

TESIS DOCTORAL

POLINOMIOS BIEN CONDICIONADOS Y
PUNTOS BIEN DISTRIBUIDOS EN LA ESFERA

AUTORA

FÁTIMA LIZARTE LÓPEZ

DIRECTOR

CARLOS BELTRÁN ÁLVAREZ

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Escuela de **Doctorado** de la Universidad de Cantabria

Santander 2023

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
Programa de Doctorado en Ciencia y Tecnología
Matemáticas y Computación

TESIS DOCTORAL

***POLINOMIOS BIEN CONDICIONADOS Y
PUNTOS BIEN DISTRIBUIDOS EN LA
ESFERA***

Realizada por: Fátima Lizarte López
Dirigida por: Carlos Beltrán Álvarez

Santander, 2023

*Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor,
la electricidad y la energía atómica: la voluntad.*

—Albert Einstein.

Financiación

Esta tesis no hubiese sido posible sin el contrato predoctoral para la formación de doctores que he podido disfrutar desde septiembre de 2019 hasta hoy:

- Ayuda PRE2018-086103 financiada por:



Así mismo, mi asistencia y participación en congresos durante este periodo ha sido financiada por:

- Ayuda MTM2017-83816-P financiada por MCIN/ AEI /10.13039/501100011033.
- Ayuda 21.SI01.64658 del Banco Santander.
- Ayuda PID2020-113887GB-I00 financiada por MCIN/ AEI /10.13039/501100011033.

A continuación, me gustaría agradecer a ciertas instituciones y grupos de investigación por su contribución económica en el desarrollo de esta tesis y en la formación de mi perfil investigador:

- Grupo de investigación GOYA (Grupo en Ortogonalidad y Aplicaciones) de la Universidad de Granada, por la invitación al encuentro *D2PO-22: Dos Días sobre Polinomios Ortogonales y DIPO: Un Día de Polinomios Ortogonales*.

- A Dmitriy Bilyk, Alexander Reznikov, Edward Saff y Sylvia Serfaty por ofrecerme la oportunidad de participar en el congreso *Minimal energy problems with Riesz potentials* patrocinado por *American Institute of Mathematics* y *National Science Foundation*, cuyas entidades asumieron los gastos del material necesario.

- Grupo de investigación TAPO (Teoría de Aproximación y Polinomios Ortogonales) de la Universidad de Almería, por la invitación al segundo encuentro *Dos Días de Polinomios Ortogonales y Funciones Especiales*.

- Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria por ofrecerme un entorno de trabajo y la posibilidad de impartir docencia en los grados de Matemáticas y Física.
- Departamento de Matemáticas e Informática de la Universidad de Barcelona así como a los profesores Jordi Marzo y Joaquim Ortega-Cerdà por acogerme en mi breve estancia durante el mes de abril de 2022.
- Departamento de Matemática Aplicada y el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada por su ayuda en los comienzos de mi investigación.

Agradecimientos

Las siguientes líneas están dedicadas a todas aquellas personas que de alguna manera han contribuido en la realización de esta tesis doctoral.

Sin duda alguna, quiero comenzar mostrando mi infinita gratitud a **Carlos Beltrán** por su enorme dedicación, inspiración, apoyo, paciencia y esfuerzo que ha mostrado durante estos años al dirigir esta tesis. Su profunda comprensión de las matemáticas, su entusiasmo en la investigación de los temas estudiados y su capacidad para crear un clima de trabajo agradable y de confianza, han hecho que sea para mi un ejemplo a seguir como investigador y como persona.

A continuación, me gustaría dar las gracias a **Teresa Pérez** y **Miguel Piñar**, por iniciarme en el mundo de la investigación, por la dedicación y esfuerzo mostrado en la realización de mi primer artículo científico y por ser un apoyo cuando lo necesitaba.

Agradecer también a la gran familia de investigadores dedicados al estudio de polinomios ortogonales y funciones especiales, de la que me siento miembro. Gracias por los buenos momentos vividos y compartidos en los congresos. Guardo con especial cariño cada uno de ellos. En particular, me gustaría destacar mis agradecimientos al grupo de investigación GOYA, por acogerme a los comienzos de mi etapa investigadora y por el cariño siempre mostrado, con especial mención a **Lidia** y a **Antonia**, por animarme a comenzar la aventura de realizar la tesis en la otra punta de España.

También me gustaría dar las gracias a mis amigos del antiguo *IEMath*: **Doris**, **Bea**, **Alejandro**, **Marcos**, **Jose**, **Esko**, **Eddygledson** y **Sebastian**, por sus consejos y ánimos así como los buenos y divertidos momentos compartidos. Recuerdo esta etapa como una de las más bonitas que he vivido y en gran medida gracias a ellos.

Por el apoyo mostrado y su amistad incondicional me gustaría nombrar a dos de mis mejores amigos: **Rocío** y **Dani**. Gracias por estar siempre presentes.

También mencionar a todos los miembros que componen el Departamento de **MATESCO** por crear un ambiente agradable de trabajo y, en particular, a aquellos con los que he compartido docencia: **Cecilia**, **Beatriz**, **Carlos** y **José María**. Gracias también a **Ignacio** por ser siempre tan agradable conmigo y a **Josué** por sus invitaciones para participar en las sesiones especiales que ha organizado en los últimos años.

Agradecer a mi grupo de investigación **TEAMCO**: **Carlos**, **Ujué**, **Pedro** e **Irene** por su apoyo. En particular, a mi compañero de despacho, Pedro, por su predisposición a resolver cualquier cuestión que le planteaba y por su agradable compañía.

También quiero expresar mi gratitud al **tribunal** de esta tesis por aceptar dicha tarea.

Gracias a **María**. Cantabria se hizo más bonita con su llegada. Por acompañarme en este proyecto, las numerosas rutas recorriendo y descubriendo los rincones tan bonitos que guarda esta comunidad autónoma y su cariño, han hecho de estos dos últimos años una etapa inolvidable de mi vida.

Finalmente, y no menos importante, me gustaría acabar expresando mis agradecimientos a **mi familia** y **amigos**. En especial, a **mis padres**, a **mi hermano** y a **María**, los pilares fundamentales de mi vida, por su comprensión, su paciencia y su apoyo incondicional que tanto he necesitado en los tiempos difíciles en los que me ha tocado realizar esta tesis doctoral. Para ellos reservo, con cariño, la dedicatoria de esta memoria.

Mi más sincero agradecimiento
a todos y a todas.

Fátima Lizarte López

Presentación

El presente documento constituye la memoria de tesis doctoral realizada por la autora, Fátima Lizarte López, dentro del *Programa de Doctorado en Ciencia y Tecnología*, en la línea de investigación *Matemáticas y Computación*, de la Universidad de Cantabria y bajo la dirección del Profesor Carlos Beltrán, catedrático de Análisis Matemático en esta universidad.

