin embargo, la causa no es tecnológica sino que se encuentra en el comportamiento de los propios individuos que forman parte de la unidad productiva. En este caso, es posible aumentar las cantidades de output producidas sin tener que variar las cantidades de trabajo o de capital ni sus combinaciones. Así, el factor determinante de los incrementos en la producción viene dado por la productividad del trabajo. Según (Leibenstein, 1966) los individuos pueden limitar su esfuerzo maximizando su utilidad, en vez de minimizar costes utilizando más factores de producción que los necesarios para obtener un determinado nivel de output. Esto es posible como consecuencia de las asimetrías de información y el marco de incentivos en el que se desarrolla la actividad.

2.3 Medición de la eficiencia

La evaluación de la eficiencia exige la definición, implícita o explícita, según la técnica aplicada, de una función de producción que caracterice el proceso productivo de las entidades objeto de evaluación. Por esta razón, es fundamental conocer la tecnología de la producción del sector al que pertenecen las unidades objeto de evaluación, para definir las variables inputs y outputs que permiten caracterizar la función de producción. En la teoría microeconómica, la función de producción denota la relación técnica que mide el volumen máximo de producción que puede obtenerse de una cantidad dada de factores productivos o, a la inversa, el volumen mínimo de inputs necesario para obtener una cantidad determinada de producción

como ya hemos dicho. Por tanto, la función de producción representa una relación puramente técnica que define las posibilidades de transformación eficiente, dado el conjunto de técnicas factibles que ofrece la tecnología, y sobre la base de este concepto se desarrolla el resto de la teoría de la producción. Las sugerencias de que las unidades productivas quizás no operasen con la mejor tecnología disponible parecían contradecir los cimientos de la teoría clásica. La confirmación de esta hipótesis por la evidencia empírica dio lugar a nuevos desarrollos en la teoría microeconómica de la producción, que trataron de incorporar la posibilidad de comportamientos técnicamente ineficiente. Las unidades productivas pueden, por las razones que sean, utilizar una tecnología diferente a la más productiva. Por consiguiente el proceso productivo que transforma los recursos en productos no tiene que ser necesariamente el óptimo. De este modo la eficiencia no constituye un supuesto inicial sino una hipótesis que se ha de contrastar.

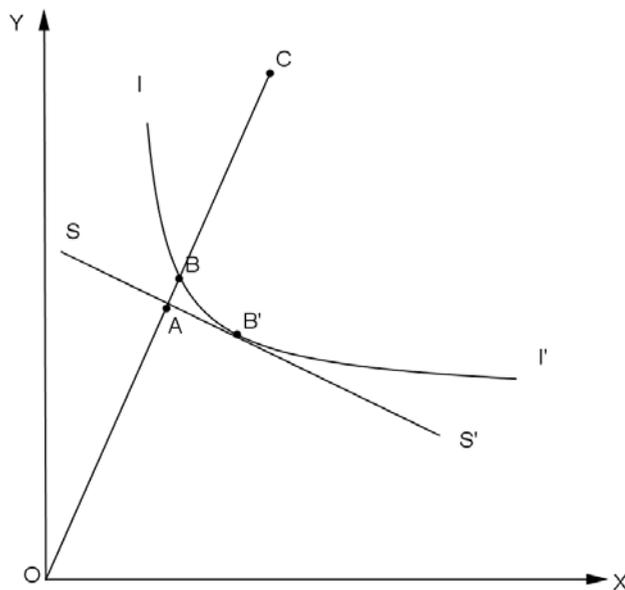
Koopmans (1951) consideró que un vector input-output es técnicamente eficiente si, y sólo si, el aumento de algún output o la disminución de algún input es posible únicamente disminuyendo algún otro output o aumentando algún otro input. Sin embargo fue Debreu (1951) el primero en ofrecer una medida concreta de eficiencia técnica. Debreu propuso una medida radial de eficiencia técnica, que analiza la máxima reducción equiproporcional de todos los inputs compatibles con el mismo nivel de output. Färe, Grosskopf y Lovell (1994) consideran que el principal atractivo de estas medidas radiales es que son independientes de las unidades de medida. Ahora bien su desventaja es que asocian la eficiencia con la máxima contracción posible de inputs (o aumento equiproporcional de outputs) cuando pueden existir holguras solo en alguno de ellos². Este inconveniente no se presenta con la definición de eficiencia de Koopmans, como hemos visto en la sección anterior. Una unidad productiva puede ser considerada eficiente con la aproximación de Debreu y, sin embargo, no resultar eficiente según el planteamiento de Koopmans. Por consiguiente, el interés se centra en disponer de una medida de eficiencia en la

² La variable de holgura correspondiente a un input (output) cualquiera puede interpretarse como la reducción (incremento) potencial que puede realizarse en la cantidad consumida en ese input (producción de ese output), permaneciendo constante su nivel de eficiencia calculado como una medida radial. La presencia de variables de holgura se asocia a tramos de la frontera de posibilidades de producción con pendiente nula o infinita. Combinando las variables de holgura con los resultados del índice de eficiencia podemos obtener un resultado global respecto del ahorro potencial en inputs y el incremento potencial en outputs, que resulta de interés desde una perspectiva de gestión.

que sólo se considere que una unidad productiva es eficiente cuando satisfaga la definición de Koopmans.

Farrell (1957) estableció las bases conceptuales a partir de las cuales se desarrollarían posteriormente los modelos que tienen por objetivo la medición de la eficiencia productiva. El trabajo de Farrell diferencia entre lo que denomina eficiencia técnica y eficiencia precio o asignativa. La eficiencia técnica la define como el éxito en producir la mayor cantidad de output posible, a partir de un conjunto dado de inputs, mientras que por eficiencia precio o asignativa entiende la medida en que una entidad utiliza los factores de producción en la proporción correcta, a la vista de sus precios. Las medidas de eficiencia cardinales asociadas a ambos conceptos se reproducen en la Figura 12.

Figura 12: Eficiencia técnica, eficiencia asignativa y eficiencia global (fuente Martínez 2003)



La curva I-I' constituye la denominada isocuanta unitaria y representa las combinaciones de factores productivos (x, y) necesarios para producir una unidad de producto. En la Figura 12 se representa una unidad o entidad productiva³ que para producir una unidad de output utiliza la combinación de factores productivos

³ Unidad o entidad productiva hace referencia al grupo de personas y conjunto de medios materiales organizados para obtener bienes o servicios.

que indica el punto C. Podemos deducir que esta unidad productiva no es técnicamente eficiente en el sentido de Farrell. La isocuanta I-I' indica que el output producido por la entidad C podría ser obtenido empleando una proporción OB/OC de los inputs que realmente utiliza y sin que varíe la combinación de los mismos. Farrell define el cociente OB/OC como el índice de eficiencia técnica de la unidad productiva C. Nótese que en el punto C objeto de análisis y en el punto B, que sirve de comparación, los factores productivos se combinan de la misma forma. El planteamiento de Farrell al medir la eficiencia técnica consiste en determinar qué resultado debería alcanzar la unidad productiva que se estudia, si actuase como otra unidad, que al utilizar los factores productivos en la misma proporción, pero en menor cantidad, obtiene el mismo volumen de producto. Por tanto, la estimación de la eficiencia conlleva comparar cada unidad productiva que no pertenece a la isocuanta con otra entidad eficiente que utilice los factores productivos en la misma proporción, esto es que se encuentre en el mismo radio vector desde el origen. En algunos casos esa comparación se realizará con unidades productivas hipotéticas que se encuentran sobre la isocuanta eficiente, pero no se corresponden con ninguna entidad observada realmente. La medida de eficiencia técnica de Farrell tomará el valor 1 si la entidad es técnicamente eficiente y valores más próximos a 0 cuanto más ineficiente sea la entidad evaluada.

Apoyándose en la figura anterior, Farrell también define el concepto de eficiencia asignativa. Los precios de los factores productivos están representados por la pendiente de la recta isocoste S-S'. En ese contexto, el punto B' tangente entre la isocuanta unitaria y la recta isocoste, es aquel que minimiza el coste. Tanto B como B' son eficientes técnicamente por estar sobre la isocuanta unitaria. Sin embargo los costes de producción en B' son tan solo una fracción OA/OB de los costes de producción en B. Farrell considera el cociente OA/OB como la medida de la eficiencia asignativa de B. Esta medida de la eficiencia asignativa se refiere tanto al punto B como a la entidad C que estamos evaluando. Esto es, la eficiencia asignativa de C mide el exceso de costes en que se está incurriendo por combinar los inputs de una forma diferente a la óptima. Por tanto la evaluación de la eficiencia asignativa pura exige la eliminación de la eficiencia técnica, lo que equivale a situar a la entidad C en el punto B sobre la isocuanta unitaria y valorar el exceso de costes en esa situación. La eficiencia asignativa también varía entre 0 y 1, estando más próxima a la unidad conforme más eficiente sea la entidad objeto de análisis. Finalmente, Farrell define la eficiencia global por la ratio OA/OC, ya que si la uni-

dad productiva fuera totalmente eficiente sus costes serian una proporción OA/OC de los costes observados. Nótese que la eficiencia global es el producto de la eficiencia técnica por la eficiencia asignativa $\frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC}$.

El análisis de Farrell parte de dos supuestos básicos. En primer lugar, que la isocuanta unitaria sea convexa (respecto al origen) y, en segundo lugar, que no tenga en ningún punto pendiente positiva. Una isocuanta convexa significa que si dos puntos se pueden alcanzar en la práctica también se podrá obtener cualquier combinación lineal de ellos. Por otra parte, el segundo supuesto nos asegura que un aumento de los factores productivos utilizados nunca implicará una reducción en la cantidad de producto obtenida.

Este trabajo de Farrell tiene una enorme trascendencia por cuanto es la primera aproximación a la estimación de la eficiencia desde una perspectiva de frontera y sienta las bases metodológicas en el análisis de la eficiencia productiva a partir de la estimación de fronteras de posibilidades de producción. Las estimaciones de este análisis exigen el conocimiento de las relaciones técnicas inherentes en la función de producción que define la isocuanta $I-I'$. Sin embargo, en muchos casos desconocemos esas relaciones técnicas, lo que complica la medición de la eficiencia. Por esta razón, Farrell propone un método de estimación de la función de producción, a partir de las observaciones de las unidades evaluadas. De esta forma, Farrell estima lo que él mismo denomina una función de producción empírica a partir de las observaciones muestrales que exhiben mejores prácticas técnicas⁴

2.4 Descripción de modelos de estimación de la eficiencia

Los estudios de fronteras tecnológicas pueden ser clasificados de acuerdo a la forma en que se especifica y se estima la frontera. Entre otras cosas los métodos diferirán en la definición o no de una forma funcional y en presencia o no de un error aleatorio. Los diferentes enfoques se resumen en la siguiente tabla.

⁴ Farrell (1957) distingue dos opciones. La primera opción se refiere a una relación técnica calculada a través de la investigación de las posibilidades científico-tecnológicas que relacionan el máximo output alcanzable de una combinación de inputs, mientras que en el segundo caso, se estima la frontera de mejor práctica técnica. Las dificultades inherentes en la estimación de la función teórica y, por otra parte, la convicción de que las comparaciones deben ser realizadas con los mejores resultados alcanzados en la práctica, conducen a Farrell a concluir que la función a emplear en los trabajos debe ser la de producción empírica.

Tabla 2 Resumen de métodos (elaboración propia)

MÉTODO/ ENFOQUE		PLANTEAMIENTOS		MODELO	Autores
Paramétrico	Supone forma funcional para la función de producción estimando sus parámetros mediante programación matemática o técnicas econométricas.	Determinista	Función tipo promedio. Toda la desviación la atribuye a la ineficiencia.	-Mínimos Cuadrados ordinarios modificados. -Enfoque de Máxima Verosimilitud -Modelo de Frontera Probabilística.	Rchimond (1974), Green (1980). Schmidt (1976). Timmer (1971)
		Estocástico	Función tipo frontera. Toda la desviación la atribuye a dos componentes una aleatoria y otra debida a la ineficiencia	-Modelo de Frontera Estocástica	Aigner et al. (1977) Meeusen et al. (1977) Pitt y Lee (1981), Schmidt y Sickles (1984), Battesi y Coelli (1992)
No Paramétrico	No supone una forma funcional para la función de producción. Se exige: libre disponibilidad de inputs y outputs, convexidad, rendimientos constantes o variables a escala.	Determinista	Recurre a la programación matemática (normalmente lineal).	Análisis Envolvente de Datos: -Modelo CCR. -Modelo BCC. -Modelo Multiplicativo. -Modelo Aditivo. -Modelo Free Disposal Hull (FDH), etc.	Charnes, Cooper y Rhodes (1978). Banker, Charnes y Cooper (1984). Charnes et al. (1982, 1983). Charnes et al (1985). Tulkens (1993).
		Estocástico	Recurre a la programación matemática. Introduce una medida de error en los datos	-Análisis Envolvente de Datos Estocástico	Olesen y Petersen (1995). Simar (1992).
		Fuzzy	Programación matemática fuzzy.	-Análisis Envolvente de Datos Fuzzy.	Segunpta (1987). Kao y Liu (2000). Guo y Tanaka (2001).

Una primera aproximación consiste en adoptar un enfoque paramétrico. En las técnicas paramétricas se especifica un modelo, generalmente econométrico, que

exige asumir una forma funcional explícita para la tecnología de la producción y para la distribución de los residuos⁵. La estimación del grado de eficiencia de la muestra, y de cada unidad productiva, se realiza a partir de los valores que adoptan los residuos de la estimación.

Los métodos paramétricos son métodos poco flexibles. En este sentido, errores en la especificación de la forma funcional pueden introducir sesgos en los resultados. Es muy importante elegir la función de producción precisa que sea capaz de modelizar los procesos productivos objeto de análisis. La búsqueda de una función de producción menos restrictiva que la de Cobb-Douglas y que la CES (Constant Elasticity Substitution)⁶ dio lugar a una especificación más flexible, que no presenta restricción alguna sobre las elasticidades de sustitución entre los factores⁷. Así Christiansen, Jorgenson y Lau (1971) definieron una función translogarítmica de producción, en la cual la sustituibilidad entre los factores no se encuentra restringida. La utilización de formas funcionales más flexibles reduce la posibilidad de errar en la estimación del grado de eficiencia de diversas actividades, cuando la auténtica tecnología subyacente se aleja de las formas funcionales más restrictivas como la de Cobb-Douglas o la CES. Sin embargo estas formas funcionales más flexibles consumen grados de libertad, reduciendo la precisión con la que los parámetros son estimados.

Dentro del enfoque paramétrico, se pueden diferenciar dos variantes principales, según la forma funcional que se va a estimar sea una función de tipo medio o una función frontera. La aproximación paramétrica de tipo medio estima, por medio del análisis de regresión, el valor medio de la variable dependiente, en términos de las variables independientes. Por otra parte, la aproximación paramétrica de tipo frontera estima, también por el análisis de regresión, el máximo output que generan los inputs empleados en las unidades productivas más eficientes de la muestra. El

⁵ Respecto a la distribución que sigue el término de error que mide la ineficiencia se supone generalmente que sigue una distribución seminormal, aunque en ocasiones también se utiliza una distribución exponencial o una gamma.

⁶ Función de Cobb-Douglas $f(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$, función CES $f(K,L) = (A_1 K^\rho + A_2 L^\rho)^{1/\rho}$ otras funciones de producción son la Translog, la función Trascendental, la función de Zellner, la función de Hildebrand y Liu, la función de Spillman.

⁷ En la función de producción de Cobb-Douglas tiene como característica que la elasticidad de sustitución de los factores es siempre igual a la unidad, mientras que la función de producción CES se caracteriza por tener una elasticidad de sustitución constante.

concepto de eficiencia descarta todas aquellas aproximaciones de no frontera, esto es, análisis en términos del comportamiento medio esperado para el cálculo de la eficiencia. Como afirman Ganley y Cubbin (1992), esta función media es un indicador engañoso de las posibilidades de producción eficientes tanto en el ámbito teórico como en el práctico. A nivel práctico, puede ocurrir que los estándares medios estimados actúen como un desincentivo en el rendimiento productivo de aquellas unidades productivas con una eficiencia superior a la media. A nivel teórico, una función de producción media es inconsistente con el concepto de función de producción. En cambio, la evaluación de la eficiencia a través de una aproximación frontera sí que resulta mucho más consistente con el concepto de función de producción y de costes.

Una primera alternativa es suponer que la totalidad de la variación residual se debe a ineficiencias técnicas en la utilización de los recursos, dando lugar a un modelo determinístico de frontera (MDF) que permite conocer el grado de eficiencia de cada unidad de producción. No obstante atribuir a la ineficiencia el valor estimado de la perturbación aleatoria sobrevalora el grado de ineficiencia técnica. Por este motivo, resulta más correcto reconocer (Martínez, M. 2003) que la perturbación aleatoria del modelo incluye, además de la medida de la ineficiencia, los shocks aleatorios y los errores de medida propios de toda estimación estadística. Para solucionar este problema se puede aplicar un modelo estocástico de frontera (MEF). La principal virtud del modelo estocástico es que permite separar, para la muestra en su conjunto, el impacto de la ineficiencia técnica y de los fenómenos aleatorios sobre el valor de los residuos; aunque ello requiere aceptar supuestos exigentes acerca de la distribución que sigue el término de error. Por otra parte, su debilidad reside en que no puede obtenerse una estimación de la ineficiencia en que incurre cada unidad productiva de forma particularizada. Un procedimiento que permite eludir este inconveniente es la medición de la frontera de posibilidades de producción a través de un enfoque paramétrico con datos de panel. Las ventajas de la utilización de esta técnica frente a la de corte transversal son diversas. En concreto, posibilita la obtención de índices de eficiencia individual sin necesidad de suponer ninguna distribución de la ineficiencia e incorrelación de la ineficiencia con los regresores. Asimismo, es posible lograr una reducción del sesgo debido a las variables omitidas en las estimaciones gracias a la eliminación del efecto de las variables no observadas, lo que permite la obtención de estimadores insesgados así como el aumento de grados de libertad. La definición de fronteras estocásticas,

basándose en la técnica de datos de panel, fue sugerida por Pitt y Lee (1981) e inicialmente adaptada por Schmidt y Sickles (1984).

La segunda aproximación posible para estimar la eficiencia técnica es el enfoque no paramétrico. En este enfoque las estimaciones se obtienen a través de técnicas de programación matemática. En este caso, no resulta necesario especificar una forma funcional específica para la función de producción. Únicamente se exige que el conjunto de posibilidades de producción cumpla una serie de propiedades, como por ejemplo la libre disponibilidad de inputs y outputs, la convexidad y los rendimientos constantes o variables a escala (Farrell 1957). La propiedad de libre disponibilidad de inputs y outputs se refiere a que cualquier unidad productiva, con el mismo nivel de output que cualquiera otra unidad pero con más inputs, pertenece al conjunto de posibilidades de producción. Asimismo, cualquier unidad productiva que utiliza los mismos inputs que cualquier otra unidad, y que produce menos outputs, pertenece al conjunto de posibilidades de producción. Según la propiedad de convexidad, cualquier combinación lineal de dos puntos observados, que pertenezcan al conjunto de posibilidades de producción, pertenece también a dicho conjunto.

En el enfoque no paramétrico, la técnica fundamental para medir la eficiencia es el Análisis Envolvente de Datos (DEA). Esta técnica, como veremos, presenta como ventajas la gran flexibilidad y la ausencia de errores de especificación, al no ser preciso optar por ninguna forma funcional. Sin embargo, presenta inicialmente el inconveniente de ser una técnica determinista, por lo que la presencia de observaciones atípicas puede sesgar las medidas de eficiencia obtenidas imputando a la ineficiencia cualquier shock de carácter aleatorio⁸. Una ventaja adicional de los modelos DEA en relación con las aproximaciones econométricas es que ofrecen información particularizada para cada unidad productiva. Así, los niveles de eficiencia calculados a través de los modelos DEA están asociados con unidades productivas particulares, más que con medias estadísticas que no son directamente asignables a cada observación⁹.

⁸ Sexton, Silkman y Hogan (1986) demostraron cómo los resultados del modelo son muy sensibles a los errores de medida en las unidades eficientes, pues al afectar a la construcción de la frontera inciden en la evaluación no solo de la propia unidad eficiente, sino también de otras unidades ineficientes incluidas en la muestra.

⁹ La excepción, dentro de la aproximación paramétrica, se encuentra en los métodos estocásticos que utilizan datos de panel, en los cuales sí se ofrece una información particularizada para cada unidad productiva analizada.

Otro tipo de información que los modelos DEA suministran sobre cada unidad evaluada es la que se refiere a las ponderaciones de outputs e inputs, el grupo de referencia para las unidades ineficientes y los objetivos de producción y de consumo óptimos. Toda esta información pormenorizada resulta de enorme interés desde el punto de vista de la gestión.

A pesar de que el DEA (Sala, R. et al. 2011a,b, 2012) presenta numerosas ventajas en relación a otras metodologías, un inconveniente es que las estimaciones realizadas con los modelos DEA convencionales no ofrecen ninguna información sobre la incertidumbre. Dado que se trata de una técnica no paramétrica, el DEA no permite ninguna inferencia estadística sobre los resultados obtenidos. Sin embargo, la incertidumbre desempeña un papel muy importante porque las conclusiones que pueden derivarse de los análisis de eficiencia de las unidades evaluadas son sensibles a errores en los datos.

Para solucionar este problema uno de los métodos más utilizados es el análisis de regresión (Parthadarathy, S. et al. 2008). Este análisis relaciona las variaciones de los resultados mediante un grupo de variables explicativas. Otra posibilidad, propuesta por Simar y Wilson (1998), está basada en una aplicación del método *bootstrap*, que considera la conveniencia de este método para estimar la distribución muestral de las puntuaciones de eficiencia obtenidas a partir de modelos DEA. Otra opción para abordar el problema de la incertidumbre son los modelos *chance constrained* DEA. Este tipo de programación fue incorporada por primera vez a los modelos DEA por Olesen y Petersen (1995) convirtiendo la metodología DEA tradicional en un modelo de programación estocástica.

En este sentido cabe también considerar las propuestas realizadas por Banker (1993), Land et al. (1993).

Entre los enfoques más recientes del tratamiento de la incertidumbre, se encuentra el planteamiento fuzzy como podemos encontrar por ejemplo en Sengupta (1987), Kao y Liu (2000), Guo y Tanaka (2001) y León, T. et al (2003).

Los diferentes modelos planteados hasta ahora miden la eficiencia en relación con fronteras diferentes, deterministas, o estocásticas, matemáticas o econométricas y paramétricas o no paramétricas. Por consiguiente sería lógico esperar que existan discrepancias en los índices de eficiencia obtenidos, aunque sería deseable que se dieran algunos rasgos de consistencia entre los modelos. Uno de ellos es que

los modelos deterministas, al computar como ineficiencia el componente aleatorio, debería mostrar menores índices de eficiencia que los modelos estocásticos. Si bien resultan comprensibles, y en cierto modo consistentes, las discrepancias en magnitud de las medidas de eficiencia que resultan de cada técnica, sería deseable que las ordenaciones de las unidades productivas no fueran muy sensibles a la técnica empleada. La preocupación que suscita la sensibilidad de los resultados a diferentes técnicas ha provocado la aparición en la literatura de estudios que analizan un mismo problema mediante diferentes instrumentos analíticos, Algunos trabajos que efectúan comparaciones entre distintas técnicas de medición de la eficiencia son los de Banker et al. (1988), Gong y Sickles (1992), Murillo –Zamorano, L. et al. (2001) o más recientemente Van Meensel, J. et al (2011) comparan la metodología DEA con los métodos estocásticos. Cuando existen errores de especificación y la ineficiencia esta correlacionada con los regresores, la metodología DEA es más consistente.

2.5 Planteamiento de nuestro problema

Cuando se calcula la eficiencia relativa de un conjunto de unidades productivas, la empresa o entidad que realiza el estudio intenta obtener más información que el mero conocimiento sobre si una unidad es eficiente o no. Se encuentra así con dos problemas de naturaleza muy distinta:

- La imprecisión de los datos que se manejan y que pueden afectar, en gran medida, a los ratios de eficiencia.
- La imprecisión en el concepto de eficiencia.
- Pretender ordenar las DMUs de acuerdo con su ratio de eficiencia, aunque existe bastante literatura que muestra por qué el valor de la ratio de eficiencia no puede utilizarse como un índice para ordenar estas unidades (Sirvent, I. 2001).
- Dentro del contexto textil estamos interesados en obtener la eficiencia y al mismo tiempo comparar para, en el caso que fuera posible, obtener una ordenación de entre las entidades eficientes.

Capítulo 3

Métodos no paramétricos. Análisis Envolvente de Datos

3.1 Introducción

Charnes, Cooper y Rhodes desarrollaron en 1978 una técnica denominada Análisis Envolvente de Datos (DEA) que consigue modelizar a través de programación matemática el método propuesto por Farrell para medir la eficiencia. Como señalan Charnes, Cooper y Rhodes (1978), esta técnica ofrece un enorme interés para la medición de la eficiencia de las agencias públicas. De aquí en adelante, se hará referencia a este modelo con la denominación DEA (Data Envelopment Analysis), mientras que las unidades involucradas en un análisis de eficiencia se denominarán como DMUs, abreviatura de (Decision Making Unit). Genéricamente, se entiende por DMU una entidad responsable de convertir ciertos inputs en outputs y cuyo comportamiento se quiere evaluar. En principio, las DMUs pueden ser tanto individuos como instituciones, organizaciones o incluso sistemas económicos al completo. Además su naturaleza puede ser tanto lucrativa, como sería el caso de entidades bancarias o empresas, como no lucrativas, por ejemplo hospitales o escuelas públicas.

A continuación se exponen las bases metodológicas sobre las que se asienta la medición de la eficiencia en el Análisis Envolvente de Datos. Esto es, se describirá la lógica que subyace en este método de medición de la eficiencia. Mostraremos posteriormente la descripción formal del método DEA con el aparato algebraico. Finalmente, mostraremos que el desarrollo experimentado en la literatura a partir del trabajo de Charnes, Cooper y Rhodes (1978) exige analizar algunas extensiones del modelo matemático básico.

3.2 Fundamentos

Como ya hemos dicho anteriormente, el Análisis Envolvente de Datos es un método no paramétrico y no estadístico porque no asume que la tecnología venga caracterizada por una forma funcional específica dependiente de un número finito de parámetros, ni hace ningún supuesto explícito sobre la distribución de probabilidad de los residuos de eficiencia. Por esto, la frontera de producción estimada por el DEA tiene un carácter implícito en el sentido de que no se especifica la relación que existe entre la producción máxima alcanzable y los factores implicados en la misma.

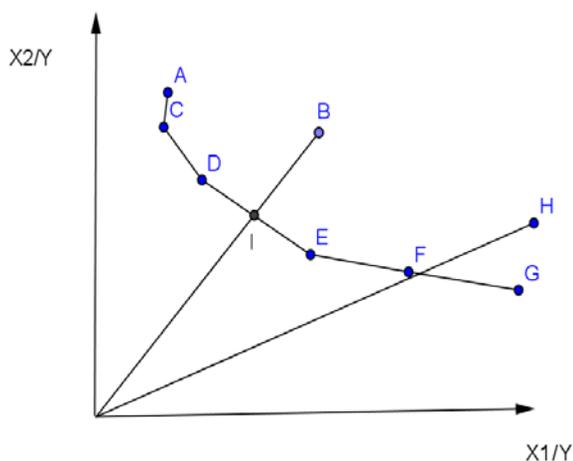
El criterio empleado por el DEA para definir la frontera de producción empírica es la noción paretiana de eficiencia. Así se considera que una unidad productiva es eficiente si no existe ninguna unidad en la muestra que produzca más de unos outputs sin producir menos de otros y sin utilizar más de algunos de los recursos productivos; o bien, si no existe ninguna unidad que produzca los mismos outputs con menor cantidad de algún factor productivo y no más de los restantes. La imposibilidad de establecer un estándar teórico de eficiencia obliga a adaptar la definición de eficiencia paretiana absoluta, de tal forma que tome como referencia los niveles observados que han sido alcanzados por otras unidades productivas (Norman y Stoker, 1991). Por tanto la medida de eficiencia que se calcula es una medida relativa, es decir, en primer lugar se identifica las unidades productivas que exhiben las mejores prácticas técnicas, que son las que van a definir la frontera de posibilidades de producción¹⁰ y, a continuación, se mide la eficiencia de los restan-

¹⁰ Según Charnes y Cooper (1985) la ubicación de una unidad productiva sobre la frontera de posibilidades de producción constituye una condición suficiente para ser eficiente. Así, una unidad productiva puede ofrecer un índice de eficiencia unitario y, sin embargo, no ser eficiente si presenta variables de holgura positivas.

tes observaciones, evaluando su desviación con respecto a las unidades productivas que logran optimizar su rendimiento. La medida de la eficiencia en términos relativos explica la especial importancia que posee disponer de una muestra con un alto grado de homogeneidad, en que las unidades productivas compartan una misma tecnología de producción.

En el siguiente análisis gráfico (Figura 13) se explica la lógica con la que opera el Análisis Envolvente de Datos. Consideremos un modelo de dos inputs (X_1 , X_2) un output Y , y que en cada uno de los ejes coordenados representamos el cociente entre uno de los input y el output. Supongamos que el objetivo es medir la eficiencia productiva de ocho unidades. Denotaremos cada unidad productiva por las letras A, B, C, D, E, F, G y H. La cantidad de recursos empleados por la unidad de producto para cada unidad observada es la que se representa en la Figura 13.

Figura 13: El DEA y la frontera eficiente de producción (Martínez 2003)



Como resultado de aplicar el criterio paretiano de eficiencia se obtiene la frontera formada por las unidades productivas C, D, E, y F. Estas observaciones constituyen, según Tomkins y Green (1988), el conjunto de centros no dominados. Sin embargo, la unidad B no cumple el requisito de eficiencia paretiana, al ser una unidad dominada por D y E. La Figura 13 revela que es posible producir lo mismo que B con menos recursos, ya que dos unidades de la muestra, D y E, lo hacen. Para calcular la eficiencia técnica de B el DEA compara la actividad de ésta con la de otra entidad eficiente que utiliza la misma combinación de inputs pero en una

proporción menor. En esta situación, efectúa la comparación con una pseudo DMU formada a partir de una combinación lineal de las entidades más próximas a aquella. En nuestro ejemplo, la evaluación de la entidad B se realiza comparándola con la pseudo DMU I, cuyos niveles de utilización de inputs por unidad producida son una media ponderada de los empleados por D y E. Por consiguiente, la frontera eficiente que se obtiene está formada por entidades realmente observadas, que utilizan las menores cantidades de factores productivos por unidad de output producida y, por otra parte, por pseudo DMUs o entidades ficticias que constituyen una combinación lineal de los inputs y outputs de las entidades reales. Esta forma de obtener la frontera de producción eficiente implica aceptar ciertos supuestos. Así, por ejemplo, se está asumiendo que los niveles de utilización de los factores de las entidades hipotéticas son factibles. Esto conlleva aceptar una sustitución perfecta de los factores. Este supuesto, generalmente admitido por la teoría económica, se conoce como la condición de convexidad de la función de producción.

Una vez definida la frontera de posibilidades de producción, se puede medir la eficiencia de la unidad productiva de la muestra. De esta forma, las unidades situadas sobre la frontera de producción alcanzan un índice de eficiencia unitario mientras que las restantes unidades obtienen una medida de la eficiencia relativa por comparación con alguna entidad eficiente. Así en la Figura 13 se observa que la entidad B podría obtener su nivel actual de output utilizando una proporción OI/OB de los inputs que realmente utiliza, pues a lo largo de la línea OIB se mantiene la productividad, es decir, se mantiene la proporción necesaria de inputs para producir el output; pero en I la eficiencia es mayor al encontrarse en la frontera de producción, en este caso I aprovecha mejor que B los recursos utilizados transformándolos en productos (productividad y eficiencia no son términos equivalentes). La eficiencia técnica que el modelo DEA le asignará será justamente ese cociente, que coincide con la media de eficiencia técnica de Farrell. El índice de eficiencia así calculado revela la cantidad mínima de recursos que la DMU en cuestión podría utilizar sobre lo que realmente utiliza, para llevar a cabo su producción de forma eficiente. El conjunto de entidades reales eficientes, que constituyen el punto de comparación de la unidad evaluada, forma lo que se denomina grupo de referencia de una DMU que forma parte de la frontera eficiente y está formada por ella misma, mientras que el grupo de referencia de la entidad B está formado por las DMUs D y E, a partir de las cuales se genera la unidad productiva ficticia I. La identificación del grupo de referencia ofrece la ventaja de permitir formular objetivos de

producción y de consumos óptimos que permiten optimizar el rendimiento productivo de las entidades ineficientes.

La medición de la eficiencia puede llevarse a cabo desde distintas perspectivas que resultan coherentes con la noción económica de eficiencia paretiana. Así, con una orientación input, una entidad será calificada de ineficiente si se observa que existe otra DMU que combinando los inputs en la misma proporción, pero utilizando menores cantidades de los mismos, es capaz de alcanzar el mismo volumen de producción. En este caso, el modelo DEA evalúa como medida de eficiencia de esa DMU la reducción potencial de factores productivos que podría llevar a cabo sin alterar su producción. Por otra parte, si el análisis adopta una orientación output, una entidad será calificada como ineficiente cuando se observa que existe otra que, con los mismos recursos, produce mayor cantidad de sus outputs. En este caso, es el aumento equiproporcional en la producción lo que el DEA evalúa como medida de la ineficiencia de esa DMU. Cada uno de esos planteamientos se corresponde con un problema matemático diferente. Y la elección de una orientación output o input está condicionada por el problema concreto que se trata de resolver.

3.3 Modelos

3.3.1 MODELO CCR

Como ya hemos referido anteriormente, el trabajo de Farrell (1957) establece las bases metodológicas que permiten a Charnes, Cooper y Rhodes desarrollar unos modelos matemáticos basados en técnicas de programación, capaces de estimar la eficiencia técnica con la que opera una muestra de unidades productivas. El modelo de Charnes, Cooper y Rhodes o modelo CCR (1978) permite evaluar la eficiencia de una muestra de entidades caracterizadas por una función de producción multiproducto que emplea varios inputs¹¹. Este indicador de eficiencia se define como el cociente de la suma ponderada de outputs entre la suma ponderada de los inputs. El

¹¹ En el trabajo de Farrell (1957) solamente se evaluaba la eficiencia de una unidad productiva, que producía un único output. El problema de la medición de la eficiencia de entidades caracterizadas por una función de producción multiproducto queda por tanto, sin resolver.

modelo se formula como un problema de optimización matemática condicionada, en el que las variables que se deben calcular son el propio indicador de eficiencia y las ponderaciones asociadas a las variables inputs y outputs que caracterizan a las unidades productivas. El modelo matemático que formulan Charnes, Cooper y Rhodes (CCR) adopta una versión fraccional en el sentido de que tanto su función objetivo como sus restricciones se presentan en forma de fracción. La formulación matemática del modelo CCR, en su versión fraccional para el caso de n unidades productivas que producen s outputs a partir de m inputs, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } E_0 &= \frac{\sum_{r=1}^s u_{r0} y_{r0}}{\sum_{i=1}^m v_{i0} x_{i0}} \\
 \text{s.a.} & \\
 & \frac{\sum_{r=1}^s u_{r0} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{i0} x_{ij}} \leq 1, \quad 1 \leq j \leq n, \\
 & u_{r0} \geq 0 \quad 1 \leq r \leq s, \\
 & v_{i0} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq m.
 \end{aligned} \tag{1}$$

La unidad productiva cuya eficiencia se va a calcular se denota por el subíndice 0, las variables y_{rj} y x_{ij} representan, respectivamente, las cantidades de output r y de input i de la entidad j . Finalmente u_{r0} y v_{i0} representan las ponderaciones atribuidas al output r y al input i respectivamente y que corresponden a la entidad cuya eficiencia se va a evaluar. La resolución de este programa matemático permite determinar los valores de las variables u_{r0} y v_{i0} y, por tanto, el índice de eficiencia E_0 asignado a la unidad productiva evaluada. Resolviendo este programa para cada una de las n entidades, se obtiene la medida de la eficiencia escalar para cada una de ellas. Las ponderaciones asignadas a las variables inputs y outputs se determinan endógenamente por la resolución del modelo y pueden variar entre las distintas unidades productivas. Estas ponderaciones, en el óptimo representan los valores atribuidos a cada input y output que suministran el mayor índice de eficiencia posible a cada entidad y cumplen con las restricciones de que esta combinación de

ponderaciones, al aplicarlas al resto de entidades, genera un índice de eficiencia comprendido entre 0 y 1. Además, las ponderaciones deben ser¹² mayores o iguales a 0. En general, una entidad dará mayor peso a los inputs que utilicen menos y a los outputs que produce en una cantidad mayor ya que la ponderación que se obtiene al resolver el problema se calcula de tal forma que ofrece a cada DMU la valoración en términos de eficiencia más favorable posible (Charnes, Cooper y Rhodes, 1978). El producto de las ponderaciones asociadas a los respectivos outputs (inputs) por dichos niveles de outputs (inputs) se denomina output virtual (input virtual). De esta forma, el índice de eficiencia se calcula como el cociente de la suma de outputs virtuales entre la suma de inputs virtuales.