Las contribuciones científicas originales que se recogen en esta memoria son el fruto de los siguientes tres artículos:

[51] Lizarte, F., Pérez, T. E. y Piñar, M. A. (2021). *The radial part of a class of Sobolev polynomials on the unit ball*. Numerical Algorithms, 87, 1369–1389. <https://doi.org/10.1007/s11075-020-01011-7>

[16] Beltrán, C. y Lizarte, F. (2022). *On the minimum value of the condition number of polynomials*. IMA Journal of Numerical Analysis, 42, 2959–2983. <https://doi.org/10.1093/imanum/drab070>

[17] Beltrán, C. y Lizarte, F. (2023). A lower bound for the logarithmic energy on S^2 and for the Green energy on S^n . Constructive Approximation. Aceptado.

El documento está estructurado del siguiente modo:

El Capítulo 1 recoge una serie de conceptos y resultados necesarios para el desarrollo y comprensión de este trabajo, relacionados principalmente con la teoría de polinomios ortogonales, la teoría del potencial y la teoría de la complejidad. El objetivo es disponer de forma inmediata de este contenido sin necesidad de recurrir de forma constante a la búsqueda de bibliografía (a no ser que se quiera profundizar más) conforme nos adentramos en los siguientes capítulos. Por tanto, con este objetivo presente y con el fin de agilizar la lectura de este capítulo introductorio, omitimos la mayoría de demostraciones y citamos referencias para los que deseen indagar más en los resultados y temas expuestos.

En el Capítulo 2 se desarrolla el contenido recogido en [51] y enmarcado dentro de la teoría de polinomios ortogonales. Consideramos un producto escalar de Sobolev creado a partir de una modificación del producto escalar clásico sobre la bola unidad de dimensión d , que involucra un término extra conteniendo a las derivadas en la dirección normal. Primero construimos una base mutuamente ortogonal de polinomios que son dados en términos de los armónicos esféricos y una familia de polinomios ortogonales univariados de Sobolev en la parte radial. A continuación, nos centramos en el estudio de esta familia de polinomios de la parte radial, deduciendo propiedades algebraicas, fórmulas de conexión y propiedades asintóticas. Finalizamos mostrando algunas pruebas numéricas para ilustrar el comportamiento de sus ceros. Existen indicios que nos hacen pensar que los polinomios ortogonales

con respecto al producto escalar de Sobolev considerado pueden utilizarse para detectar aberraciones ópticas en los ojos humanos y calibrar diferentes dispositivos ópticos, dando mejores resultados que los actualmente usados, los *polinomios de Zernike*.

El trabajo [16] pertenece a teoría de la complejidad y se expone en el Capítulo 3. En 1993, Shub y Smale plantearon el problema de encontrar una secuencia de polinomios univariados de grado N con número de condición acotado superiormente por N . En [15] se demostró que el valor óptimo del número de condición es de la forma $O(\sqrt{N})$ y la secuencia exigida por Shub y Smale se describió mediante una fórmula cerrada para $N \geq N_0$ suficientemente grande con N_0 desconocido, y por un algoritmo de búsqueda para el resto de los casos. Se desearía mejorar la solución de [15], describiendo una fórmula sencilla para tal secuencia de polinomios con estimaciones concretas. Hemos hecho importantes avances en este sentido, resolviendo esta tarea para el caso de $N = 4M^2$, siendo M un número entero positivo.

El Capítulo 4 está dedicado al artículo [17]. Uno de los problemas abiertos más importantes en teoría del potencial es conocer de forma precisa la expresión de la expansión asintótica de la energía logarítmica mínima de N puntos en la esfera unidad S^2 . Nosotros mostramos una prueba alternativa del mejor límite inferior conocido hasta la fecha. Nuestro método tiene dos claras ventajas: simplifica enormemente la demostración original y se puede generalizar para obtener nuevas cotas inferiores para la energía de Green en la n -esfera unidad S^n (tarea que hemos realizado). El estudio de la energía mínima en la esfera se conoce también como el problema de la distribución de puntos y se encuentra dentro del estudio de los problemas de energía mínima. Estos tipos de problemas acogen el interés de la comunidad científica por las múltiples aplicaciones que tienen tanto en el contexto matemático como aplicado: reglas de cuadratura, interpolación, muestreo estadístico, teoría de la codificación, cristalografía, morfología vírica, etc.

En la parte final de esta memoria incluimos un apartado dedicado a futuras líneas de investigación que surgen de manera inminente con los artículos realizados, varios apéndices que contienen algunos resultados técnicos y las referencias usadas.

Contenidos

1	Preliminares	5
1.1	Polinomios ortogonales	7
1.1.1	Polinomios ortogonales en una variable	7
1.1.2	Polinomios ortogonales clásicos en la recta real	11
1.1.3	Polinomios clásicos de Jacobi	12
1.1.4	Polinomios ortogonales en varias variables	14
1.1.5	Armónicos esféricos	15
1.1.6	Polinomios ortogonales clásicos en la bola unidad	17
1.1.7	Polinomios de Zernike	18
1.1.8	Polinomios ortogonales de Sobolev	18
1.1.9	Relación entre la teoría de polinomios ortogonales y la teoría del potencial	19
1.2	Problema 7 de Smale	20
1.2.1	Energía de Riesz	21
1.2.2	La energía logarítmica mínima: m_N	23
1.2.3	Soluciones particulares	24
1.2.4	El conjunto diamante	24
1.3	Condicionamiento de polinomios	26
1.3.1	Definición intuitiva	26
1.3.2	Definición formal	27
1.3.3	Una fórmula alternativa para el número de condición	28
1.3.4	Relación con el problema 7 de Smale	30
1.4	La función de Green	30
1.4.1	Variedades armónicas compactas	31
1.4.2	Cálculo de la función de Green en variedades armónicas compactas	32
1.5	Funciones analíticas y funciones armónicas	33
1.6	Algunos resultados técnicos en la esfera	36
1.6.1	Resultado técnico para el cálculo de integrales esféricas	36
1.6.2	Un difeomorfismo en la esfera	36

2	Producto escalar de Sobolev	39
2.1	Introducción. Contexto histórico	40
2.2	Polinomios ortogonales de Sobolev en la bola	42
2.3	Un producto escalar de Sobolev univariado	45
2.3.1	Norma de los polinomios ortogonales de Sobolev univariados	49
2.3.2	Fórmula de conexión entre los polinomios de Jacobi y los ortogonales univariados de Sobolev	50
2.3.3	Una relación de recurrencia para el coeficiente $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$	52
2.3.4	Comportamiento asintótico de los coeficientes $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$	54
2.3.5	Polinomios límite	56
2.4	Experimentos numéricos	57
2.4.1	Experimentos numéricos para $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$	57
2.4.2	Ceros	58
3	Valor mínimo del condicionamiento	61
3.1	Exposición del problema principal	62
3.2	Solución del problema principal	63
3.3	Resultado principal	64
3.3.1	Descripción geométrica del conjunto de puntos $\mathcal{P}_N \in \mathbb{S}^2$	65
3.3.2	Idea general para la demostración del Teorema 3.3.1	67
3.3.3	Más resultados interesantes	68
3.4	Algunas sumas discretas	69
3.5	Comparación: integrales en paralelos y bandas	72
3.6	Comparación entre $-\kappa N$ y $\sum_j r_j \tilde{I}_j$	77
3.7	El numerador	79
3.8	El denominador	84
3.9	Demostración del resultado principal	87
3.9.1	Expresión explícita de P_N	88
4	Cota inferior para la energía en \mathbb{S}^n	91
4.1	Introducción	92
4.2	Argumento de Lauritsen	92
4.3	Valor medio del potencial logarítmico en \mathbb{S}^2	97
4.4	Prueba para la cota inferior de C_{\log}	98
4.5	La función de Green en \mathbb{S}^n	100
4.6	Sobre una función dada por su serie	102
4.7	Valor medio en una bola	107
4.8	Una función no negativa	112
4.9	Cota inferior para la energía de Green	114
4.10	Experimentos numéricos	117
	Futuras líneas de investigación	119

A Algunas funciones especiales	121
A.0.1 Función gamma	121
A.0.2 Símbolo de Pochhammer y la serie hipergeométrica de Gauss	122
A.0.3 Función beta	122
B Prueba computacional	125
Bibliografía	129

1.1	Polinomios ortogonales	7
1.1.1	Polinomios ortogonales en una variable	7
1.1.2	Polinomios ortogonales clásicos en la recta real	11
1.1.3	Polinomios clásicos de Jacobi	12
1.1.4	Polinomios ortogonales en varias variables	14
1.1.5	Armónicos esféricos	15
1.1.6	Polinomios ortogonales clásicos en la bola unidad	17
1.1.7	Polinomios de Zernike	18
1.1.8	Polinomios ortogonales de Sobolev	18
1.1.9	Relación entre la teoría de polinomios ortogonales y la teoría del potencial	19
1.2	Problema 7 de Smale	20
1.2.1	Energía de Riesz	21
1.2.2	La energía logarítmica mínima: m_N	23
1.2.3	Soluciones particulares	24
1.2.4	El conjunto diamante	24
1.3	Condicionamiento de polinomios	26
1.3.1	Definición intuitiva	26
1.3.2	Definición formal	27
1.3.3	Una fórmula alternativa para el número de condición	28
1.3.4	Relación con el problema 7 de Smale	30
1.4	La función de Green	30
1.4.1	Variedades armónicas compactas	31
1.4.2	Cálculo de la función de Green en variedades armónicas compactas	32
1.5	Funciones analíticas y funciones armónicas	33
1.6	Algunos resultados técnicos en la esfera	36
1.6.1	Resultado técnico para el cálculo de integrales esféricas	36

1.6.2	Un difeomorfismo en la esfera	36
-------	---	----

1.1. Polinomios ortogonales

En esta primera sección recopilamos una serie de conceptos y resultados necesarios para el desarrollo y comprensión del Capítulo 2 de este trabajo. Comenzamos con un breve recordatorio de propiedades básicas y generales de la teoría de polinomios ortogonales en una variable. Seguidamente, introducimos los polinomios ortogonales clásicos en la recta real, centrándonos en los de tipo Jacobi, ya que son extensamente usados en los resultados de este documento. A continuación, nos adentramos en el estudio de polinomios ortogonales en varias variables, poniendo el foco de atención en los armónicos esféricos y los polinomios ortogonales clásicos multivariados en la bola unidad. Como caso particular de éstos últimos, destacamos los polinomios de Zernike. Por último, presentamos brevemente los polinomios ortogonales de Sobolev y la relación que existe entre la teoría de polinomios ortogonales y la teoría del potencial.

No es nuestra intención que esta primera sección *Polinomios ortogonales* pueda parecer ni de lejos una monografía, sino más bien una recopilación de definiciones y resultados necesarios (y que podamos tener a mano) para la comprensión del Capítulo 2. Por tanto, con este objetivo en mente y con el fin de agilizar su lectura, omitimos la mayoría de demostraciones y citamos referencias donde pueden encontrarse.

1.1.1. Teoría básica de polinomios ortogonales en una variable

Existe una extensa literatura sobre polinomios ortogonales en una variable ya que han sido estudiados de forma ininterrumpida por un gran número de matemáticos y físicos desde el siglo XIX. Algunas referencias clásicas son por ejemplo [1, 3, 29, 70]. En esta sección seguimos principalmente la referencia [29, Capítulo I], donde aparecen los resultados con sus demostraciones que aquí se presentan.

Denotamos por Π al espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales y por Π_n el subespacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que n . Tomamos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Consideremos una función ω no negativa e integrable en un intervalo (a, b) con $a \in [-\infty, \infty)$ y $b \in (a, \infty]$. Asumimos que $\omega(t) > 0$ en un subconjunto de (a, b) de medida de Lebesgue positiva, de modo que

$$\int_a^b \omega(t) dt > 0.$$

A esta función ω la llamaremos *función peso*. En el caso en el que (a, b) sea no acotado, impondremos una condición más, a saber:

$$\int_a^b |t|^n \omega(t) dt < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

En tal caso, definimos

$$\mu_n = \int_a^b t^n \omega(t) dt < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.1.1)$$

La integral (1.1.1) recibe el nombre de *momento de orden n* . La función peso desempeña un papel importante en Π , ya que a partir de ella podemos definir un producto escalar,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}$$

como

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(t)q(t)\omega(t) dt.$$

Esto admite una mayor generalización. Vamos a considerar una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n \geq 0}$, donde $P_n(t)$ es un polinomio de grado n , cumpliendo:

$$\int_a^b P_m(t)P_n(t)\omega(t) dt = 0, \quad m \neq n, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0. \quad (1.1.2)$$

Si tomamos ahora una función integrable f y definimos

$$\mathcal{L}[f] = \int_a^b f(t)\omega(t) dt, \quad (1.1.3)$$

entonces (1.1.1) y (1.1.2) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n] &= \mu_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ \mathcal{L}[P_n(t)P_m(t)] &= 0, \quad m \neq n, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Si además imponemos que $\mathcal{L}[P_n^2(t)] \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$ entonces la sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ será una sucesión de polinomios ortogonales. Observe que, si $f \in \Pi$, según (1.1.3) es suficiente considerar una sucesión arbitraria de números reales $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ para definir el funcional lineal \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \Pi &\rightarrow \mathbb{R} \\ t^n &\rightarrow \mathcal{L}[t^n] = \mu_n \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

y extendido por linealidad, esto es, dado $p(t) \in \Pi$ con $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ tal que $a_i \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$\mathcal{L}[p(t)] = \mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^n a_i t^i \right] = \sum_{i=0}^n a_i \mu_i \in \mathbb{R}.$$

El funcional (1.1.4) se suele llamar *funcional de momentos* e induce la aplicación bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por,

$$\langle p, q \rangle = \mathcal{L}[p(t)q(t)].$$

Definición 1.1.1. Un funcional de momentos \mathcal{L} se dice definido positivo si $\mathcal{L}[p(t)] > 0$ para cualquier polinomio $p(t)$ no negativo y no constantemente igual a cero en todo el eje real.

Cuando \mathcal{L} es definido positivo, la aplicación bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar de la forma (1.1.3).

Lo expuesto arriba nos conduce a la siguiente definición.