En 1979, Charnes, Cooper y Rhodes introducen una rectificación en el programa fraccional anterior. En concreto exigen que las ponderaciones sean estrictamente positivas, sustituyendo las últimas $m + s$ restricciones del modelo original por las siguientes:

$$u_{r_0} > \varepsilon; \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$v_{i_0} > \varepsilon; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

siendo ε un número positivo suficientemente pequeño. Tal y como señalan Wong y Beasley (1990), estas restricciones ofrecen dos ventajas: por una parte, asegura que el denominador del índice de eficiencia nunca sea nulo y, por otra parte, garantizan que todos los inputs y outputs sean considerados en la evaluación de la eficiencia de la entidad.

La complejidad en la resolución de los problemas de programación en su versión fraccional conduce a Charnes, Cooper y Rhodes a convertirlos en problemas equivalentes de programación lineal. La transformación del problema fraccional en otro lineal puede efectuarse de dos formas diferentes, según la orientación output o inputs del problema, lo que da lugar a las dos versiones lineales del modelo CCR. Ambas versiones lineales se corresponden con las dos orientaciones factibles: la eficiencia en términos de input y la eficiencia en términos de output. Las dos ver-

¹² Hay que señalar que la DMU objeto de evaluación aparece tanto en la función objetivo como en la restricción, lo que garantiza que siempre existe una solución al problema de programación matemática, con un valor de la función objetivo acotado entre 0 y 1 (Lewin y Morey, 1981).

siones lineales del modelo CCR se derivan de que la maximización de la función objetivo del problema fraccional se puede efectuar de dos forma equivalentes.

El modelo lineal equivalente conocido como CCR lineal con *orientación output* (si minimizamos el denominador manteniendo fijo el numerador)

$$\begin{aligned}
 \text{Min } \phi_0 &= \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{i0} \\
 \text{s.a.} \\
 \sum_{r=1}^s u_{r0} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{ij} &\leq 0, \quad j = 0, 1, \dots, n, \\
 \sum_{r=1}^s u_{r0} y_{r0} &= 1 \\
 u_{r0} &\geq \varepsilon \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 v_{i0} &\geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Y el modelo CCR lineal con *orientación input* (si maximizamos el numerador manteniendo fijo el denominador), cuya descripción es:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } \phi_0 &= \sum_{r=1}^s u_{r0} y_{r0} \\
 \text{s.a.} \\
 \sum_{r=1}^s u_{r0} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{ij} &\leq 0, \quad j = 0, 1, \dots, n, \\
 \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{i0} &= 1, \\
 u_{r0} &\geq \varepsilon \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 v_{i0} &\geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Las variables ϕ_0 y ϕ_0 representan respectivamente los índices de eficiencia obtenidos con una orientación input y con una orientación output. Por construcción, la función objetivo de estos modelos cumple que $\phi_0 = 1/\phi_0$. Esta ecuación que relaciona la ratio de eficiencia obtenida en la versión que minimiza inputs con la que se obtiene en la versión que maximiza outputs, se cumple únicamente en presencia de una tecnología caracterizada por rendimientos constantes a escala, como es la que se define en el modelo CCR. Como cualquier programa lineal, los anteriores problemas de programación tienen asociados sendos problemas duales (Cooper

et al. 2007). La resolución de los problemas duales es más sencilla ya que presentan un menor número de restricciones que sus primales. Como señalan Phillips, Ravindran y Solberg (1976), la eficiencia de cálculo del algoritmo Simplex para la resolución de problemas de programación lineal aumenta conforme disminuye el número de restricciones del modelo lineal. La formulación del problema dual asociado al anterior problema primal CCR, en su versión lineal y con una orientación input es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } & \theta_0 - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^+ + \sum_{r=1}^s s_r^- \right) \\
 \text{s.a. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^+ = \theta_0 x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^- = y_{r0}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, \\
 & s_i^+ \geq 0 \\
 & s_r^- \geq 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

La variable θ_0 representa el ratio de eficiencia de la unidad productiva cuya eficiencia se está evaluando. Las variables λ_j constituyen los parámetros a partir de los que se construye el grupo de referencia de la unidad productiva objeto de evaluación y constituyen, junto a θ_0 , las variables que se tienen que calcular en el modelo. Las variables s_i^+ y s_r^- son la holgura de cada una de las $m + s$ restricciones del modelo. Por tanto, este modelo dual calcula la eficiencia desde una orientación input. La unidad productiva evaluada, DMU_0 , es completamente eficiente si se cumple que el índice de eficiencia es igual a 1, $\theta_0 = 1$, y todas las variables de holgura son nulas, esto es, $s_i^+ = s_r^- = 0$. Si la unidad productiva evaluada presenta un valor óptimo de $\theta_0^* < 1$, la entidad es ineficiente desde el punto de vista técnico, por cuanto puede reducir las cantidades empleadas de todos sus inputs en una proporción igual a $(1 - \theta_0^*)$. Además, si alguna de las variables de holgura asociada a los inputs, s_i^+ , toma un valor positivo, entonces el input i puede reducirse en la cuantía s_i^+ sin alterar los restantes inputs y outputs. Si la variable de holgura que

resulta positiva afecta a una restricción de outputs, s_r^- , entonces es posible aumentar la cantidad producida de este output r específico sin alterar los restantes inputs y outputs. Por otra parte, el desarrollo matemático del problema dual asociado al modelo CCR primal, con una orientación output y en su versión lineal es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & \eta_0 - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^+ + \sum_{r=1}^s s_r^- \right) \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^+ = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^- = \eta_0 y_{r0}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & s_i^+ \geq 0 \\
 & s_r^- \geq 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

Se observa que en el modelo CCR dual con una orientación output la función objetivo exige la maximización del índice de eficiencia η_0 . De esta manera, el modelo trata de determinar el máximo incremento radial de producción $(\eta_0 - 1)$ que debe realizar una unidad productiva para llegar a ser eficiente. La resolución del modelo implica calcular tantos problemas de programación lineal como unidades productivas existan en la muestra. En el modelo (5) podemos interpretar que sus primeras m restricciones tratan de determinar si existe alguna entidad, real o ficticia, que utilice menos *inputs* que los consumidos por la entidad evaluada. Las s restricciones siguientes garantizan que la comparación se establecerá con aquellas unidades que, además, produzcan al menos lo mismo que ella. Estos niveles de *inputs* y *outputs* de referencia se generan como combinaciones lineales de las cantidades utilizadas por las entidades reales que forman parte del grupo de referencia, que matemáticamente se corresponden con aquellas unidades productivas para las que $\lambda_j > 0$. La teoría de la dualidad asegura que, si una variable dual es positiva, su restricción correspondiente en el primal está saturada, es decir, se cumplirá con igualdad, por tanto $\lambda_j > 0$ indica que

$$\sum_{r=1}^s u_{r0} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{ij} = 0,$$

lo que implica

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{r0} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{i0} x_{ij}} = 1,$$

y por tanto la unidad productiva j es eficiente. Las entidades en las que $\lambda_j > 0$ permiten construir una unidad hipotética con unos *inputs* y unos *outputs* dados respectivamente por las expresiones $\sum \lambda_j x_{ij}$ y $\sum \lambda_j y_{rj}$, respectivamente, que es perfectamente eficiente y que sirve como punto de referencia en la evaluación de la eficiencia de la entidad que se evalúa.

Si $\lambda_j = 0$, entonces se obtiene

$$\sum_{r=1}^s u_{r0} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{ij} < 0$$

que implica

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{r0} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{i0} x_{ij}} < 1$$

y por tanto la entidad j es ineficiente y no formará parte del grupo de referencia de la entidad objeto de evaluación.

Por consiguiente, los resultados que pueden obtenerse al evaluar la eficiencia de una determinada unidad productiva DMU_0 son los siguientes:

Una primera situación posible consiste en que la unidad productiva que evaluamos DMU_0 sea eficiente.

Como señalan Charnes, Cooper y Rhodes (1978), la eficiencia de una unidad productiva exige la concurrencia simultánea de dos condiciones: el índice de eficiencia debe ser igual a 1 y, por otra parte, las variables de holgura de todos los inputs y los outputs deben ser nulas, esto es¹³, $s_i^+ = 0$ y $s_r^- = 0$. En este caso, no existe en la muestra ninguna otra unidad productiva que consuma, como mucho, los mismos recursos que la DMU y produzca, al menos, lo mismo que ella. Por consiguiente, todas las variables λ_j serán nulas, excepto la correspondiente a la propia entidad que evaluamos, λ_0 que valdrá 1.

Una segunda posibilidad consiste en que la unidad productiva DMU_0 sea ineficiente. En este caso, algún $\lambda_j > 0$ con $j \neq 0$. Por consiguiente, en la muestra existe alguna entidad que consume como mucho los mismos recursos que la DMU_0 y produce al menos lo mismo que ella. Además, la ineficiencia de la unidad evaluada se puede caracterizar hasta de tres formas diferentes:

En primer lugar, la unidad productiva evaluada puede obtener un índice de eficiencia unitario y no satura las restricciones (alguna de las variables de holgura es distinta de 0). Esto indica que no es posible ningún incremento (reducción) radial de los outputs (*inputs*), pero sí un incremento (reducción) específico y no radial de algún output (*input*).

En segundo lugar, el índice de eficiencia es distinto de 1 y todas las variables de holgura son nulas. En este caso, la unidad productiva no es eficiente, en la medida en que es posible obtener un incremento radial en todos sus outputs sin alterar los recursos que utiliza.

Y una última posibilidad viene caracterizada cuando se obtiene un índice de eficiencia no unitario y alguna variable de holgura es positiva. En este caso, la eficiencia de la DMU_0 exige primero un incremento radial en todos sus outputs en la proporción que determina el índice de eficiencia y, seguida-

¹³ Los resultados que se obtienen con el modelo DEA no permiten comparar o discriminar entre dos unidades productivas que se encuentran situadas en la frontera eficiente.

mente, un incremento (disminución) específico y no radial del *output (input)* en el que aparece la holgura.

Por tanto, un índice de eficiencia unitario es una condición necesaria, pero no suficiente, para alcanzar la eficiencia técnica, pues además se exige que las variables de holgura sean nulas. Una ratio de eficiencia unitaria implica que la unidad productiva se sitúa sobre la frontera de producción. Si, además, las variables de holgura son nulas entonces dicha unidad se sitúa en el subconjunto eficiente de la frontera de posibilidades de producción.

Las coordenadas de una unidad productiva que se sitúa sobre la frontera vienen dadas por (y_{r0}^*, x_{i0}^*) , que representan los objetivos de producción y de consumo óptimos, respectivamente, y se obtienen de las siguientes expresiones, según sea maximización o minimización:

MAXIMIZACIÓN OUTPUT	MINIMIZACIÓN INPUT
$y_{r0}^* = y_{r0} \theta^* + s_{r0}^*$	$y_{r0}^* = y_{r0} + s_{r0}^*$
$x_{i0}^* = x_{i0} - e_{i0}^*$	$x_{i0}^* = \theta^* x_{i0} - e_{i0}^*$

Por consiguiente, combinando las variables de holgura con los resultados de índice de eficiencia podemos obtener un resultado global respecto del ahorro potencial en input y el incremento potencial en outputs que resulta de enorme interés desde una perspectiva de gestión. Para ello basta con aplicar a cada valor observado de los inputs el porcentaje de reducción global debido a la ineficiencia y restarle el valor de la variable de holgura. En el caso de los outputs, al valor observado se le aplica el porcentaje de incremento potencial debido a la ineficiencia y se la suma el valor de la variable de holgura.

3.3.2 Ampliación rendimientos de escala: Modelo DEA BCC

A un mayor nivel de producción o escala de operaciones puede verificarse que la unidad productiva exhiba un mayor nivel de eficiencia, derivado del aprovechamiento de las economías de escala. Cuando el modelo se especifica con rendimientos constantes a escala, se está obviando la influencia que la escala concreta en que opera una organización puede tener sobre sus

posibilidades de producción. Para detectar las potenciales fuentes de ineficiencia, que provienen de la escala de operaciones en la que opera una entidad, se requiere formular un modelo como el que plantean Banker, Charnes y Cooper (BCC) en 1984, caracterizando una función de producción con rendimientos variables a escala. La formulación matemática de un modelo BCC es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \theta_0 - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^+ + \sum_{r=1}^s s_r^- \right) \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^+ = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^- = \theta_0 y_{r0}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 0 \\
 & \quad \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & \quad \quad s_i^+ \geq 0 \\
 & \quad \quad s_r^- \geq 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

La versión dual del modelo (6):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{i0} - u_0 \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^s u_{r0} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{i0} x_{ij} + u_0 \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & \quad \quad \sum_{i=1}^m u_{r0} y_{r0} = 1, \\
 & \quad \quad u_{r0} \geq \varepsilon \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \quad \quad v_{i0} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{7}$$

El modelo¹⁴ BCC permite obtener una cuantificación de la eficiencia técnica pura, no contaminada por los efectos de la escala en la que opera ca-

¹⁴ El método propuesto por Farrell (1957) consistía en dividir la muestra total en subgrupos de entidades, atendiendo a su tamaño, y estimar una frontera de posibilidades de producción para cada subgrupo. Si

da entidad. Por tanto, este modelo permite separar la eficiencia técnica y la eficiencia de escala de las unidades productivas. Cuando la tecnología presenta rendimientos variables a escala significa que es posible tener rendimientos crecientes, constantes o decrecientes a lo largo de la frontera de posibilidades de producción, por lo que la frontera puede incluir unidades con ineficiencias en la escala, pero técnicamente eficientes dentro de esa escala de operaciones. La medida de eficiencia estimada con rendimientos constantes a escala es siempre menor o igual que la medida de eficiencia que se estima con rendimientos variables a escala¹⁵. En efecto, la ratio de eficiencia al permitir rendimientos variables de escala es mayor, ya que no se consideran las posibles ineficiencias derivadas de no operar en la escala más productiva¹⁶. Por otra parte, con rendimientos constantes a escala, la medida de eficiencia que se obtiene con una orientación input es igual al inverso de la medida orientada al output¹⁷. En cambio, esta relación entre las estimaciones de eficiencia, según la orientación del modelo, no se mantiene con un modelo BCC. De ahí la importancia de seleccionar la orientación apropiada del modelo, de acuerdo a la naturaleza concreta del problema que se está evaluando; si en el análisis se busca incrementar la productividad, una orientación output parecería adecuada, en cambio si interesa reducir el coste es más coherente utilizar una orientación input. Las medidas de eficiencia proporcionadas por ambos modelos serán iguales si, y sólo si, la unidad productiva en el modelo con rendimientos variables a escala opera en la escala más productiva, esto es, si la solución óptima del modelo con rendimientos constantes a escala satisface la restricción de convexidad. Por último, el cociente entre el índice de eficiencia con rendimientos constantes a escala y con rendimientos variables a escala reflejará una medida de la eficiencia de escala.

El modelo CCR permite que cualquier valor no negativo de λ_j sea posible y, por tanto, que unidades de gran escala sean comparadas con unidades de reducida escala (y a la inversa), posibilidades que en la práctica pueden resultar inapropiadas. La inclusión de la restricción $\sum \lambda_j = 1$ en el modelo BCC garantiza que los

los índices de eficiencia son aproximadamente iguales a los que se obtienen cuando se utiliza una muestra completa, esto significa que no existen efecto de escala afectando a los índices de eficiencia.

¹⁵ La demostración rigurosa de este resultado se encuentra en Grosskopf (1986).

¹⁶ La frontera con rendimientos variables de escala queda envuelta por la frontera de producción estimada, al asumir rendimientos constantes de escala.

¹⁷ La demostración de este resultado se encuentra en Seiford y Thrall (1990).

puntos de comparación serán las combinaciones lineales convexas de las entidades que reflejan las mejores prácticas técnicas para cada escala de operación. Esto es, con rendimientos variables a escala se garantiza que las comparaciones se van a establecer entre unidades homogéneas en cuanto a la escala de operación y no con relación a extrapolaciones de entidades que operan a diferente escala.

Banker, Charnes y Cooper (1984) demuestran que el tipo de rendimientos a escala en que opera una entidad puede obtenerse a partir de la solución óptima del modelo BCC. La medida de los rendimientos de escala se asocia con el signo de la variable dual que denominamos u_0 de manera que:

- Si $u_0 < 0$, la tecnología de producción presenta rendimientos crecientes de escala.
- Si $u_0 = 0$, la tecnología de producción presenta rendimientos constantes de escala.
- Si $u_0 > 0$, la tecnología de producción presenta rendimientos decrecientes de escala.

Otra forma alternativa de calcular los rendimientos a escala de cada entidad es la que sugiere Banker (1984). Este autor demuestra que la estimación de los rendimientos de escala puede derivarse del sumatorio de las variables λ_j del modelo CCR en cualquiera de sus versiones. En concreto demuestra que:

- Si $\sum \lambda_j < 1$, la tecnología de producción presenta rendimientos crecientes a escala.
- Si $\sum \lambda_j = 1$, la tecnología de producción presenta rendimientos constantes a escala.
- Si $\sum \lambda_j > 1$, la tecnología de producción presenta rendimientos decrecientes a escala.

Capítulo 4

DEA en la incertidumbre

4.1 Introducción

Un proceso de producción, o un mecanismo de servicio, por lo general consiste en manipular inputs a fin de obtener outputs, pero esto no significa que la valoración y medición de este proceso sea sencilla. Las situaciones reales a menudo no son rígidas y deterministas y no pueden ser descritas con precisión, aunque se hayan fijado unas variables (inputs/outputs) que creamos que las describen por completo. La descripción completa de un sistema real requerirá seguro más detalle y, por tanto, más variables de las que cualquier humano podría reconocer, procesar y comprender simultáneamente y no sólo por el elevado número que requeriría sino por la precisión en la medición de esas variables.

En los últimos años han aparecido algunos modelos que permiten calcular la eficiencia teniendo en cuenta la incertidumbre. Estos modelos utilizan o bien técnicas probabilísticas o bien técnicas fuzzy. En estos casos puede ser más apropiado entender los valores y parámetros como datos numéricos fuzzy que pueden ser representados mediante números fuzzy o incluso intervalos fuzzy. La teoría de conjuntos fuzzy es un instrumento eficaz y riguroso para solucionar los problemas en los que la fuente de imprecisión es la ausencia de un criterio claramente definido.

La teoría de conjuntos fuzzy fue concebida por Zadeh (1965a) en la década de los sesenta y su objetivo es incluir en el formalismo matemático la incertidumbre inherente a un gran número de fenómenos de diversa índole. En esencia, consiste en sustituir los conjuntos tradicionales o crisp¹⁸, a los cuales un elemento dado puede pertenecer o no, por los conjuntos fuzzy, caracterizados por la función de pertenencia que indican el grado de pertenencia de cada elemento x al conjunto fuzzy considerado.

La programación matemática fuzzy nos proporciona una herramienta para hacer frente a la incertidumbre natural inherente a algunos procesos de producción. Podemos encontrar varios enfoques fuzzy para la evaluación de la eficiencia en la literatura DEA. Sengupta (1992) considera fuzzy tanto el objetivo como las restricciones y analiza el modelo DEA fuzzy resultante utilizando el método de Zimmermann (1976). Triantis y Girod (1998) usan el método de Carlsson y Korhonen (1998) en una aplicación desarrollada en el contexto de una línea de pre-impresión y embalaje que inserta folletos comerciales en los periódicos. Kao y Liu (2000) desarrollan un método para encontrar las funciones de pertenencia de los índices de eficiencia fuzzy cuando algunas observaciones son números fuzzy, la idea se basa en los α -cortes y el principio de extensión de Zadeh (1965 a). La aproximación de Hougaard, J.L. (1999) permite utilizar las puntuaciones de eficiencia técnica en combinación con otras fuentes de información como opiniones de expertos para la toma de decisiones, por ejemplo. Entani et al.(2002) proponen un modelo DEA con un intervalo de eficiencia que consiste en la eficiencia obtenida desde el punto de vista pesimista y optimista. Este modelo, que es capaz de tratar con datos fuzzy, también considera intervalos de ineficiencia. En el enfoque de Guo y Tanaka (2001) se utilizan técnicas de programación posibilística. Inuiguchi et al. (1990) y Lai y Hwang (1992) se refieren a la programación lineal con coeficientes imprecisos limitada por la distribución posibilística. Podemos encontrar diferentes clasificaciones en Zimmermann (1996), Leung (1998) o Lujandjula (1989). Posteriormente por ejemplo Dubois et al. en el 2000 presentan un estudio completo de los avances sobre el análisis con intervalo fuzzy. En el 2003 León et al. utilizan la programación lineal fuzzy al ofrecer un nuevo enfoque para evaluar la eficiencia con modelos DEA, este enfoque se basa en los métodos de clasificación que compara los α -cortes. Boscá et al. en 2011, presenta un método para la clasificación de

¹⁸ El adjetivo crisp “nítido” se utiliza como adjetivo opuesto a fuzzy “borroso o difuso”.

un conjunto de Unidades de toma de Decisiones de acuerdo a su nivel de eficiencia teniendo en cuenta la incertidumbre en los datos.

La potencia de la teoría fuzzy se debe a que a través de la pertenencia a un conjunto se puede modelizar cualquier situación. A continuación describiremos, brevemente pero con rigor, algunos de los conceptos que necesitamos de la teoría fuzzy.

4.2 Teoría conjuntos fuzzy

Un conjunto fuzzy es una generalización de un conjunto clásico y la función de pertenencia una generalización de la función característica.

Definición 1. Sea X un conjunto Universal. Un *conjunto fuzzy* (o subconjunto fuzzy) \tilde{A} de X es un conjunto

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)), x \in X\}$$

donde $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0,1]$ es una función, llamada *función de pertenencia*, que indica el grado de pertenencia a \tilde{A} de los elementos de X .

Ya que en la definición anterior nos estamos refiriendo a un universo X , posiblemente muchos elementos de un conjunto fuzzy tendrán asociado un valor nulo de la función de pertenencia. Normalmente estos valores no suelen escribirse y se consideran sólo aquellos elementos del universo X con un grado de pertenencia al conjunto \tilde{A} no nulo, que constituyen el llamado *soporte* de \tilde{A} :

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \{x : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

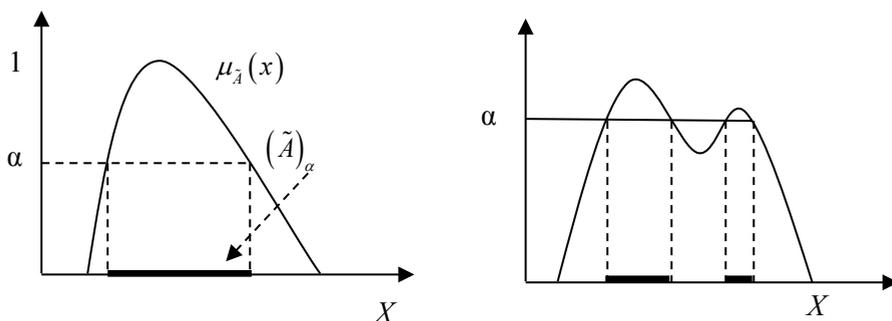
Para estudiar los diferentes grados de pertenencia $\alpha \in [0,1]$, se define un α -corte de un conjunto \tilde{A} como el conjunto crisp

$$(\tilde{A})_{\alpha} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

Si todos los α -cortes son convexos, se dice que el conjunto \tilde{A} es convexo. Un conjunto fuzzy convexo se puede definir como (Tanaka 1997):

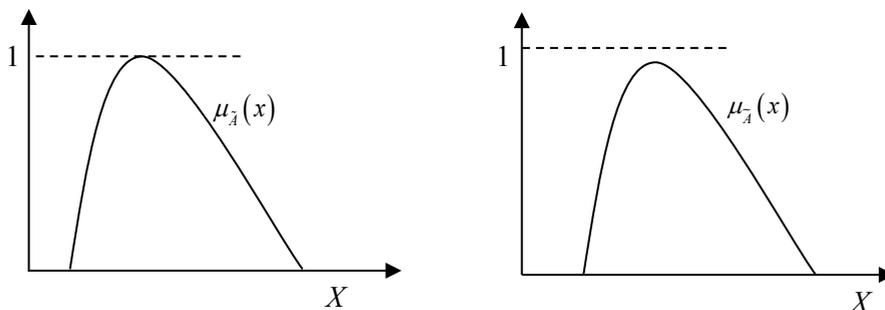
$$\tilde{A} \text{ es convexo } \forall x \in [x_1, x_2] \subset \mathbb{R} \text{ se verifica: } \mu_{\tilde{A}}(x) > \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

Figura 14: Un subconjunto fuzzy convexo y otro no convexo.



Un subconjunto fuzzy \tilde{A} se llama normal sí $\max \mu_{\tilde{A}}(x) = 1, \forall x \in X$. En otro caso \tilde{A} se llama subnormal.

Figura 15: Un subconjunto fuzzy normal y otro subnormal



Se define número fuzzy como un conjunto fuzzy normal y convexo cuya función de pertenencia es una función continua a trozos.

Las operaciones y conceptos de las matemáticas tradicionales basadas en la lógica Booleana pueden extenderse a los conjuntos fuzzy a partir del denominado principio de extensión de Zadeh.

Definición 1. Sean n conjuntos universo $\{X_i\}_{i=1}^n$, y consideremos el producto cartesiano $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Dados $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ conjuntos fuzzy de X_1, \dots, X_n respectivamente, un conjunto universo Y y una aplicación $f : X \rightarrow Y$, la construcción de un nuevo conjunto fuzzy \tilde{B} en Y se realiza mediante

$$\tilde{B} = \left\{ (y, \mu_{\tilde{B}}(y)) : y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \right\},$$

donde

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min \{ \mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \} & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (8)$$

Operaciones con conjuntos fuzzy

Las operaciones básicas entre conjuntos fuzzy son las siguientes:

- Conjunto complementario \tilde{A} de un conjunto fuzzy \tilde{A} es aquel cuya función de pertenencia viene dada por:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

- La unión de dos conjuntos fuzzy \tilde{A} y \tilde{B} es un conjunto fuzzy $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ en el conjunto universal X cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \}$$

- La intersección de dos conjuntos fuzzy \tilde{A} y \tilde{B} es un conjunto fuzzy $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ en el conjunto universal X cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \}$$

Las funciones que definen la unión y la intersección de conjuntos fuzzy pueden generalizarse, a condición de cumplir ciertas restricciones; ya que tanto las funciones de pertenencia de los conjuntos fuzzy como sus operaciones dependen del contexto. Las funciones que cumplen estas condiciones se conocen como *Norma Triangular* (T-norma) y *Conorma Triangular* (S-norma).

Definición 3. La Norma triangular o T-norma es la operación binaria $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que cumple las propiedades

Conmutativa: $x T y = y T x$

Asociativa: $x T (y T z) = (x T y) T z$

Monótona creciente: Si $x \leq y$, $w \leq z$ entonces $x T w \leq y T z$.

Condiciones frontera: $x T 0 = 0$, $x T 1 = x$

Son funciones que permite obtener la función de pertenencia del conjunto intersección del siguiente modo $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = T(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}})$, $x \in X$, entre las más conocidas están la T-norma mínimo, T-norma producto algebraico, T-norma diferencia acotado, etc. La función $\min(\wedge)$ es una T-norma, que corresponde a la operación de intersección en conjuntos clásicos cuyos grados de pertenencia están en $\{0,1\}$. Siendo esta función la extensión natural de la intersección en conjuntos fuzzy.

Definición 4. La Conorma triangular o S-norma es la operación binaria $S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que cumple las propiedades:

Conmutativa: $x S y = y S x$.

Asociativa: $x S (y S z) = (x S y) S z$.

Monótona creciente: Si $x \leq y$, $w \leq z$ entonces $x S w \leq y S z$.

Condiciones frontera $x S 0 = 0$, $x S 1 = x$.

Con la S-norma se trata de representar la intersección de dos conjuntos fuzzy, en este caso se necesita una función del tipo $S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ tal que permita obtener una función de pertenencia del conjunto unión de forma que $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = S(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}})$, $x \in X$; entre las más conocidas están la S-norma máximo, S-norma suma-producto, S-norma suma drástica, etc. La función $\max(\vee)$ es una S-norma, que corresponde a la función de unión en conjuntos clásicos cuyos grados de pertenencia están en $\{0,1\}$. Siendo esta función la extensión natural de la unión en conjuntos fuzzy.

Entre todas las posibilidades de números fuzzy, los más usados son los que se conocen como números *LR-fuzzy*.

Definición 5. Un número fuzzy \tilde{M} se dice que es un número LR-fuzzy

$$\tilde{M} = (m^L, m^R, \gamma^L, \gamma^R)_{L,R}$$

si su función de pertenencia viene definida por

$$\mu_{\tilde{M}}(r) = \begin{cases} L\left(\frac{m^L - r}{\gamma^L}\right), & r \leq m^L, \\ 1, & m^L < r < m^R \\ R\left(\frac{r - m^R}{\gamma^R}\right), & r \geq m^R, \end{cases} \quad (9)$$

donde L y R son funciones referencia, es decir,

$$L, R : [0, +\infty[\rightarrow [0, 1]$$

son estrictamente decrecientes en su soporte¹⁹ con

$$\text{supp}(\tilde{M}) = \{r : \mu_{\tilde{M}}(r) > 0\},$$

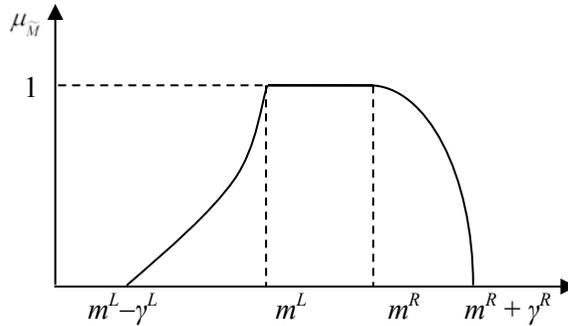
y son funciones semicontinuas superiormente de modo que $L(0) = R(0) = 1$.

Cuando $\text{supp}(\tilde{M})$ es un conjunto acotado²⁰, L y R están definidas en $[0, 1]$ y verifican que $L(1) = R(1) = 0$. Gráficamente sería:

¹⁹ Considerando el sistema de referencia centrado en un punto perteneciente al intervalo $]m^L, m^R[$

²⁰ Obsérvese en la Figura 16 que, si bien L y R están definidos en el intervalo $[0, 1]$,

$\text{supp}(\tilde{M}) = [m^L - \gamma^L, m^R + \gamma^R]$.

Figura 16: Función de pertenencia para el número LR -fuzzy (Boscá 2004)

Cuando las funciones L y R son lineales, es decir,

$$L(z) = R(z) = \max\{0, 1 - z\},$$

el número fuzzy recibe el nombre de *número trapezoidal* y si además $m^L = m^R$ entonces se tiene un número fuzzy *triangular* $\tilde{M} = (\gamma^L, m, \gamma^R)_{L,R}$.

Cuando $\gamma^L = \gamma^R$ se denomina número fuzzy *triangular simétrico* que denotamos por $\tilde{M} = (\gamma, m)$, donde m es el centro y γ la extensión.

La aritmética de los números fuzzy queda determinada por el principio de extensión. Además, las cuatro operaciones básicas entre números LR también pueden llevarse a cabo a partir de la compatibilidad entre el principio de extensión y los α -cortes.

Por otra parte, ya que cualquier número crisp se puede considerar un número fuzzy con una función de pertenencia degenerada con un solo valor en el soporte, la aritmética entre números fuzzy y crisp también queda definida a partir del principio de extensión. Por ejemplo la adición de un número crisp a un número fuzzy no produce más que una traslación de este último, mientras que multiplicar un número fuzzy por un número crisp tiene por efecto un cambio de escala en el primero.

Si a es un número crisp y \tilde{A} un número fuzzy:

$$a + \tilde{A} = \{(y, \mu_{a+\tilde{A}}(y)) : y = x + a, x \in \text{supp}(\tilde{A})\},$$

donde

$$\mu_{a+\tilde{A}}(y) = \mu_{\tilde{A}}(y-a), \forall y : y-a \in \text{supp}(\tilde{A}).$$

Y

$$a\tilde{A} = \left\{ (y, \mu_{a\tilde{A}}(y)) : y = xa, x \in \text{supp}(\tilde{A}) \right\},$$

donde

$$\mu_{a\tilde{A}}(y) = \mu_{\tilde{A}}(y/a), \forall y : y/a \in \text{supp}(\tilde{A}).$$

A continuación nos referimos a combinaciones lineales de números fuzzy, pensando en lo que serán las restricciones de los posteriores problemas de programación lineal que tendremos que manejar. Aunque hay diversas formas de evaluar una combinación lineal de números fuzzy, se empleará una de las más utilizadas en programación lineal fuzzy, la *T-norma mínimo* que, para números *LR*-fuzzy consiste en lo siguiente:

Dados n números fuzzy $\{\tilde{a}_j\}_{j=1}^n$ donde cada \tilde{a}_j es un número *LR*-fuzzy $\tilde{a}_j = (a_j^L, a_j^R, \gamma_j^L, \gamma_j^R)_{LR}$, $j = 1, \dots, n$ y n escalares $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, estamos interesados en poder calcular $\sum_{j=1}^n \tilde{a}_j x_j$.

Es conocido (ver Inuiguchi, Ichihashi y Tanaka 1990) que si se dan las igualdades siguientes: $L_1 = \dots = L_n =: L$ y $R_1 = \dots = R_n =: R$, el resultado de $\tilde{a}'x$, donde $\tilde{a}' = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$ y $\tilde{x}' = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ es el número *L-R* fuzzy:

$$\tilde{a}'\tilde{x}' = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j x_j = \left(\sum_{j=1}^n a_j^L x_j, \sum_{j=1}^n a_j^R x_j, \sum_{j=1}^n \gamma_j^L x_j, \sum_{j=1}^n \gamma_j^R x_j \right)_{LR} \quad (10)$$

4.2.1 Ordenación de números fuzzy

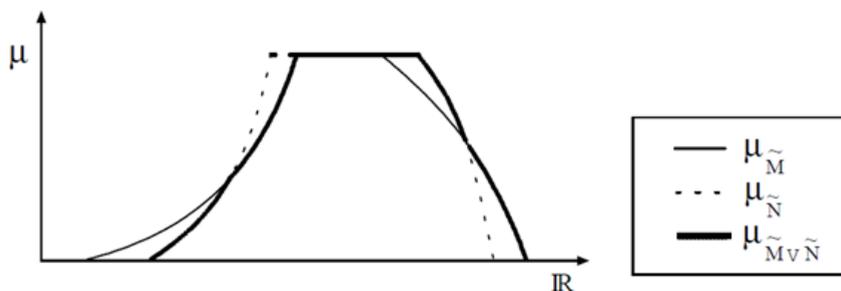
La comparación de números fuzzy ha recibido la atención de muchos investigadores, dadas sus numerosas aplicaciones en la práctica (Wang y Kerre 2001, 2001a). El proceso de clasificación y ordenación puede depender de la situación modelizada y del entorno al que se aplica.

Recordemos la definición de un máximo de dos números fuzzy, *operador fuzzy-max*, que es la extensión del operador máximo entre dos números reales a los números fuzzy a través del principio de extensión.

Definición 6. Dados \tilde{M} y \tilde{N} dos números fuzzy, el máximo de \tilde{M} y \tilde{N} , denotado por $\tilde{M} \vee \tilde{N}$, es el número fuzzy cuya función de pertenencia viene dada por

$$\mu_{\tilde{M} \vee \tilde{N}}(r) = \sup_{r=s \vee t} \{ \mu_{\tilde{M}}(s) \wedge \mu_{\tilde{N}}(t) \}. \quad (11)$$

Figura 17: Ilustración del operador fuzzy-max (Sirvent 2001)



Basado en el operador fuzzy-max, Dubois y Prade (1980) definen la siguiente relación de orden (**relación de orden f-m**).

Definición 7. Dados \tilde{M} y \tilde{N} dos números fuzzy, tenemos:

$$\tilde{M} \succeq \tilde{N} \Leftrightarrow \tilde{M} \vee \tilde{N} = \tilde{M}. \quad (12)$$

Desde un punto de vista operativo, resulta útil hacer uso del hecho de que $\tilde{M} \vee \tilde{N} = \tilde{M}$ si y sólo si (Ramík y Římánek 1985)

$$\forall h \in [0,1] \text{ se verifica: } \inf \{ s : \mu_{\tilde{M}}(s) \geq h \} \geq \inf \{ t : \mu_{\tilde{N}}(t) \geq h \} \quad \text{y} \quad (13)$$

$$\sup \{ s : \mu_{\tilde{M}}(s) \geq h \} \geq \sup \{ t : \mu_{\tilde{N}}(t) \geq h \}.$$

Para el caso particular para números LR-fuzzy se tiene:

Lema 1. Dados dos números LR -fuzzy $\tilde{M} = (m^L, m^R, \gamma^L, \gamma^R)_{L,R}$, $\tilde{N} = (n^L, n^R, \beta^L, \beta^R)_{L,R}$ la condición (12) se convierte en

$$\forall h \in [0,1] \text{ se verifica: } m^L - L^*(h)\gamma^L \geq n^L - L'^*(h)\beta^L \quad \text{y} \quad (14)$$

$$m^R + R^*(h)\gamma^R \geq n^R + R'^*(h)\beta^R$$

donde

$$L^*(h) = \sup\{z : L(z) \geq h\}, \quad L'^*(h) = \sup\{z : L'(z) \geq h\},$$

$$R^*(h) = \sup\{z : R(z) \geq h\}, \quad R'^*(h) = \sup\{z : R'(z) \geq h\},$$

puesto que $m^L - z\gamma^L$ y $m^R + z\gamma^R$ son, respectivamente, decreciente y creciente en z .