Definición 1.1.2. Dada una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n \geq 0}$ diremos que es una sucesión de polinomios ortogonales (SPO) con respecto a un funcional de momentos \mathcal{L} si se cumple que:

1. $P_n(t)$ es un polinomio de grado n ,
2. $\mathcal{L}[P_n(t)P_m(t)] = 0$, $m \neq n$, $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$,
3. $\mathcal{L}[P_n^2(t)] \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Si, además, $\mathcal{L}[P_n^2(t)] > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, entonces el funcional lineal es definido positivo, y en tal caso, la sucesión es *ortonormal* si $\mathcal{L}[P_n^2(t)] = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. La sucesión se llama *sucesión de polinomios ortogonales mónicos* (SPOM) si el coeficiente principal de $P_n(t)$ es igual a 1 para todo n .

El siguiente resultado es una caracterización de las SPO.

Teorema 1.1.3. Sea \mathcal{L} un funcional de momentos y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una SPO respecto a \mathcal{L} .
2. $\mathcal{L}[q(t)P_n(t)] = 0$, para todo $q(t) \in \Pi$ de grado $m < n$,
 $\mathcal{L}[q(t)P_n(t)] \neq 0$, si $q(t) \in \Pi$ es de grado n .
3. $\mathcal{L}[t^m P_n(t)] = k_n \delta_{nm}$, con $k_n \neq 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ y δ_{nm} es la delta de Kronecker.

Definición 1.1.4. Un funcional de momentos \mathcal{L} se dice regular o cuasi-definido si existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n \geq 0}$ que es ortogonal respecto a \mathcal{L} .

Teorema 1.1.5. Sean \mathcal{L} un funcional regular y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una SPO respecto a \mathcal{L} . Entonces para cualquier polinomio $q(t)$ de grado n se tiene:

$$q(t) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(t), \quad \text{donde } c_k = \frac{\mathcal{L}[q(t)P_k(t)]}{\mathcal{L}[P_k^2(t)]}.$$

Corolario 1.1.6. Si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una SPO respecto a un funcional regular \mathcal{L} , entonces cada polinomio ortogonal $P_n(t)$ está determinado de manera única salvo un factor multiplicativo distinto de cero. Esto es, si $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ es también una SPO para \mathcal{L} , entonces existen constantes $c_n \neq 0$ de modo que

$$Q_n(t) = c_n P_n(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Consideremos el determinante Δ_n definido de la siguiente manera:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}$$

Teorema 1.1.7. *Sea \mathcal{L} el funcional de momentos asociado a la sucesión $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$. Una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una SPO asociada a \mathcal{L} si y solo si $\Delta_n \neq 0$ para todo n . Además, cada polinomio $P_n(t)$ viene dado por*

$$P_n(t) = \frac{k_n}{\Delta_{n-1}} \det \left(\begin{array}{c|c} \Delta_{n-1} & \begin{matrix} \mu_n \\ \mu_{n+1} \\ \vdots \\ \mu_{2n-1} \end{matrix} \\ \hline 1 & t \cdots t^{n-1} \end{array} \middle| \begin{matrix} \mu_n \\ \mu_{n+1} \\ \vdots \\ \mu_{2n-1} \end{matrix} \right).$$

Un funcional de momentos regular se puede definir también como aquel funcional \mathcal{L} cumpliendo $\Delta_n \neq 0$, $\forall n \geq 0$. Además, el funcional \mathcal{L} es definido positivo si y solo si $\Delta_n > 0$, $\forall n \geq 0$. Por tanto, si un funcional de momentos \mathcal{L} es definido positivo entonces es regular.

Proposición 1.1.8 (Norma cuadrática mínima). *Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una SPOM respecto a un funcional de momentos definido positivo \mathcal{L} . Entonces, para cualquier polinomio mónico $q_n(t)$ de grado n se cumple*

$$\mathcal{L}[P_n^2(t)] \leq \mathcal{L}[q_n^2(t)].$$

Este resultado se puede ver, por ejemplo, en [70, pág. 39, Teorema 3.1.2].

Una de las características más importantes de los polinomios ortogonales es el hecho de que cualesquiera tres polinomios consecutivos están conectados mediante una relación de recurrencia a tres términos.

Teorema 1.1.9 (Relación de recurrencia a tres términos). *Sea \mathcal{L} un funcional regular y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una SPO asociada a \mathcal{L} . Entonces,*

$$tP_n(t) = \alpha_n P_{n+1}(t) + \beta_n P_n(t) + \alpha_{n-1} P_{n-1}(t),$$

con $P_{-1}(t) = 0$ y $P_0(t) = 1$, y donde los coeficientes α_n y β_n se expresan mediante las fórmulas:

$$\alpha_n = \frac{\mathcal{L}[tP_n(t)P_{n+1}(t)]}{\mathcal{L}[P_{n+1}^2(t)]}, \quad \beta_n = \frac{\mathcal{L}[tP_n(t)P_n(t)]}{\mathcal{L}[P_n^2(t)]}.$$

El siguiente teorema es el recíproco de éste.

Teorema 1.1.10 (Teorema de Favard). Sean $\{c_n\}_{n \geq 1}$ y $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ sucesiones arbitrarias de números reales cumpliendo que $\lambda_n \neq 0$, para todo $n \geq 1$ y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios mónicos satisfaciendo la fórmula de recurrencia a tres términos

$$P_n(t) = (t - c_n)P_{n-1}(t) - \lambda_n P_{n-2}(t), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $P_{-1}(t) = 0$ y $P_0(t) = 1$. Entonces existe un único funcional de momentos regular \mathcal{L} tal que

$$\mathcal{L}[1] = \lambda_1, \quad \mathcal{L}[P_m(t)P_n(t)] = 0, \quad m \neq n, \quad m, n \in \mathbb{N}_0,$$

y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una SPO asociada a \mathcal{L} . Además, \mathcal{L} es definido positivo si y sólo si $\lambda_n > 0$, $n \geq 1$.

Finalizamos el estudio de las SPO ofreciendo unos resultados sobre los ceros.

Llamamos *soporte de \mathcal{L}* al mayor conjunto (a, b) tal que \mathcal{L} sea definido positivo en él.

Teorema 1.1.11. Sea (a, b) el soporte de \mathcal{L} definido positivo y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una SPO respecto a \mathcal{L} . Entonces:

1. Todos los ceros de $P_n(t)$, $n \geq 1$, son reales, simples y están localizados en (a, b) .
2. Denotemos por $t_{n,j}$ a los ceros del polinomio $P_n(t)$ y consideremos que $t_{n,1} < t_{n,2} < \dots < t_{n,n}$. Entonces:

$$t_{n+1,j} < t_{n,j} < t_{n+1,j+1},$$

es decir, los ceros de $P_n(t)$ y $P_{n+1}(t)$ son diferentes entre sí y entrelazan unos con otros.

1.1.2. Polinomios ortogonales clásicos en la recta real

Los polinomios ortogonales clásicos en la recta real son sin duda los polinomios ortogonales en una variable más importantes y estudiados debido a la multitud de aplicaciones que tienen tanto en matemáticas como en otras áreas. Se diferencian de las demás sucesiones de polinomios ortogonales en que verifican una serie de propiedades que los caracterizan (véase [52]).

El funcional de momentos \mathcal{L} para los polinomios ortogonales clásicos es definido como en (1.1.3). Por tanto, podemos definir los polinomios ortogonales clásicos como aquella familia de polinomios ortogonales que están asociados a un funcional lineal definido positivo de la forma

$$\mathcal{L}[f] = \int_I f(t) \omega(t) dt, \quad \forall f(t) \in \Pi,$$

donde $\omega(t)$ es una función peso clásico definida en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ (véase la Tabla 1.1). Dicho funcional recibe el nombre de *funcional lineal clásico*. Por tanto, esta clase de polinomios son ortogonales respecto a un producto escalar con peso de la forma:

$$\langle p, q \rangle = \int_I p(t) q(t) \omega(t) dt.$$

En la Tabla 1.1 podemos ver la expresión concreta de $\omega(t)$ e I para cada una de las tres familias de polinomios ortogonales clásicos en la recta real:

PO clásicos de:	$\omega(t)$	I	Notación
Hermite	e^{-t^2}	\mathbb{R}	$H_n(t)$
Jacobi	$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta, \alpha, \beta > -1$	$(-1, 1)$	$P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$
Laguerre	$t^\alpha e^{-t}, \alpha > -1$	$I = \mathbb{R}_0^+$	$L_n^\alpha(t)$

Tabla 1.1: En esta tabla podemos ver la expresión explícita de la función peso $\omega(t)$ definida en el intervalo I de cada familia de polinomios ortogonales clásicos en la recta real. Además, la última columna recoge la notación habitual del polinomio correspondiente de grado n .

No entraremos en más detalle y recomendamos [1, 2, 3, 34, 70] para profundizar en las propiedades de estas familias clásicas. Nosotros nos centraremos en los polinomios clásicos de Jacobi, por su fuerte presencia a lo largo del Capítulo 2, dedicando la siguiente sección a una recopilación de sus propiedades básicas, tal y como se pueden encontrar en [1, Capítulo 22] y [70].

1.1.3. Polinomios clásicos de Jacobi

A partir de ahora, denotamos a la función peso clásica de Jacobi por $\omega_{\alpha, \beta}(t)$, es decir, $\omega_{\alpha, \beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ y $t \in (-1, 1)$. El polinomio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ está normalizado por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}, \quad n \geq 0,$$

donde $(\alpha+1)_n$ denota el símbolo de Pochhammer (véase (A.0.2)). Su coeficiente principal está dado por

$$k_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2^n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n \Gamma(n+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \quad (1.1.5)$$

siendo $\Gamma(\cdot)$ la función gamma cuya definición y propiedades pueden verse en la Sección A.0.1.

La norma de $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ en $L^2(\omega_{\alpha,\beta}, (-1, 1))$ es

$$\begin{aligned} h_n^{(\alpha,\beta)} &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(t)^2 \omega_{\alpha,\beta}(t) dt \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}, \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

para $n \geq 1$, y para $n = 0$ el producto $(2n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)$ debe remplazarse por $\Gamma(\alpha + \beta + 2)$ ([70, Ec. (4.3.3)]).

Los tres primeros polinomios de Jacobi son:

$$\begin{aligned} P_0^{(\alpha,\beta)}(t) &= 1, \\ P_1^{(\alpha,\beta)}(t) &= \frac{\alpha + \beta + 2}{2}t + \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ P_2^{(\alpha,\beta)}(t) &= \frac{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 4)}{8}t^2 + \frac{(\alpha + \beta + 3)(\alpha - \beta)}{4}t \\ &\quad + \frac{(\alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta + 4)}{8}. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Se cumple la siguiente relación entre familias adyacentes de polinomios de Jacobi ([1, pág. 782, (22.7.18)])

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = a_n^{(\alpha,\beta)} P_n^{(\alpha+1,\beta)}(t) - b_n^{(\alpha,\beta)} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(t), \quad (1.1.8)$$

donde

$$a_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta + 1}, \quad b_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{n + \beta}{2n + \alpha + \beta + 1}, \quad n \geq 1. \quad (1.1.9)$$

Observe que

$$a_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{k_n^{(\alpha,\beta)}}{k_n^{(\alpha+1,\beta)}}, \quad b_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{k_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)} h_n^{(\alpha,\beta)}}{k_n^{(\alpha,\beta)} h_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}}, \quad (1.1.10)$$

con $a_0^{(\alpha,\beta)} = 1$, para $\alpha, \beta > -1$.

Utilizando que la derivada de un polinomio de Jacobi es de nuevo, salvo por una constante multiplicativa, un polinomio de Jacobi ([70, pág. 63, (4.21.7)]),

$$\frac{d}{dt} P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t), \quad (1.1.11)$$

y la expresión [1, pág. 782, (22.7.16)], deducimos

$$(1 + t) \frac{d}{dt} P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = a_n^{(\alpha,\beta)} [(n + \beta) P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(t) + n P_n^{(\alpha+1,\beta)}(t)]. \quad (1.1.12)$$

Finalmente, como casos particulares de este tipo de polinomios cabe mencionar los siguientes:

PO clásicos de:	$\alpha = \beta$	$\omega_{\alpha,\alpha}(t)$
Legendre	0	1
Chebyshev de primera especie	-1/2	$(1 - t^2)^{-1/2}$
Chebyshev de segunda especie	1/2	$(1 - t^2)^{1/2}$
Gegenbauer (o ultrasféricos)	$\lambda - 1/2, \lambda > -1/2$	$(1 - t^2)^{\lambda-1/2}$

Tabla 1.2: Existen cuatro tipos de casos particulares de polinomios de Jacobi que tienen nombre propio y provienen de tomar los valores concretos de α y β en la función peso de Jacobi que se muestran en esta tabla. Tenga en cuenta que la normalización estándar puede variar.

1.1.4. Polinomios ortogonales en varias variables

La teoría general de polinomios ortogonales en varias variables es más reciente, siendo estudiada en mayor profundidad en los últimos 30 años. En ella se establecen resultados paralelos a la teoría de polinomios ortogonales en una variable utilizando una notación de matriz vectorial. Una excelente monografía clásica es [34] y también se recomienda para el caso particular de dos variables [69].

Definición 1.1.12. Sean $d \geq 1$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{N}_0^d$ y $x = (x_1, \dots, x_d)$. Se define un monomio en las variables x_1, \dots, x_d como

$$x^\mu = x_1^{\mu_1} \dots x_d^{\mu_d},$$

con grado total $|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_d$.

Definición 1.1.13. Un polinomio en d variables $P(x)$ es una combinación lineal finita de monomios, es decir,

$$P(x) = \sum_{|\mu| \leq n} c_\mu x^\mu, \quad c_\mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{N}_0^d, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

cuyo grado total es el mayor grado de sus monomios.

Al espacio vectorial de polinomios en $d \geq 2$ variables reales lo denotamos por Π^d y a su subespacio de polinomios en d variables de grado máximo n por Π_n^d .

Definición 1.1.14. Un polinomio se llama homogéneo si todos los monomios que aparecen tienen el mismo grado.

Denotamos al espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado n en d variables por \mathcal{P}_n^d , es decir,

$$\mathcal{P}_n^d = \left\{ P \in \Pi_n^d : P(x) = \sum_{|\mu|=n} c_\mu x^\mu \right\}.$$

Observemos que $P(x) \in \mathcal{P}_n^d$ es homogéneo en el sentido de que $P(rx) = r^n P(x)$, con $r \in \mathbb{R}$. Todos los polinomios de Π^d pueden ser escritos como combinación lineal de polinomios homogéneos,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{|\mu|=k} c_\mu x^\mu, \quad c_\mu \in \mathbb{R}.$$

Es conocido que

$$\dim \Pi_n^d = \binom{n+d}{n} \quad \text{y} \quad \dim \mathcal{P}_n^d = \binom{n+d-1}{n} = r_n^d.$$

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Pi^d \times \Pi^d \rightarrow \mathbb{R}$ un producto escalar arbitrario.