Igual razonamiento servirá para obtener las expresiones de $L'^*(h)$ y $R'^*(h)$ ²¹.

Lema 2. En las mismas condiciones del lema 1, supongamos que tanto \tilde{M} como \tilde{N} son acotadas y que $L = L'$ y $R = R'$. Entonces, la condición (13) se reduce a

$$\begin{aligned} m^L &\geq n^L \\ m^R &\geq n^R \\ m^L - \gamma^L &\geq n^L - \beta^L \\ m^R + \gamma^R &\geq n^R + \beta^R. \end{aligned} \quad (15)$$

Demostración. Veamos primero que (13) implica (14):

Puesto que L y R son estrictamente decrecientes en $[0,1]$ y, por definición, $L(0) = R(0) = 1$, se tendrá que $L^*(1) = R^*(1) = 0$. De forma similar, se deduce que $L^*(0) = R^*(0) = 1$, ya que $L(1) = R(1) = 0$ por ser \tilde{M} y \tilde{N} acotados. Así si se cumple (13), las desigualdades correspondientes a $h = 1$ se convierten en $m^L \geq n^L$ y

²¹ Obsérvese que al igual que el resto de funciones definidas de forma análoga a $L^*(h)$ puede tomar el valor de $+\infty$.

$m^R \geq n^R$, mientras que las correspondientes a $h = 0$ se transforman en $m^L - \gamma^L \geq n^L - \beta^L$ y $m^R + \gamma^R \geq n^R + \beta^R$.

Recíprocamente si se cumple (14), para cualquier $h \in [0,1]$ tenemos que $\lambda = 1 - L^*(h) \in [0,1]$, y por lo tanto:

$$\begin{aligned} m^L - L^*(h)\gamma^L &= m^L - (1-\lambda)\gamma^L = \lambda m^L + (1-\lambda)(m^L - \gamma^L) \geq \\ &\geq \lambda n^L + (1-\lambda)(n^L - \beta^L) = n^L - (1-\lambda)\beta^L = n^L - L^*(h)\beta^L. \end{aligned}$$

De forma análoga obtendríamos

$$m^R + R^*(h)\gamma^R \geq n^R + R^*(h)\beta^R.$$

Y, finalmente, si tanto \tilde{M} como \tilde{N} son números fuzzy triangulares, la comparación de ambos mediante la relación de orden f-m es casi inmediata.

Lema 3. Sean $\tilde{M} = (m, m, \gamma^L, \gamma^R)_{L,R}$ y $\tilde{N} = (n, n, \beta^L, \beta^R)_{L,R}$, dos números fuzzy triangulares. Entonces, la condición (12) se convierte en

$$\begin{aligned} m &\geq n \\ m^L - \gamma^L &\geq n^L - \beta^L \\ m^R + \gamma^R &\geq n^R + \beta^R \end{aligned}$$

La demostración es trivial.

Veamos a continuación la definición de **Orden h -posibilístico**.

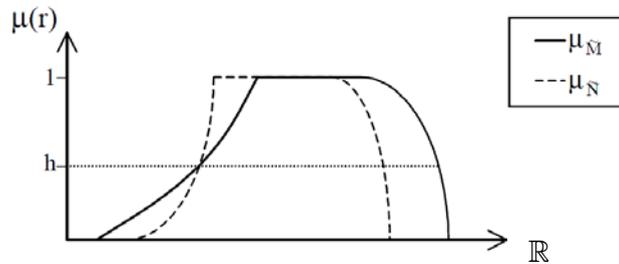
La relación $\tilde{M} \succeq \tilde{N}$ definida por (11) no proporciona un orden total sino parcial. En ocasiones, esto da lugar al caso no concluyente en el que no se verifica ni $\tilde{M} \succeq \tilde{N}$ ni $\tilde{N} \succeq \tilde{M}$ (véase Figura 18). Una mejora de la relación (11) desde este punto de vista, debida a Tanaka, Ichihashi y Asai (1990), consiste en considerar la comparación asociada a un nivel h correspondiente al grado de optimismo del decisor. Para ello, dichos autores definen $\tilde{M} \succeq^h \tilde{N}$ de la forma siguiente:

$$\tilde{M} \succeq^h \tilde{N} \Leftrightarrow \begin{cases} \inf \{s : \mu_{\tilde{M}}(s) \geq k\} \geq \inf \{t : \mu_{\tilde{N}}(t) \geq k\} \\ \sup \{s : \mu_{\tilde{M}}(s) \geq k\} \geq \sup \{t : \mu_{\tilde{N}}(t) \geq k\} \end{cases} \forall k \in [h, 1] \quad (16)$$

A partir de ahora nos referiremos a la relación anterior como orden *h*-posibilístico.

La Figura 18 muestra una situación en la que $\tilde{M} \succeq^h \tilde{N}$. En ella observamos ha función de pertenencia de dos números *L-R* fuzzy para los cuales la relación \succeq no es concluyente, mientras que podemos afirmar que $\tilde{M} \succeq^h \tilde{N}$ para cualquier nivel $\alpha \geq h$.

Figura 18: Ilustración de la relación $\tilde{M} \succeq^h \tilde{N}$ (Sirvent 2001)



De cara al posterior desarrollo es importante señalar que en el caso de comparar dos números *L-R* fuzzy, $\tilde{M} = (m, m, \gamma^L, \gamma^R)_{L,R}$ y $\tilde{N} = (n, n, \beta^L, \beta^R)_{L,R'}$, un argumento similar al utilizado en la demostración del lema 1 nos permitiría concluir que la parte derecha de la relación (16) es equivalente a la condición (13) reemplazando el argumento *h* por *k* y la expresión $\forall h \in [0, 1]$ por $\forall k \in [h, 1]$. De igual modo, si tanto \tilde{M} como \tilde{N} son no acotados y, además, $L = L'$ y $R = R'$, razonando de la misma forma que en el lema 2, obtendríamos que $\tilde{M} \succeq^h \tilde{N}$ si y sólo si

$$\begin{aligned} m^L &\geq n^L \\ m^R &\geq n^R \\ m^L - L^*(h)\gamma^L &\geq n^L - L^*(h)\beta^L \\ m^R + R^*(h)\gamma^R &\geq n^R + R^*(h)\beta^R, \end{aligned}$$

reduciéndose de nuevo las dos primeras restricciones a una sola en el caso de que \tilde{M} y \tilde{N} fueran números triangulares.

4.3 Modelos DEA fuzzy

Hatami-Marbini et al. en 2011 realizaron un estudio en el que proporcionan una clasificación y revisión de los métodos DEA fuzzy de los últimos veinte años. Estos autores en su artículo indican que las aplicaciones de la teoría de conjuntos fuzzy en el DEA se suelen clasificar en cuatro grupos (Lertworasirikul et al. 2003a, 2003b, Lertworasirikul 2002, Karsak. 2008):

- (1) enfoque de tolerancias,
- (2) enfoque basado en α -cortes,
- (3) enfoque clasificación fuzzy, y
- (4) enfoque de posibilidad.

Además de los cuatro enfoques mencionados, Hatami-Marbini et al. (2011) introducen una nueva categoría para agrupar los trabajos pioneros que no entran en ninguna de las clasificaciones anteriores. Un resumen de estos enfoques DEA fuzzy desarrollados en los últimos veinte años se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3: Clasificación de referencias DEA fuzzy (Hatami-Marbini et al. 2011)

Clasificación	Referencias	
Enfoque de Tolerancias	Sengupta (1992a)	Sengupta (1992a)
Enfoque basado en α -cortes	Azadeh y Alem(2010)	Ching y Che (2010)
	Zerafat Angiz et al. (2010a)	Hatami Marbini et al. (2010a)
	Hatami Marbini et al. (2010d)	Hatami Marbini et al. (2009)
	Saati y Mernariani (2009)	Tlig y Rebai (2009)
	Noura y Saljooghi (2009)	Jahanshahloo et al (2009a)
	Wang et al. (2009b)	Hosseinzadeh Lorfi et al (2009a)
	Liu y Chuang (2009)	Li y Yang (2008)
	Karsak (2008)	Azadeh et al (2008)
	Ghapanchi et al (2008)	Liu (2008)
	Hosseinzadeh Lotfi et al (2007c)	Saneifard et al (2007)
	Allahviranloo et al (2007)	Azadeh et al (2007)
	Kuo y Wang (2007)	Kao y Liu (2007)
	Liu et al (2007)	Jahanshahloo et al (2007b)
	Zhang et al. (2005)	Saati y Memariani (2005)
	Wu et al. (2005)	Ghu (2005)
	Kao y Li (2005)	Triantis (2003)

	Kao y Li (2003)	Saati et al. (2002)
	Entani et al. (2002)	Guh (2001)
	Chen (2001)	Kao (2001)
	Kao y Liu (2000b)	Kao y Li (2000a)
	Girod y Triantis (1999)	Maeda et al. (1998)
	Triantis y Girod (1998)	Girod (1996)
Enfoque clasificación Fuzzy	Hatami-Marbini et al. (2010b)	Hatami-Marbini et al. (2010c)
	Hatami-Marbini et al. (2010e)	Hatami-Marbini et al. (2009)
	Jahanshahloo et al. (2009b)	Soleimani-damaneh (2009)
	Hossein-zadeh Lotfi et al. (2009b)	Bagherzadeh Valami (2009)
	Guo (2009)	Hossein-zadeh Lotfi et al. (2009c)
	Juan (2009)	Sanei et al. (2009)
	Zhou et al. (2008)	Guo y Tanaka (2008)
	Noora y Karami (2008)	Soleimani-damaneh (2008)
	Jahanshahloo et al. (2008)	Hossein-zadeh Lotfi y Mansauri (2008)
	Hossein-zadeh Lotfi et al. (2007b)	Jahanshahloo et al. (2007a)
	Pal et al. (2007)	Hossein-zadeh Lotfi et al. (2007a)
	Soleimani-damaneh et al. (2006)	Saati y Memariani (2006)
	Lee et al. (2005)	Molavi et al. (2005)
	Jahanshahloo et al. (2004a)	Dia (2004)
	Lee (2004)	Leon et al. (2003)
Lertworasirikul (2002)	Guo y Tanaka (2001)	
Enfoque de Posibilidades	Wen y Li (2009)	Khodabakhshi et al. (2009)
	Jiang y Yang (2007)	Wu et al. (2006)
	Ramezanzadeh et al. (2005)	García et al. (2005)
	Lertworasirikul et al. (2003a)	Lertworasirikul et al. (2003b)
	Lertworasirikul et al. (2003c)	Lertworasirikul et al. (2002b)
	Lertworasirikul et al. (2002a)	Lertworasirikul et al. (2002)
	Wen et al. (2010)	
Otros modelos en DEA Fuzzy	Qin y Liu (2009)	Qin y Liu (2010)
	Wang et al. (2009a)	Luban (2009)
	Qin et al. (2009)	Uemura (2006)
	Hougaard (2005)	Wang et al. (2005)
	Sheth and Triantis (2003)	Guo et al. (2000)
	Hougaard (1999)	Zerafat Angiz et al. (2010b)

De los enfoques indicados en la tabla anterior hemos considerado dos en particular, nos referimos en primer lugar al *enfoque basado en α -cortes*, modelo desarrollado por Kao y Liu (2000), y en segundo lugar al *enfoque clasificación fuzzy*, en concreto el propuesto por León, T. et al. (2003).

En los modelos DEA fuzzy que usamos no se ha utilizado la notación inicial de los autores y se ha preferido adaptar, en la medida de lo posible, a la notación utilizada en las secciones anteriores.

En estos modelos se consideran los inputs y los outputs de cada una de las DMUs como números fuzzy.

4.3.1 Modelo DEA fuzzy. Enfoque basado en α -cortes

El punto de vista que vamos a desarrollar es el propuesto por Kao y Liu (2000). Como ya hemos expuesto anteriormente, para tratar cuantitativamente la imprecisión en un proceso de decisión, Bellman y Zadeh (1970) y Zadeh (1973) introducen la noción de borrosidad, de conjunto fuzzy. En el enfoque convencional de DEA, se han seleccionado un conjunto de pesos que satisfacen una serie de restricciones para dar la medida de eficiencia más alta posible para cada DMU. Cuando algunas observaciones son fuzzy, el objetivo y las restricciones en el proceso de decisión se convierten en fuzzy también. La idea básica utilizada en Kaufmann (1975) consiste en aplicar α -cortes a partir del principio del extensión de Zadeh (Kao et al. (1999), Yager (1986), Zadeh (1978), Zimmermann (1991)) para transformar el modelo DEA fuzzy en una serie de modelos convencionales, DEA crisp. Los modelos convencionales se resuelven mediante la programación lineal en la versión dual del problema, versión más utilizada en Economía puesto que su resolución es más simple al utilizar diversos programas informáticos.

En primer lugar veamos el modelo elegido.

En un conjunto de n DMUS, supongamos que los m inputs y s outputs vienen determinados por los números fuzzy \tilde{X}_{ij} e \tilde{Y}_{rj} cuyas funciones de pertenencia son respectivamente $\mu_{\tilde{X}_{ij}}$ y $\mu_{\tilde{Y}_{rj}}$. Los α -cortes de estos números fuzzy pueden expresarse mediante intervalos del siguiente modo

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ij} &= \left[\min_{x_{ij}} \{x_{ij} \in \tilde{X}_{ij} \mid \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha\}, \max_{x_{ij}} \{x_{ij} \in \tilde{X}_{ij} \mid \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha\} \right] = \\ &= \left[x_{ij}(\alpha)^L, x_{ij}(\alpha)^U \right], \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{rj} &= \left[\min_{y_{rj}} \{y_{rj} \in \tilde{Y}_{rj} \mid \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) \geq \alpha\}, \max_{y_{rj}} \{y_{rj} \in \tilde{Y}_{rj} \mid \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}) \geq \alpha\} \right] = \\ &= \left[y_{rj}(\alpha)^L, y_{rj}(\alpha)^U \right], \quad 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (18)$$

Para incorporar los valores expresados en (17) y (18) al modelo (2), Kao y Liu (2000) proponen el modelo

$$\begin{aligned} \tilde{E}_k &= \max \sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{kr} / \left(v_0 + \sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ri} \right) \\ \text{s.a.} \quad &\sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{jr} / \left(v_0 + \sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ji} \right) \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ &u_r, v_i \geq 0, \quad v_0 \text{ sin restricciones.} \end{aligned}$$

Como es habitual y dada la dificultad de trabajar con este tipo de modelos consideramos el dual de su modelo lineal asociado²², que viene dado por

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{j_0} &= \text{Min } \theta_{j_0} \\ \text{s.a.} \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_{ij} \leq \theta_{j_0} \tilde{x}_{ij_0}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj} \geq \tilde{y}_{rj_0}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\ &\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{19}$$

En segundo lugar, establecemos la función de pertenencia a partir de intervalos. Basado en el principio de extensión de Zadeh (1965) la función de pertenencia de la k -ésima DMU puede obtenerse como

$$\mu_{\tilde{E}_k}(z) = \sup_{x_{ij}, y_{rj}} \min \left\{ \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}), \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}), \forall i, j, r \mid z = E_k(x_{ij}, y_{rj}) \right\}, \tag{20}$$

donde $E_k(x_{ij}, y_{rj})$ se calcula como en (4).

El enfoque para la construcción de la función de pertenencia μ_{E_k} propuesto es obtener los α -cortes de $\mu_{\tilde{E}_k}$.

Siguiendo a Kao y Liu (2000) la estructura de los α -cortes es anidada, por lo tanto para construir la función de pertenencia de $\mu_{\tilde{E}_k}$, es suficiente encontrar el límite inferior y el límite superior del α -corte. En otras palabras, podemos describir la función de pertenencia dada en (20) mediante los α -cortes

²² Por seguir la notación de la mayoría de la bibliografía citada en esta memoria, cuando trabajamos con DEA fuzzy la DMU que se está analizando se describe con j_0 en lugar del 0 como subíndice.

$$E_{j_0}(\alpha) = [E_{j_0}^L(\alpha), E_{j_0}^U(\alpha)], \quad (21)$$

para todo nivel de pertenencia $\alpha \in [0,1]$.

Los extremos de los intervalos se obtienen mediante los dos programas lineales siguientes:

- (1) Cálculo de la eficiencia en los denominados casos desfavorables (corresponde al extremo inferior de los intervalos expresados en (21), en este caso, se suponen mayores inputs y menores outputs para la DMU j_0 y lo contrario para las demás. El cálculo se realiza a través de α -cortes, para $\alpha \in [0,1]$ se obtiene $E_{j_0}^L(\alpha)$ usando el modelo (22).

$$\begin{aligned} E_{j_0}^L(\alpha) &= \text{Min } \theta_{j_0} \\ \text{s.a. } \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j x_{ij}^L(\alpha) + \lambda_{j_0} x_{ij_0}^U(\alpha) &\leq \theta_{j_0} x_{ij_0}^U, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j y_{rj}^U(\alpha) + \lambda_{j_0} y_{rj_0}^L(\alpha) &\geq y_{rj_0}^L, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (22)$$

- (2) Cálculo de la eficiencia en el denominado *casos favorables* (corresponde al extremo superior de los intervalos expresados en (22)), en este caso, se suponen menores inputs y mayores outputs para la DMU j_0 , y lo contrario para las demás. Como en el caso anterior, para $\alpha \in [0,1]$ se obtiene $E_{j_0}^U(\alpha)$ usando el modelo (23)

$$\begin{aligned} E_{j_0}^U(\alpha) &= \text{Min } \theta_{j_0} \\ \text{s.a. } \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j x_{ij}^U(\alpha) + \lambda_{j_0} x_{ij_0}^L(\alpha) &\leq \theta_{j_0} x_{ij_0}^L, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \lambda_j y_{rj}^L(\alpha) + \lambda_{j_0} y_{rj_0}^U(\alpha) &\geq y_{rj_0}^U, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (23)$$

Podemos considerar $E_k^L(\alpha)$ y $E_k^U(\alpha)$ como funciones de $\alpha \in [0,1]$. Así, si ambas son invertibles respecto de α , podemos definir

$$L(z) = [E_k^L(\alpha)]^{-1} \text{ y } R(z) = [E_k^U(\alpha)]^{-1}$$

de modo que la función de pertenencia se construye como:

$$\mu_{\tilde{E}_k}(z) = \begin{cases} L(z), & z_1 \leq z \leq z_2, \\ 1, & z_2 < z < z_3, \\ R(z), & z_3 \leq z \leq z_4. \end{cases} \quad (24)$$

En caso de no invertibilidad, el conjunto de intervalos

$$\{[E_k^L(\alpha), E_k^U(\alpha)], \alpha \in [0, 1]\}$$

todavía revela la forma de $\mu_{\tilde{E}_k}$ aunque la definición exacta de la función no se conozca explícitamente.

Con este método, cuando alguno de los datos de inputs u outputs son fuzzy se obtendrán las medidas de eficiencia como un conjunto fuzzy para cada una de las DMUs. De esta forma, dispondremos de n conjuntos fuzzy $\{\tilde{E}\}_{j=1}^n$.

Hemos obtenido así, como anticipábamos, los intervalos de eficiencia fuzzy y por tanto una valoración de la eficiencia de las DMUs estudiadas.

Como ilustración del procedimiento descrito en los modelos (22) y (23) mostramos el ejemplo siguiente cuyos datos están tomados de manera arbitraria. Supongamos 3 inputs ($m = 3$), 2 outputs ($r = 2$) y 4 DMUs ($j = 4$). Y supongamos que los valores son números fuzzy triangulares.

Tabla 4: Datos de inputs y outputs.

DMU	Input 1	Input 2	Input 3	Output 1	Output 2
1	(4,5,6)	(1,3,6)	(2,2,2)	(8,9,10)	(12,13,16)
2	(10,12,14)	(4,4,4)	(2,6,8)	(7,7,7)	(4,5,8)
3	(3,4,5)	(1,1,1)	(2,3,6)	(5,6,7)	(6,7,8)
4	(2,2,2)	(4,4,8)	(1,4,5)	(6,9,9)	(6,6,6)

Los modelos a resolver para el caso de la DMU 2 serán:

$$E_2^L(\alpha) = \text{Min } \theta_2$$

s.a.

$$\lambda_1(4 + \alpha(5 - 4)) + \lambda_3(3 + \alpha(4 - 3)) + \lambda_4 2 + \lambda_2(14 + \alpha(12 - 14)) \leq \theta_2(14 + \alpha(12 - 14))$$

$$\lambda_1(1 + \alpha(3 - 1)) + \lambda_3 1 + \lambda_4 4 + \lambda_2 4 \leq \theta_2 4$$

$$\lambda_1 2 + \lambda_3(2 + \alpha(3 - 2)) + \lambda_4(1 + \alpha(4 - 1)) + \lambda_2(8 + \alpha(6 - 8)) \leq \theta_2(8 + \alpha(6 - 8))$$

$$\lambda_1(10 + \alpha(9 - 10)) + \lambda_3(7 + \alpha(6 - 7)) + \lambda_4 9 + \lambda_2 7 \geq 7$$

$$\lambda_1(16 + \alpha(13 - 16)) + \lambda_3(8 + \alpha(7 - 8)) + \lambda_4 6 + \lambda_2(4 + \alpha(5 - 4)) \geq (4 + \alpha(5 - 4))$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0,$$

$$E_2^U(\alpha) = \text{Min } \theta_2$$

s.a.

$$\lambda_1(6 + \alpha(5 - 6)) + \lambda_3(5 + \alpha(4 - 5)) + \lambda_4 2 + \lambda_2(10 + \alpha(12 - 10)) \leq \theta_2(10 + \alpha(12 - 10))$$

$$\lambda_1(6 + \alpha(3 - 6)) + \lambda_3 1 + \lambda_4(8 + \alpha(4 - 8)) + \lambda_2 4 \leq \theta_2 4$$

$$\lambda_1 2 + \lambda_3(6 + \alpha(3 - 6)) + \lambda_4(5 + \alpha(4 - 5)) + \lambda_2(2 + \alpha(6 - 2)) \leq \theta_2(2 + \alpha(6 - 2))$$

$$\lambda_1(8 + \alpha(9 - 8)) + \lambda_3(8 + \alpha(6 - 8)) + \lambda_4(6 + \alpha(9 - 6)) + \lambda_2 7 \geq 7$$

$$\lambda_1(12 + \alpha(13 - 12)) + \lambda_3(6 + \alpha(7 - 6)) + \lambda_4 6 + \lambda_2(8 + \alpha(5 - 8)) \geq (8 + \alpha(5 - 8))$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0.$$

Alguno de los modelos que aplicaremos en el Capítulo 5 para el estudio de la eficiencia de nuestras DMUs serán de este tipo.

4.3.2 Modelo DEA fuzzy. Enfoque clasificación fuzzy

Veamos a continuación el llamado *enfoque de clasificación fuzzy*. El modelo DEA CCR orientación input se puede extender al siguiente modelo DEA fuzzy

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{j_0} &= \text{Min } \theta_{j_0} \\
\text{s.a. } \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_{ij} &\leq \theta_{j_0} \tilde{x}_{ij_0}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj} &\geq \tilde{y}_{rj_0}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
\lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{25}$$

donde \tilde{x}_{ij} , $i = 1, \dots, m$, e \tilde{y}_{rj} , $r = 1, \dots, s$, son los inputs y outputs fuzzy de la DMU $_j$, $j = 1, \dots, n$, que reemplazan a los inputs y outputs crisp del modelo CCR habitual y el orden f-m \succeq sustituye a la relación \geq crisp.

En el caso que todos los números fuzzy involucrados sean del tipo *LR*-fuzzy, todos ellos tengan soporte finito y todas las funciones de referencia por la izquierda asociadas a un mismo input u output sean iguales, al igual que todas las funciones de referencia por la derecha asociadas a un mismo input u output, esto es, si

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{ij} &= (x_{ij}^L, x_{ij}^R, \gamma_{ij}^L, \gamma_{ij}^R)_{L_{ij}, R_{ij}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\
\tilde{y}_{rj} &= (y_{rj}^L, y_{rj}^R, \beta_{rj}^L, \beta_{rj}^R)_{L'_{ij}, R'_{ij}}, \quad r = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n, \\
L_{i1} &= \dots = L_{im} =: L_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
L'_{r1} &= \dots = L'_{rn} =: L'_r, \quad r = 1, \dots, s, \\
R_{i1} &= \dots = R_{in} =: R_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
R'_{r1} &= \dots = R'_{rn} =: R'_r, \quad r = 1, \dots, s.
\end{aligned} \tag{26}$$

dado que los inputs y outputs son números *L-R*, las restricciones del problema (25) pueden considerarse como desigualdades entre números *L-R*, y si, en particular, \succeq se interpreta como en (12) y las combinaciones lineales como en (10), entonces el problema (25) se puede transformar en el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
& E_{j_0} = \text{Min } \theta_{j_0} \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^L \leq \theta_{j_0} x_{i j_0}^L \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
& \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^R \leq \theta_{j_0} x_{i j_0}^R \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
& \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^L - \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij}^L \leq \theta_{j_0} x_{i j_0}^L - \theta_{j_0} \gamma_{i j_0}^L \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
& \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^R + \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij}^R \leq \theta_{j_0} x_{i j_0}^R + \theta_{j_0} \gamma_{i j_0}^R \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
& \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^L \geq y_{r j_0}^L \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
& \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^R \geq y_{r j_0}^R \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
& \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^L - \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_{rj}^L \geq y_{r j_0}^L - \beta_{i j_0}^L \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
& \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^R + \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_{rj}^R \geq y_{r j_0}^R + \beta_{i j_0}^R \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
& \quad \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{27}$$

Debemos señalar que las condiciones (26) que permiten simplificar el problema (25) (equivalente a un problema de programación lineal crisp con infinitas restricciones) al problema (27) (formado por un número finito de restricciones) son muy poco restrictivas en el contexto particular de evaluación de la eficiencia que nos ocupa. Recordemos que los números fuzzy \tilde{x}_{ij} e \tilde{y}_{rj} representan los valores posibles de los inputs y outputs de cada una de las DMUS analizadas, siendo por tanto habitual en la práctica que todos ellos tengan soporte finito. Además, ya que todos los números fuzzy que aparecen en una misma restricción corresponden a un mismo input u output, resulta razonable asumir que todos ellos tengan las mismas funciones de referencia (por ejemplo que todos ellos fueran números trapezoidales, lo que incluiría el caso particular de los triangulares).

Una alternativa al planteamiento anterior consiste en utilizar la relación de orden h -posibilística, \succeq^h , en lugar de la relación de orden f-m, \succeq . En este caso, lo que se obtendría es una evaluación de la eficiencia relativa de un conjunto de

DMUs para determinado nivel de posibilidad h , $0 \leq h \leq 1$, como aplicación del modelo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{j_0} &= \text{Min } \theta_{j_0} \\
 \text{s.a. } \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_{ij} \lesssim^h \theta_{j_0} \tilde{x}_{ij_0} \quad i = 1, \dots, m, \\
 &\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj} \gtrsim^h \tilde{y}_{rj} \quad r = 1, \dots, s, \\
 &\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{28}$$

En la práctica, el modelo (28) podría utilizarse bien para obtener una evaluación de la eficiencia asociada a cierto nivel de posibilidad prefijado por el decisor, que respondiera a alguna situación de interés para el mismo, o bien, si éste no manifestara ninguna preferencia, para obtener una evaluación de la misma a lo largo de un barrido de valores h en el intervalo $[0, 1]$, lo que proporcionaría una descripción detallada de la eficiencia para los diferentes niveles de posibilidad.

Como sucediera en el planteamiento anterior con el modelo DEA fuzzy (25), si todos los números fuzzy involucrados son del tipo L - R , tienen soporte finito y todas las funciones de referencia por la izquierda asociadas a un mismo input u output coinciden, al igual que todas las de la derecha, el problema (28) puede ser transformado en el siguiente problema de programación lineal sin más que aplicar (16):

$$\begin{aligned}
 (E_{j_0})^h &= \text{Min } \theta_{j_0} \\
 \text{s.a. } \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^L \leq \theta_{j_0} x_{ij_0}^L \quad i = 1, \dots, m, \\
 &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^R \leq \theta_{j_0} x_{ij_0}^R \quad i = 1, \dots, m, \\
 &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^L - L_i^*(h) \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij}^L \leq \theta_{j_0} x_{ij_0}^L - L_i^*(h) \theta_{j_0} \gamma_{ij_0}^L \quad i = 1, \dots, m,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^R + R_i^*(h) \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij}^R &\leq \theta_{j_0} x_{j_0}^R + R_i^*(h) \theta_{j_0} \gamma_{j_0}^R \quad i = 1, \dots, m, \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{jr}^L &\geq y_{rj_0}^L \quad r = 1, \dots, s, \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^R &\geq y_{rj_0}^R \quad r = 1, \dots, s, \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^L - L_r^*(h) \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_{rj}^L &\geq y_{rj_0}^L - L_r^*(h) \beta_{rj_0}^L \quad r = 1, \dots, s, \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^R + R_r^*(h) \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_{rj}^L &\geq y_{rj_0}^R + R_r^*(h) \beta_{rj_0}^L \quad r = 1, \dots, s.
\end{aligned} \tag{29}$$

El valor óptimo del problema (29) es entonces la puntuación de eficiencia de la DMU j_0 para el nivel de posibilidad prefijado h , Veamos a continuación que, como consecuencia directa de la utilización de la relación de orden h -posibilística, la puntuación de eficiencia de una unidad se mantendrá igual o empeorará conforme aumente el nivel de h .

Proposición 1 La puntuación de eficiencia h - posibilística de una DMU j_0 es una función decreciente del nivel de posibilidad h .

Demostración. Sea $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*, \theta_{j_0}^*)$ una solución óptima de (28) al nivel h . Entonces $\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_{ij} \leq^\alpha \theta_{j_0} \tilde{x}_{ij_0}$, $i = 1, \dots, m$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj} \geq^\alpha \tilde{y}_{rj_0}$, $r = 1, \dots, s$, $\forall \alpha \in [h, 1]$, de donde se deriva que $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*, \theta_{j_0}^*)$ es factible para el problema (28) asociado a cualquier nivel α , $h \leq \alpha \leq 1$. Por lo tanto, el valor óptimo de cualquiera de estos problemas será menor o igual que $\theta_{j_0}^*$.

La proposición anterior refleja una cierta flexibilidad o relajación en la evaluación de la eficiencia fuzzy propuesta, ya que una unidad evaluada como ineficiente a un nivel de posibilidad $h = 1$ puede pasar a ser eficiente a un nivel de posibilidad inferior. Esta relación entre el nivel de posibilidad y la puntuación de eficiencia asociada responde a la idea intuitiva de que a medida que se limita la posi-

bilidad de considerar escenarios más arriesgados (conforme aumenta h) disminuye la eficiencia.

Por otro lado, es evidente que la evaluación correspondiente al nivel de posibilidad $h = 0$ con el modelo (28) coincide con la evaluación proporcionada por el modelo (25) que resultaba de utilizar el orden f-m, de ahí que afirmemos que esta alternativa proporciona una descripción más detallada de la eficiencia.

A menudo, los tomadores de decisiones están interesados en una clasificación completa, más allá de la clasificación en dos grupos, los eficientes y los que no lo son, con el fin de perfeccionar la evaluación de las unidades. Cabe señalar que los métodos que vamos a mostrar en las siguientes secciones se podrían considerar post-análisis ya que no sustituyen a los modelos DEA estándar, sino más bien proporciona un valor añadido.

Capítulo 5

Aplicaciones DEA fuzzy

5.1 Introducción

El método DEA diferencia el grupo de DMUs en dos conjuntos, las que son eficientes y definen la frontera de Pareto y las que son ineficientes.

Inicialmente la metodología DEA presentó una serie de limitaciones. En los primeros modelos se imponían una serie de hipótesis que podían ser restrictivas en determinados campos de aplicación. No obstante, un gran número de extensiones y mejoras de los métodos iniciales han incrementado notablemente su flexibilidad para tratar una amplia variedad de problemas. De hecho, en algo más de tres décadas desde su nacimiento, ha experimentado un vertiginoso desarrollo, conformándose como una importante herramienta de análisis en los estudios de eficiencia; el elevado número de aplicaciones pone de manifiesto la aceptación entre investigadores y analistas de distintos ámbitos relacionados con la evaluación de la eficiencia (Adler, N. et al. 2002, Sirvent, I. 2001).

La medida de eficiencia obtenida por DEA, como ya se ha comentado, puede usarse para clasificar DMUs, pero esta clasificación no puede aplicarse para unidades eficientes (Hosseinzadeh et al. 2011). Uno de los temas de investigación más interesantes, hoy en día, es discriminar entre las DMUs eficientes. Dentro del DEA existen publicaciones en las que los investigadores han tratado de mejorar las capa-

tidades diferenciales del DEA para ordenar las DMUs, un resumen de los mismos se pueden consultar en Adler (2002). Todos los métodos de clasificación son aplicaciones (post análisis) ya que completan la información proporcionada por la metodología DEA, pero nunca la sustituye.

De entre los procedimientos de clasificación de unidades eficientes dentro del contexto DEA crisp se encuentran: el modelo de *super-efficiency*, que evalúa cada DMU frente a una combinación lineal de todas las demás excluyendo de esa combinación la DMU evaluada. La particularidad es que elimina del programa la restricción de la DMU bajo estudio, los parámetros que se optimizan dejan de estar acotados por 1 y los valores se alejan más de uno cuanto más eficiente es la DMU evaluada, mostrando por tanto una ordenación. Otro modelo es el de *cross-efficiency*, que proporciona una evaluación por pares de las diferentes unidades, lo que hace posible obtener un ordenamiento.

Dado que nuestro objetivo es la ordenación cuando la situación modelizada está afectada de incertidumbre, utilizaremos modelos DEA fuzzy para ordenar los resultados de eficiencia fuzzy obtenidos. Siguiendo el enfoque basado en α -cortes propuesto por Kao y Liu (2000), los métodos fuzzy utilizados en el trabajo serán:

- modelo dual DEA-fuzzy, basado en α -cortes (descrito en el apartado 4.3.1).
- modelo de *super-efficiency*²³ fuzzy basados en α -cortes (Sección 5.3).
- modelo de *cross-efficiency*²⁴ fuzzy basado también en α -cortes (Sección 5.4).

Estas propuestas son tres aplicaciones basadas en DEA fuzzy. Así pues, este capítulo se desarrolla como sigue:

Teniendo en cuenta que para clasificar las DMUs, necesitamos ordenar números fuzzy, dedicamos la sección 5.2 a exponer cuatro métodos que nos proporcionaran los criterios de ordenación de DMUs que utilizaremos posteriormente.

²³ Esta ampliamente aceptada la utilización del término inglés *super-efficiency* en lugar de súpereficiencia, y en adelante lo usaremos así.

²⁴ Esta ampliamente aceptada la utilización de *cross-efficiency* en lugar de eficiencia cruzada, en adelante usaremos el término *cross-efficiency*.

La Sección 5.3 del capítulo la dedicamos al modelo super-efficiency (Anderson y Petersen 1993) y el modelo de super-efficiency-fuzzy siguiendo un modelo propio basado en la super-efficiency y el planteamiento fuzzy de Kao y Liu (2000).

Continuamos en la Sección 5.4 desarrollando las bases del modelo cross-efficiency (Doyle, J.R. et al. 1994) y finalizamos el capítulo con el método de cross efficiency fuzzy, propuesto también por nosotros, que se basa de nuevo, para el planteamiento fuzzy, en el modelo de Kao y Liu. Indicamos que con este último modelo no se obtienen intervalos de eficiencia fuzzy, pero sí nos permite establecer preferencias entre las DMUs.

5.2 Clasificación de las DMUs

Utilizado el enfoque basado en α -cortes (ver sección 4.3.1) se obtiene las medidas de eficiencia como un conjunto fuzzy para cada una de las DMUs, los intervalos de eficiencia fuzzy nos dan una valoración de la eficiencia de las DMUs estudiadas y una tarea posterior es clasificar las unidades.

En este contexto ordenar las DMUs basándonos en la eficiencia consiste en ordenar los números fuzzy \tilde{E}_{j_0} cuya función de pertenencia viene definida por los intervalos $E_{j_0}(\alpha)$.