Definición 1.1.15. *Un polinomio P es un polinomio ortogonal respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si P es ortogonal a todos los polinomios de grado menor, es decir,*

$$\langle P, R \rangle = 0, \quad \forall R \in \Pi^d, \quad \text{con} \quad \text{gr}R < \text{gr}P.$$

Si el producto escalar está dado en términos de una función peso, $\omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\langle P, Q \rangle = \int_{\Omega} P(x) Q(x) \omega(x) dx, \quad P, Q \in \Pi^d,$$

donde Ω es un dominio de \mathbb{R}^d .

Una diferencia esencial entre los polinomios en una y en varias variables es la falta de un orden natural en este último conjunto. Sabemos que el orden natural entre monomios de una variable es el orden del grado, pero para polinomios en varias variables, hay varias formas de definir un orden. Esto da lugar a diferentes bases ortogonales, perdiendo la unicidad (excepto constante multiplicativa) que existía en una variable. Por otra parte, cabe destacar que los polinomios del mismo grado total de una base no necesitan ser ortogonales entre sí, es decir, los polinomios de las bases ortogonales deben ser ortogonales a los polinomios de grado menor pero no es necesario que lo sean entre los del mismo grado.

Definición 1.1.16. *Sean $P_{\alpha_i}^n(x) = x^{\alpha_i} + \dots$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}_0^d$ tal que $|\alpha_i| = |\alpha_j|$ y $\alpha_i \neq \alpha_j$ para todo $i \neq j$, los polinomios de grado n de una base. Si $\langle P_{\alpha_i}^n, P_{\alpha_j}^n \rangle = 0$, para todo $i \neq j$, entonces se dice que los polinomios son mutuamente ortogonales y que la base es mutuamente ortogonal.*

1.1.5. Armónicos esféricos

A continuación, se presentan hechos básicos sobre los armónicos esféricos, siguiendo principalmente las notaciones y resultados contenidos en [34, Sección 4.1].

Definición 1.1.17. *Los polinomios armónicos de grado n en d variables son polinomios homogéneos en \mathcal{P}_n^d que satisfacen la ecuación de Laplace,*

$$\Delta Y = 0, \quad \text{donde} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}.$$

El espacio vectorial de polinomios armónicos de grado n se denotará por \mathcal{H}_n^d . Se sabe que

$$a_n^d = \dim \mathcal{H}_n^d = \binom{n+d-1}{d-1} - \binom{n+d-3}{d-1}. \quad (1.1.13)$$

Definición 1.1.18. *Los armónicos esféricos son la restricción de los polinomios armónicos a la esfera unidad*

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^d : \|\xi\|^2 = 1\},$$

donde $\|x\|$ representa la norma euclídea de $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Si $Y \in \mathcal{H}_n^d$, entonces, en coordenadas polares esféricas $x = r\xi$, con $r = \|x\|$ y $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, tenemos

$$Y(x) = r^n Y(\xi), \quad (1.1.14)$$

así que Y está únicamente determinado por su restricción a la esfera.

Los armónicos esféricos de diferentes grados son ortogonales con respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi)g(\xi)d\sigma(\xi), \quad (1.1.15)$$

donde $d\sigma$ denota la medida de superficie y $\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})$ es el volumen de \mathbb{S}^{d-1} dado por

$$\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1}) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\sigma(\xi) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (1.1.16)$$

Para $P \in \Pi^d$, definimos

$$\langle x, \nabla \rangle P(x) = \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial}{\partial x_i} P(x).$$

Si $Y(x)$ es un armónico esférico de grado n , entonces por la ecuación de Euler para polinomios homogéneos deducimos

$$\langle x, \nabla \rangle Y(x) = \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial}{\partial x_i} Y(x) = nY(x), \quad (1.1.17)$$

es decir, los armónicos esféricos son autofunciones del operador diferencial $\langle x, \nabla \rangle$.

1.1.6. Polinomios ortogonales clásicos en la bola unidad

Estudiamos ahora los polinomios ortogonales clásicos multivariados en la bola unidad (véase [34, Sección 5.2]).

Denotamos por

$$\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\},$$

la bola unidad en \mathbb{R}^d . Sea W_μ la función peso definida por

$$W_\mu(x) = (1 - \|x\|^2)^\mu, \quad \|x\| < 1.$$

Si $\mu > -1$, la función W_μ es integrable en la bola unidad.

Los polinomios ortogonales clásicos en la bola unidad son ortogonales con respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle_\mu = \frac{1}{\omega_\mu} \int_{\mathbb{B}^d} f(x)g(x)W_\mu(x)dx, \quad (1.1.18)$$

donde ω_μ es la constante de normalización definida por

$$\omega_\mu = \int_{\mathbb{B}^d} W_\mu(x)dx = \frac{\pi^{d/2}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{d}{2}+1)}, \quad (1.1.19)$$

y cumpliendo $\langle 1, 1 \rangle_\mu = 1$.

Es conocido que los polinomios P ortogonales respecto a W_μ son autofunciones de un operador diferencial de segundo orden D_μ . Concretamente, tenemos

$$D_\mu P = -(n+d)(n+2\mu)P,$$

donde

$$D_\mu = \Delta - \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} x_j \left[2\mu + \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right].$$

En coordenadas polares esféricas $x = r\xi$, $r > 0$ y $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, se puede dar una base mutuamente ortogonal de polinomios ortogonales con respecto a (1.1.18) en términos de los polinomios de Jacobi y los armónicos esféricos.

Proposición 1.1.19. [34, Prop. 5.2.1] *Para $n \geq 0$ y $0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$, sea $\{Y_\nu^{n-2j}(x) : 1 \leq \nu \leq a_{n-2j}^d\}$ una base ortonormal de \mathcal{H}_{n-2j}^d . Definimos*

$$P_{j,\nu}^n(x) = P_j^{(\mu, n-2j+\frac{d-2}{2})}(2\|x\|^2 - 1)Y_\nu^{n-2j}(x).$$

Entonces el conjunto $\{P_{j,\nu}^n(x) : 0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor, 1 \leq \nu \leq a_{n-2j}^d\}$ es una base mutuamente ortogonal asociada con el producto escalar clásico en la bola (1.1.18). Más precisamente,

$$\langle P_{j,\nu}^n, P_{k,\eta}^m \rangle_\mu = H_{j,n}^\mu \delta_{n,m} \delta_{j,k} \delta_{\nu,\eta},$$

donde

$$H_{j,n}^\mu = \frac{(\mu+1)_j (\frac{d}{2})_{n-j} (n-j+\mu+\frac{d}{2})}{j! (\mu+\frac{d+2}{2})_{n-j} (n+\mu+\frac{d}{2})}.$$

La notación $[x]$ corresponde al máximo número entero y no superior a x .

Finalizamos con el caso particular $d = 2$ y $\mu = 0$, que dan lugar a los conocidos polinomios de Zernike. Se recomienda [28, 45, 66, 76, 79] para profundizar en el tema.

1.1.7. Polinomios de Zernike

Los polinomios de Zernike son un conjunto de polinomios ortogonales respecto a (1.1.18) para $d = 2$ y $\mu = 0$, con $\mathbb{B}^2 = D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ el disco unidad. Se pueden escribir del siguiente modo,

$$Z_n^m(\rho, \theta) = \begin{cases} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(m\theta), & m \geq 0, \\ N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(|m|\theta), & m < 0, \end{cases}$$

donde:

- El doble índice (n, m) tiene las restricciones: $n \geq 0$, $|m| \leq n$ y $n - m$ un número par.
- N_n^m es la constante de normalización. A veces se toma 1 por simplicidad aunque el valor que garantiza la ortonormalidad es

$$N_n^m = \sqrt{(2 - \delta_{0,m})(n + 1)},$$

siendo δ la delta de Kronecker.

- La parte radial $R_n^{|m|}(\rho)$ es un polinomio de Jacobi

$$R_n^{|m|}(\rho) = (-1)^{\frac{n-|m|}{2}} \rho^{|m|} P_{(n-|m|)/2}^{(|m|, 0)}(1 - 2\rho^2), \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

- La parte angular es $\cos(m\theta)$, $\sin(|m|\theta)$, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

A partir del año 2000, los polinomios de Zernike se adoptan como el estándar en óptica oftalmológica. Estos polinomios se usan hoy en día en los aberrómetros, que son los aparatos que miden la aberración del frente de onda ocular, en otras palabras, se encargan de detectar los problemas de visión que podamos tener.

1.1.8. Polinomios ortogonales de Sobolev

Los polinomios ortogonales de Sobolev son una familia de polinomios ortogonales con respecto a un producto escalar que involucra simultáneamente a las funciones y sus derivadas.

La primera motivación para el estudio de este tipo de polinomios fue la posibilidad de aproximar simultáneamente una función y sus derivadas (véase [49]).

El primer artículo sobre polinomios ortogonales de Sobolev fue [4], motivado por el trabajo [49], cuyo autor estudió los polinomios ortogonales respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt + \lambda \int_{-1}^1 f'(t)g'(t)dt, \quad \lambda > 0.$$

Desde entonces, se han estudiado una extensa variedad de polinomios ortogonales de Sobolev asociados a diferentes productos escalares que contienen derivadas de las funciones que aparecen.

Definición 1.1.20. *Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar asociado a una familia de polinomios ortogonales. Si se verifica*

$$\langle tf(t), g(t) \rangle = \langle f(t), tg(t) \rangle, \quad \forall f, g \in \Pi, \quad (1.1.20)$$

entonces diremos que el producto escalar es estándar y los polinomios ortogonales asociados son polinomios ortogonales estándar.

Los polinomios estudiados en secciones previas son polinomios estándar. Una diferencia esencial entre polinomios ortogonales estándar y los de Sobolev es que el producto escalar al que están asociados estos últimos no cumplen la propiedad (1.1.20). Esto se debe al hecho de introducir derivadas en el producto escalar. Destacamos dos consecuencias inmediatas de este hecho:

1. La relación de recurrencia a tres términos (Teorema 1.1.9) no se mantiene para polinomios ortogonales de Sobolev.
2. Algunas propiedades de los ceros de polinomios ortogonales estándar (Teorema 1.1.11) no se cumplen para polinomios ortogonales de Sobolev.

Para una variable, los polinomios de Sobolev han sido ampliamente estudiados durante los últimos 40 años y constituye el tema principal de una vasta literatura. Un buen resumen sobre este tema se puede encontrar en [54]. El estudio en el caso de varias variables tiene una historia más corta y se ha centrado sólo en algunos casos concretos. Entraremos en más detalle en estos últimos en el Capítulo 2.

1.1.9. Relación entre la teoría de polinomios ortogonales y la teoría del potencial

Sorprendentemente, los polinomios ortogonales clásicos están íntimamente relacionados con el siguiente problema del equilibrio electrostático:

Problema 1.1.21. *Encontrar colecciones de N puntos, t_1, \dots, t_N , en el intervalo $[-1, 1]$, consideradas como cargas unitarias del mismo signo sometidas a fuerzas de interacción mutua, que minimicen la energía logarítmica*

$$\sum_{i \neq j} \ln \frac{1}{|t_i - t_j|}.$$

En [35] se demostró que la solución es la formada por los puntos $\{-1, 1\}$ más los ceros del polinomio de Gegenbauer de grado $N - 2$ y parámetros $\alpha = \beta = 1$ (para $\lambda = 3/2$, véase la Tabla 1.2).

Desde entonces ha existido interés en la comunidad científica por conocer más sobre la relación entre los polinomios ortogonales y la teoría del potencial. En [53] se estudia la interpretación electrostática de los ceros de algunas familias conocidas de polinomios ortogonales así como la interacción entre estos modelos y la distribución asintótica de dichos ceros. También se ha estudiado el caso en el que existe un campo externo cumpliendo ciertas condiciones y otro tipo de generalizaciones (se recomienda acudir a [70, 55, 42, 57, 18] y sus referencias incluidas para profundizar en el tema).

La solución del problema que resulta de cambiar el intervalo $[-1, 1]$ por la circunferencia en el Problema 1.1.21 también es bien conocida: las N raíces de la unidad giradas por una fase arbitraria. Pero, ¿qué ocurre si aumentamos una dimensión y consideramos por ejemplo, la esfera unidad de dimensión 2? Como veremos en las siguientes secciones, se trata de un problema muy interesante y de enorme dificultad teórica, existiendo una gran cantidad de científicos interesados en hallar su solución.

1.2. Problema 7 de Smale

Stephen Smale, ganador de la medalla Fields en 1966, elaboró una lista de 18 problemas (véase [65]) a finales del siglo XX por encargo del vicepresidente de la Unión Matemática Internacional de aquel momento, Vladimir Arnold, que pidió a varios matemáticos que hicieran una lista de problemas con el fin de reunir algunos de los principales retos matemáticos para el siglo XXI.

Los criterios que tuvo en cuenta Smale para realizar dicha lista fueron los siguientes:

- a) Enunciado sencillo.
- b) Conocimiento personal del problema.
- c) Convicción personal de que el problema, su solución, los resultados parciales o incluso los intentos de resolución del mismo puedan resultar de importancia para las matemáticas y su desarrollo durante el siglo XXI.

Solamente 3 de los 18 problemas planteados están completamente resueltos a día de hoy, a saber; el número 2, el número 4 y el número 17. Nosotros estamos especialmente interesados en el problema número 7 relacionado con la distribución de un número finito de puntos en la esfera unidad \mathbb{S}^2 . Se recomienda [10] y [23, Sección 6.7] para adentrarse en el estudio de este problema.

Antes de mostrar el enunciado del problema 7 de Smale, presentamos las siguientes definiciones.