A diferencia de los números reales, los números fuzzy no tienen un orden natural establecido. Una idea sencilla para comparar los números fuzzy es transformar estos valores en números críps que denominaremos índices y tomarlos como referencia para establecer una ordenación similar a la de los números críps, no con el objetivo de establecer una clasificación final, sino que se puede emplear como elección de mejores alternativas, además establecer una relación de orden, tal como proponen Wang y Kerre (2001, 2001a) que recoge, clasifica y relaciona algunos de estos métodos. La mayoría de los métodos requieren de la función de pertenencia de los números fuzzy para su clasificación.

Cuando los modelos DEA se aplican a casos reales, es común trabajar con un elevado número de DMUs, de inputs y outputs, y esto hace que sea desaconsejable utilizar métodos de clasificación basada en las relaciones fuzzy (las que Wang y

Kerre 2001a clasifican como "tercera clase de ordenación"), porque necesitan $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaciones (a veces para cada α -corte). Por estas razones, se recurre a métodos basados en índices numéricos y, entre ellos, destacan los basados en α -cortes. A continuación, resumimos brevemente algunos de estos procedimientos junto con el criterio de ordenación.

(1) *Método de Yager*. R. R. Yager (1981) propuso cuatro índices para clasificar cantidades fuzzy en $[0,1]$, de los que probablemente el más utilizado e intuitivo sea

$$Y(\tilde{E}_j) = \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{1}{2} (E_j^L(\alpha) + E_j^U(\alpha)) d\alpha. \quad (30)$$

(2) *Método de Chen y Klein* (1997). Estos autores consideran el índice

$$CK(\tilde{E}_j) = \frac{\sum_{l=0}^N (E_j^U(\alpha_l) - c)}{\sum_{l=0}^N (E_j^U(\alpha_l) - c) - \sum_{l=0}^N (E_j^L(\alpha_l) - d)} \quad (31)$$

donde $c = \min_{ij} \{E_{ij}^L(\alpha_l)\}$ y $d = \max_{ij} \{E_{ij}^U(\alpha_l)\}$.

(3) *Método Distancia de Manhattan* (León J.M.2003). Si dos números fuzzy coinciden la distancia de Manhattan d_M vale 0 por lo que tomamos como medida el valor $1 - d_M$:

$$1 - d_M(\tilde{E}_j) = 1 - \frac{1}{2N} \left(\sum_{j=1}^N |E_j^U(\alpha) - 1| + \sum_{j=1}^N |E_j^L(\alpha) - 1| \right). \quad (32)$$

Los tres índices anteriores, que representaremos genéricamente por Ψ , permiten establecer una ordenación de la forma siguiente (Boscá et al.2011, Wang , X. et al. 2001, Wang, X. et al. 2001a)

Definición 8. El conjunto de números fuzzy $\{\tilde{E}_j\}_{j=1}^n$ se puede ordenar como:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_j &\succ \tilde{E}_k \text{ para } \Psi \Leftrightarrow \Psi_j > \Psi_k \\
\tilde{E}_j &\approx \tilde{E}_k \text{ para } \Psi \Leftrightarrow \Psi_j = \Psi_k \\
\tilde{E}_j &\succeq \tilde{E}_k \text{ para } \Psi \Leftrightarrow \Psi_j \geq \Psi_k
\end{aligned} \tag{33}$$

Pensamos que presentan como inconveniente que la igualdad de índices no permite diferenciar entre DMUs, por esta razón consideramos interesante incluir otro criterio, en concreto el criterio de ordenación propuesto por Boscá et al. (2011), que consiste en un procedimiento heurístico. Se obtienen valores crisp a partir de los números *LR*-fuzzy que representan los inputs y outputs mediante la aplicación de un algoritmo que proporciona dos índices capaces de permitir discernir la preferencia entre las DMUs en caso de igualdad. Las etapas del algoritmo son las descritas a continuación.

(4) *Método estadístico de Boscá et al.* (Boscá, J.E. et al.2011)

Tomamos n DMUs cuyos inputs y outputs se expresan por los números *LR*-fuzzy

$$\tilde{X}_{ij} = \{x_{ij}^L, x_{ij}^U, \gamma_{ij}^L, \gamma_{ij}^U\}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \tag{34}$$

$$\tilde{Y}_{rj} = \{y_{rj}^L, y_{rj}^U, \delta_{rj}^L, \delta_{rj}^U\}, \quad 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq j \leq n \tag{35}$$

El procedimiento para clasificar consiste en seleccionar números crisp a partir de los inputs y outputs *LR*-fuzzy, el algoritmo es el siguiente.

PASO 1: Obtención números crisp:

$$\begin{aligned}
x_{ij}^t &:= x_{ij}^L - \gamma_{ij}^L, \quad x_{ij}^A := \frac{x_{ij}^L + x_{ij}^U}{2}, \quad x_{ij}^T := x_{ij}^U - \gamma_{ij}^U, \\
y_{rj}^t &:= y_{rj}^L - \delta_{rj}^L, \quad y_{rj}^A := \frac{y_{rj}^L + y_{rj}^U}{2}, \quad y_{rj}^T := y_{rj}^U - \delta_{rj}^U.
\end{aligned} \tag{36}$$

PASO 2: Para analizar la eficiencia de la DMU j_0 se resuelve el siguiente modelo DEA

$$\begin{aligned}
E(x_{ij}^a, x_{ij_0}^b, y_{rj}^c, y_{rj_0}^d) &= \text{Max } \eta_0 \\
\text{s.a. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^a &\leq x_{i0}^b, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^c &\geq \eta_0 y_{rj_0}^d, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
\lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{37}$$

donde $a, b, c, d \in \{t, A, T\}$.

PASO 3: Construcción del conjunto

$$\Gamma_{j_0} = \left\{ E(x_{ij}^a, x_{ij_0}^b, y_{rj}^c, y_{rj_0}^d) \mid a, b, c, d \in \{t, A, T\} \right\}. \tag{38}$$

PASO 4: Cálculo de los siguientes ratios para la j_0 -unidad:

$$R_{ij_0}^1 = \frac{e_{j_0}}{\text{card}(\Gamma_{j_0})}, \quad R_{ij_0}^2 = \begin{cases} \frac{S_{j_0} - e_{j_0}}{\text{card}(\Gamma_{j_0}) - e_{j_0}}, & \text{card}(\Gamma_{j_0}) \neq e_{j_0} \\ 0, & \text{card}(\Gamma_{j_0}) = e_{j_0} \end{cases} \tag{39}$$

donde

$$S_{j_0} = \sum_{a,b,c,d} E(x_{ij}^a, x_{ij_0}^b, y_{rj}^c, y_{rj_0}^d)$$

e_{j_0} = número de veces que la j_0 -ésima DMU es eficiente, esto es, el valor óptimo obtenido en (37) para esta DMU es 1.

$$\text{card}(\Gamma_{j_0}) = \text{cardinal de } \Gamma_{j_0}.$$

Con este método, Boscá, J.E. et al. (2011) establecen la siguiente ordenación:

Definición 9. El conjunto de números fuzzy $\{\tilde{E}_j\}_{j=1}^n$ se puede ordenar como sigue:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_j \succ \tilde{E}_k &\Leftrightarrow R_j^1 > R_k^1 \text{ o bien } [R_j^1 = R_k^1 \text{ y } R_j^2 > R_k^2] \\
\tilde{E}_j \approx \tilde{E}_k &\Leftrightarrow R_j^1 = R_k^1 \text{ y } R_j^2 = R_k^2
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\tilde{E}_j \succeq \tilde{E}_k \Leftrightarrow R_j^1 \geq R_k^1 \text{ o bien } R_j^2 \geq R_k^2.$$

5.3 Super-efficiency DEA

Como describimos en el capítulo 3, el objetivo de los modelos DEA es evaluar la eficiencia general de las unidades de toma de decisiones (DMU) que son responsables de convertir un conjunto de inputs en un conjunto de outputs, donde las DMUs eficientes se identifican con índices de eficiencia de 1.0 y las DMUs ineficiente con índices de eficiencia inferiores a 1.0. Cuando se está evaluando, la puntuación de la eficiencia de una DMU es medida en referencia a la combinación de un conjunto de DMUs DEA eficientes, que forman una parte de los segmentos en la frontera de eficiencia. Las DMUs eficientes no son comparables entre sí en el CCR y otros modelos DEA, por eso en la última década, algunos investigadores del DEA han iniciado una nueva área conocida como super-efficiency cuyo objetivo es clasificar las DMUs DEA eficientes.

Hasta el momento son varios los modelos desarrollados que siguen esta línea. En Chen Jin-Xiao (2010) encontramos el modelo DEA de super-efficiency en el que la DMU que se está evaluando se excluye del conjunto de referencia.

La super-efficiency inicialmente fue desarrollado por Banker et al. (1989). Posteriormente Andersen y Petersen (1993) introducen una mejora de las capacidades diferenciales del DEA y ha atraído la atención de muchos investigadores. Sin embargo, más tarde surgió el problema de la inviabilidad del modelo en algunos casos (Trall 1996, Zhu 1996). Como se indica en Seiford y Zhu (1998a, b), la no factibilidad se produce bajo la condición de rendimientos de escala variables (VRS) y en casos particulares, bajo el supuesto de rendimientos de escala constantes (CRS). La no factibilidad conduce a dificultades en la evaluación de la eficiencia de las DMUs y, por tanto, restringe el uso de la super-efficiency-DEA. Seiford y Zhu (1999) estudian la no factibilidad de los modelos super-efficiency DEA que han sido ampliamente empleados en la determinación de la estabilidad de las clasificaciones de eficiencia, la medición de cambios de la tecnología y de la productividad, y en la clasificación DEA de las DMU eficientes, identificando DMUs extremas. Proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para la no factibilidad.

Mehrabian et al. (1999) sugieren una modificación a la formulación dual con el fin de asegurar la factibilidad. Tone (2002) propone una medida super-efficiency basada en holuras en input / output con el objetivo de poder clasificar las DMUs.

Hsiao et al. (2011) proponen un modelo DEA fuzzy de super-efficiency basado en holuras, aplicándolo a entidades bancarias y expone un procedimiento para discriminar mejor las DMUs que tienen un mismo índice de eficiencia.

Andersen y Petersen (1993) desarrollaron un nuevo procedimiento para clasificar las unidades eficientes. La metodología permite a una unidad k extremal eficiente lograr una puntuación de eficiencia mayor que uno, eliminando la restricción k -ésima en la formulación original, como se muestra en el modelo (41).

$$\begin{aligned}
 \text{Max } E_k &= \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk} \\
 \text{s.a. } \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, j \neq k, \\
 \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} &= 1 \\
 u_{rk} &> \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 v_{ik} &> \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{41}$$

y que en forma dual asociada es:

$$\begin{aligned}
 E_k &= \text{Min } \theta \\
 \text{s.a. } \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j x_{ij} &\leq \theta x_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Obsérvese que los vectores, x_{ik} e y_{rk} se omiten de la expresión de la izquierda en las restricciones. Los datos asociados con el DMU_k aparecen a la derecha de las restricciones y se omiten en el conjunto de posibilidades de producción.

El modelo de super-efficiency-fuzzy siguiendo el planteamiento de Kao y Liu (2000), a partir del modelo dual es:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_k &= \text{Min } \theta \\
\text{s.a. } \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j \tilde{x}_{ij} &\leq \theta \tilde{x}_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj} &\geq \tilde{y}_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
\lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{43}$$

La función de pertenencia la definimos, como hemos visto en el apartado 4.3.1 por medio de los α -cortes

$$E_k(\alpha) = [E_k^L(\alpha), E_k^U(\alpha)], \tag{44}$$

obtenidos para cada nivel de pertenencia $\alpha \in [0, 1]$. Siguiendo el procedimiento descrito en el apartado 4.3.1, se obtienen los extremos inferiores (caso desfavorable) y extremos superiores (caso favorable) mediante los dos programas lineales siguientes:

$$\begin{aligned}
E_k^L(\alpha) &= \text{Min } \theta \\
\text{s.a. } \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j x_{ij}^L(\alpha) &\leq \theta x_{ik}^U, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j y_{rj}^U(\alpha) &\geq y_{rk}^L, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
\lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
E_k^U(\alpha) &= \text{Min } \theta \\
\text{s.a. } \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j x_{ij}^U(\alpha) &\leq \theta x_{ik}^L, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j y_{rj}^L(\alpha) &\geq y_{rk}^U, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
\lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{46}$$

y obteniendo de este modo n conjuntos fuzzy $\{\tilde{E}_j\}_{j=1}^n$.

A partir de aquí, tal como se describen en la sección 5.2, para obtener una ordenación de las DMUs super-efficiency-fuzzy, recurriremos a métodos basados en α -cortes.

Cabe insistir en que el método discutido aquí lo consideramos post-análisis ya que no sustituyen al modelos DEA, sino que, más bien proporciona un valor añadido.

Como muchos autores (Sirvent 2001), estamos de acuerdo en que no hay que deducir una ordenación de las unidades basado en los índices de eficiencia, ya que estos resultados no son comparables debido al hecho de que las diferentes DMUs fijan diferentes pesos a los inputs y outputs cuando son evaluadas.

A diferencia del DEA que proporciona auto-evaluación, describimos a continuación otro método que proporciona una evaluación por pares de las diferentes unidades, lo cual nos permitirá obtener un nuevo procedimiento de ordenación de las DMUs.

5.4 Cross-efficiency DEA

Otro método útil para superar la dificultad del DEA para discriminar entre las unidades eficientes (Wang 2010), y que vamos a utilizar en nuestros casos de estudio, es el modelo de cross-efficiency o de eficiencia cruzada²⁵ (Sexton et al., 1986; Doyle y Green, 1994, 1995).

En la evaluación cross-efficiency, una vez que se ha resuelto el modelo DEA, en el que se ha obtenido el mejor conjunto de pesos para una DMU en particular, podemos usar ese conjunto para ponderar los inputs y outputs de cada una de las otras DMUs. A partir de aquí calculamos la cross-efficiency de cada una de las otras DMUs (Doyle y Green 1994), desde el punto de vista de nuestra DMU original. El procedimiento se puede repetir para todas las DMUs, y así completar una matriz de cross-efficiency, fila por fila. Las mediciones de la eficiencia habituales de cada DMU se encuentran en la diagonal principal de esta matriz.

²⁵ Esta ampliamente aceptada la utilización de cross-efficiency en lugar de eficiencia cruzada, en adelante usaremos el término de cross-efficiency.

A partir de los valores de filas o columnas se puede obtener un valor promedio de la cross-efficiency de cada DMU. Se espera que la evaluación cross-efficiency pueda garantizar un ordenamiento único para las DMUs cuando se trabaja con pocas DMUs (cuatro o cinco por ejemplo proporcionando una única ordenación (Doyle y Green, 1995).

Debido a su buen poder discriminativo, la evaluación de cross-efficiency se ha utilizado en una variedad de aplicaciones, incluyendo I + D de selección de proyectos (Oral et al., 1991), fabricación flexible de sistemas de vuelo (FMS) (Shang y Sueyoshi, 1995), preferencia de voto (Green et al., 1996), evaluación de diseños de celulares (Talluri y Sarkis, 1997), en control numérico computarizado (CNC) (Sun, 2002), en la asignación de la mano de obra en el sistemas de manufactura celular (CMS) (Ertay y Ruan, 2005), etc.

La evaluación de cross-efficiency también se ha estudiado a fondo teóricamente. Por ejemplo, Anderson et al. (2002) demostraron la naturaleza fija de ponderación de la evaluación cross-efficiency en el caso de un solo input y varias outputs. Sun y Lu (2005) presentan un modelo de perfil cross-efficiency (CEP) basado en la combinación del enfoque perfilado propuesto por Tofallis (1996, 1997) y la medida de cross-efficiency de Doyle y Green (1994). El modelo CEP evalúa cada input por separado y sólo con respecto a los outputs que consumen el input. De esta manera, se obtuvieron clasificaciones inputs-específicas basadas en la evaluación cross-efficiency para dar un perfil para cada DMU.

Bao et al. (2008) ofrece una interpretación alternativa a la evaluación de cross-efficiency desde el punto de vista del análisis de holgura en el DEA. El modelo mixto de programación entera se ha desarrollado para encontrar un mejor orden de clasificación para cada DMU. Liang et al. (2008a) extienden el modelo cross-efficiency de Doyle y Green (1994) mediante la introducción de una serie de objetivos secundarios alternativos para la evaluación cross-efficiency. Liang et al. (2008b) generalizan también el DEA de la cross-efficiency al concepto de juego mediante la visualización de cada DMU como un jugador que busca maximizar su propia eficiencia con la condición de que la adhesión a la eficiencia de cada una de las otras DMUs no se deteriore. Se presenta un algoritmo para obtener los mejores resultados de juegos de cross-efficiency. Demuestran que los óptimos resultados de juego de cross-efficiency constituyen un punto de equilibrio de Nash, que es el equilibrio que se produce cuando cada DMU toma su mejor estrategia sabiendo que

todas conocen las estrategias de las demás y por tanto no hay incentivos individuales para cambiar de estrategia.

Una revisión benevolente del modelo cross-efficiency se puede consultar en Wu, D. (2009) donde se utilizan las cross-efficiency obtenidas para construir una relación de preferencia fuzzy en lugar de la utilización de la media de cross-efficiency para clasificar las DMUs. También Wu, J. et al. (2009a) examinan la evaluación de cross-efficiency desde el punto de vista de juego, los pesos de la última cross-efficiency se determinan utilizando el valor de Shapley en juegos cooperativos (resuelve el reparto de excedentes en juegos corporativos, se asigna a cada jugador en proporción al número de coaliciones vencedores potencialmente en la que participa y en las que es imprescindible). El valor de Shapley es una manera de distribuir las ganancias totales a los jugadores, suponiendo que todos colaboran.

Wu, J. et al. (2009b, c) desarrollaron un modelo de juego de negociación y un modelo de programación entera mixta para la evaluación de cross-efficiency. En el modelo de juego de negociación, cada DMU es vista como un actor independiente y la solución de negociación entre la eficiencia CCR y la cross-efficiency se obtiene mediante el modelo clásico de juego negociación de Nash. Se demostró que la eficiencia de negociación era una solución Pareto. Wang Ying-Ming y Chin Kwai-Sang, (2010) realizan un estudio comparativo de aplicación de diferentes modelos de cross-efficiency.

Dado nuestro interés en introducir la incertidumbre en la cross-efficiency, en primer lugar nos centramos en el modelo inicial desarrollado por Doyle y Green (1994), pasando a continuación a la aplicación propuesta en este trabajo de cross-efficiency fuzzy.

El modelo de cross-efficiency desarrollado por Doyle et al. en 1994, como ya se ha descrito, no sólo tiene en cuenta la autoevaluación inherente en el análisis convencional DEA, sino también considera la evaluación por pares.

Consideremos n DMUs con m inputs y s outputs. Sean x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$), y_{rj} ($r = 1, 2, \dots, s$) los valores respectivos de inputs y outputs de la DMU $_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), entonces la eficiencia relativa E_{kk} de la DMU $_k$ $k \in (1, 2, \dots, n)$ se puede determinar mediante el modelo (1) visto en la sección 3.3.1.

Indicar que se ha realizado un pequeño cambio en la notación de la eficiencia de la DMU evaluada con el objetivo de no confundir entre la eficiencia obtenida

con el modelo CCR y la obtenida con cross-efficiency. A partir de aquí cuando nos referimos a la eficiencia de una DMU en particular usando el modelo DEA inicial (bien fraccional (1) o lineal (2)) utilizamos dos subíndices, en lugar de un solo subíndice como se ha hecho hasta ahora. Es decir,

$$E_{kk} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}}$$

denotará la eficiencia que la DMU_k puede lograr usando sus propios pesos, y la expresión (47) es el valor cross-efficiency de la DMU_j, que refleja la evaluación entre iguales de la DMU_k a la DMU_j (usamos los pesos de la DMU_k para obtener la eficiencia de la DMU_j).

$$E_{jk} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}} \quad (47)$$

Recordemos que en su forma lineal el modelo (1) sería:

$$\begin{aligned} \text{Max } E_{kk} &= \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk} \\ \text{s.a. } \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} &= 1 \\ \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} &\leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ u_{rk} &> \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\ v_{ik} &> \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (48)$$

El paso siguiente es la construcción de una matriz cross-efficiency, ver la Tabla 5, cuya parte central sombreada corresponde a lo que se denomina matriz de cross-efficiency de tal manera que el elemento E_{kk} en la diagonal es la puntuación de eficiencia para cada DMU, eficiencia de la (DMU_k) utilizando el modelo (48), en el que $E_{kk} = 1$ para las unidades eficientes y $E_{kk} < 1$ para las ineficientes. Los otros elementos de la matriz, E_{jk} , son la cross-efficiency de una DMU (denominada

DMU_j) usando los pesos óptimos de DMU_k; estos resultados están comprendidos entre 0 y 1.

Tabla 5: Matriz de cross-efficiency

Cross-efficiency	DMU 1	DMU 2	DMU 3	...	DMU n	<i>Evaluación de sus pares</i>
	<i>Media</i>					
DMU1	E_{11}	E_{12}	E_{13}	...	E_{1n}	A_1
DMU2	E_{21}	E_{22}	E_{23}	...	E_{2n}	A_2
DMU3	E_{31}	E_{32}	E_{33}	...	E_{3n}	A_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
DMU _n	E_{n1}	E_{n2}	E_{n3}	...	E_{nn}	A_n
<i>Media</i>	e_1	e_2	e_3	...	e_n	

Evaluación por pares

El procedimiento de clasificación de cross-efficiency en el contexto DEA utiliza los resultados E_{jk} .

Los valores a lo largo de la columna k se pueden interpretar como una puntuación promedio dada a los pares por la DMU_k (ya que se valora la eficiencia de las otras DMUs utilizando los pesos obtenidos para la DMU_k). Calculamos

$$e_k = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, j \neq k}^n E_{jk}, \quad k = 1, \dots, n$$

donde este promedio se puede hacer con o sin los elementos de la diagonal, es decir, utilizando o no, para hallar el valor medio, la propia eficiencia de la DMU_k. En nuestro caso práctico no la tomamos.

Este promedio no es la única posibilidad, ya que podrían utilizarse puntuaciones mínimas, mediana o varianza (ver Green et al., 1996). Pensamos que los promedios e_k , o cualquier equivalente indicado, son más representativos que la única puntuación E_{kk} que obtenemos con el modelo DEA (resultados de la diagonal), y proporcionan un valor añadido. Como todas las unidades son evaluadas con los mismos conjuntos de pesos, los valores e_k representan mejor la unidad de evaluación y mide las relaciones globales de todas las unidades.

El promedio de los rendimientos a lo largo de la fila j podría ser considerado como la valoración promedio que las otras DMUs dan (usamos los pesos de cada DMU_k para evaluar a la DMU_j) a la DMU_j, con respecto a las que j puede compararse.

$$A_j = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1, k \neq j}^n E_{jk}, \quad j = 1, \dots, n$$

En un mundo agresivo, lo ideal para k sería reducir al mínimo su valoración de los compañeros e_k , así como la maximización su propia auto-evaluación A_k a partir de los pesos de las otras DMUs.

Sin perder de vista el objetivo planteado en este trabajo, la ordenación de DMUs eficientes, recordemos que muchos procesos de producción involucran a menudo inputs y outputs que son muy difíciles de medir de forma precisa ya que los datos que se manejan para el análisis suelen estar afectados de incertidumbre que difícilmente admiten un tratamiento aleatorio. Como ya hemos visto en las secciones anteriores, la teoría de conjuntos fuzzy es un instrumento eficaz y riguroso para solucionar los problemas en los que la fuente de imprecisión es la ausencia de un criterio claramente definido. Veamos a continuación un planteamiento fuzzy en la cross-efficiency.

5.5 Modelo cross-efficiency fuzzy basado en el modelo de Kao y Liu

Partiendo del modelo DEA en forma lineal (2) en el que la puntuación de eficiencia de cada DMU esta explícitamente definida, nos interesa un modelo que nos permita ordenar las DMUs eficientes y además introducir la incertidumbre que puedan presentar los datos en el análisis.

Llegados a este punto y revisados los modelos DEA- fuzzy (ver Hatamy et al. 2011), proponemos un modelo diferente, consistente en aplicar cross-efficiency al primal de Kao y Liu (2000), es decir, consideraremos, como ya hemos visto anteriormente, los casos favorable y desfavorable, por tanto estamos resolviendo dos problemas de optimización.

El problema fuzzy será

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{kk} &= \text{Max} \sum_{r=1}^s u_{rk} \tilde{y}_{rk} \\
\text{s.a.} \\
\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} \tilde{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} \tilde{x}_{ij}} &\leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
\sum_{i=1}^m v_{ik} \tilde{x}_{ik} &= 1 \\
u_{rk} &> \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
v_{ik} &> \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{49}$$

donde $\tilde{E}_{kk} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} \tilde{y}_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} \tilde{x}_{ik}}$ denota la eficiencia CCR de la DMU_k que es la mejor eficiencia relativa que DUM_k puede lograr.

El valor

$$\tilde{E}_{jk} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} \tilde{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} \tilde{x}_{ij}} \tag{50}$$

se denomina valor de cross-efficiency de la DMU_j, que refleja la evaluación entre pares de la DMU_k a la DMU_j.

La función de pertenencia la definimos, como se vio en el apartado 4.3.1, a través de los α -cortes mediante

$$E_{kk}(\alpha) = [E_{kk}^L(\alpha), E_{kk}^U(\alpha)], \tag{51}$$

para cada nivel de pertenencia $\alpha \in [0, 1]$, siguiendo el procedimiento descrito en el apartado 4.3.1, se obtienen los extremos inferiores (caso desfavorable) y extremos superiores (caso favorable) mediante los dos programas siguientes:

- (1) Cálculo de la cross-efficiency en el denominado *caso desfavorable* (corresponde al extremo inferior de los intervalos expresados en (51)), en este caso,

se suponen mayores inputs y menores outputs para la DMU_k y lo contrario para las demás.

En una primera etapa se obtiene $E_{kk}^L(\alpha)$ usando el modelo (52), para $\alpha \in [0,1]$.

$$E_{kk}^L(\alpha) = \text{Max} \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk}^L(\alpha)$$

s.a.

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk}^L(\alpha)}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}^U(\alpha)} &\leq 1, \quad j = k \\ \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj}^U(\alpha)}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}^L(\alpha)} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \quad (52) \\ \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}^U(\alpha) &= 1 \\ u_{rk} &\geq \varepsilon \quad r = 1, 2, \dots, s, \\ v_{ik} &\geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Obtenemos un conjunto de pesos óptimos $u_{1k}^L, u_{2k}^L, \dots, u_{mk}^L, v_{1k}^L, v_{2k}^L, \dots, v_{sk}^L$.

En una segunda etapa se obtiene la cross-efficiency desfavorable de las otras DMUs. Entonces, la cross-efficiency de cualquier otra DMU_j ($j = 1, \dots, n$), utilizando los valores menores de inputs y mayores outputs y los pesos obtenidos para la DMU_k al aplicar el modelo (52) pueden calcularse como

$$E_{jk}^L = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk}^L y_{rj}^U(\alpha)}{\sum_{i=1}^m v_{ik}^L x_{ij}^L(\alpha)}, \quad j = 1, \dots, n, j \neq k \quad (53)$$

Construimos la tabla de cross-efficiency del caso desfavorable.

Tabla 6: Matriz de cross-efficiency. Casos desfavorables

Cross-efficiency L						<i>Evaluación de sus pares</i>
	DMU 1	DMU 2	DMU 3	...	DMU n	<i>Media</i>
DMU1	E_{11}^L	E_{12}^L	E_{13}^L	...	E_{1n}^L	A_1^L
DMU2	E_{21}^L	E_{22}^L	E_{23}^L	...	E_{2n}^L	A_2^L
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
DMU n	E_{n1}^L	E_{n2}^L	E_{n3}^L	...	E_{nn}^L	A_n^L
<i>Media</i>	e_1^L	e_2^L	e_3^L	...	e_n^L	

Evaluación por pares

Siguiendo el mismo procedimiento que se indicó en el apartado 4.4.2, consideramos los promedios correspondientes a la columna k , mediante

$$e_k^L = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, j \neq k}^n E_{jk}^L, \quad k = 1, \dots, n.$$

El promedio de los rendimientos a lo largo de la fila j podría ser considerado como la evaluación promedio de sus compañeros a la DMU j , usando

$$A_j^L = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1, k \neq j}^n E_{jk}^L, \quad j = 1, \dots, n.$$

Como hemos dicho, este proceso se realiza, para $\alpha \in [0, 1]$.

Siguiendo el mismo planteamiento que para cross-efficiency, en un mundo agresivo, lo ideal para k sería reducir al mínimo su valoración de los compañeros e_k , así como el maximizar su propia auto-evaluación A_k a partir de los pesos de las otras DMUs, siguiendo a continuación con el caso favorable.

- (2) Cálculo de cross-efficiency en el denominado *caso favorable* (corresponde al extremo superior de los intervalos expresados en (51)). En este caso se suponen menores inputs y mayores outputs para la DMU k y lo contrario para las demás.

En una primera etapa, el cálculo se realiza a través de α -cortes, para $\alpha \in [0, 1]$ y se obtiene $E_{kk}^U(\alpha)$ usando el modelo (54):

$$E_{kk}^U(\alpha) = \text{Max} \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk}^U(\alpha)$$

s.a.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk}^U(\alpha)}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}^L(\alpha)} \leq 1, \quad j = k, \quad (54)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj}^L(\alpha)}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}^U(\alpha)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}^L(\alpha) = 1$$

$$u_{rk} \geq \varepsilon \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$v_{ik} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Y así obtenemos el conjunto de pesos óptimos $u_{1k}^U, u_{2k}^U, \dots, u_{mk}^U, v_{1k}^U, v_{2k}^U, \dots, v_{sk}^U$.

En una segunda etapa se obtiene la cross-efficiency favorable de las otras DMUs. Entonces, la cross-efficiency de cualquier otra DMU_j ($j = 1, \dots, n$), utilizando los valores mayores de inputs y menores outputs y los pesos que la DMU k del modelo (54) puede calcularse como

$$E_{jk}^U = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk}^U y_{rj}^L(\alpha)}{\sum_{i=1}^m v_{ik}^U x_{ij}^U(\alpha)}, \quad j = 1, \dots, n, j \neq k. \quad (55)$$

Con todos estos valores construimos la tabla de cross-efficiency casos favorables:

Tabla 7: Matriz de cross-efficiency. Casos favorables

Cross-efficiency U						<i>Evaluación de sus pares</i>
	DMU 1	DMU 2	DMU 3	...	DMU n	<i>Media</i>
DMU1	E_{11}^U	E_{12}^U	E_{13}^U	...	E_{1n}^U	A_1^U
DMU2	E_{21}^U	E_{22}^U	E_{23}^U	...	E_{2n}^U	A_2^U
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
DMUn	E_{n1}^U	E_{n2}^U	E_{n3}^U	...	E_{nn}^U	A_n^U
<i>Media</i>	e_1^U	e_2^U	e_3^U	...	e_n^U	

Evaluación por pares

Siguiendo el mismo procedimiento que el realizado para casos desfavorables, consideramos los promedios correspondientes a la columna k , mediante

$$e_k^U = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, j \neq k}^n E_{jk}^U, \quad k = 1, \dots, n.$$

El promedio de los rendimientos a lo largo de la fila k podría ser considerado como la evaluación promedio de sus compañeros a la DMU k , usando

$$A_j^U = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1, k \neq j}^n E_{jk}^U, \quad j = 1, \dots, n$$

Este proceso se realiza para $\alpha \in [0,1]$.

Siguiendo el mismo planteamiento, en un mundo agresivo, lo ideal para k sería reducir al mínimo su valoración de los compañeros e_k , así como maximizar su propia autoevaluación A_k a partir de los pesos de las otras DMUs.

Desde nuestro punto de vista, esta valoración y posterior ordenación de las DMUs complementa y por tanto mejora las existentes porque:

1. Utiliza DEA-fuzzy, con lo que el tratamiento de la incertidumbre está garantizado.
2. Utilizamos modelos favorables y desfavorables (siguiendo a Kao y Liu 2000) por lo que establecemos valoraciones con intervalos, es decir valoraciones fuzzy.

3. Utiliza super-efficiency por lo que es capaz de discriminar las DMUs no eficientes de las eficientes.
4. Utiliza cross-efficiency por lo que obtenemos la valoración de las eficiencias de las DMUs a partir de los pesos obtenidos en el cálculo de eficiencia de una DMU dada.
5. Introducimos una cross-efficiency-fuzzy por lo que posibilitamos un estudio más completo de la cross-efficiency, con valores fuzzy en lugar de crisp.
6. Obtenemos una valoración más completa con la obtención de los intervalos obtenidos para cada DMU y cada nivel alfa que nos proporcionan mayor información sobre la eficiencia de una DMU dada.

En el próximo capítulo nos proponemos aplicar, algunos de estos métodos introducidos, a un caso real en el que consideramos unas empresas del sector textil que deseamos valorar y clasificar. Nuestro objetivo es poner de manifiesto que los nuevos métodos ofrecen, sin duda, una visión más completa de la valoración y clasificación de las DMUs bajo incertidumbre y pueden ser útiles para los departamentos de gestión y dirección de las empresas consideradas.

Capítulo 6

Caso empresas textiles y resultados

6.1 Descripción

La actividad textil es una de las más antiguas de la Comunidad Valenciana. En general el sector textil se caracteriza por un tejido empresarial de dimensiones reducidas. La PYME es el tipo de empresa más abundante, la razón de este hecho se encuentra en que la pequeña y mediana empresa tiene mayor flexibilidad para adaptarse a los cambios, aspecto que caracteriza el sector textil (Bou, E. 2007). Una de las zonas de la Comunidad Valenciana en la que está más arraigada la actividad textil corresponde a las comarcas de L'Alcoià y el Comtat, en ellas se concentra una actividad elevada dedicada al sector textil-hogar. En particular, en este estudio, nos centramos en los municipios de Alcoi, Cocentaina y Muro siendo el tipo pequeñas y medianas empresas como se ha comentado anteriormente (PYMEs).

El análisis de la eficiencia supone centrar la atención en la tecnología existente, los recursos y los precios de ellos. La clave consiste en aprovechar al máximo los recursos y hacerlo adaptándose a los precios. Quien lo consiga será eficiente; quien no, incurre en ineficiencias que le suponen un deterioro para competir y, en cualquier caso, soportará un coste innecesario por tal desaprovechamiento (Coll, V. et al 2007).

En este estudio nos proponemos aplicar la metodología DEA a empresas del sector textil-hogar para posteriormente incorporar, como un elemento más del problema, la incertidumbre que aparece de forma natural. Existe el hecho de que a menudo los inputs y outputs involucrados en las aplicaciones reales no pueden ser medidos de forma precisa. En este sentido cabe preguntarse si nuestros datos son imprecisos, ¿se verán afectados los resultados de la medición de la eficiencia?

En primer lugar analizaremos la eficiencia crisp de las empresas textiles y pasaremos a continuación a realizar un tratamiento de la incertidumbre desde una perspectiva fuzzy. En este trabajo hemos utilizado números fuzzy trapezoidales y también triangulares cuya construcción se detalla en secciones posteriores, si bien avanzamos ya que los soportes de los números fuzzy considerados son intervalos con desviaciones variables de hasta un 20% (Pla, L. et al. 2012a).

Por otro lado nos interesa analizar una posible ordenación de las empresas eficientes aplicando las metodologías descritas en el capítulo 5, para posteriormente, llevar a cabo también un tratamiento de la incertidumbre desde una perspectiva fuzzy.

Los datos utilizados se refieren al año 2009 y han sido extraídos de la base de datos SABI²⁶, elaborada por Bureau Van Dijk, de los municipios Alcoi, Cocentaina y Muro cuya actividad se encuadra en alguno de los grupos en que la clasificación CNAE-93 divide el sector textil. Del total de empresas se han escogido aquellas con un número de empleados superior a 4 y que estén activas por lo menos hasta acabar el año 2009. En total se eligieron 48 empresas, dedicadas a los subsectores hilatura, tejeduría y acabados.

Antes de proceder a la evaluación de eficiencia del conjunto de empresas es necesario seleccionar las variables input y output a partir de las cuales se definirá la eficiencia y que permitirán construir el modelo DEA.

De los datos disponibles en la base datos, en nuestro trabajo se han considerado cuatro inputs y dos outputs que resumen de forma satisfactoria la totalidad de

²⁶SABI es un directorio de empresas españolas y portuguesas que recoge información general y datos financieros. Dentro de España cubre más del 95 % de las compañías de las 17 Comunidades Autónomas que presentan sus cuentas en Registros Mercantiles.

las características y situación de las empresas. Hay que hacer constar que nosotros también utilizamos estos inputs y outputs por dos razones:

- En la literatura son los más empleados.
- Las empresas con las que hemos contactado, quizás por conocer los resultados teóricos, han preferido que fueran éstos los datos en los que se base el análisis. De esta manera se sienten más legitimados para comparar nuestros resultados con otros estudios.

Estos son:

INPUTS:

Existencias: Son los bienes de propiedad de la empresa destinados a la venta o a su transformación e incorporación al proceso productivo.

Número de empleados: Conjunto de personas, fijas o eventuales, que en el año de referencia se encuentran trabajando en la empresa.

Gastos de personal: Retribuciones al personal, cualquiera que sea la forma o el concepto por el que se satisfacen; cuotas a la Seguridad Social a cargo de la empresa y los demás gastos de carácter social.

Dotaciones para amortización de inmovilizado: Expresión de la depreciación sistemática anual efectiva sufrida por el inmovilizado intangible y material, por su aplicación al proceso productivo.

OUTPUTS:

Importe neto de cifras de ventas: La renta que una empresa recibe de sus actividades comerciales normales, por lo general de la venta de bienes y servicios a los clientes.

Ingresos de explotación: Ingresos obtenidos por la empresa al realizar su actividad típica.

A excepción de la variable referida al número de empleados, las restantes se encuentran expresadas en miles de euros. La notación que utilizamos para los inputs y outputs se muestra en la Tabla 7, también se indica el total de empresas que corresponde a cada subsector

Tabla 8: Número de empresas por subsector inputs y outputs

SUBSECTOR	NÚMERO EMPRESAS	INPUTS (I)	OUTPUTS (O)
Acabados	17	Existencias (I1)	Importe neto de cifras de ventas (O1) Ingresos explotación (O2)
Hilatura	17	Número de empleados (I2)	
Tejidos	14	Gastos personal (I3)	
		Dotación amortización (I4)	

Para el cálculo de los índices de eficiencia se ha utilizado el programa GAMS (General Algebraic Modeling System), software desarrollado por A. Brooke, D. Kendrick y A. Meeraus.

6.2 Aplicación de los modelos DEA a las empresas del sector textil

Los modelos que vamos a utilizar, descritos en capítulos anteriores son:

- (1) Modelo 1 CCR dual orientación input.
- (2) Modelo 2 DEA fuzzy.
- (3) Modelo 3 super-efficiency-fuzzy (modelo propuesto).
- (4) Modelo 4 cross-efficiency.
- (5) Modelo 5 cross-efficiency-fuzzy (modelo propuesto).

Veamos los resultados en cada caso.

6.2.1 Modelo DEA CCR dual orientación input

Los datos del año 2009 correspondientes a los inputs y outputs de las 48 DMUs se detallan en las tablas 9, 10 y 11. Identificamos las Unidades de toma de Decisión (DMU) con la letra K y un número, la numeración por subsectores corresponde: del 1 al 17 subsector acabados, del 18 al 34 subsector hilatura y del 35 al 48 subsector tejidos.

Tabla 9: Relación datos de inputs y outputs del subsector acabados

DMU	I1	I2	I3	I4	O1	O2
K1	4 250	149	3 929	1 549	30 665	31 372
K2	620	23	674	156	1 571	1 601
K3	39	14	336	100	880	946
K4	234	34	866	487	4 863	4 894
K5	8 284	143	2 778	1 811	15 047	15 489
K6	562	44	1 140	205	2046	2 257
K7	3 903	56	1 897	651	11 307	11 580
K8	1 770	34	1 137	388	5 902	5 930
K9	2	27	1 023	8	1 869	1 875
K10	208	31	853	210	1 911	2 027
K11	222	49	1 430	177	2 839	2 839
K12	1 736	131	5 074	1 945	11 994	12 092
K13	508	31	753	875	8 550	8 550
K14	208	72	1 538	516	5 002	5 033
K15	904	52	1 541	363	6 156	6 156
K16	525	46	1 346	379	3 750	3 763
K17	4 197	41	1 314	953	22 854	22 909

Tabla 10: Relación datos de inputs y outputs del subsector hilatura

DMU	I1	I2	I3	I4	O1	O2
K18	1 547	20	460	121	5 281	5 281
K19	1 196	28	809	107	3 616	3 624
K20	130	10	179	20	1 543	1 543
K21	947	13	242	115	279	362
K22	1 117	40	846	223	2 714	2 715
K23	485	30	658	79	1 562	1 669
K24	379	36	874	71	944	982
K25	84	14	284	46	766	774
K26	274	4	132	178	2 104	2 104
K27	472	10	326	54	2 070	2 141
K28	160	4	119	37	837	837
K29	506	15	335	36	1 779	1 779
K30	291	12	338	7	1 183	1 183
K31	879	14	331	14	1487	1487
K32	235	22	462	20	544	544
K33	651	13	304	19	2 827	2 827
K34	26	6	115	12	226	239

Tabla 11: Relación datos de inputs y outputs del subsector tejeduría

DMU	I1	I2	I3	I4	O1	O2
K35	1 465	13	232	41	1 792	1 800
K36	1 050	13	265	71	2 018	2 070
K37	1 182	18	413	199	2 145	2 145
K38	9 721	63	1 731	249	22 989	23 092
K39	626	13	275	37	1 430	1 430
K40	1 897	14	305	54	997	997
K41	906	9	291	183	1 533	1 533
K42	882	15	332	116	1 247	1 312
K43	261	17	364	196	3 516	3 554
K44	401	19	434	99	2 251	2 277
K45	846	16	279	23	1 487	1 510
K46	900	19	468	19	2 621	2 633
K47	311	15	293	82	2 437	2 437
K48	643	14	314	176	1 575	1 611

Teniendo en cuenta que las empresas analizadas abarcan en conjunto todas las fases necesarias para obtener el producto final (ver sección 2.1.2), decidimos aplicar el modelo DEA CCR dual con orientación input (2) (implementado en el programa GAMS) a las empresas agrupadas por subsectores y comparar los resultados de eficiencia con los obtenidos al aplicar, el mismo modelo, a todas las empresas sin diferenciar en subsectores. Observamos que los resultados crisp son ligeramente inferiores para los subsectores. Estos cambios en las ratios de eficiencia son debidos a que al aumentar el número de empresas en el conjunto de estudio implican un cambio en la frontera eficiente. Los resultados comentados pueden consultarse en las Tablas 12 y 13.

Resaltadas aparecen las empresas con eficiencia 1.0 o muy próximas a 1.

Se observa que coinciden en los dos casos.

Tabla 12: Eficiencia crisp por subsectores

Acabados		Hilatura		Tejidos	
DMU	Eficiencia	DMU	Eficiencia	DMU	Eficiencia
k1	0.955	k18	0.980	k35	0.620
k2	0.385	k19	0.595	k36	0.687
k3	0.899	k20	1.000	k37	0.386
k4	1.000	k21	0.105	k38	1.000
k5	0.356	k22	0.352	k39	0.590
k6	0.360	k23	0.392	k40	0.279
k7	0.592	k24	0.220	k41	0.373
k8	0.556	k25	0.607	k42	0.339
k9	1.000	k26	1.000	k43	1.000
k10	0.532	k27	0.886	k44	0.691
k11	0.611	k28	0.817	k45	0.584
k12	0.484	k29	0.673	k46	0.957
k13	1.000	k30	1.000	k47	0.977
k14	0.929	k31	0.753	k48	0.429
k15	0.685	k32	0.270		
k16	0.536	k33	1.000		
k17	1.000	k34	0.571		

Tabla 13: Eficiencia crisp de todas las empresas en conjunto

DMU	Eficiencia	DMU	Eficiencia	DMU	Eficiencia
K1	0.850	K18	0.913	K35	0.572
K2	0.310	K19	0.562	K36	0.592
K3	0.814	K20	1.000	K37	0.359
K4	1.000	K21	0.097	K38	1.000
K5	0.339	K22	0.306	K39	0.509
K6	0.312	K23	0.333	K40	0.242
K7	0.562	K24	0.196	K41	0.329
K8	0.526	K25	0.553	K42	0.306
K9	1.000	K26	1.000	K43	1.000
K10	0.504	K27	0.836	K44	0.607
K11	0.559	K28	0.747	K45	0.526
K12	0.445	K29	0.601	K46	0.892
K13	1.000	K30	0.975	K47	0.828
K14	0.877	K31	0.687	K48	0.375
K15	0.615	K32	0.249		
K16	0.480	K33	1.000		
K17	1.000	K34	0.503		

Nos interesa introducir la incertidumbre en nuestro estudio. En la siguiente sección mostramos los resultados de aplicar el modelo DEA fuzzy a todas las empresas sin separar en subsectores.

6.2.2 Modelo DEA fuzzy

Supondremos en este apartado que todas las observaciones son fuzzy. El algoritmo seguido es el siguiente:

PASO 1. A partir de los inputs y outputs (o datos) de las empresas, crear los números fuzzy trapezoidales estableciendo variaciones aleatorias de entre un 5 % y 10 % para los techos y de entre el 5 % y 20 % para las bases de los mismos. Las tablas de los números fuzzy se pueden consultar en el apéndice C y D.

PASO 2. Establecer los valores α para los α -cortes de los números fuzzy calculados en el PASO 1. En nuestro caso: 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.

PASO 3. Introducir el modelo CCR dual (13) con orientación input en GAMS, con el “solver” LINGO o CPLEX, para resolver el siguiente programa, (ver apéndices A y B):

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{j_0} &= \text{Min } \theta_{j_0} \\ \text{s.a. } \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{x}_{ij} &\leq \theta_{j_0} \tilde{x}_{ij_0}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj} &\geq \tilde{y}_{rj_0}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

PASO 4. El modelo se resuelve dos veces, una vez para el caso desfavorable (mayores inputs y menores outputs para la DMU_k y lo contrario para las demás) y la otra para el caso favorable (menores inputs y mayores outputs para la DMU_k y lo contrario para las demás), tal como se indica en el paso 3, (ver apéndice A y B).

PASO 5. Obtención de las eficiencias para cada caso (desfavorable y favorable) en función del valor de α . Creación de los intervalos de eficiencia: Eficiencia soporte.

PASO 6. Tratamiento posterior de los resultados para la ordenación, se recurre a los métodos basados en α -cortes descritos en la sección 4.3.1.

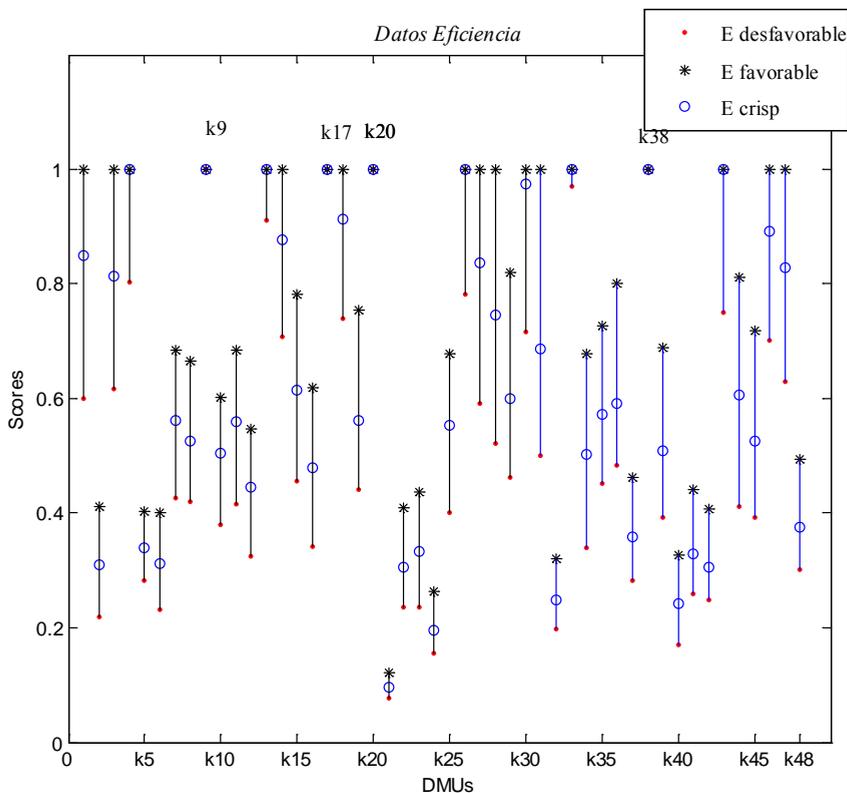
En la Tabla 14 se muestran los resultados de eficiencia caso favorable y caso desfavorable, de cada una de las DMUs, para valores de α de 0 a 1 con salto 0.2

Tabla 14: Intervalos de eficiencia fuzzy para valores de α

DMU	Soporte Eficiencias por α -cortes					
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
K1	[0.601, 1]	[0.626, 1]	[0.658, 1]	[0.689, 1]	[0.722, 0.993]	[0.756, 0.955]
K2	[0.219, 0.412]	[0.231, 0.406]	[0.242, 0.401]	[0.254, 0.395]	[0.265, 0.390]	[0.277, 0.385]
K3	[0.616, 1]	[0.642, 0.991]	[0.669, 0.967]	[0.696, 0.944]	[0.724, 0.922]	[0.752, 0.899]
K4	[0.803, 1]	[0.830, 1]	[0.858, 1]	[0.887, 1]	[0.917, 1]	[0.948, 1]
K5	[0.283, 0.404]	[0.290, 0.394]	[0.298, 0.384]	[0.305, 0.375]	[0.314, 0.365]	[0.323, 0.356]
K6	[0.231, 0.401]	[0.237, 0.392]	[0.245, 0.384]	[0.254, 0.376]	[0.264, 0.368]	[0.275, 0.360]
K7	[0.427, 0.685]	[0.442, 0.665]	[0.458, 0.646]	[0.473, 0.628]	[0.489, 0.610]	[0.505, 0.592]
K8	[0.420, 0.666]	[0.437, 0.642]	[0.454, 0.619]	[0.471, 0.597]	[0.488, 0.576]	[0.506, 0.556]
K9	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]
K10	[0.380, 0.603]	[0.393, 0.586]	[0.406, 0.572]	[0.419, 0.558]	[0.433, 0.545]	[0.448, 0.532]
K11	[0.415, 0.685]	[0.432, 0.669]	[0.451, 0.654]	[0.471, 0.639]	[0.492, 0.624]	[0.514, 0.611]
K12	[0.325, 0.548]	[0.336, 0.534]	[0.348, 0.521]	[0.361, 0.509]	[0.376, 0.496]	[0.391, 0.484]
K13	[0.911, 1]	[0.944, 1]	[0.978, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]
K14	[0.707, 1]	[0.728, 1]	[0.750, 1]	[0.775, 0.980]	[0.801, 0.954]	[0.827, 0.929]
K15	[0.457, 0.783]	[0.479, 0.762]	[0.501, 0.742]	[0.521, 0.723]	[0.542, 0.704]	[0.563, 0.685]
K16	[0.341, 0.620]	[0.357, 0.602]	[0.374, 0.585]	[0.392, 0.568]	[0.411, 0.552]	[0.431, 0.536]
K17	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]
K18	[0.740, 1]	[0.762, 1]	[0.785, 1]	[0.808, 1]	[0.832, 1]	[0.856, 0.980]
K19	[0.441, 0.755]	[0.455, 0.720]	[0.468, 0.686]	[0.481, 0.654]	[0.495, 0.624]	[0.508, 0.595]
K20	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]
K21	[0.077, 0.122]	[0.080, 0.118]	[0.082, 0.114]	[0.085, 0.111]	[0.087, 0.108]	[0.090, 0.105]
K22	[0.236, 0.409]	[0.244, 0.397]	[0.252, 0.385]	[0.260, 0.373]	[0.269, 0.362]	[0.281, 0.352]
K23	[0.236, 0.438]	[0.248, 0.428]	[0.259, 0.418]	[0.270, 0.409]	[0.281, 0.400]	[0.293, 0.392]
K24	[0.155, 0.263]	[0.158, 0.254]	[0.162, 0.245]	[0.166, 0.237]	[0.172, 0.228]	[0.179, 0.220]
K25	[0.402, 0.679]	[0.417, 0.663]	[0.432, 0.648]	[0.448, 0.633]	[0.464, 0.619]	[0.481, 0.607]
K26	[0.783, 1]	[0.821, 1]	[0.862, 1]	[0.904, 1]	[0.948, 1]	[0.995, 1]
K27	[0.591, 1]	[0.619, 1]	[0.647, 0.999]	[0.676, 0.959]	[0.705, 0.922]	[0.736, 0.886]
K28	[0.522, 1]	[0.544, 1]	[0.567, 0.953]	[0.588, 0.905]	[0.610, 0.859]	[0.632, 0.817]
K29	[0.463, 0.820]	[0.475, 0.787]	[0.487, 0.756]	[0.499, 0.727]	[0.523, 0.699]	[0.548, 0.673]
K30	[0.717, 1]	[0.742, 1]	[0.770, 1]	[0.798, 1]	[0.829, 1]	[0.861, 1]
K31	[0.500, 1]	[0.521, 0.954]	[0.542, 0.901]	[0.563, 0.850]	[0.584, 0.801]	[0.607, 0.753]
K32	[0.198, 0.321]	[0.203, 0.310]	[0.209, 0.299]	[0.214, 0.289]	[0.221, 0.279]	[0.227, 0.270]
K33	[0.970, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]
K34	[0.340, 0.679]	[0.354, 0.656]	[0.368, 0.633]	[0.383, 0.612]	[0.398, 0.591]	[0.414, 0.571]
K35	[0.451, 0.727]	[0.464, 0.703]	[0.477, 0.681]	[0.490, 0.660]	[0.504, 0.640]	[0.518, 0.620]
K36	[0.483, 0.801]	[0.497, 0.775]	[0.512, 0.752]	[0.527, 0.730]	[0.543, 0.708]	[0.559, 0.687]
K37	[0.282, 0.463]	[0.292, 0.447]	[0.302, 0.431]	[0.313, 0.415]	[0.324, 0.400]	[0.335, 0.386]
K38	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]	[1, 1]
K39	[0.393, 0.688]	[0.406, 0.668]	[0.418, 0.648]	[0.431, 0.628]	[0.444, 0.609]	[0.457, 0.590]
K40	[0.171, 0.326]	[0.178, 0.316]	[0.186, 0.306]	[0.194, 0.297]	[0.202, 0.288]	[0.210, 0.279]
K41	[0.260, 0.442]	[0.267, 0.426]	[0.273, 0.412]	[0.280, 0.399]	[0.287, 0.386]	[0.294, 0.373]
K42	[0.249, 0.407]	[0.254, 0.393]	[0.258, 0.379]	[0.263, 0.365]	[0.268, 0.351]	[0.273, 0.339]
K43	[0.750, 1]	[0.770, 1]	[0.790, 1]	[0.811, 1]	[0.843, 1]	[0.881, 1]
K44	[0.412, 0.812]	[0.425, 0.786]	[0.442, 0.761]	[0.465, 0.737]	[0.488, 0.713]	[0.512, 0.691]
K45	[0.392, 0.718]	[0.403, 0.690]	[0.415, 0.662]	[0.427, 0.635]	[0.440, 0.609]	[0.452, 0.584]
K46	[0.701, 1]	[0.722, 1]	[0.741, 1]	[0.757, 1]	[0.773, 1]	[0.790, 0.957]
K47	[0.630, 1]	[0.652, 1]	[0.680, 1]	[0.711, 1]	[0.744, 1]	[0.777, 0.977]
K48	[0.302, 0.495]	[0.308, 0.481]	[0.315, 0.468]	[0.321, 0.454]	[0.327, 0.442]	[0.334, 0.429]

A fin de dar una visión más clara de los resultados obtenidos y mostrados en esta tabla, pasamos a continuación a dar una representación gráfica de estos resultados. Esta representación se puede hacer para cada valor de α . En particular para el caso de $\alpha = 0$ se han representado en la Figura 19, en horizontal las correspondientes DMUs, en vertical las puntuaciones de eficiencia para todas las DMUs estudiadas (representado por líneas verticales). La eficiencia crisp (\circ) se encuentra entre la eficiencia caso desfavorable (\bullet) y eficiencia caso favorable ($*$).

Figura 19: Representación de Eficiencia favorable, desfavorable para $\alpha = 0$ y Eficiencia crisp



La longitud de la línea para cada DMU depende de la distancia entre el valor de la eficiencia obtenido en el problema en el caso favorable y el desfavorable, y corresponde a la longitud del intervalo expresado en (17) y (18). Para alguna DMU se observa el segmento reducido a un punto al ser la distancia nula, situación que se produce para las DMUs: K9, K17, K20, K38 (Plá et al. 2012b, Casasús 2012).

Cabría pensar que si la amplitud del intervalo es grande, entonces la DMU es más sensible a variaciones en los inputs y outputs y los posibles cambios en inputs u outputs va a permitir mejorar la eficiencia. En cambio, bajas amplitudes del intervalo indican que la eficiencia apenas cambiará o incluso permanecerá constante. De hecho las DMUs: K9, K17, K20, K38 son eficientes tanto en el caso favorable como en desfavorable y con eficiencia crisp 1, la amplitud del intervalo es cero, como se observa en la Figura 19.

Obtenidos los resultados de intervalos de eficiencia se procede a continuación al cálculo de los índices correspondientes a los cuatro procedimientos de clasificación expuestos en el epígrafe 4.3.3.2. La Tabla 15 recoge los valores de estos índices para las 48 DMUs, junto con la eficiencia crisp y el intervalo de eficiencia para $\alpha = 0$.

Tabla 15: Resultados de índices de los procedimientos de ordenación y Eficiencia correspondiente

DMUs	Yager	Chen & Klein	R1	R2	1- Manhattan	Intervalo $\alpha=0$	Eficiencia Crisp
K1	0.8333	0.7380	0.3333	0.7500	0.8333	[0.601, 1]	0.850
K2	0.3231	0.2993	0.0000	0.3231	0.3231	[0.219, 0.412]	0.310
K3	0.8185	0.7346	0.0833	0.8020	0.8185	[0.616, 1]	0.814
K4	0.9369	0.8797	0.5000	0.8738	0.9369	[0.803, 1]	1.000
K5	0.3409	0.3025	0.0000	0.3409	0.3409	[0.283, 0.404]	0.339
K6	0.3156	0.288	0.0000	0.3156	0.3156	[0.231, 0.401]	0.312
K7	0.5517	0.5120	0.0000	0.5517	0.5517	[0.427, 0.685]	0.562
K8	0.536	0.4977	0.0000	0.5360	0.536	[0.420, 0.666]	0.526
K9	1	1	1.0000	0.0000	1	[1, 1]	1.000
K10	0.4896	0.4545	0.0000	0.4896	0.4896	[0.380, 0.603]	0.504
K11	0.5548	0.5147	0.0000	0.5548	0.5548	[0.415, 0.685]	0.559
K12	0.4358	0.4051	0.0000	0.4358	0.4358	[0.325, 0.548]	0.445
K13	0.9861	0.9707	0.7500	0.9443	0.9861	[0.911, 1]	1.000
K14	0.8709	0.7927	0.2500	0.8279	0.8709	[0.707, 1]	0.877
K15	0.6218	0.5727	0.0000	0.6218	0.6218	[0.457, 0.783]	0.615
K16	0.4808	0.4482	0.0000	0.4808	0.4808	[0.341, 0.620]	0.480
K17	1	1	1.0000	0.0000	1	[1, 1]	1.000
K18	0.8970	0.8193	0.4167	0.8233	0.8970	[0.740, 1]	0.913
K19	0.5735	0.5312	0.0000	0.5735	0.5735	[0.441, 0.755]	0.562
K20	1	1	1.0000	0.0000	1	[1, 1]	1.000
K21	0.0983	0.0378	0.0000	0.0983	0.0983	[0.077, 0.122]	0.097
K22	0.3183	0.2894	0.0000	0.3183	0.3183	[0.236, 0.409]	0.306
K23	0.3393	0.3143	0.0000	0.3393	0.3393	[0.236, 0.438]	0.333
K24	0.2033	0.1644	0.0000	0.2033	0.2033	[0.155, 0.263]	0.196
K25	0.5411	0.5023	0.0000	0.5411	0.5411	[0.402, 0.679]	0.553
K26	0.9428	0.8896	0.5000	0.8855	0.9428	[0.783, 1]	1.000
K27	0.8117	0.7236	0.1667	0.7740	0.8117	[0.591, 1]	0.836
K28	0.7498	0.6666	0.1667	0.6997	0.7498	[0.522, 1]	0.747
K29	0.6214	0.5710	0.0000	0.6214	0.6214	[0.463, 0.820]	0.601
K30	0.8931	0.8119	0.5000	0.7862	0.8931	[0.717, 1]	0.975
K31	0.7147	0.6413	0.0833	0.6887	0.7147	[0.500, 1]	0.687
K32	0.2533	0.2164	0.0000	0.2533	0.2533	[0.198, 0.321]	0.249

K33	0.9975	0.9946	0.9167	0.9700	0.9975	[0.970, 1]	1.000
K34	0.4999	0.4670	0.0000	0.4999	0.4999	[0.340, 0.679]	0.503
K35	0.5780	0.5355	0.0000	0.5779	0.5780	[0.451, 0.727]	0.572
K36	0.6312	0.5809	0.0000	0.6312	0.6312	[0.483, 0.801]	0.592
K37	0.3658	0.3338	0.0000	0.3658	0.3658	[0.282, 0.463]	0.359
K38	1	1	1.0000	0.0000	1	[1, 1]	1.000
K39	0.5317	0.4940	0.0000	0.5317	0.5317	[0.393, 0.688]	0.509
K40	0.2461	0.2174	0.0000	0.2461	0.2461	[0.171, 0.326]	0.242
K41	0.3416	0.3129	0.0000	0.3416	0.3416	[0.260, 0.442]	0.329
K42	0.3166	0.2855	0.0000	0.3166	0.3166	[0.249, 0.407]	0.306
K43	0.9038	0.8274	0.5000	0.8075	0.9038	[0.750, 1]	1.000
K44	0.6037	0.5536	0.0000	0.6037	0.6037	[0.412, 0.812]	0.607
K45	0.5356	0.4975	0.0000	0.5356	0.5356	[0.392, 0.718]	0.526
K46	0.8701	0.7838	0.4167	0.7773	0.8701	[0.701, 1]	0.892
K47	0.8476	0.7533	0.4167	0.7387	0.8476	[0.630, 1]	0.828
K48	0.3897	0.3605	0.0000	0.3897	0.3897	[0.302, 0.495]	0.375

Incidir en que los valores de los índices respectivos no son útiles cuando se trata de clasificación de unidades de acuerdo a su eficiencia, ya que no es éste el significado que tienen, siendo en realidad un coeficiente de magnitud para establecer preferencias entre las unidades.

A partir de los resultados obtenidos en la Tabla 15, de acuerdo con (21) y (29), ordenamos las DMUs teniendo en cuenta sus valores de eficiencia $\{\tilde{E}_j\}_{j=1}^{48}$. La Tabla 16 recoge esta ordenación, de mayor a menor índice. A aquellas DMUs con un mismo valor numérico de índice les corresponde la misma posición.

Tabla 16: DMUs ordenadas de mayor a menor índice según procedimiento de ordenación aplicado, junto con la correspondiente eficiencia crisp

E Crisp	Ordenaciones									E Crisp							
	Yager			Chen Klein			1-Manhattan				Ordenación Boscá						
	K9	K17	K20	K38	K9	K17	K20	K38	K9	K17	K20	K38	K9	K17	K20	K38	
1																	1
1				K33				K33								K33	1
1				K13				K13								K13	1
1				K26				K26								K26	1
1				K4				K4								K4	1
1				K43				K43								K43	1
0.913				K18				K18								K30	0.975
0.975				K30				K30								K18	0.913
0.877				K14				K14								K46	0.892
0.892				K46				K46								K47	0.828
0.828				K47				K47								K1	0.85
0.85				K1				K1								K14	0.877
0.814				K3				K3								K27	0.836
0.836				K27				K27								K28	0.747
0.747				K28				K28								K3	0.814
0.687				K31				K31								K31	0.687
0.592				K36				K36								K36	0.592
0.615				K15				K15								K15	0.615

0.601	K29	K29	K29	K29	0.601
0.607	K44	K44	K44	K44	0.607
0.572	K35	K35	K35	K35	0.572
0.562	K19	K19	K19	K19	0.562
0.559	K11	K11	K11	K11	0.559
0.562	K7	K7	K7	K7	0.562
0.553	K25	K25	K25	K25	0.553
0.526	K8	K8	K8	K8	0.526
0.526	K45	K45	K45	K45	0.526
0.509	K39	K39	K39	K39	0.509
0.503	K34	K34	K34	K34	0.503
0.504	K10	K10	K10	K10	0.504
0.48	K16	K16	K16	K16	0.48
0.445	K12	K12	K12	K12	0.445
0.375	K48	K48	K48	K48	0.375
0.359	K37	K37	K37	K37	0.359
0.329	K41	K23	K41	K23	0.333
0.339	K5	K41	K5	K41	0.329
0.333	K23	K5	K23	K5	0.339
0.31	K2	K2	K2	K2	0.31
0.306	K22	K22	K22	K22	0.306
0.306	K42	K6	K42	K6	0.312
0.312	K6	K42	K6	K42	0.306
0.249	K32	K40	K32	K40	0.242
0.242	K40	K32	K40	K32	0.249
0.196	K24	K24	K24	K24	0.196
0.097	K21	K21	K21	K21	0.097

Además de la posición y la ordenación se ha incluido también el valor de eficiencia crisp. Algunos aspectos a resaltar serían:

- Se observa gran semejanza entre las ordenaciones obtenidas utilizando los cuatro métodos de ordenación basados en α -cortes.
- Las empresas **K7, K9 y K10** pertenecen al mismo conjunto empresarial con muchos años en la comarca mostrando que mientras K9 es eficiente las otras dos no lo son, lo que nos lleva a plantearnos un estudio más detallado.
- Las empresas con mayor número de trabajadores en concreto K36 y K37 son ineficientes. Se ha introducido mediante los números fuzzy la incertidumbre en los datos obteniendo resultados de eficiencia semejante al caso crisp (para estudios similares ver Plá, Pérez, Casasús y Liern 2012a y Casasús, T. et al. 2012).

Pero puesto que, el valor de la eficiencia no es un ordinal y menos aún en el caso de las que son eficientes (eficiencia con valor 1) seguimos interesados en la ordenación de las DMUs y en particular de las eficientes, por ello pasamos, en el

siguiente apartado, a trabajar con las DMUs eficientes aplicándoles el modelo de *super-efficiency*.

6.2.3 Modelo DEA Super-efficiency-fuzzy

Del total de 48 DMUs evaluadas anteriormente identificamos las DMUs con índices de eficiencia de 1.0, incluyendo dos con índice ligeramente inferior, aunque los resultados crisp están próximos a 1 y no formarían parte de la frontera de producción. Al observar los resultados obtenidos al trabajar con números fuzzy, las DMUS eficientes no forman una línea frontera sino una franja comprendida entre las eficiencias favorables y desfavorables para los diferentes valores de α , pensamos que las DMUS K30 y K18 con eficiencia 0.975 y 0.913 respectivamente, estarían dentro del conjunto de posibles escenarios eficientes mostrados en la tabla 14.

De esta forma vamos a trabajar con 11 DMUs del total de 48 empresas analizadas en los apartados 6.2.1 y 6.2.3, con eficiencia crisp comprendida entre 1 y 0.91, estas DMUs las denotamos como la letra KE para no crear confusiones a la hora del tratamiento numérico. En la tabla 16 mostramos las DMUs seleccionadas junto con los inputs, outputs, la eficiencia crisp y la nueva notación.

Tabla 17: Datos de la DMUs eficientes, eficiencia y notación

Notación1 ^a	I1	I2	I3	I4	O1	O2	Efic. crisp	Notación Super-efficiency
K4	234	34	866	487	4863	4894	1	KE1
K9	2	27	1,023	8	1869	1875	1	KE2
K13	508	31	753	875	8550	8550	1	KE3
K17	4197	41	1314	953	22854	22909	1	KE4
K18	1547	20	460	121	5281	5281	0.913	KE5
K20	130	10	179	20	1543	1,543	1	KE6
K26	274	4	132	178	2104	2104	1	KE7
K30	291	12	338	7	1183	1183	0.975	KE8
K33	651	13	304	19	2827	2827	1	KE9
K38	9721	63	1731	249	22989	23092	1	KE10
K43	261	17	364	196	3516	3554	1	KE11

Como hemos visto en el epígrafe 4.3, lo que vamos a desarrollar a continuación se puede entender como un “post-análisis” que nos permitirá una ordenación de las unidades eficientes. El algoritmo seguido en este caso ha sido:

PASO 1: A partir de los inputs y outputs (o datos) de las empresas, crear los números fuzzy trapezoidales estableciendo variaciones aleatorias de entre un 5 % y 10 % para los techos y de entre el 5 % y 20 % para las bases de los mismos. Apéndice C.

PASO 2. Establecer los valores α para los α -cortes de los números fuzzy calculados en el PASO 1. En nuestro caso: 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.

PASO 3. Introducir el modelo CCR dual de super-efficiency orientación input en GAMS, con el “solver” LINGO o CPLEX, para minimizar (ver apéndices E, F):

$$\begin{aligned}
 E_k &= \min \theta \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1, j \neq 0}^n \lambda_j \tilde{x}_{ij} \leq \theta \tilde{x}_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj} \geq \tilde{y}_{rk}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

PASO 4. El modelo se resuelve dos veces, utilizando el caso desfavorable y el favorable.

PASO 5. Obtención de las eficiencias para cada caso (desfavorable y favorable) en función del valor de α .

PASO 6. Tratamiento posterior de los resultados para la ordenación, aplicando los cuatro procedimientos de clasificación basados en α cortes expuestos en el epígrafe 4.3.1.

Aplicando el algoritmo descrito se obtienen los intervalos de eficiencia, a partir de los resultados de los casos favorables y desfavorables, de cada una de las DMUs para diferentes valores de α . Mostramos dichos intervalos en la Tabla 18, mientras que en la Tabla 19 se indican los índices obtenidos.

En la Tabla 20 reflejamos a partir de los índices las ordenaciones obtenidas de super-efficiency, al aplicar los métodos de ordenación de acuerdo con (33) y (40).

Los resultados nos muestran que las ordenaciones son las mismas para los cuatro métodos utilizados.

Tabla 18: Intervalos de super-efficiency

Notaciones		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
K4	KE1	[0.8097,1]	[0.837,1]	[0.865,1]	[0.8937,1]	[0.9232,1]	[0.953,1]
K9	KE2	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K13	KE3	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K17	KE4	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K18	KE5	[0.7583,1]	[0.7801,1]	[0.8025,1]	[0.8256,1]	[0.8493,1]	[0.8737,0.981]
K20	KE6	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K26	KE7	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K30	KE8	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K33	KE9	[0.9917,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K38	KE10	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K43	KE11	[0.7956,1]	[0.8238,1]	[0.853, 1]	[0.8834,1]	[0.9149,1]	[0.948,1]

Tabla 19: Resultados de los índices analizados

DMUs	Yager	Chen & Klein	R1	R2	1- Manhat-tan	Intervalo $\alpha = 0$	Eficiencia Crisp
KE1	0.9402	0.6688	0.5000	0.8803	0.94016	[0.8097,1]	1
KE2	1	1	1.0000	0.0000	1	[1,1]	1
KE3	1	1	1.0000	0.0000	1	[1,1]	1
KE4	1	1	1.0000	0.0000	1	[1,1]	1
KE5	0.9058	0.563	0.4167	0.8386	0.9059	[0.7583,1]	0.913
KE6	1	1	1.0000	0.0000	1	[1,1]	1
KE7	1	1	1.0000	0.0000	1	[1,1]	1
KE8	1	1	1.0000	0.0000	1	[1,1]	0.975
KE9	0.9993	0.9943	0.9167	0.9917	0.99931	[0.9917,1]	1
KE10	1	1	1.0000	0.0000	1	[1,1]	1
KE11	0.9349	0.6498	0.5000	0.8697	0.9349	[0.7956,1]	1

Tabla 20: Ordenación da las DMUs según índices

Ordenaciones			
Yager	Chen Klein	1-Manhattan	Boscá
KE2	KE2	KE2	KE2
KE3	KE3	KE3	KE3
KE4	KE4	KE4	KE4
KE6	KE6	KE6	KE6
KE7	KE7	KE7	KE7
KE8	KE8	KE8	KE8
KE10	KE10	KE10	KE10
KE9	KE9	KE9	KE9
KE1	KE1	KE1	KE1
KE11	KE11	KE11	KE11
KE5	KE5	KE5	KE5

Dado que estamos considerando 11 DMUS, la frontera no es la misma que en el caso de las 48 DMUs. Ahora bien, pese a la reducción de la cantidad de DMUS

y la introducción de la incertidumbre mediante los datos fuzzy trapezoidales, la información obtenida corrobora lo obtenido al aplicar el modelo 1. Estos resultados nos ratifican en la decisión de haber incluido las DMUs KE5 y KE8 dentro del conjunto de eficientes, y se observa que las DMUs con mayor longitud en los intervalos de eficiencia son KE1, KE11 y KE5, y que al ordenar por índices quedan en los últimos lugares.

La ordenación obtenida con el modelo de super-efficiency fuzzy es un complemento muy importante que completa los resultados obtenidos con la super-efficiency. Además la seguridad que proporciona el hecho de que diferentes modelos de ordenación proporcionen el mismo (o similar) resultado acentúa la hipótesis de que los modelos fuzzy aplicados permiten alcanzar objetivos y problemas reales que, como ya hemos comentado a lo largo de esta memoria, siempre presentan un grado de incertidumbre.

6.2.4 Modelo DEA cross-efficiency

Para la aplicación del modelo de cross-efficiency a nuestro estudio, consideramos las mismas 11 empresas que en el apartado 6.2.3.

Observamos que para la cross-efficiency se requiere el modelo primal mientras que hasta ahora utilizábamos el modelo dual. Utilizamos el modelo CCR primal con orientación input (2).

El algoritmo seguido para obtener los resultados de cross-efficiency crisp es el siguiente:

PASO 1. Introducir el modelo CCR primal orientación input en GAMS, con el “solver” LINGO o CPLEX, para optimizar (maximizar).

$$E_{kk} = \text{Max} \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_{rk} \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$v_{ik} \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m.$$

PASO 2. Para evitar los denominadores nulos, durante la ejecución del programa, imponemos la condición de que los pesos sean mayores que $\varepsilon = 0.00001$.

$$E_{kk} = \text{Max} \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_{rk} \geq 0.00001, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$v_{ik} \geq 0.00001, \quad i = 1, \dots, m.$$

Para más detalles ver el apéndice G.

PASO 3. Obtención de resultados.

PASO 4. Ordenación.

Siguiendo el algoritmo descrito, los resultados de cross-efficiency crisp obtenidos al aplicar el modelo primal se muestra en la Tabla 21. Si nos fijamos en los

valores de la diagonal que son las correspondientes eficiencias E_{kk} , observamos que todas las DMUs tienen eficiencia 1 excepto la DMUs KE5 y KE8, estos resultados confirman lo obtenido con modelos anteriores.

Tabla 21: Resultados con datos crisp de cross-efficiency

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1.	1.000	0.926	0.623	0.269	0.430	0.511	0.306	0.073	0.149	0.326	0.761	0.437
KE2.	1.000	1.000	0.352	0.131	0.266	0.620	0.150	1.000	0.465	0.235	0.620	0.484
KE3.	1.000	1.000	1.000	0.512	0.572	0.609	0.579	0.071	0.156	0.468	1.000	0.597
KE4.	0.379	0.410	0.814	1.000	1.000	1.000	1.000	0.175	0.376	1.000	0.983	0.714
KE5.	0.238	0.253	0.469	0.483	0.913	0.827	0.495	0.313	0.545	0.716	0.640	0.498
KE6.	0.726	0.664	0.600	0.290	1.000	1.000	0.326	0.539	0.624	0.496	0.937	0.620
KE7.	0.519	0.566	1.000	0.948	0.691	0.720	1.000	0.086	0.194	0.679	1.000	0.640
KE8.	0.256	0.263	0.316	0.186	0.450	0.618	0.204	0.974	0.594	0.327	0.493	0.371
KE9.	0.297	0.310	0.502	0.402	0.996	1.000	0.429	1.000	1.000	0.695	0.733	0.636
KE10.	0.168	0.182	0.392	0.649	1.000	0.830	0.602	0.650	1.000	1.000	0.536	0.601
KE11.	0.826	0.796	0.770	0.391	0.732	0.956	0.435	0.130	0.259	0.507	1.000	0.580
Media e_i	0.541	0.537	0.584	0.426	0.714	0.769	0.453	0.404	0.436	0.545	0.770	

¿Qué otra información podemos deducir de este estudio?

Partiendo de los valores de la diagonal y considerando las DMUs eficientes, este modelo proporciona otros valores que pensamos pueden ser útiles cuando se trata de estudiar el comportamiento y la eficiencia de nuestras empresas. Los valores e_i , valor promedio es la “Evaluación **por** Pares”, es decir, que usando los pesos de la unidad DMU_i vemos como cambiaría la eficiencia de las otras DMUs. Esto permite, a la hora de realizar cambios estructurales en las DMUs, orientar el sentido de los mismos, variando adecuadamente determinados inputs y outputs para intentar replicar al máximo aquellas DMUs más eficientes.

El valor promedio A_i es la “Evaluación **de** Pares”, es decir, como valoran las otras unidades a una DMU en particular. Los valores altos de A_i corresponden a las DMUs mejor valoradas, son aquellas que usando los pesos óptimos de las demás mantienen su resultado de eficiencia elevado.

Si colocamos en una tabla los valores de A_i y e_i , tal como se muestra en la Tabla 22, nos permite observar que, con respecto a las DMUs eficientes la que al utilizar sus pesos proporciona mejores eficiencias al resto es la DMU KE6 que además es de las mejores valoradas por las demás. Observamos que la DMU KE8 que se encuentra en última posición, está muy mal valorada por las otras DMUs y

minimiza su valoración a las demás, su correspondiente eficiencia crisp es de 0.975.

Tabla 22: Valores de A_i y e_i

DMUs	Media A_i	Media e_i
KE1	0.437	0.541
KE2	0.484	0.537
KE3	0.597	0.584
KE4	0.714	0.426
KE5	0.498	0.714
KE6	0.620	0.769
KE7	0.640	0.453
KE8	0.371	0.404
KE9	0.636	0.436
KE10	0.601	0.545
KE11	0.580	0.770

La Tabla 22 nos permite ver las diferentes formas de producir entre una DMU y las demás. Así, las mejor posicionadas en las ordenaciones del modelo 3, KE2, KE3 y KE4 valoran a las demás de forma similar con un valor medio, 0.4 o 0.5. En cambio las peor posicionadas en el ranking, KE5 y KE11, valoran a las demás muy alto 0.7.

6.2.5 Modelo cross-efficiency fuzzy

El modelo cross-efficiency es uno de los métodos que ha encontrado un número significativo de aplicaciones y ha sido ampliamente investigado, si bien se ha desarrollado muy poco como modelo fuzzy, nosotros introducimos como novedad trabajar con inputs y outputs fuzzy aplicando técnicas de Kao y Liu que se utilizan en los modelos duales, pero adaptadas al modelo primal.

Continuamos considerando, como en los epígrafes anteriores, las 11 DMUs eficientes, con inputs y outputs números fuzzy trapezoidales; usando el modelo primal orientación input fuzzy:

$$\tilde{E}_{kk} = \text{Max} \sum_{r=1}^s u_{rk} \tilde{y}_{rk}$$

s.a.

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} \tilde{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} \tilde{x}_{ij}} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^m v_{ik} \tilde{x}_{ik} &= 1 \\ u_{rk} &\geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s, \\ v_{ik} &\geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{49}$$

El algoritmo utilizado es el siguiente:

PASO 1. A partir de los inputs y outputs (o datos) de las empresas, crear los números fuzzy trapezoidales estableciendo variaciones aleatorias de ente un 5 % y 10 % para los techos y de entre el 5 % y 20 % para las bases de los mismos.

PASO 2. Establecer los valores α para los α -cortes de los números fuzzy calculados en el PASO1. En nuestro caso: 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.

PASO 3. Introducir el modelo primal (49) en GAMS, con el “solver” LINGO o CPLEX, para optimizar (maximizar), (ver apéndices H e I).

PASO 4. El modelo se resuelve dos veces, paro el caso desfavorable y el favorable.

PASO 5. Para evitar los denominadores nulos, durante la ejecución del programa, imponemos la condición de que los pesos sean mayores que 0.00001.

PASO 6. Obtención de las eficiencias para cada caso (desfavorable y favorable) en función del valor de α .

Caso desfavorable	Caso favorable
$E_{kk}^L(\alpha) = \text{Max} \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk}^L(\alpha)$	$E_{kk}^U(\alpha) = \text{Max} \sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk}^U(\alpha)$
s.a.	s.a.
$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk}^L(\alpha)}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}^U(\alpha)} \leq 1, \quad j = k$	$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk}^U(\alpha)}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}^L(\alpha)} \leq 1, \quad j = k,$
$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj}^U(\alpha)}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}^L(\alpha)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$	$\frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj}^L(\alpha)}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}^U(\alpha)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$
$\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}^U(\alpha) = 1$	$\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}^L(\alpha) = 1$
$u_{rk} \geq 0.00001 \quad r = 1, \dots, s,$	$u_{rk} \geq 0.00001 \quad r = 1, \dots, s,$
$v_{ik} \geq 0.00001 \quad i = 1, \dots, m.$	$v_{ik} \geq 0.00001 \quad i = 1, \dots, m.$

PASO 7. Tratamiento posterior de los resultados para la ordenación casos desfavorable y favorable.

Este algoritmo a partir del modelo cross efficiency fuzzy aplicado a nuestros datos, tratados como números fuzzy, da lugar a distintas tablas (para caso favorable y desfavorable) donde aparecen dos tipos de resultados:

1. Los *elementos de la diagonal*, obtenidos a partir de la solución de los programas de cross-efficiency del caso desfavorable y favorable arriba descritos, constituirán los extremos del intervalo de eficiencia.
2. Los resultados que *no pertenecen a la diagonal*, cuyo cálculo se realiza en dos etapas:
 - i. Obtener los pesos y la eficiencia de la DMU_k por ejemplo, si es del caso desfavorable, resolviendo el programa Caso Desfavorable para la DMU_k .
 - ii. Obtener la cross-efficiency de las otras $DMUs$ utilizando los pesos obtenidos para k y los valores menores de inputs y mayores outputs para el resto de las $DMUs$ para j distinto de k . El proceso contrario se realizaría para los casos favorables.

No estamos trabajando con los extremos inferiores ni superiores de los cortes por eso el resultado no son intervalos, sin embargo, los resultados proporcionan un valor añadido como explicaremos posteriormente.

Los resultados obtenidos se pueden consultar desde la Tabla 23 hasta la Tabla 34.

Tabla 23: Tabla de cross-efficiency. Caso desfavorable $\alpha = 0$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	0.801	1.000	0.700	0.530	0.426	0.690	0.531	0.071	0.159	0.361	0.660	0.513
KE2	1.000	1.000	0.258	0.237	0.235	1.000	0.171	1.000	0.820	0.331	0.281	0.533
KE3	1.000	0.980	0.906	0.820	0.593	0.731	1.000	0.072	0.165	0.493	1.000	0.686
KE4	0.359	0.357	0.796	1.000	1.000	0.637	1.000	0.171	0.368	1.000	0.961	0.665
KE5	0.230	0.226	0.512	0.959	0.740	0.482	0.645	0.316	0.591	0.888	0.670	0.552
KE6	0.709	0.662	0.843	1.000	0.964	1.000	0.737	0.554	1.000	0.777	1.000	0.825
KE7	0.508	0.517	1.000	0.990	0.716	0.619	0.782	0.084	0.191	0.697	1.000	0.632
KE8	0.253	0.252	0.323	0.422	0.426	0.507	0.291	0.716	1.000	0.519	0.400	0.439
KE9	0.277	0.270	0.558	1.000	1.000	0.606	0.644	1.000	0.983	1.000	0.735	0.709
KE10	0.159	0.157	0.401	1.000	1.000	0.363	0.579	0.741	1.000	0.979	0.560	0.596
KE11	0.965	0.910	1.000	0.899	0.751	1.000	0.852	0.137	0.298	0.612	0.750	0.742
Media e_i	0.546	0.533	0.639	0.786	0.711	0.664	0.645	0.415	0.560	0.668	0.727	

Tabla 24: Tabla de cross-efficiency. Caso favorable $\alpha = 0$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	1.000	0.869	0.803	0.589	0.554	0.941	0.776	0.193	0.552	0.344	0.485	0.611
KE2	0.682	1.000	1.000	0.230	0.636	1.000	0.516	1.000	0.287	0.130	0.657	0.614
KE3	0.973	1.000	1.000	1.000	0.640	1.000	1.000	0.199	0.803	0.618	0.545	0.778
KE4	1.000	0.455	0.294	1.000	1.000	0.429	0.560	0.409	1.000	1.000	0.923	0.707
KE5	0.667	0.279	0.185	0.531	1.000	0.274	0.337	0.540	0.750	0.720	0.799	0.508
KE6	1.000	0.658	0.579	0.792	1.000	1.000	0.638	1.000	1.000	0.587	1.000	0.825
KE7	0.797	0.519	0.367	0.849	0.623	0.512	1.000	0.216	0.801	0.752	0.548	0.598
KE8	0.514	0.265	0.194	0.291	0.590	0.278	0.284	1.000	0.396	0.232	0.614	0.366
KE9	0.778	0.336	0.228	0.530	0.967	0.336	0.393	0.941	1.000	0.564	1.000	0.607
KE10	0.543	0.198	0.126	0.425	0.748	0.189	0.249	0.590	0.654	1.000	0.776	0.450
KE11	0.961	0.731	0.591	0.807	0.764	0.792	0.738	0.309	0.824	0.566	1.000	0.708
Media e_i	0.791	0.531	0.437	0.604	0.752	0.575	0.549	0.540	0.710	0.551	0.735	

Tabla 25: Tabla de cross-efficiency. Caso desfavorable $\alpha = 0.2$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	0.828	1.000	0.702	0.448	0.431	0.713	0.537	0.071	0.168	0.367	0.664	0.510
KE2	1.000	1.000	0.259	0.171	0.237	1.000	0.173	1.000	0.708	0.293	0.281	0.512
KE3	1.000	0.997	0.938	0.761	0.593	0.749	1.000	0.071	0.173	0.498	1.000	0.684
KE4	0.361	0.368	0.803	1.000	1.000	0.618	1.000	0.169	0.386	1.000	0.964	0.667
KE5	0.231	0.232	0.516	0.887	0.762	0.459	0.646	0.312	0.605	0.894	0.672	0.545
KE6	0.717	0.674	0.851	0.777	0.964	1.000	0.740	0.548	1.000	0.779	1.000	0.805
KE7	0.508	0.528	1.000	1.000	0.716	0.619	0.821	0.083	0.202	0.680	1.000	0.634
KE8	0.253	0.257	0.325	0.324	0.426	0.484	0.292	0.742	0.909	0.475	0.399	0.414
KE9	0.281	0.281	0.565	0.854	1.000	0.581	0.646	1.000	1.000	1.000	0.739	0.695
KE10	0.160	0.163	0.408	1.000	1.000	0.345	0.582	0.737	1.000	1.000	0.565	0.596
KE11	0.961	0.919	1.021	0.759	0.751	1.000	0.855	0.134	0.310	0.613	0.770	0.732
Media e_i	0.547	0.542	0.645	0.698	0.712	0.657	0.647	0.412	0.550	0.660	0.728	

Tabla 26: Tabla de cross-efficiency. Caso favorable $\alpha = 0.2$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	1.000	0.876	0.828	0.585	0.359	0.942	0.752	0.187	0.535	0.348	0.507	0.592
KE2	1.000	1.000	1.000	0.221	0.174	1.000	0.479	1.000	0.285	0.134	0.658	0.595
KE3	0.768	1.000	1.000	1.000	0.548	1.000	1.000	0.191	0.768	0.610	0.573	0.746
KE4	0.278	0.447	0.305	1.000	1.000	0.441	0.590	0.403	1.000	1.000	0.950	0.641
KE5	0.175	0.274	0.192	0.551	1.000	0.283	0.353	0.546	0.767	0.735	0.805	0.468
KE6	0.550	0.656	0.600	0.785	0.739	1.000	0.626	1.000	1.000	0.602	1.000	0.756
KE7	0.351	0.522	0.383	0.880	0.658	0.527	1.000	0.212	0.787	0.750	0.585	0.565
KE8	0.184	0.262	0.201	0.288	0.307	0.287	0.286	1.000	0.401	0.236	0.610	0.306
KE9	0.216	0.331	0.236	0.540	0.735	0.347	0.409	0.982	1.000	0.586	1.000	0.538
KE10	0.119	0.194	0.131	0.444	1.000	0.196	0.264	0.618	0.680	1.000	0.775	0.442
KE11	0.570	0.730	0.613	0.809	0.588	0.807	0.736	0.301	0.804	0.563	1.000	0.652
Media e_i	0.421	0.529	0.449	0.610	0.611	0.583	0.550	0.544	0.700	0.556	0.746	

Tabla 27: Tabla de cross-efficiency. Caso desfavorable $\alpha = 0.4$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	0.856	0.034	0.704	0.409	0.436	0.737	0.542	0.070	0.185	0.379	0.668	0.416
KE2	1.000	1.000	0.259	0.145	0.239	1.000	0.175	1.000	0.576	0.226	0.281	0.490
KE3	1.000	0.026	0.972	0.733	0.592	0.768	1.000	0.069	0.190	0.521	1.000	0.590
KE4	0.363	0.008	0.809	1.000	1.000	0.601	1.000	0.166	0.421	1.000	0.968	0.634
KE5	0.231	0.005	0.520	0.829	0.785	0.437	0.647	0.307	0.633	0.922	0.674	0.521
KE6	0.723	0.019	0.853	0.682	0.969	1.000	0.744	0.541	1.000	0.830	1.000	0.736
KE7	0.508	0.012	1.000	1.000	0.717	0.618	0.861	0.082	0.224	0.671	1.000	0.583
KE8	0.254	0.006	0.327	0.278	0.426	0.463	0.293	0.769	0.794	0.409	0.398	0.365
KE9	0.285	0.007	0.572	0.762	1.000	0.558	0.648	1.000	1.000	1.000	0.744	0.658
KE10	0.162	0.004	0.414	0.963	1.000	0.329	0.585	0.733	1.000	1.000	0.570	0.576
KE11	0.956	0.026	1.000	0.690	0.752	1.000	0.858	0.131	0.334	0.646	0.790	0.639
Media e_i	0.548	0.015	0.646	0.649	0.713	0.651	0.649	0.410	0.540	0.660	0.730	

Tabla 28: Tabla de cross-eficiency. Caso desfavorable $\alpha = 0.4$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	1.000	0.884	0.854	0.577	0.377	0.944	0.726	0.157	0.520	0.351	0.530	0.592
KE2	1.000	1.000	1.000	0.217	0.195	1.000	0.445	1.000	0.283	0.138	0.660	0.594
KE3	0.800	1.000	1.000	1.000	0.552	1.000	1.000	0.159	0.735	0.601	0.604	0.745
KE4	0.292	0.439	0.317	1.000	1.000	0.454	0.625	0.350	1.000	1.000	0.977	0.645
KE5	0.183	0.270	0.199	0.567	1.000	0.292	0.371	0.508	0.784	0.751	0.810	0.473
KE6	0.571	0.654	0.620	0.778	0.802	1.000	0.613	0.911	1.000	0.608	1.000	0.756
KE7	0.371	0.525	0.402	0.912	0.662	0.542	1.000	0.180	0.775	0.748	0.626	0.574
KE8	0.192	0.260	0.208	0.290	0.337	0.295	0.289	1.000	0.405	0.246	0.602	0.312
KE9	0.226	0.327	0.245	0.552	0.793	0.359	0.425	1.000	1.000	0.606	1.000	0.553
KE10	0.125	0.191	0.136	0.464	1.000	0.202	0.282	0.629	0.708	1.000	0.774	0.451
KE11	0.596	0.730	0.636	0.802	0.610	0.822	0.733	0.255	0.786	0.566	1.000	0.654
Media e_i	0.436	0.528	0.462	0.616	0.633	0.591	0.551	0.515	0.700	0.562	0.758	

Tabla 29: Tabla de cross-eficiency. Caso desfavorable $\alpha = 0.6$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	0.885	1.000	0.735	0.397	0.441	0.761	0.548	0.070	0.204	0.384	0.672	0.521
KE2	1.000	1.000	0.283	0.134	0.241	1.000	0.177	1.000	0.485	0.200	0.281	0.480
KE3	1.000	0.938	1.000	0.730	0.591	0.788	1.000	0.068	0.212	0.539	1.000	0.687
KE4	0.365	0.335	0.729	1.000	1.000	0.584	1.000	0.163	0.462	1.000	0.972	0.661
KE5	0.231	0.213	0.468	0.781	0.808	0.417	0.648	0.303	0.663	0.921	0.675	0.532
KE6	0.731	0.683	0.844	0.632	0.973	1.000	0.749	0.534	1.000	0.847	1.000	0.799
KE7	0.508	0.468	0.916	1.000	0.716	0.616	0.903	0.081	0.250	0.681	1.000	0.624
KE8	0.254	0.237	0.320	0.261	0.428	0.443	0.294	0.797	0.705	0.377	0.395	0.371
KE9	0.290	0.267	0.530	0.706	1.000	0.536	0.651	1.000	1.000	0.977	0.748	0.670
KE10	0.164	0.150	0.365	0.901	1.000	0.314	0.587	0.729	1.000	1.000	0.575	0.578
KE11	0.953	0.896	1.000	0.663	0.753	1.000	0.862	0.128	0.362	0.661	0.811	0.728
Media e_i	0.550	0.519	0.619	0.620	0.714	0.646	0.651	0.408	0.530	0.659	0.732	

Tabla 30: Tabla de cross-eficiency. Caso favorable $\alpha = 0.6$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	1.000	0.891	0.880	0.569	0.397	0.945	0.699	0.121	0.506	0.354	0.554	0.592
KE2	1.000	1.000	1.000	0.209	0.222	1.000	0.414	1.000	0.281	0.142	0.664	0.593
KE3	0.834	1.000	1.000	1.000	0.556	1.000	1.000	0.121	0.706	0.593	0.637	0.745
KE4	0.306	0.432	0.329	1.000	1.000	0.467	0.666	0.280	1.000	1.000	1.000	0.648
KE5	0.192	0.266	0.207	0.587	1.000	0.301	0.392	0.442	0.802	0.770	0.811	0.477
KE6	0.594	0.653	0.640	0.771	0.879	1.000	0.599	0.777	1.000	0.624	1.000	0.754
KE7	0.391	0.528	0.420	0.944	0.662	0.558	1.000	0.141	0.764	0.743	0.669	0.582
KE8	0.201	0.258	0.216	0.291	0.375	0.304	0.290	1.000	0.410	0.251	0.595	0.319
KE9	0.237	0.323	0.255	0.567	0.861	0.371	0.444	1.000	1.000	0.628	0.996	0.568
E10	0.132	0.187	0.142	0.485	1.000	0.210	0.304	0.628	0.738	1.000	0.767	0.459
E11	0.623	0.730	0.660	0.794	0.636	0.838	0.729	0.198	0.768	0.566	1.000	0.654
Media e_i	0.451	0.527	0.475	0.622	0.659	0.599	0.554	0.471	0.700	0.567	0.770	

Tabla 31: Tabla de cross-efficiency. Caso desfavorable $\alpha = 0.8$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	0.915	1.000	0.939	0.383	0.447	0.787	0.554	0.070	0.228	0.385	0.774	0.557
KE2	1.000	1.000	0.552	0.124	0.243	1.000	0.179	1.000	0.420	0.189	0.619	0.533
KE3	1.000	0.946	1.000	0.725	0.591	0.809	1.000	0.066	0.239	0.546	1.000	0.692
KE4	0.366	0.341	0.469	1.000	1.000	0.567	1.000	0.161	0.511	1.000	1.000	0.642
KE5	0.232	0.215	0.297	0.738	0.832	0.398	0.649	0.298	0.695	0.902	0.670	0.510
KE6	0.737	0.696	0.808	0.587	0.970	1.000	0.752	0.528	1.000	0.807	1.000	0.788
KE7	0.507	0.473	0.633	1.000	0.715	0.614	0.948	0.079	0.284	0.699	0.998	0.600
KE8	0.255	0.240	0.290	0.240	0.427	0.424	0.295	0.827	0.635	0.358	0.520	0.368
KE9	0.294	0.274	0.369	0.658	1.000	0.517	0.654	1.000	1.000	0.941	0.796	0.650
KE10	0.166	0.154	0.217	0.843	1.000	0.300	0.590	0.725	1.000	1.000	0.583	0.558
KE11	0.950	0.900	1.000	0.636	0.754	1.000	0.865	0.125	0.397	0.652	0.843	0.728
Media e_i	0.551	0.524	0.557	0.593	0.715	0.642	0.654	0.405	0.540	0.648	0.796	

Tabla 32: Tabla de cross-efficiency. Caso favorable $\alpha = 0.8$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	1.000	0.899	0.909	0.564	0.419	0.947	0.672	0.093	0.493	0.357	0.582	0.593
KE2	1.000	1.000	1.000	0.202	0.259	1.000	0.384	1.000	0.279	0.146	0.681	0.595
KE3	0.867	1.000	1.000	1.000	0.560	1.000	1.000	0.093	0.679	0.586	0.672	0.746
KE4	0.320	0.426	0.342	1.000	1.000	0.481	0.715	0.223	1.000	1.000	1.000	0.651
KE5	0.201	0.262	0.215	0.605	1.000	0.311	0.416	0.380	0.820	0.786	0.790	0.479
KE6	0.618	0.651	0.662	0.765	0.976	1.000	0.583	0.655	1.000	0.640	1.000	0.755
KE7	0.412	0.531	0.440	0.978	0.664	0.573	1.000	0.110	0.754	0.741	0.710	0.591
KE8	0.210	0.255	0.222	0.286	0.425	0.314	0.291	1.000	0.414	0.261	0.584	0.326
KE9	0.249	0.320	0.265	0.577	0.942	0.384	0.465	1.000	1.000	0.654	0.968	0.582
KE10	0.138	0.185	0.147	0.508	1.000	0.217	0.331	0.625	0.770	1.000	0.728	0.465
KE11	0.651	0.731	0.684	0.792	0.666	0.853	0.722	0.155	0.751	0.569	1.000	0.657
Media e_i	0.467	0.526	0.488	0.628	0.691	0.608	0.558	0.433	0.700	0.574	0.772	

Tabla 33: Tabla de cross-efficiency. Caso desfavorable $\alpha = 1$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	0.946	1.000	0.696	0.373	0.452	0.813	0.560	0.069	0.258	0.386	0.778	0.539
KE2	1.000	1.000	0.382	0.116	0.245	1.000	0.181	1.000	0.371	0.181	0.651	0.513
KE3	1.000	0.953	1.000	0.725	0.590	0.832	1.000	0.065	0.273	0.552	1.000	0.699
KE4	0.368	0.346	0.810	1.000	1.000	0.552	1.000	0.158	0.572	1.000	1.000	0.681
KE5	0.232	0.218	0.471	0.700	0.856	0.381	0.650	0.294	0.731	0.884	0.670	0.523
KE6	0.745	0.707	0.645	0.547	0.974	1.000	0.756	0.521	1.000	0.778	1.000	0.767
KE7	0.506	0.477	1.000	1.000	0.715	0.612	0.995	0.078	0.327	0.705	0.977	0.640
KE8	0.256	0.242	0.329	0.224	0.426	0.407	0.295	0.860	0.578	0.342	0.523	0.362
KE9	0.299	0.281	0.534	0.612	1.000	0.498	0.657	1.000	1.000	0.900	0.809	0.659
KE10	0.168	0.157	0.401	0.788	1.000	0.287	0.592	0.721	1.000	1.000	0.585	0.570
KE11	0.946	0.904	0.881	0.614	0.754	1.000	0.869	0.122	0.440	0.649	0.881	0.718
Media e_i	0.552	0.5285	0.615	0.570	0.716	0.638	0.656	0.403	0.560	0.638	0.799	

Tabla 34: Tabla de cross-eficiency. Caso desfavorable $\alpha = 1$

CROSS-EFF	KE.1	KE.2	KE.3	KE.4	KE.5	KE.6	KE.7	KE.8	KE.9	KE.10	KE.11	Media A_i
KE1	1.000	0.907	0.938	0.569	0.436	0.949	0.644	0.070	0.481	0.359	0.611	0.596
KE2	1.000	1.000	1.000	0.208	0.275	1.000	0.357	1.000	0.277	0.149	0.699	0.596
KE3	0.902	1.000	1.000	1.000	0.563	1.000	1.000	0.070	0.655	0.577	0.710	0.748
KE4	0.335	0.420	0.355	1.000	1.000	0.495	0.774	0.172	1.000	1.000	1.000	0.655
KE5	0.211	0.259	0.223	0.631	0.979	0.321	0.445	0.314	0.839	0.802	0.770	0.482
KE6	0.641	0.650	0.683	0.786	1.000	1.000	0.566	0.536	1.000	0.657	1.000	0.752
KE7	0.435	0.534	0.459	1.000	0.670	0.590	1.000	0.084	0.743	0.739	0.753	0.601
KE8	0.219	0.254	0.230	0.297	0.442	0.323	0.291	1.000	0.417	0.267	0.572	0.331
KE9	0.261	0.317	0.276	0.604	0.974	0.397	0.490	0.995	1.000	0.678	0.942	0.593
KE10	0.145	0.182	0.153	0.533	1.000	0.225	0.364	0.617	0.805	1.000	0.695	0.472
KE11	0.679	0.732	0.709	0.803	0.680	0.869	0.715	0.118	0.736	0.569	1.000	0.661
Media e_i	0.483	0.526	0.503	0.643	0.704	0.617	0.565	0.398	0.700	0.580	0.775	

Recordemos que los resultados de las diagonales son las eficiencias correspondientes a cada DMU. Tomando de las tablas anteriores los resultados de las diagonales, para cada valor de α , correspondientes a los casos favorable y desfavorable, escribimos estos resultados como intervalo, en el que el extremo inferior del intervalo corresponde al caso desfavorable y el extremo superior del intervalo al caso favorable. Estos resultados se muestran en la Tabla 35.

Tabla 35: Resultados de E_{kk} en función de α para cada DMU

Notaciones	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
K4 KE1	[0.801,1]	[0.828,1]	[0.856,1]	[0.885,1]	[0.915,1]	[0.946,1]
K9 KE2	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K13 KE3	[0.906,1]	[0.938,1]	[0.972,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K17 KE4	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K18 KE5	[0.74,1]	[0.762,1]	[0.765,1]	[0.808,1]	[0.832,1]	[0.856,1]
K20 KE6	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K26 KE7	[0.782,1]	[0.821,1]	[0.861,1]	[0.903,1]	[0.948,1]	[0.995,1]
K30 KE8	[0.716,1]	[0.742,1]	[0.769,1]	[0.797,1]	[0.827,1]	[0.860,1]
K33 KE9	[0.983,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K38 KE10	[0.979,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]	[1,1]
K43 KE11	[0.750,1]	[0.770,1]	[0.790,1]	[0.811,1]	[0.843,1]	[0.881,1]

Observamos dos situaciones diferentes, una la que corresponde a aquellas DMUs cuyo intervalo de eficiencia se reduce a un punto para los diferentes valores de α , es decir, con eficiencia 1. Éstas son KE2, KE3, KE4, KE6, KE9 y KE10; cabe pensar que son las unidades que si las ordenáramos saldrían más eficientes.

Las DMUs con mayor longitud de intervalo son la KE5 y KE8, unidades a las que les corresponde valor de eficiencia crisp inferior a 1. Estos resultados corroboran los obtenidos con otros modelos. De estos resultados podemos deducir que, en

este caso, la incertidumbre introducida no distorsiona el proceso de cálculo de la eficiencia.

Las DMUs que pueden mejorar son KE1, KE5, KE7, KE8, KE11, dado que son las DMUs con una amplitud de intervalo mayor, siendo más sensible a variaciones en los inputs y outputs; los posibles cambios en inputs u outputs va a permitir mejorar la eficiencia.

Indicar que al trabajar con fuzzy además de proporcionar resultados similares al caso crisp, nos permite diferenciar mejor entre las diferentes DMUs. Su utilización asegura no cometer errores y ampliar los resultados a lo casos en que los datos no son fiables del todo por tener errores de medida, ser inciertos, etc. También nos da información sobre la robustez de los resultados de una forma simple sin añadir hipótesis de distribución de probabilidad de los datos, como ya hemos mencionado en el caso anterior.

Los valores promedios e_i y A_i , en los casos favorables y desfavorables, no se pueden considerar como los extremos de intervalos, que es los que ocurre con los elementos de la diagonal, ya que no estamos trabajando con los extremos inferiores ni superiores de los datos, y tampoco debemos considerar que los valores promedios casos crisp se encontraran entre estos valores. Separamos el análisis según casos desfavorables y favorables.

(1) Casos desfavorables.

Considerando las medias de e_i , Evaluación por pares, usamos los pesos de i para ver cómo quedan las otras DMUs; los resultados se muestran en la Tabla 36.

Tabla 36: Caso desfavorable, cross-efficiency evaluación por pares

DMU	e_i crisp	e_i para diferentes valores de α					
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
KE1	0.541	0.546	0.547	0.548	0.55	0.551	0.552
KE2	0.537	0.533	0.542	0.015	0.519	0.524	0.5285
KE3	0.584	0.639	0.645	0.646	0.619	0.557	0.615
KE4	0.426	0.786	0.698	0.649	0.62	0.593	0.57
KE5	0.714	0.711	0.712	0.713	0.714	0.715	0.716
KE6	0.769	0.664	0.657	0.651	0.646	0.642	0.638
KE7	0.453	0.645	0.647	0.649	0.651	0.654	0.656
KE8	0.404	0.415	0.412	0.41	0.408	0.405	0.403
KE9	0.436	0.56	0.55	0.54	0.53	0.54	0.56
KE10	0.545	0.668	0.66	0.66	0.659	0.648	0.638
KE11	0.77	0.727	0.728	0.73	0.732	0.796	0.799

Las DMUs KE2 y KE9 presentan el valor más bajos de e_i , sobre 0.5, este resultado es próximo al caso crisp para KE2 y ligeramente superior para KE9. En cambio KE5 y KE11 las valoran las demás con 0.7, resultado similar al caso crisp.

Considerando todos los resultados promedio A_i de la evaluación de los pares en función de α , se observa que los valores crisp son algo ligeramente inferiores a los obtenidos aplicando fuzzy, ver Tabla 37.

Tabla 37: Caso desfavorable, cross-efficiency evaluación de los pares

DMU	A_i Crisp	A_i para diferentes valores de α					
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
KE1	0.437	0.513	0.51	0.416	0.521	0.557	0.539
KE2	0.484	0.533	0.512	0.49	0.48	0.533	0.513
KE3	0.597	0.686	0.684	0.59	0.687	0.692	0.699
KE4	0.714	0.665	0.667	0.634	0.661	0.642	0.681
KE5	0.498	0.552	0.545	0.521	0.532	0.51	0.523
KE6	0.62	0.825	0.805	0.736	0.799	0.788	0.767
KE7	0.64	0.632	0.634	0.583	0.624	0.6	0.64
KE8	0.371	0.439	0.414	0.365	0.371	0.368	0.362
KE9	0.636	0.709	0.695	0.658	0.67	0.65	0.659
KE10	0.601	0.596	0.596	0.576	0.578	0.558	0.57
KE11	0.58	0.742	0.732	0.639	0.728	0.728	0.718

KE6, es la que tiene valor más alto de A_i sobre 0.8, DMUs con valores entre 0.6 y 0.7 están KE3, KE4, KE9, KE11, mientras KE2 tiene un valor de 0.5.

KE8 sigue como la peor valorada tal como ocurría en el caso de cross-efficiency crisp.

Si consideramos de nuevo las DMUs mejor posicionadas en el modelo 3 que son KE2, KE3 y KE4, estos resultado permite ver las diferentes formas de producir entre la DMU_i y las demás.

(2) Casos favorable:

Analizamos los resultados obtenidos de e_i , resultados que se encuentran en la Tabla 38.

Tabla 38: Caso favorable, cross-efficiency evaluación por pares

DMU	e_i Crisp	e_i para diferentes valores de α					
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
KE1	0.541	0.791	0.421	0.436	0.451	0.467	0.483
KE2	0.537	0.531	0.529	0.528	0.527	0.526	0.526
KE3	0.584	0.437	0.449	0.462	0.475	0.488	0.503
KE4	0.426	0.604	0.61	0.616	0.622	0.628	0.643
KE5	0.714	0.752	0.611	0.633	0.659	0.691	0.704
KE6	0.769	0.575	0.583	0.591	0.599	0.608	0.617
KE7	0.453	0.549	0.55	0.551	0.554	0.558	0.565
KE8	0.404	0.54	0.544	0.515	0.471	0.433	0.398
KE9	0.436	0.71	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
KE10	0.545	0.551	0.556	0.562	0.567	0.574	0.58
KE11	0.77	0.735	0.746	0.758	0.77	0.772	0.775

Las DMUs con e_i más elevado son KE11, KE5, KE9 con valores sobre 0.7.

El resto de DMUs tienen sus valores entre 0.4 y 0.5.

Los valores de A_i se muestran en la Tabla 39.

Tabla 39: Caso favorable, cross-efficiency y evaluación de los pares

DMU	A_i Crisp	A_i para diferentes valores de α					
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
KE1	0.437	0.611	0.592	0.592	0.592	0.593	0.596
KE2	0.484	0.614	0.595	0.594	0.593	0.595	0.596
KE3	0.597	0.778	0.746	0.745	0.745	0.746	0.748
KE4	0.714	0.707	0.641	0.645	0.648	0.651	0.655
KE5	0.498	0.508	0.468	0.473	0.477	0.479	0.482
KE6	0.62	0.825	0.756	0.756	0.754	0.755	0.752
KE7	0.64	0.598	0.565	0.574	0.582	0.591	0.601
KE8	0.371	0.366	0.306	0.312	0.319	0.326	0.331
KE9	0.636	0.607	0.538	0.553	0.568	0.582	0.593
KE10	0.601	0.45	0.442	0.451	0.459	0.465	0.472
KE11	0.58	0.708	0.652	0.654	0.654	0.657	0.661

La DMU con valores más bajos es KE8, presentando un comportamiento similar al caso desfavorable y a la cross-efficiency crisp, que es la DMU que en todos los casos está peor valorada por las demás, a esta unidad le correspondió una eficiencia crisp de 0.975 en el estudio de las 11 DMUs, ver Tabla 16.

Observamos que los comportamientos de las DMUs al aplicar cross-efficiency fuzzy son similares a los observados cuando se aplica cross-efficiency.

Al utilizar nuestros inputs y outputs fuzzy en el modelo de cross efficiency fuzzy y obtener comportamientos de las DMUs similares la cross-efficiency, además de que los resultados obtenidos son similares, estamos valorando a las DMUs en múltiples escenarios, desde su punto de vista y desde el punto de vista de las otras DMUs; estas valoraciones nos permiten a la hora de realizar cambios estructurales en las DMUs, orientar el sentido de los mismos, variando adecuadamente determinados inputs y outputs para intentar replicar al máximo aquellas DMUs más eficientes.

Mediante este procedimiento hemos introducido la incertidumbre de una forma muy simple sin la necesidad de conocer distribuciones de probabilidad. La utilización de los números fuzzy nos asegura no cometer errores y permite ampliar los resultados a casos en que se pudiera pensar que los datos no son fiables o pudieran tener errores en la medida. Al introducir la incertidumbre al modelo de cross-efficiency hemos realizado un estudio más amplio y mejorado las expectativas de obtener buenos resultados al realizar los cambios que nos muestran.

Conclusiones

En la práctica, cuando se calcula la eficiencia relativa de un conjunto de unidades productivas, la empresa o entidad que realiza el estudio intenta obtener más información que el mero conocimiento sobre si una unidad es eficiente o no. Se encuentra así con otros dos problemas de naturaleza muy distinta:

El primero, la imprecisión de los datos que se manejan y que pueden afectar, en gran medida, al estudio de los ratios de eficiencia.

El segundo, pretender ordenar las DMUs teniendo en cuenta su eficiencia, aunque existe bastante literatura que muestra por qué el valor del ratio de eficiencia no puede utilizarse como un índice para ordenar estas unidades (Sirvent 2001).

La realidad suele mostrar hechos que no se pueden determinar con precisión, es decir, no son rígidos dicotómicos o deterministas, por lo que para modelizarlos necesitamos datos muy detallados. Además, suele asumirse que las estructuras y parámetros del modelo son conocidos y representan exactamente nuestra percepción del fenómeno tratado y las características del sistema real modelizado.

Generalmente, la precisión también implica que el modelo no contiene ambigüedades y, de hecho, pocas veces se plantean explícitamente dudas sobre sus valoraciones o su ocurrencia. Sin embargo, cualquier gestor sabe que a menudo sólo disponemos de información parcial sobre la realidad y normalmente no puede asociarse con ninguna variable concreta.

En el mundo real, la incertidumbre puede presentarse de diversas formas. Si nos referimos a la vaguedad inherente a la descripción del significado semántico de los hechos, estamos ante la incertidumbre fuzzy. Por otra parte, la incertidumbre estocástica, que se refiere a una falta de información sobre el estado futuro del sistema. Y estos dos tipos de incertidumbre aparecen especialmente en las áreas en las que el juicio humano, la evaluación y la decisión son imprescindibles, tal y como sucede en toda actividad empresarial (León, J.M. 2003). En general, se plantean dos tipos de complicaciones:

Las situaciones reales a menudo no son rígidas y deterministas y no pueden ser descritas con precisión, aunque se hayan fijado unas variables (inputs/outputs) que creamos que las describen. La descripción completa de un sistema real a menudo requerirá seguro más detalle del que un humano podría reconocer simultáneamente, procesar y comprender.

La teoría de conjuntos fuzzy es un instrumento eficaz y riguroso para solucionar los problemas en los que la fuente de imprecisión es la ausencia de un criterio claramente definido.

Desde luego, hay grandes parecidos formales entre la teoría de conjuntos fuzzy (en particular cuando usamos conjuntos fuzzy normalizados) y la teoría de la probabilidad. En el pasado, las probabilidades han sido las únicas representantes de la incertidumbre. Sin embargo, no siempre tiene sentido utilizar distribuciones de probabilidad para valores desconocidos y estamos convencidos de que concretamente el análisis de eficiencia es uno de los casos en los que la probabilidad podría no estar justificada.

Podría parecer que los resultados de un modelo DEA obtenidos a través de técnicas fuzzy deberían resultar menos manejables para usos posteriores (esencialmente la ordenación de las unidades productivas en función de sus ratios de eficiencia). Pues lo cierto es que esto no tiene por qué ser así. La razón fundamental es que cuando nos planteamos una ordenación de DMUs, si los datos se consideran conjuntos fuzzy, lógicamente los ratios son conjuntos fuzzy. Esto significa que cuando afirmamos que una DMU es eficiente en sentido fuzzy (que por supuesto debe extender el caso booleano) no sólo estamos dando un número en el intervalo $[0,1]$ sino que estamos mostrando información muy valiosa acerca del grado de verdad de la afirmación “esta DMU es eficiente” (León, T. et al.2003).

Nuestro objetivo en este trabajo ha sido el estudio de la eficiencia en el sector textil de la zona de L'Alcoia y el Comtat, zona que históricamente se ha dedicado a la producción textil con gran éxito y proporcionando gran riqueza en la zona. Este sector está sufriendo en la actualidad, de una forma grave, el deterioro del sector industrial en España y la crisis general que nos afecta, pero también desde hace unos años ha venido mostrando señales inequívocas de decaimiento y de una necesidad de renovación. Un estudio como este ayudará a las empresas a detectar donde existen deficiencias y qué aspectos necesita potenciar y/o desarrollar.

A fin de realizar un estudio en profundidad de las empresas seleccionadas, en este trabajo hemos aplicado tres modelos DEA con números fuzzy con el doble objetivo de ordenación de las DMUs eficientes e introducción de la incertidumbre: aplicando en primer lugar el modelo DEA y a continuación el modelo DEA fuzzy a nuestras DMUs hemos diferenciado las entidades eficientes de las no eficientes y comprobado que la introducción de la incertidumbre no modifica los resultados.

Ante la necesidad de ordenar las DMUs eficientes realizando un repaso de los diferentes métodos DEA que se aplican en la ordenación, recurrimos a dos modelos DEA post-análisis fuzzy, el modelo super-efficiency fuzzy del cual hay algunas aplicaciones y el modelo cross-efficiency fuzzy, de este último modelo comprobamos que se ha utilizado bastante cuando los inputs y outputs son crisp pero no así con modelos fuzzy.

Aplicando el modelo de super-efficiency fuzzy, observamos que completa los resultados obtenidos anteriormente, y se han alcanzado objetivos con gran simplicidad y sin hipótesis añadidas sobre los datos.

Por último al utilizar nuestros inputs y outputs fuzzy en el modelo de cross-efficiency fuzzy y obtener comportamientos de las DMUs similares a la cross-efficiency con inputs y outputs crisp, nos muestra la estabilidad de nuestro resultado pero además nos permite valorar a las DMUs en múltiples escenarios, desde su punto de vista y desde el punto de vista de las otras DMUs, estas valoraciones nos posibilitan a la hora de realizar cambios estructurales en las DMUs, orientar el sentido de los mismos, variando adecuadamente determinados inputs y outputs para intentar replicar al máximo aquellas DMUs más eficientes.

Reiterar que hemos introducido la incertidumbre de una forma operativa sin la necesidad de conocer distribuciones de probabilidad.

Pensamos que el trabajar con números fuzzy asegura disminuir el número de errores y permite ampliar los resultados a casos en que se pudiera pensar que los datos no son fiables o pudieran tener errores en la medida. Al introducir la incertidumbre al modelo de cross-efficiency hemos realizado un estudio más amplio.

Problemas abiertos y futuras investigaciones

El trabajo desarrollado en esta memoria representa solo el comienzo de un estudio que puede llevarse a cabo en distintas direcciones, tanto desde el punto de vista matemático, como económico y empresarial.

Como hemos mencionado en las Conclusiones, la situación actual del sector textil en l'Alcoià y el Comptat está sufriendo profundos cambios como resultado de la crisis que nos afecta a todos, pero también de los cambios en el sector industrial y productivo en general.

En este contexto, la aplicación de métodos matemáticos y económicos bien fundamentados y rigurosos pueden ser de gran ayuda para los gestores a la hora de tomar decisiones dirigidas a mejorar su eficiencia, a ser más competitivos y, en general a posicionarse en el sector.

En este sentido, estamos convencidos de que los métodos fuzzy desarrollados en este trabajo pueden resultar de utilidad como herramienta matemática de apoyo a la toma de decisiones. La presencia de incertidumbre en los datos es un hecho palpable cuando se trata del sector empresarial, al igual que en otros ámbitos de estudio, por muy cuidadosos que procuremos ser en la toma de datos.

Por todo ello, nuestra intención es continuar con el trabajo comenzado y, en particular, plantearnos los siguientes puntos:

- a) Ampliar el número de empresas estudiadas. Este estudio nos ha ofrecido una visión general de la situación de las empresas consideradas en cuanto a su eficiencia, pero nos planteamos también la posibilidad de extender el estudio a otras zonas próximas, para comparar si la situación es parecida o existen diferencias que se deberían estudiar.
- b) Utilizar en el estudio de eficiencia más subsectores de los empleados. En este estudio hemos considerado empresas dedicadas a textiles desde el tisa-je hasta el acabado, pero pensamos que sería interesante introducir subsec-tores que intervienen en el proceso de transformación hasta la obtención del producto final tales como subsector de hogar y decoración y subsector de textiles técnicos e industriales, de este modo analizaríamos la eficiencia de toda la cadena productiva.
- c) Realizar un estudio comparativo de eficiencia de empresas de otros secto-res de la comarca. Aunque el trabajo se ha orientado al sector textil, dado que en la comarca existen empresas dedicadas al sector de alimentación ta-les como las empresas aceituneras, conservas, etc., pensamos interesante realizar un estudio comparativo entre sectores, esta información podría ayudar a la hora de orientar tanto a las empresas que están activas como como a posibles emprendedores.
- d) Analizar si la ordenación depende mucho de la clasificación que se haga de las empresas. Aquí hemos realizado un estudio de empresas textiles, sin determinar su especialización concreta, es decir, si son empresas de acaba-dos, de hilatura..., y sería interesante conocer si la clasificación hubiera variado de haberlo hecho. El trabajo no es inmediato pues hay que tener en cuenta que muchas de estas empresas mantienen varias especializaciones, si bien otras tan solo participan en una. Quizás proporcionaría información

- sobre la conveniencia actual de aumentar o disminuir la cantidad de especializaciones de cada empresa.
- e) Puesto que la eficiencia es un determinante directo de la competitividad de las empresas, entendida esta última como que el coste final del producto coincida con la voluntad de pago del potencial cliente, queremos ver cómo se puede ampliar estos estudios al conjunto de estrategias (precios, variación de productos, mercados...) que llevan a la competitividad entre empresas.
 - f) Establecer algún método práctico que, tras el estudio de la eficiencia, permita una utilización más eficiente de los recursos productivos que consiga que la empresa mejore su rentabilidad, factor clave para su supervivencia en estos tiempos difíciles.
 - g) Diseñar un sistema inteligente que automatice todos los cálculos y permita diferentes tipos de respuesta: ratios en función del grado de exigencia, ratio global, ordenaciones, etc. En este sentido, hay ya mucho trabajo realizado y nos proponemos ensamblar los diferentes programas utilizados en los cálculos prácticos de esta memoria, y las mejoras posibles que ahora indicamos, para obtener ese sistema que mejore la eficiencia, minimice el tiempo de su realización de los cambios y que permita a su vez introducir fácilmente conceptos o métodos alternativos futuros, tales como desarrollar modelos de super-efficiency fuzzy y cross-efficiency fuzzy siguiendo el enfoque posibilístico, que completará el estudio realizado, y que siga la dirección de los estudios teóricos que se están desarrollando actualmente.
 - h) Comparar los resultados obtenidos al utilizar el enfoque basado en alpha cortes y el enfoque posibilístico, a fin de estudiar las diferencias y similitudes que proporcionan los dos métodos. Este estudio deberá realizarlo el sistema inteligente, de esta manera, con todos los datos y resultados a la vista

se podrá emprender el camino adecuado para mejorar la empresa desde diferentes ángulos.

Estos métodos que nosotros hemos aplicado al sector textil son también aplicables a otros sectores de la economía y la empresa y creemos que las posibilidades son muchas y muy variadas. El estudio de la eficiencia debe ser tenido en cuenta no solo en las empresas privadas, necesario para su subsistencia, sino también en las públicas en las que debe ser tenida en cuenta no solo para mejorar costes cuanto en perfeccionar el funcionamiento del propio sistema material y humano.

Referencias bibliográficas

- [1] ADLER N., FRIEDMAN L., SINUANY-STERM Z. (2002), Review of ranking methods in the data envelopment analysis context, *European Journal of Operational Research* 140, 249–265.
- [2] AIGNER, D., LOVELL, C.A.K. y SCHMIDT, P. (1977), Formulation and estimation of stochastic frontier production models, *Journal of Econometrics*, 6 (1), 21-37.
- [3] ALTO CONSEJO CONSULTIVO EN INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO DE LA PRESIDENCIA DE LA GENERALITAT (2008), *La innovación en el sector textil-confección de la Comunidad Valenciana*, EDITA: © Presidencia de la Generalitat Fundación premios Rey Jaime I, ISBN: 978-84-482-4868-0.
- [4] ANDERSON, T.R., HOLLINGSWORTH, K., INMAN, L., (2002), The fixed weighting nature of a cross-evaluation model. *Journal of Productivity Analysis* 17 (3), 249–255.
- [5] ANDERSEN, P., PETERSEN, N.C., (1993), A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, *Management Science* 39 (10), 1261–1294.
- [6] ARROW, K.J., (1951), *Social choice and individual values*, New-York, John Wiley & Sons.
- [7] ARZUBI, A., (2003), *Análisis de Eficiencia sobre Explotaciones Lecheras de la Argentina* Departamento Economía Sociología y Política Agrarias, Tesis doctoral Universidad de Córdoba.
- [8] BANKER, R.D. (1993), Maximum Likelihood, Consistency and Data Envelopment Analysis: A Statistical Foundation, *Management Science*, 39, 1265-1273.
- [9] BANKER, R.D. (1984), Estimating most productive scale size in Data Envelopment Analysis, *European journal of Operational Research*, 17, 35-44.

- [10] BANKER, R., CHARNES, A. y COOPER, W. (1984), Some models for estimating technical and scale efficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, vol 30, núm. 9, 1078-1092.
- [11] BANKER, R., D., DATAR S.M., (1989), Analysis of cost variances for management control in hospitals. *Research in Governmental and Nonprofit Accounting*, 5, 268–91.
- [12] BAO, C.P., CHEN, T.H., CHANG, S.Y., (2008), Slack-based ranking method: an interpretation to the cross-efficiency method in DEA. *Journal of the Operational Research Society* 59 (6), 860–862.
- [13] BATTESE, G.E. y T.J. COELLI (1995), A Model for Technical Inefficiency Effects in a Stochastic Frontier Production Function for Panel Data, *Empirical Economics* 20, 325-332.
- [14] BEASLEY, J. E. (1990), Comparing university departments, *Omega International Journal of Management*, 18 (2), 171-183.
- [15] BECATTINI, G. (1989), Il distretto industriale come ambiente creativo, en E. Benedetti (a cura di), *Mutazioni tecnologiche e condizionamenti internazionali*, Franco Angeli, Milán, 19-33.
- [16] BELLMAN R.E., ZADEH, L.A. (1970), Decision-making in a fuzzy environment, *Management Sci.* 17 B141-164.
- [17] BEESON, E., HUSTED, S. (1989), Patterns and Determinants of Productive Efficiency in State Manufacturing, *Journal of Regional Science*, vol. 29, 15-28.
- [18] BONILLA, M., MEDAL, A., CASAUS, T., SALA, R. (2002), The traffic in spanish ports: an efficiency analysis, *Publisher: Fabrizio Serra* 29 (2), 215-230.
- [19] BOSCA, J.E., LIERN,V., SALA, R., MARTINEZ, A., (2004), Análisis envolvente de datos bajo incertidumbre, *Asepuma, Monográfico* 2, 391-418.
- [20] BOSCA, J,E., LIERN, V., SALA, R., MARTINEZ, A., (2011), Ranking decision making units by means soft computing DEA models, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based systems (IJUFKS)*.
- [21] BOU, E., (2007), Análisis del sector textil en la Comunidad Valenciana. Proyecto Final de Carrera.

-
- [22] CALLEJÓN, M. Y COSTA, M.T. (1995), Economías externas y localización de las actividades industriales, *Economía Industrial*, 305, 75-89.
- [23] CALLEJÓN, M. Y COSTA, M.T. (1996), Geografía de la producción. Incidencia de las externalidades en la localización de las actividades en España. *Información Comercial Española. Revista de Economía*, 754, 39-49.
- [24] CARLSSON C., KORHONEN P., (1986). A parametric approach to fuzzy linear programming, *Fuzzy Sets and Systems* 20 17–30.
- [25] CASASÚS, T., LIERN,V., PLA, L., PÉREZ, J.C. (2012), An efficiency fuzzy study with application to the textile sector, *Actas The 5th WSEAS International Conference on Manufacturing Engineering, Quality and Production Systems (MEQAPS 12)* 95-100.
- [26] CERVERA M., GARCÍA A.,PAYERAS D., (2001), El cluster del textil hogar en las comarcas de l'Alcoià, el Comtat y la vall d'Albaida revista *Valenciana de Economía y Hacienda*, ISSN 1577-4163, 1, 153-178.
- [27] CHANDRA, P., COOPER, W., LI, S, y RAHMAN, A. (1998). Using DEA to evaluate 29 Canadian textile companies-Considering returns to scale. *International Journal of Production Economics* 54, 129-141.
- [28] CHARNES, A. y COOPER, W.W. (1985), Preface to topics in Data Envelopment Analysis, *Annals of Operations Research*, 2, 59-94 .
- [29] CHARNES, A., COOPER, W.W., GOLANY, B., SEIFORD, L., STUTZ, J., (1985b). Foundations of data envelopment analysis for Pareto–Koopmans efficient empirical production functions. *Journal of Econometrics* 30, 91–107.
- [30] CHARNES, A., COOPER, W.W., SEIFORD, L., STUTZ, J., (1982). A multiplicative model for efficiency analysis. *Socio-Economic Planning Sciences* 6, 223–224.
- [31] CHARNES, A., COOPER, W.W. y RHODES, E. (1978), Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal 01 Operational Research*, 2, 429-444.
- [32] CHEN, C. B. Y KLEIN C. M., (1997), An efficient approach to solving fuzzy MADM problems, *Fuzzy Sets and Systems* 88, 51-67.
- [33] CHEN J.-X., DENG M., GINGRAS S., (2011), A modified super-efficiency measure based on simultaneous input–output projection in data envelopment analysis, *Computers & Operations Research* 38, 496-504.

- [34] CHRISTIANSEN, L., JORGENSEN, D. y LAU, L., (1971), Conjugate duality and the transcendental logarithmic production function, *Econometrica*, 39(4), 255-256.
- [35] COLL, V., BLASCO, O. (2007), Evaluación de la eficiencia de la industria textil española a partir de información económico-financiera: una aplicación del análisis envolvente. *Revista investigación operacional* vol. 28 (1), 61-91.
- [36] COLL, V, BLASCO, O., (2009), Evolución de la eficiencia técnica de la industria textil española en el periodo 1995-2005. Análisis mediante un modelo frontera estocástica. *Estudios de Economía Aplicada* vol. 27(3), 1-32.
- [37] COLL, V, BLASCO, O., (2011), Análisis comparativo de la eficiencia de la pyme textil española: una Aproximación al efecto de la liberalización en el periodo 2004-2006, *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. Rect@* vol. 12, 33 - 52.
- [38] COOPER, W. W., HUANG, Z.M. y LI, S. (1996), Satisficing DEA Models Under Chance Constraints, *The Annals of Operations Research*, 66, 279-295.
- [39] COOPER, W.W., SEIFORD, LM., TONE,K., (2007), *Data Envelopment Analysis*, Springer.
- [40] COTEC (2004), Documentos COTEC sobre necesidades tecnológicas, 16. confección Textil. Fundación COTEC para la innovación ca. www.cotec.es.
- [41] DEBREU, G., (1951), The coefficient of resource utilization, *Econometrica* 19, 273-292.
- [42] DOYLE, J., GREEN, R., (1994), Efficiency and cross-efficiency in DEA: derivations, meanings and uses. *Journal of the Operations Research Society* 45 (5), 567-578.
- [43] DOYLE, J.R., GREEN, R.H., (1995), Cross-evaluation in DEA: improving discrimination among DMUs. *INFOR* 33 (3), 205-222.
- [44] DUBOIS, D., KERRE, E., MESIAR, R., PRADE ,H., (2000), Fuzzy interval analysis, in: D. Dubois, H. Prade (Eds.), *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [45] DUCH, N.,(2006), Posición competitiva y estrategias de las empresas catalanas. Análisis del Programa Créixer (2003-2005). *Documents de treball*. (CIDEM, Generalitat de Catalunya).

- [46] ENTANI T., MAEDA Y., TANAKA H., (2002), Dual models of interval DEA and its extension to interval data, *European J. Oper. Res* 136 32–45.
- [47] ERTAY, T., RUAN, D., (2005), Data envelopment analysis based decision model for optimal operator allocation in CMS. *European Journal of Operational Research* 164 (3), 800–810.
- [48] ESTEBAN, L., GALLIZO, J.L., HÉRNANDEZ J.M. (2002), Eficiencia técnica y convergencia en la industria manufacturera de La Unión Europea, *Estudios de Economía Aplicada*, vol.20, 381-401.
- [49] FÄRE, R. GROSSKOPF, S. y LOVELL C.A.K. (1994), *Production frontiers* Cambridge, Cambridge, University Press.
- [50] FARRELL, M.J., (1957), The measurement of productive efficiency, *Journal of Royal Statistical Society A* 120, 253-281.
- [51] FECHER, F.; PERELMAN, S. (1992), Productivity Growth and Technical Efficiency in OECD Industrial Activities, En CAVES, Richard E. (ed.). *Industrial Efficiency in Six Nations*. The MIT Press, 459-488.
- [52] FRIED, H., LOVELL, A.K. y SCHMIDT, S., (1993), *The measurement of productive efficiency. Techniques and applications*, Oxford University Press.
- [53] GANLEY, J.A. y CUBBIN, J.S., (1992), *Public of sector efficiency measurements. Applications of Data Envelopment Analysis*, Amsterdam, Elsevier Science Publishers.
- [54] GONG, B.H. y SICKLES, R.C., (1992), Finite samples evidence on the performance of stochastic frontiers and Data Envelopment Analysis using panel data. *Journal of Econometrics*, 51, 259-284.
- [55] GUMBAU M. (1998), La eficiencia técnica en la industria española. *Revista Española de Economía* vol 15(1), 67-84.
- [56] GREEN, R.H., DOYLE, J.R., COOK, W.D., (1996), Preference voting and project ranking using DEA and cross-evaluation. *European Journal of Operational Research* 90 (3), 461–472.
- [57] GREENE, W. (1980), Maximum Likelihood Estimation of Econometrics Frontier Functions, *Journal of Econometrics*, 13(1), 27-56.
- [58] GREGORIOU, G., MESSIER, J. y SEDZRO, K., (2004). Assessing the relative efficiency of credit union branches using data envelopment analysis. *INFOR*, 42.

- [59] GROSSKOPF, S., (1996), Statistical Inference and Nonparametric Efficiency: A Selective Survey, *Journal of Productivity Analysis*, 7, 161-176.
- [60] GUMBAU ALBERT, M.; MAUDOS, J. (1996), Eficiencia Productiva Sectorial en las Regiones Españolas: una Aproximación Frontera, *Revista Española de Economía*, 13 (2), 239-260.
- [61] GUMBAU M., (1998), La eficiencia técnica en la industria española. *Revista Española de Economía*, 15 (1), 67-84.
- [62] GUO, P. y TANAKA, H., (2001), Fuzzy DEA: A Perceptual Evaluation Method, *Fuzzy Sets and Systems*, 119, 149-160.
- [63] HARBERGER, A., (1954), Monopoly and resource allocation, *American Economic Review*, 44 (2), 77-87.
- [64] HATAMI-MARRBINI, A., EMROUZNEJAD, A., TAVANA, M. (2011), A Taxonomy and Review of the Fuzzy Fata Envelopment Analysis Literature, Two Decades in the Making, *European Journal of operational Research* 21 (3), 475-472.
- [65] HERNANDEZ, F.; MOLINOS, M.; SALA, R., (2011), Energy efficiency in Spanish wastewater treatment plants: A non-radial DEA approach, *Science of the Total Environment*, 409 (14), 2693-2699.
- [66] HSIAO, B., CHERN, CH., CHIU, Y-H., CHIU, CH-R. (2011), Using fuzzy super-efficiency slack-based measure data envelopment analysis to evaluate Taiwan's commercial bank efficiency, *Expert Systems with Applications* 38, 9147-9156.
- [67] HOSSEINZADEH LOTFI F., JAHANSHALOO G. R., ZAMANI P., (2011), A new ranking method based on cross-efficiency in data envelopment analysis, *African Journal of Business Management* 5(19), 7923-7930.
- [68] HOUGAARD J.L., (1999), Fuzzy scores of technical efficiency, *European J. Oper. Res.* 115, 529-541.
- [69] INUIGUCHI, M., ICHIHASI, H., YANAKA, H. (1990), Fuzzy Programming: a Survey of Recent Developments, *Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty*, eds. R. Slowinski and J. Teglem Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [70] KAO, C. y Liu S.T., (2000), Fuzzy efficiency measures in Data Envelopment Analysis, *Fuzzy Sets and Systems*, 113, 427-437.

- [71] KAO, C., LI, C.C., CHEN, S.P. (1999), Parametric programming to the analysis of fuzzy queues, *Fuzzy Sets and Systems* 107, 93-100.
- [72] KARSKAN, E.E. (2008), Using data envelopment analysis for evaluating flexible manufacturing systems in the presence of imprecise data, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 35 (9-10) 867-874.
- [73] KAUFMANN, A., (1975), *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*, vol. 1, Academic Press, New York.
- [74] KOOPMANS, T. C., (1951), *Activity analysis of production and allocation*, New Haven, Yale University Press.
- [75] LAI, Y.J., HWANG, C.L. (1992), *Fuzzy Mathematical Programming: Theory and applications*, Springer, Berlin.
- [76] LAND, K.C., LOVELL, C.A.K. y THORE, S., (1993), Chance-Constrained Data Envelopment Analysis, *Managerial and Decision Economics*, 14, 541-554.
- [77] LEIBENSTEIN, H., (1966), Allocative efficiency versus X efficiency, *American Economic Review*, 56, 392-415.
- [78] LEÓN, J.M., (2003), Juicios por comparación, inferencias lingüísticas y actos de decisión en sistemas de representación de conocimiento efectivamente computables basados en unidades vagamente perfiladas, Tesis doctoral, Universidad de Extremadura.
- [79] LEÓN, T., LIERN, V., RUÍZ, J.L. y SIRVENT, I., (2003), A Possibilistic Programming Approach to the Assessment of Efficiency with DEA Models, *Fuzzy Sets and Systems*, 139, 407-419.
- [80] LERTWORASIRIKUL, S., (2002), *A Fuzzy Data Envelopment Analysis (DEA)*, Ph.D. Dissertation, Dept. of Industrial Engineering, North Carolina State University.
- [81] LERTWORASIRIKUL, S., FANG, S.C., JOINES, J.A., NUTTLE, H.L. (2003a), Fuzzy (DEA): A credibility approach, *Fuzzy Sets Based Heuristics for Optimization* (J.L. Verdegay, editor). Physica Verlag, 11-158.
- [82] LEUNG Y., (1998), *Spatial Analysis and Planning under Imprecision*, North-Holland, Amsterdam.

- [83] LEWIN, A.Y. y MOREY, R. C., (1981), Measuring the relative efficiency and output potential of public sector organizations: an application of Data Envelopment Analysis, *International journal of Policy Analysis and Information Systems*, 5 (4), 267-285.
- [84] LIANG, L., WU, J., COOK, W.D., ZHU, J., (2008a) Alternative secondary goals in DEA cross efficiency evaluation. *International Journal of Production Economics* 113 (2), 1025-1030.
- [85] LIANG, L., WU, J., COOK, W.D., ZHU, J., (2008b) The DEA Game cross-efficiency model and its Nash equilibrium. *Operations Research* 56 (5), 1278-1288.
- [86] LUHANDJULA, M.K., (1989), Fuzzy optimization: an appraisal, *Fuzzy Sets and Systems* 30, 257-282.
- [87] MARTÍNEZ, M., (2003), La medición de la eficiencia en las instituciones de educación superior, Fundación BBVA.
- [88] MEEUSEN, W y VAN DEN BROECK, J. (1977), Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error”, *International Economic Review*, 18, 435-444.
- [89] MURILLO-ZAMORANO, L., VEGA-CERVERA J., (2001), The use of parametric and non-parametric frontier methods to measure the productive efficiency in the industrial sector A comparative study, *Int. J. Production Economics* 69, 265-275.
- [90] NORMAN, M. y STOKER, B., (1991), *Data Envelopment Analysis. The assessment of performance*, John Wiley & Sons.
- [91] OLESEN, O.B. y PETERSEN, N.C., (1995), Chance Constrained Efficiency Evaluation, *Management Science*, 41, 442-457.
- [92] ORAL, M., KETTANI, O., LANG, P., 1991. A methodology for collective evaluation and selection of industrial R&D projects. *Management Science* 7 (37), 871-883.
- [93] PARTHASARATHY, S. y ANBAZHAGAN, N. (2008), Evaluating ERP projects using DEA and regression analysis, *International Journal of Business Information System*, 3 (2), 140 -157.
- [94] PASTOR, J.T., RUÍZ, J.L. y SIRVENT, I., (1999), A Statistical Test for Detecting Influential Observations in DEA, *European Journal of Operational Research* 115, 542-554.

- [95] PERELMAN, S. (1995), R&D, Technological Progress and Efficiency Change in Industrial Activities, *Review of Income and Wealth*, 41(3), 349-366.
- [96] PITT, M. M. y LEE L., (1981), The measurement and sources of technical inefficiency in the Indonesian weaving industry, *Journal of Development Economics*, 9, 43-64.
- [97] PHILLIPS, D., RAVINDRAN, A. y SOLBERG, J., (1976), *Operations research: principles and practice*, Nueva York, Wiley.
- [98] PORTER, M. (1990), *The Competitive Advantage of Nations*, The Free Press. USA.
- [99] PORTER, M. (1998), *On competition*, Harvard Business School Press, Boston.
- [100] PLÁ, L., CASASÚS, T., PÉREZ, J.C., LIERN, V. (2012a), Análisis de eficiencia con datos inciertos. Una aplicación a la industria textil, *Actas XVI Congreso Español sobre Tecnología y lógica Fuzzy*.
- [101] PLA, L., PÉREZ, J.C., CASASÚS T., (2012b), El sector textil en la zona del alcoià. Un análisis fuzzy de eficiencia, *rect@13*, 57-74.
- [102] PRIOR, D. (1990), La Productividad Industrial de las Comunidades Autónomas, *Investigaciones Económicas*, 15 (2), 257-267.
- [103] RODRÍGUEZ, V. (2000), Variaciones en el patrón de especialización industrial de las regiones españolas durante el período 1980-1995. *Economía Industrial Española*, 333, 117-130.
- [104] RUÍZ, J.L., SIRVENT, I., (2001), Technyques for the Assessment of Influence in DEA, *European Journal of Operational Research*, 132, 390-399.
- [105] SALA, R., MOLINOS, M., HERNÁNDEZ, F., (2011a), Eficiencia de depuradoras bajo incertidumbre: DEA con tolerancias, *Anales de Asepuma*, XIX Jornadas, ISSN 2171-892X vol 19.
- [106] SALA, R., MOLINOS, M., HERNÁNDEZ, F., (2011b), Comparing the efficiency of wastewater treatment technologies through a DEA metafrontier model, *Chemical Engineering Journal* 173 (3), 766-772.
- [107] SALA, R., HERNÁNDEZ, F., MOLINOS, M., (2012), Assessing the efficiency of wastewater treatment plants in an uncertain context: a DEA with tolerances approach, *Environmental Science & Policy*, 18, 34-44.

- [108] SHANG, J., SUEYOSHI, T., (1995), A unified framework for the selection of flexible manufacturing system. *European Journal of Operational Research* 85 (2), 297–315.
- [109] SCHMIDT, P. y SICKLES, R.C., (1984), Production frontiers and panel data, *Journal of Business and Economic Statistics*, 2, 367-374.
- [110] SEGURA, J., (1993), *Análisis microeconómico*, Alianza Universidad Textos, ISBN: 84-206-8104-0.
- [111] SENGUPTA, J. K. (1987), Data Envelopment Analysis for efficiency measurement in the stochastic case, *Computers and Operations Research*, 13, 117-129.
- [112] SENGUPTA, J.K. (1992), A fuzzy systems approach in data envelopment analysis, *Comput. Math. Appl.* 24 259–266.
- [113] SEXTON, T. R., SILKMAN, R.H. y HOGAN, A.J., (1986), Data Envelopment Analysis: critique and extensions, en R.H. In: Silkman R.H.(ed.): *Measuring efficiency: an assessment of Data Envelopment Analysis*, Jossey-Bass, San Francisco, CA, pp. 73–105.
- [114] SEIFORD, L. M. y THRALL, R. M. (1990), Recent developments in DEA. The mathematical programming approach to frontier analysis, *Journal of Econometrics*, 46, 7-38.
- [115] SEIFORD L.M., ZHU J. (1998a), Stability regions for maintaining efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*; 108, 127-39.
- [116] SEIFORD L.M., ZHU J.(1998b), Sensitivity analysis of DEA models for simultaneous changes in all the data. *Journal of the Operational Research Society*; 49, 1060-71.
- [117] SEIFORD L.M., ZHU J. (1999), Infeasibility of super-efficiency data envelopment analysis models. *INFOR*, 37, 174-87.
- [118] SHEPHARD, R.W., (1970), *The Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton, N. J.
- [119] SIMAR, L. (1992), Estimating efficiencies from frontier models with panel data: a comparison of parametric, non-parametric and semi-parametric methods with bootstrapping, *The Journal of Productivity Analysis*, vol. 3, 171-203.

-
- [120] SIMAR, L. y WILSON, P.W. (1998), Sensitive analysis of efficiency scores: how to bootstrap in nonparametric frontier models, *Management Science*, 44 (1), 49 - 61.
- [121] SIRVENT, I. (2001), Algunos aspectos del problema de la evaluación de la eficiencia con modelos DEA, Tesis doctoral, Universidad Miguel Hernández, Elche.
- [122] SLOWINSKI, J.K., (1998), *Fuzzy Sets in Decision Analysis*, Operations Research and Statistics, Kluwer Academic Publishers, Dordrech.
- [123] SUN, S., (2002), Assessing computer numerical control machines using data envelopment analysis. *International Journal of Production Research* 40 (9), 2011–2039.
- [124] SUN, S., LU, W.M., (2005), A cross-efficiency profiling for increasing discrimination in Data Envelopment Analysis. *INFOR* 43 (1), 51-60.
- [125] TALLURI, S., SARKIS, J., (1997), Extensions in efficiency measurement of alternate machine component grouping solutions via data envelopment analysis. *IEEE Transactions on Engineering Management* 44 (3), 299-304.
- [126] THRALL, R.M., (1996), Duality classification and slacks in data envelopment analysis, *The Annals of Operations Research* 66, 109–138.
- [127] TIMMER, C.P. (1971), Using a Probabilistic Frontier Production Function to Measure Technical Efficiency”. *Journal of Political Economy* 79, 776-794.
- [128] TOMKINS, C. y GREEN, R., (1988), An experiment in the use of Data Envelopment Analysis for evaluating the efficiency of UK university departments of accounting, *Financial Accountability Management*, 4 (2), 147-164.
- [129] TONE, K. ,(2002), A Slacks-based Measure of Super-efficiency in Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research* 143, 32-41.
- [130] TRIANTIS K., GIROD O., (1998), A mathematical programming approach for measuring technical efficiency in a fuzzy environment, *J. Prod. Anal.* 10 85-102.
- [131] VAN MEENSEL J. LAUWERS L., VAN HUYLENBROECK G. VAN PASSEL S., (2010), Comparing frontier methods for economic environmen-

- tal trade off analysis, *European Journal of Operational Research*, 207, 1027-1040.
- [132] WANG YING-MING, CHIN KWAI-SANG, (2010), Some alternative models for DEA cross-efficiency evaluation, *Int. J. Production Economics* 128 pp. 332-338.
- [133] WANG X., KERRE E., (2001), Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I), *Fuzzy Sets and Systems* 118, 375 -385.
- [134] WANG, X., KERRE E., (2001a), Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II), *Fuzzy Sets and Systems* 118, 387-405.
- [135] WEN, M. Li, H.(2009), Fuzzy data envelopment analysis (DEA): Model and ranking method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223, (2) , 872–878.
- [136] WILSON, P.W., (1995), Detecting Influential Observations in data Envelopment Analysis, *Journal of Productivity Analysis*, 6, 27-45.
- [137] WONG, Y.H.B., y BEASLEY, J. E., (1990), Restricting weight flexibility in Data Envelopment Analysis *Journal of the operational Research Society Management*, 41, 829-835.
- [138] WONNACOTT, P. y WONNACOTT, R., (1992), *Economía*, McGrawHill, ISBN: 8476158106.
- [139] WU, D., (2009), Performance evaluation: an integrated method using data envelopment analysis and fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research* 194 (1), 227–235.
- [140] WU, J., LIANG, L., YANG, F., (2009a), Determination of the weights for the ultimate cross efficiency using Shapley value in cooperative game. *Expert Systems with Applications* 36 (1), 872-876.
- [141] WU, J., LIANG, L., YANG, F., YAN, H., (2009b), Bargaining game model in the evaluation of decision making units. *Expert Systems with Applications* 36 (3), 4357–4362.
- [142] WU, J., LIANG, L., ZHA, Y., YANG, F., (2009c), Determination of cross efficiency under the principle of rank priority in cross-evaluation. *Expert Systems with Applications* 36 (3), 4826–4829.
- [143] YAGER, R.R., (1981), A Procedure for Ordering Fuzzy Subsets of the Unit Interval, *Information Sciences* 24, 143-161.

-
- [144] YAGER R.R., (1986), A characterization of the extension principle, *Fuzzy Sets and Systems* 18 205-217.
- [145] YANG, F., ANG, S., XIA,Q., YANG, CH., (2012) Ranking DMUs by using interval DEA cross efficiency matrix with acceptability analysis, *European Journal of Operational Research* 223,(2), 483-488.
- [146] ZADEH, L.A., (1965a), *Fuzzy Sets, Information and Control* 8, 338-353.
- [147] ZADEH, L.A., (1965b), Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems* 13-28.
- [148] ZADEH, L.A., (1973), Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet. SMC-1*, 28-44.
- [149] ZADEH. L.A., (1978), Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems* 1, 3-28.
- [150] ZIMMERMANN H.J. (1976), Description and optimization of fuzzy system, *Internat. J. General System* 2 209-216.
- [151] ZIMMERMANN, H.J. (1991), *Fuzzy Set Theory and its Applications*, Kluwer-Nijho Publisher, Boston, 2.^a edición.
- [152] ZHU J. (1996), Robustness of the efficient DMUs in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 90, 451-60.

Apéndices

Apéndice A: Modelo CCR dual orientación input fuzzy, caso desfavorable

```
VARIABLES
Z, T, L(K);
POSITIVE VARIABLES
L(K);
EQUATIONS
OBJ, OUT(J), INP(I), SUMA(K);
OBJ..    Z =E= T;
INP(I).. T*X('K1',I)*(1.05-0.05*ALFA)=G=
SUM(K,(L(K)*X(K,I)*(0.95+0.05*ALFA)))+L('K1')*(0.1*(1-ALFA))*X('K1',I);

OUT(J).. SUM(K,(L(K)*Y(K,J)*(1.05-0.05*ALFA)))-L('K1')*((1-
ALFA)*0.1)*Y('K1',J) =G= (0.95+0.05*ALFA)*Y('K1',J);
SUMA(K)..    L(K) =G= 0;
MODEL TOTAL110801 /ALL/;
SOLVE TOTAL110801 USING NLP MINIMIZING Z
```

Apéndice B: Modelo CCR dual orientación input fuzzy, caso favorable

```
VARIABLES
Z, T, L(K);
POSITIVE VARIABLES
L(K);
EQUATIONS
OBJ, OUT(J), INP(I), SUMA(K);
OBJ..    Z =E= T;
INP(I)..    T*X('K1',I)*(0.95+0.05*ALFA) =G= SUM(K,(L(K)*X(K,I)*(1.05-
0.05*ALFA)))-L('K1')*(0.1*(1-ALFA))*X('K1',I);
OUT(J)..    SUM(K,(L(K)*Y(K,J)*(0.95+0.05*ALFA)))+L('K1')*((1-
ALFA)*0.1)*Y('K1',J) =G= (1.05-0.05*ALFA)*Y('K1',J);
SUMA(K)..    L(K) =G= 0;
MODEL TOTAL110802 /ALL/;
SOLVE TOTAL110802 USING NLP MINIMIZING Z
```

Apéndice C: tablas de inputs trapezoidales

TABLE XOB(K,I)				
	I1	I2	I3	I4
K1	4000	125	3800	1400
K2	600	20	620	125
K3	35	11	320	95
K4	200	30	800	450
K5	7900	135	2600	1720
K6	500	40	1100	190
K7	3700	50	1800	640
K8	1680	32	1080	350
K9	2	25	1000	7
K10	200	29	800	200
K11	210	46	1350	169
K12	1640	125	4750	1840
K13	475	25	700	800
K14	195	70	1450	470
K15	860	48	1480	345
K16	500	40	1270	350
K17	4000	40	1250	900
K18	1460	19	450	112
K19	1100	25	750	100
K20	122	8	170	18
K21	900	12	230	105
K22	1050	35	780	205
K23	455	28	610	76
K24	360	34	825	64
K25	79	12	264	43
K26	255	2	115	168
K27	450	8	305	50
K28	140	3	110	34
K29	475	12	300	32
K30	270	10	325	6
K31	830	12	320	12
K32	210	20	435	18
K33	610	11	260	17
K34	23	5	100	11
K35	1350	10	220	36
K36	970	10	245	60
K37	1100	15	385	180
K38	9200	58	1640	200
K39	570	12	240	33
K40	1750	12	250	54
K41	845	8	250	150
K42	800	14	300	100
K43	200	15	350	175
K44	350	18	410	75
K45	800	15	260	20
K46	800	18	400	18
K47	280	15	250	70
K48	600	12	300	150

TABLE XOT(K,I)				
	I1	I2	I3	I4
K1	4200	135	3900	1500
K2	600	20	630	125
K3	39	12	330	95
K4	230	32	820	460
K5	8250	140	2700	1800
K6	560	40	1140	200
K7	3900	52	1870	650
K8	1760	34	1120	380
K9	2	27	1020	8
K10	205	31	850	210
K11	210	49	1400	175
K12	1700	128	5000	1920
K13	500	28	725	850
K14	200	72	1520	500
K15	900	50	1520	360
K16	510	44	1300	370
K17	4150	41	1300	930
K18	1520	20	450	114
K19	1200	28	800	107
K20	126	10	178	19
K21	930	12	235	110
K22	1100	38	820	210
K23	480	30	630	79
K24	370	35	850	70
K25	82	12	270	44
K26	270	4	125	172
K27	460	10	310	52
K28	152	4	115	35
K29	480	14	320	34
K30	280	12	330	7
K31	860	13	330	13
K32	230	21	450	19
K33	620	12	280	17
K34	25	5	105	11
K35	1400	11	230	38
K36	1000	12	255	66
K37	1150	16	395	190
K38	9400	60	1700	200
K39	600	12	250	35
K40	1800	13	270	56
K41	880	8	270	175
K42	840	15	310	105
K43	220	16	360	190
K44	370	19	420	90
K45	820	16	270	22
K46	870	19	430	19
K47	290	15	270	75
K48	620	13	310	155

TABLE XEB(K,I)

	I1	I2	I3	I4
K1	4500	175	4100	1700
K2	700	25	720	175
K3	45	16	360	115
K4	250	34	900	510
K5	8800	165	2900	1900
K6	600	50	1200	225
K7	4100	60	1950	700
K8	1850	36	1200	400
K9	3	30	1050	9
K10	230	34	900	220
K11	250	52	1550	185
K12	1820	139	5250	2040
K13	520	35	800	900
K14	220	80	1540	525
K15	940	53	1600	380
K16	550	50	1400	390
K17	4400	45	1400	1000
K18	1600	22	480	124
K19	1260	30	850	110
K20	135	11	185	22
K21	1000	15	255	125
K22	1200	45	900	250
K23	515	33	710	82
K24	400	39	925	80
K25	90	20	305	50
K26	300	8	150	188
K27	510	12	350	60
K28	170	5	130	40
K29	540	17	340	40
K30	310	13	360	8
K31	910	15	360	16
K32	250	23	490	21
K33	700	14	360	23
K34	27	7	130	13
K35	1550	15	250	45
K36	1120	15	285	80
K37	1250	20	440	210
K38	10300	68	1820	300
K39	650	14	300	38
K40	2050	15	350	60
K41	950	10	300	200
K42	900	16	350	140
K43	300	19	400	225
K44	450	22	470	125
K45	860	18	310	25
K46	1000	22	500	21
K47	330	16	350	100
K48	700	16	350	200

TABLE XET(K,I)

	I1	I2	I3	I4
K1	4300	165	4000	1600
K2	650	23	700	160
K3	41	14	350	100
K4	240	33	860	490
K5	8350	160	2800	1900
K6	600	45	1170	220
K7	4000	56	1910	680
K8	1800	34	1160	390
K9	2	28	1050	8
K10	210	33	855	220
K11	220	52	1440	177
K12	1800	132	5100	1960
K13	510	31	750	880
K14	210	74	1540	515
K15	910	52	1545	370
K16	525	46	1350	380
K17	4200	43	1330	960
K18	1550	21	460	120
K19	1220	30	830	109
K20	131	11	184	20
K21	960	14	245	115
K22	1150	41	850	240
K23	500	32	680	81
K24	380	36	880	74
K25	86	18	290	48
K26	290	5	135	180
K27	480	11	340	58
K28	165	5	125	38
K29	520	15	335	37
K30	295	13	350	7
K31	890	14	350	14
K32	240	22	470	20
K33	660	13	330	19
K34	26	7	120	12
K35	1450	14	240	42
K36	1100	13	270	72
K37	1190	18	420	200
K38	9900	65	1750	260
K39	630	13	280	37
K40	1950	14	320	57
K41	910	10	300	200
K42	890	16	350	120
K43	280	18	390	210
K44	410	21	450	110
K45	860	17	290	25
K46	930	21	470	20
K47	320	15	320	90
K48	670	15	350	190

Apéndice D: Tablas de outputs trapezoidales

TABLE YOB(K,J)		
	J1	J2
K1	28000	29300
K2	1500	1500
K3	850	900
K4	4500	4600
K5	14500	15000
K6	1950	2200
K7	10200	10500
K8	5600	5650
K9	1770	1800
K10	1900	2000
K11	2700	2700
K12	11200	11500
K13	8000	8000
K14	4750	4750
K15	5800	5800
K16	3500	3500
K17	21900	21900
K18	5000	5000
K19	3450	3500
K20	1460	1460
K21	265	340
K22	2550	2550
K23	1480	1600
K24	900	950
K25	710	700
K26	1900	1900
K27	1950	2000
K28	780	780
K29	1680	1680
K30	1100	1100
K31	1400	1400
K32	510	510
K33	2750	2750
K34	190	200
K35	1700	1700
K36	2000	2050
K37	2000	2000
K38	21700	21700
K39	1350	1350
K40	900	900
K41	1450	1450
K42	1200	1300
K43	3300	3350
K44	2100	2100
K45	1400	1400
K46	2600	2600
K47	2400	2400
K48	1500	1600

TABLE YOT(K,J)		
	J1	J2
K1	30500	31300
K2	1500	1530
K3	850	950
K4	4700	4800
K5	15000	15400
K6	2000	2250
K7	11000	11000
K8	5800	5900
K9	1850	1860
K10	1900	2000
K11	2800	2800
K12	11800	11800
K13	8300	8300
K14	4900	4900
K15	6000	6000
K16	3700	3700
K17	22500	22500
K18	5200	5200
K19	3550	3600
K20	1520	1500
K21	270	350
K22	2650	2650
K23	1520	1620
K24	920	950
K25	740	730
K26	2050	2050
K27	2000	2100
K28	810	810
K29	1730	1730
K30	1130	1130
K31	1460	1460
K32	530	530
K33	2800	2800
K34	210	215
K35	1750	1750
K36	2050	2100
K37	2100	2100
K38	22500	22500
K39	1390	1390
K40	950	950
K41	1500	1500
K42	1220	1270
K43	3380	3400
K44	2150	2150
K45	1450	1450
K46	2700	2700
K47	2450	2450
K48	1550	1600

TABLE YEB(K,J)

	J1	J2
K1	33000	33400
K2	1650	1700
K3	950	1000
K4	5000	5000
K5	15700	15800
K6	2100	2300
K7	12000	12000
K8	6200	6250
K9	1970	1900
K10	2000	2100
K11	3000	3000
K12	12400	12400
K13	9000	9000
K14	5200	5200
K15	6400	6400
K16	3900	3900
K17	24000	24000
K18	5600	5600
K19	3900	3950
K20	1620	1620
K21	295	380
K22	2900	2900
K23	1650	1800
K24	1000	1100
K25	810	800
K26	2200	2200
K27	2100	2200
K28	890	890
K29	1850	1850
K30	1250	1250
K31	1550	1550
K32	560	560
K33	2850	2850
K34	250	260
K35	1900	1900
K36	2200	2250
K37	2300	2300
K38	24000	24000
K39	1520	1520
K40	1000	1000
K41	1600	1600
K42	1300	1400
K43	3700	3750
K44	2400	2400
K45	1530	1530
K46	2800	2800
K47	2600	2600
K48	1700	1750

TABLE YET(K,J)

	J1	J2
K1	30800	31400
K2	1600	1680
K3	880	1000
K4	4900	5000
K5	15200	15600
K6	2100	2265
K7	11300	11600
K8	5900	5940
K9	1900	1890
K10	1950	2050
K11	2900	2900
K12	12000	12200
K13	8600	8600
K14	5000	5000
K15	6200	6200
K16	3800	3800
K17	23000	23000
K18	5300	5300
K19	3650	3700
K20	1580	1600
K21	285	365
K22	2800	2800
K23	1570	1800
K24	950	1000
K25	790	790
K26	2100	2100
K27	2080	2150
K28	840	840
K29	1790	1790
K30	1190	1190
K31	1500	1500
K32	550	550
K33	2830	2830
K34	240	245
K35	1850	1850
K36	2150	2200
K37	2150	2150
K38	23300	23300
K39	1460	1460
K40	1000	1000
K41	1550	1550
K42	1250	1300
K43	3550	3650
K44	2300	2300
K45	1520	1520
K46	2750	2750
K47	2550	2550
K48	1650	1700

Apéndice E: Programa super-efficiency, caso favorable

```

POSITIVE VARIABLES
L(K);
EQUATIONS
OBJ, OUT(J), INP(I), SUMA(K);
OBJ..    Z =E= T;
INP(I)..    T*(XOB('K48',I)+ALFA*(XOT('K48',I)-XOB('K48',I))) =G=
SUM(K,(L(K)*(XEB(K,I)-ALFA*(XEB(K,I)-
XET(K,I))))+L('K48')*((XOB('K48',I)+ALFA*(XOT('K48',I)-
XOB('K48',I)))-(XEB('K48',I)-ALFA*(XEB('K48',I)-XET('K48',I))));

OUT(J)..    SUM(K,(L(K)*(YOB(K,J)+ALFA*(YOT(K,J)-YOB(K,J))))-
L('K48')*((YOB('K48',J)+ALFA*(YOT('K48',J)-YOB('K48',J)))-
(YEB('K48',J)-ALFA*(YEB('K48',J)-YET('K48',J)))) =G= YEB('K48',J)-
ALFA*(YEB('K48',J)-YET('K48',J));

SUMA(K)..    L(K) =G= 0;
MODEL supfav120422a /ALL/;
SOLVE supfav120422a USING NLP MINIMIZING Z
SET RHS /1*6/;
PARAMETER TI(RHS)
/1    0
2    0.2
3    0.4
4    0.6
5    0.8
6    1/;
OPTION SOLPRINT = OFF;
PARAMETER OUTPUT (*, RHS)
LOOP (RHS, ALFA = TI(RHS);
SOLVE supfav120422a USING NLP MINIMIZING Z;
OUTPUT ("ALFA",RHS) = ALFA;
OUTPUT ("Z",RHS) = Z.L;

```

Apéndice F: Programa super-efficiency, caso desfavorable

```

VARIABLES
Z, T, L(K);
POSITIVE VARIABLES
L(K);
EQUATIONS
OBJ, OUT(J), INP(I), SUMA(K);
OBJ..      Z =E= T;
INP(I)..   T*(XEB('K48',I)-ALFA*(XEB('K48',I)-XET('K48',I))) =G=
SUM(K,(L(K)*(XOB(K,I)+ALFA*(XOT(K,I)-
XOB(K,I)))))+L('K48')*((XEB('K48',I)-ALFA*(XEB('K48',I)-
XET('K48',I)))-(XOB('K48',I)+ALFA*(XOT('K48',I)-XOB('K48',I))));
OUT(J)..   SUM(K,(L(K)*(YEB(K,J)-ALFA*(YEB(K,J)-
YET(K,J)))))-L('K48')*((YEB('K48',J)-ALFA*(YEB('K48',J)-
YET('K48',J)))-(YOB('K48',J)+ALFA*(YOT('K48',J)-YOB('K48',J)))) =G=
YOB('K48',J)+ALFA*(YOT('K48',J)-YOB('K48',J));
SUMA(K)..  L(K) =G= 0;
MODEL supdesf120422a /ALL/;
SOLVE supdesf120422a USING NLP MINIMIZING Z
SET RHS /1*6/;
PARAMETER TI(RHS)
/1   0
2   0.2
3   0.4
4   0.6
5   0.8
6   1/;
OPTION SOLPRINT = OFF;
PARAMETER OUTPUT (*, RHS)
LOOP (RHS, ALFA = TI(RHS);
      SOLVE supdesf120422a USING NLP MINIMIZING Z;
      OUTPUT ("ALFA",RHS) = ALFA;
      OUTPUT ("Z",RHS) = Z.L;
    );
DISPLAY OUTPUT;

```

Apéndice G: Programa primal cross- efficiency crisp

VARIABLES

Z, XL1, XL2, XL3, XL4, XL5, XL6, XL7, XL8, XL9, XL10, XL11,
YL1, YL2, YL3, YL4, YL5, YL6, YL7, YL8, YL9, YL10, YL11;

POSITIVE VARIABLES

M(I), N(J);

* COTA INFERIOR

M.LO(I)=0.00001;

N.LO(J)=0.00001;

EQUATIONS

OBJ, DMU02, DMU01, DMU1, DMU2, DMU3, DMU4, DMU5,
DMU6, DMU7, DMU8, DMU9, DMU10,

DMU11, DXL1, DXL2, DXL3, DXL4, DXL5, DXL6, DXL7, DXL8,
DXL9, DXL10, DXL11,

DYL1, DYL2, DYL3, DYL4, DYL5, DYL6, DYL7, DYL8, DYL9,
DYL10, DYL11;

OBJ.. Z =E= SUM(J,(Y('KE8',J)*N(J)));

DMU01.. SUM(I,(X('KE8',I)*M(I))) =E= 1;

DMU02.. SUM(J,(Y('KE8',J)*N(J))) =L=1;

DXL1.. XL1 =E= SUM(I,(X('KE1',I)*M(I)));

DXL2.. XL2 =E= SUM(I,(X('KE2',I)*M(I)));

DXL3.. XL3 =E= SUM(I,(X('KE3',I)*M(I)));

DXL4.. XL4 =E= SUM(I,(X('KE4',I)*M(I)));

DXL5.. XL5 =E= SUM(I,(X('KE5',I)*M(I)));

DXL6.. XL6 =E= SUM(I,(X('KE6',I)*M(I)));

DXL7.. XL7 =E= SUM(I,(X('KE7',I)*M(I)));

DXL8.. XL8 =E= SUM(I,(X('KE8',I)*M(I)));

DXL9.. XL9 =E= SUM(I,(X('KE9',I)*M(I)));

DXL10.. XL10 =E= SUM(I,(X('KE10',I)*M(I)));

DXL11.. XL11 =E= SUM(I,(X('KE11',I)*M(I)));

DYL1.. YL1 =E= SUM(J,(Y('KE1',J)*N(J)));

DYL2.. YL2 =E= SUM(J,(Y('KE2',J)*N(J)));

DYL3.. YL3 =E= SUM(J,(Y('KE3',J)*N(J)));

DYL4.. YL4 =E= SUM(J,(Y('KE4',J)*N(J)));

DYL5.. YL5 =E= SUM(J,(Y('KE5',J)*N(J)));

DYL6.. YL6 =E= SUM(J,(Y('KE6',J)*N(J)));

DYL7.. YL7 =E= SUM(J,(Y('KE7',J)*N(J)));

DYL8.. YL8 =E= SUM(J,(Y('KE8',J)*N(J)));

DYL9.. YL9 =E= SUM(J,(Y('KE9',J)*N(J)));

DYL10.. YL10 =E= SUM(J,(Y('KE10',J)*N(J)));

DYL11.. YL11 =E= SUM(J,(Y('KE11',J)*N(J)));

```
DMU1.. XL1 =G= YL1;  
DMU2.. XL2 =G= YL2;  
DMU3.. XL3 =G= YL3;  
DMU4.. XL4 =G= YL4;  
DMU5.. XL5 =G= YL5;  
DMU6.. XL6 =G= YL6;  
DMU7.. XL7 =G= YL7;  
DMU8.. XL8 =G= YL8;  
DMU9.. XL9 =G= YL9;  
DMU10.. XL10 =G= YL10;  
DMU11.. XL11 =G= YL11;
```

```
MODEL PRIMALCROS121202 /ALL/;  
SOLVE PRIMALCROS121202 USING LP MAXIMIZING Z
```

```
DISPLAY Z.L, N.L, M.L,  
YL1.L, YL2.L, YL3.L, YL4.L, YL5.L, YL6.L, YL7.L, YL8.L, YL9.L,  
YL10.L, YL11.L,  
XL1.L, XL2.L, XL3.L, XL4.L, XL5.L, XL6.L, XL7.L, XL8.L, XL9.L,  
XL10.L, XL11.L;
```

Apéndice H: Programa primal cross-efficiency fuzzy, caso desfavorable

VARIABLES

```
Z, XL1, XL2, XL3, XL4, XL5, XL6, XL7, XL8, XL9, XL10, XL11,  
YL1, YL2, YL3, YL4, YL5, YL6, YL7, YL8, YL9, YL10, YL11;
```

POSITIVE VARIABLES

```
M(I),N(J);  
M.LO(I)=0.00001;  
N.LO(J)=0.00001;
```

EQUATIONS

```
OBJ, DMU02, DMU01, DMU1, DMU2, DMU3, DMU4, DMU5, DMU6,  
DMU7, DMU8, DMU9, DMU10,  
DMU11, DXL1, DXL2, DXL3, DXL4, DXL5, DXL6, DXL7, DXL8, DXL9,  
DXL10, DXL11,
```

DYL1, DYL2, DYL3, DYL4, DYL5, DYL6, DYL7, DYL8, DYL9, DYL10, DYL11;

OBJ.. Z =E= SUM(J,((YOB('KE11',J)+ALFA*(YOT('KE11',J)-YOB('KE11',J)))*N(J)));

DMU01.. SUM(I,((XEB('KE11',I)-ALFA*(XEB('KE11',I)-XET('KE11',I)))*M(I))) =E= 1;

DMU02.. SUM(J,((YOB('KE11',J)+ALFA*(YOT('KE11',J)-YOB('KE11',J)))*N(J))) =L= 1;

DXL1.. XL1 =E= SUM(I,((XOB('KE1',I)-ALFA*(XOB('KE1',I)-XOT('KE1',I)))*M(I)));

DXL2.. XL2 =E= SUM(I,((XOB('KE2',I)-ALFA*(XOB('KE2',I)-XOT('KE2',I)))*M(I)));

DXL3.. XL3 =E= SUM(I,((XOB('KE3',I)-ALFA*(XOB('KE3',I)-XOT('KE3',I)))*M(I)));

DXL4.. XL4 =E= SUM(I,((XOB('KE4',I)-ALFA*(XOB('KE4',I)-XOT('KE4',I)))*M(I)));

DXL5.. XL5 =E= SUM(I,((XOB('KE5',I)-ALFA*(XOB('KE5',I)-XOT('KE5',I)))*M(I)));

DXL6.. XL6 =E= SUM(I,((XOB('KE6',I)-ALFA*(XOB('KE6',I)-XOT('KE6',I)))*M(I)));

DXL7.. XL7 =E= SUM(I,((XOB('KE7',I)-ALFA*(XOB('KE7',I)-XOT('KE7',I)))*M(I)));

DXL8.. XL8 =E= SUM(I,((XOB('KE8',I)-ALFA*(XOB('KE8',I)-XOT('KE8',I)))*M(I)));

DXL9.. XL9 =E= SUM(I,((XOB('KE9',I)-ALFA*(XOB('KE9',I)-XOT('KE9',I)))*M(I)));

DXL10.. XL10 =E= SUM(I,((XOB('KE10',I)-ALFA*(XOB('KE10',I)-XOT('KE10',I)))*M(I)));

DXL11.. XL11 =E= SUM(I,((XEB('KE11',I)-ALFA*(XEB('KE11',I)-XET('KE11',I)))*M(I)));

DYL1.. YL1 =E= SUM(J,((YEB('KE1',J)+ALFA*(YET('KE1',J)-YEB('KE1',J)))*N(J)));

DYL2.. YL2 =E= SUM(J,((YEB('KE2',J)+ALFA*(YET('KE2',J)-YEB('KE2',J)))*N(J)));

DYL3.. YL3 =E= SUM(J,((YEB('KE3',J)+ALFA*(YET('KE3',J)-YEB('KE3',J)))*N(J)));

DYL4.. YL4 =E= SUM(J,((YEB('KE4',J)+ALFA*(YET('KE4',J)-YEB('KE4',J)))*N(J)));

```

DYL5..      YL5  =E=  SUM(J,((YEB('KE5',J)+ALFA*(YET('KE5',J)-
YEB('KE5',J)))*N(J));
DYL6..      YL6  =E=  SUM(J,((YEB('KE6',J)+ALFA*(YET('KE6',J)-
YEB('KE6',J)))*N(J));
DYL7..      YL7  =E=  SUM(J,((YEB('KE7',J)+ALFA*(YET('KE7',J)-
YEB('KE7',J)))*N(J));
DYL8..      YL8  =E=  SUM(J,((YEB('KE8',J)+ALFA*(YET('KE8',J)-
YEB('KE8',J)))*N(J));
DYL9..      YL9  =E=  SUM(J,((YEB('KE9',J)+ALFA*(YET('KE9',J)-
YEB('KE9',J)))*N(J));
DYL10..     YL10 =E=  SUM(J,((YEB('KE10',J)+ALFA*(YET('KE10',J)-
YEB('KE10',J)))*N(J));
DYL11..     YL11 =E=  SUM(J,((YOB('KE11',J)+ALFA*(YOT('KE11',J)-
YOB('KE11',J)))*N(J));

DMU1..  XL1 =G= YL1;
DMU2..  XL2 =G= YL2;
DMU3..  XL3 =G= YL3;
DMU4..  XL4 =G= YL4;
DMU5..  XL5 =G= YL5;
DMU6..  XL6 =G= YL6;
DMU7..  XL7 =G= YL7;
DMU8..  XL8 =G= YL8;
DMU9..  XL9 =G= YL9;
DMU10.. XL10 =G= YL10;
DMU11.. XL11 =G= YL11;
MODEL primaldesf121130 /ALL/;
SOLVE primaldesf121130 USING NLP MAXIMIZING Z
SET RHS /1*6/;
PARAMETER TI(RHS)
/1  0
2  0.2
3  0.4
4  0.6
5  0.8
6  1/;
OPTION SOLPRINT = OFF;
PARAMETER OUTPUT (*, RHS)
LOOP (RHS, ALFA = TI(RHS);
      SOLVE primaldesf121130 USING LP MAXIMIZING Z;
      OUTPUT ("ALFA",RHS) = ALFA;
      OUTPUT ("Z",RHS) = Z.L;

```

```
OUTPUT ("YL1",RHS) = YL1.L;  
  OUTPUT ("YL2",RHS) = YL2.L;  
  OUTPUT ("YL3",RHS) = YL3.L;  
  OUTPUT ("YL4",RHS) = YL4.L;  
  OUTPUT ("YL5",RHS) = YL5.L;  
  OUTPUT ("YL6",RHS) = YL6.L;  
  OUTPUT ("YL7",RHS) = YL7.L;  
  OUTPUT ("YL8",RHS) = YL8.L;  
  OUTPUT ("YL9",RHS) = YL9.L;  
  OUTPUT ("YL10",RHS) = YL10.L;  
  OUTPUT ("YL11",RHS) = YL11.L;  
  OUTPUT ("XL1",RHS) = XL1.L;  
  OUTPUT ("XL2",RHS) = XL2.L;  
  OUTPUT ("XL3",RHS) = XL3.L;  
  OUTPUT ("XL4",RHS) = XL4.L;  
  OUTPUT ("XL5",RHS) = XL5.L;  
  OUTPUT ("XL6",RHS) = XL6.L;  
  OUTPUT ("XL7",RHS) = XL7.L;  
  OUTPUT ("XL8",RHS) = XL8.L;  
  OUTPUT ("XL9",RHS) = XL9.L;  
  OUTPUT ("XL10",RHS) = XL10.L;  
  OUTPUT ("XL11",RHS) = XL11.L;  
);  
DISPLAY OUTPUT;
```

Apéndice I: Programa primal cross- efficiency fuzzy, caso favorable.

```

VARIABLES
Z, XL1, XL2, XL3, XL4, XL5, XL6, XL7, XL8, XL9, XL10, XL11,
YL1, YL2, YL3, YL4, YL5, YL6, YL7, YL8, YL9, YL10, YL11;

POSITIVE VARIABLES
M(I),N(J);
M.LO(I)=0.00001;
N.LO(J)=0.00001;

EQUATIONS
OBJ, DMU02, DMU01, DMU1, DMU2, DMU3, DMU4, DMU5,
DMU6, DMU7, DMU8, DMU9, DMU10,
  DMU11, DXL1, DXL2, DXL3, DXL4, DXL5, DXL6, DXL7,
DXL8, DXL9, DXL10, DXL11,
  DYL1, DYL2, DYL3, DYL4, DYL5, DYL6, DYL7, DYL8, DYL9,
DYL10, DYL11;

OBJ..    Z =E= SUM(J,((YEB('KE11',J)+ALFA*(YET('KE11',J)-
YEB('KE11',J))))*N(J));

DMU01..    SUM(I,((XOB('KE11',I)-ALFA*(XOB('KE11',I)-
XOT('KE11',I))))*M(I)) =E= 1;
DMU02..    SUM(J,((YEB('KE11',J)+ALFA*(YET('KE11',J)-
YEB('KE11',J))))*N(J)) =L= 1;

DXL1..    XL1 =E= SUM(I,((XEB('KE1',I)-ALFA*(XEB('KE1',I)-
XET('KE1',I))))*M(I));
DXL2..    XL2 =E= SUM(I,((XEB('KE2',I)-ALFA*(XEB('KE2',I)-
XET('KE2',I))))*M(I));
DXL3..    XL3 =E= SUM(I,((XEB('KE3',I)-ALFA*(XEB('KE3',I)-
XET('KE3',I))))*M(I));
DXL4..    XL4 =E= SUM(I,((XEB('KE4',I)-ALFA*(XEB('KE4',I)-
XET('KE4',I))))*M(I));
DXL5..    XL5 =E= SUM(I,((XEB('KE5',I)-ALFA*(XEB('KE5',I)-
XET('KE5',I))))*M(I));
DXL6..    XL6 =E= SUM(I,((XEB('KE6',I)-ALFA*(XEB('KE6',I)-
XET('KE6',I))))*M(I));
DXL7..    XL7 =E= SUM(I,((XEB('KE7',I)-ALFA*(XEB('KE7',I)-
XET('KE7',I))))*M(I));

```

```

DXL8..      XL8 =E= SUM(I,((XEB('KE8',I)-ALFA*(XEB('KE8',I)-
XET('KE8',I)))*M(I));
DXL9..      XL9 =E= SUM(I,((XEB('KE9',I)-ALFA*(XEB('KE9',I)-
XET('KE9',I)))*M(I));
DXL10..     XL10 =E= SUM(I,((XEB('KE10',I)-
ALFA*(XEB('KE10',I)-XET('KE10',I)))*M(I));
DXL11..     XL11 =E= SUM(I,((XOB('KE11',I)-
ALFA*(XOB('KE11',I)-XOT('KE11',I)))*M(I));

DYL1..      YL1 =E= SUM(J,((YOB('KE1',J)+ALFA*(YOT('KE1',J)-
YOB('KE1',J)))*N(J));
DYL2..      YL2 =E= SUM(J,((YOB('KE2',J)+ALFA*(YOT('KE2',J)-
YOB('KE2',J)))*N(J));
DYL3..      YL3 =E= SUM(J,((YOB('KE3',J)+ALFA*(YOT('KE3',J)-
YOB('KE3',J)))*N(J));
DYL4..      YL4 =E= SUM(J,((YOB('KE4',J)+ALFA*(YOT('KE4',J)-
YOB('KE4',J)))*N(J));
DYL5..      YL5 =E= SUM(J,((YOB('KE5',J)+ALFA*(YOT('KE5',J)-
YOB('KE5',J)))*N(J));
DYL6..      YL6 =E= SUM(J,((YOB('KE6',J)+ALFA*(YOT('KE6',J)-
YOB('KE6',J)))*N(J));
DYL7..      YL7 =E= SUM(J,((YOB('KE7',J)+ALFA*(YOT('KE7',J)-
YOB('KE7',J)))*N(J));
DYL8..      YL8 =E= SUM(J,((YOB('KE8',J)+ALFA*(YOT('KE8',J)-
YOB('KE8',J)))*N(J));
DYL9..      YL9 =E= SUM(J,((YOB('KE9',J)+ALFA*(YOT('KE9',J)-
YOB('KE9',J)))*N(J));
DYL10..     YL10 =E=
SUM(J,((YOB('KE10',J)+ALFA*(YOT('KE10',J)-YOB('KE10',J)))*N(J));
DYL11..     YL11 =E=
SUM(J,((YOB('KE11',J)+ALFA*(YOT('KE11',J)-YOB('KE11',J)))*N(J));

DMU1..      XL1 =G= YL1;
DMU2..      XL2 =G= YL2;
DMU3..      XL3 =G= YL3;
DMU4..      XL4 =G= YL4;
DMU5..      XL5 =G= YL5;
DMU6..      XL6 =G= YL6;
DMU7..      XL7 =G= YL7;
DMU8..      XL8 =G= YL8;
DMU9..      XL9 =G= YL9;
DMU10..     XL10 =G= YL10;

```

```
DMU11.. XL11 =G= YL11;
MODEL primalfav121130 /ALL/;
SOLVE primalfav121130 USING NLP MAXIMIZING Z
SET RHS /1*6/;
PARAMETER TI(RHS)
/1    0
2    0.2
3    0.4
4    0.6
5    0.8
6    1/;
OPTION SOLPRINT = OFF;
PARAMETER OUTPUT (*, RHS)
LOOP (RHS, ALFA = TI(RHS);
      SOLVE primalfav121130 USING LP MAXIMIZING Z;
      OUTPUT ("ALFA",RHS) = ALFA;
      OUTPUT ("Z",RHS) = Z.L;
      OUTPUT ("YL1",RHS) = YL1.L;
      OUTPUT ("YL2",RHS) = YL2.L;
      OUTPUT ("YL3",RHS) = YL3.L;
      OUTPUT ("YL4",RHS) = YL4.L;
      OUTPUT ("YL5",RHS) = YL5.L;
      OUTPUT ("YL6",RHS) = YL6.L;
      OUTPUT ("YL7",RHS) = YL7.L;
      OUTPUT ("YL8",RHS) = YL8.L;
      OUTPUT ("YL9",RHS) = YL9.L;
      OUTPUT ("YL10",RHS) = YL10.L;
      OUTPUT ("YL11",RHS) = YL11.L;
      OUTPUT ("XL1",RHS) = XL1.L;
      OUTPUT ("XL2",RHS) = XL2.L;
      OUTPUT ("XL3",RHS) = XL3.L;
      OUTPUT ("XL4",RHS) = XL4.L;
      OUTPUT ("XL5",RHS) = XL5.L;
      OUTPUT ("XL6",RHS) = XL6.L;
      OUTPUT ("XL7",RHS) = XL7.L;
      OUTPUT ("XL8",RHS) = XL8.L;
      OUTPUT ("XL9",RHS) = XL9.L;
      OUTPUT ("XL10",RHS) = XL10.L;
      OUTPUT ("XL11",RHS) = XL11.L;
      );
DISPLAY OUTPUT
```