Definición 1.2.1. Dada una colección de N puntos esféricos, $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{S}^2$, se define su energía logarítmica como

$$\mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) = \sum_{i \neq j} K_{\log}(p_i, p_j) = \sum_{i \neq j} \ln \frac{1}{\|p_i - p_j\|}, \quad (1.2.1)$$

donde

$$K_{\log}(p_i, p_j) = \ln \frac{1}{\|p_i - p_j\|},$$

es el potencial logarítmico.

Nota 1.2.2. En algunas referencias podemos encontrar los subíndices de la energía logarítmica dados por $i < j$ así como resultados obtenidos en función de esta condición. Es fácil adaptar esto al caso $i \neq j$, siendo ésta la notación de la mayoría de trabajos actuales y la que usaremos a lo largo de este documento.

A partir de ahora, denotemos por $m_N = \min_{p_1, \dots, p_N \in \mathbb{S}^2} \mathcal{E}(p_1, \dots, p_N)$.

Definición 1.2.3. Una colección de N puntos esféricos cuya energía logarítmica es precisamente igual a m_N se llama una colección de puntos de Fekete, y existe al menos una para cada valor de N .

Entonces, el problema 7 de Smale dice así:

Problema 1.2.4 (Problema 7 de Smale). ¿Se pueden encontrar N puntos $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{S}^2$ tales que

$$\mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) \leq m_N + c \ln N,$$

para c una constante universal?

La constante c es independiente de N y de los puntos que satisfacen la condición requerida, aceptándose cualquier valor real que pueda tomar. Por *encontrar* se refiere a dar una descripción simple y eficiente de los N puntos, o alternativamente describir un algoritmo que con entrada N y en tiempo polinomial devuelva la posición que deberían tener esos N puntos para verificar dicha condición. Por *algoritmo* se entiende un algoritmo de números reales en el sentido de BSS (llamado así por Blum, Shub y Smale, véase [21]), es decir, una secuencia de instrucciones (las habituales presentes en un programa de ordenador) en las que todas las operaciones aritméticas con números reales se realizan de forma exacta, sin pérdida de precisión.

1.2.1. Energía de Riesz

La distribución de puntos en esferas u otros conjuntos es un problema clásico cuya formulación moderna en términos de configuraciones de energía

mínima se debe al descubridor del electrón, el físico británico J. J. Thomson. En 1904 propuso un modelo atómico conocido con el nombre de *plum pudding model*. Thomson sostenía que los átomos eran esferas uniformes de materia con carga positiva donde los electrones (partículas de carga negativa) se encontraban incrustados. Su interés en conocer la estructura geométrica del átomo, le condujo a proponer el siguiente problema en [72], conocido hoy en día como el problema de Thomson:

Problema 1.2.5 (Problema de Thomson). *¿Qué posición alcanzarán N electrones para minimizar el potencial electrostático?*

De modo que, podemos decir que el problema 7 de Smale es la versión computacional de la cuestión planteada por Thomson.

El modelo atómico de Thomson quedó rápidamente descartado debido a los grandes avances científicos en el siglo XX, sin embargo, su pregunta sobre la configuración de los electrones en tal modelo, no quedó en el olvido y desde entonces, ha sido estudiada por un gran número de científicos, considerándose incluso el problema generalizado ([23]):

Problema 1.2.6 (Problema generalizado de Thomson). *Encontrar una colección $\omega_N = (p_1, \dots, p_N)$ de N puntos en la esfera de dimensión n , \mathbb{S}^n , (o, más generalmente, en cualquier otro conjunto compacto de \mathbb{R}^n) tal que minimice la energía de Riesz dada por*

$$E_s(\omega_N) = \sum_{i \neq j} K_s(p_i, p_j) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{\|p_i - p_j\|^s}, \quad s > 0,$$

donde

$$K_s(p_i, p_j) = \frac{1}{\|p_i - p_j\|^s}, \quad (1.2.2)$$

es el potencial de Riesz.

El potencial de Riesz tiene diferentes interpretaciones físicas para valores concretos de s . Por ejemplo, para $s = 1$ y $n = 2$, tenemos el potencial electrostático (salvo constante multiplicativa). De hecho, cuando $s \rightarrow 0$, obtenemos el potencial logarítmico

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E_s(\omega_N) = \mathcal{E}(\omega_N) = \sum_{i \neq j} \ln \frac{1}{\|p_i - p_j\|}.$$

En [22] se demuestra que todas las soluciones al problema generalizado de Thomson cuando $s \rightarrow \infty$ son soluciones para el siguiente problema:

Problema 1.2.7 (Problema del empaquetamiento óptimo). *Encontrar una colección de N puntos $\omega_N = \{p_1, \dots, p_N\}$ en \mathbb{S}^n tal que la distancia mínima entre dos puntos sea máxima, es decir, tal que maximice $d_{\text{sep}}(\omega_N) = \min_{i \neq j} \|p_i - p_j\|$, que es la distancia de separación de la colección de puntos ω_N .*

También se conoce como el *problema de Tammes* en honor al botánico neerlandés Tammes quien lo describe en [71] para el caso de \mathbb{S}^2 . Los motivos que lo llevaron a proponer tal enunciado fue su estudio de la estructura de los granos de polen. Observó que se asemejaban a una esfera con una serie de agujeros por donde se expulsa el material genético en el proceso de reproducción de las plantas. Descubrió que dichos agujeros parecían estar distribuidos en su superficie de modo que la mínima distancia entre ellos era lo más grande posible. En [44] podemos contemplar una recopilación de fotografías de granos de polen realizadas con microscopio electrónico.

Bajo este contexto surge la siguiente definición:

Definición 1.2.8. *Una colección de puntos $\omega_N = \{p_1, \dots, p_N\}$ en \mathbb{S}^n está bien separada si*

$$d_{\text{sep}}(\omega_N) \geq \frac{C}{N^{1/n}},$$

donde C es una constante que solo depende de n (no de N).

1.2.2. La energía logarítmica mínima: m_N

El problema 7 de Smale, a pesar de la simplicidad de su enunciado, se considera una cuestión de enorme dificultad teórica. Un obstáculo importante es que no se conoce por completo el valor de la energía logarítmica mínima en la esfera. Su conocimiento actual, después de [74, 60, 33, 24, 20, 68], es la siguiente expansión asintótica:

$$m_N = \kappa N^2 - \frac{1}{2} N \ln N + C_{\log} N + o(N), \quad (1.2.3)$$

donde κ es la energía continua

$$\kappa = \frac{1}{(\text{vol}(\mathbb{S}^2))^2} \int_{p,q \in \mathbb{S}^2} \ln \frac{1}{\|p - q\|} dpdq = \frac{1}{2} - \ln 2,$$

y C_{\log} es una constante cuyo valor no se conoce. A partir de [48] y [20] tenemos

$$-0,0568 \dots = \ln 2 - \frac{3}{4} \leq C_{\log} \leq 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} + 3 \ln \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/3)} = -0,0556 \dots \quad (1.2.4)$$

De hecho, usando dos argumentos muy diferentes ([25], [20]) se ha conjeturado que la cota superior es una igualdad y uno de los problemas abiertos más importantes en teoría del potencial es el cálculo exacto de esta constante.

Conjetura 1.2.9.

$$C_{\log} = 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} + 3 \ln \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/3)}.$$

Otro motivo que influye en la dificultad del problema 7 de Smale es la falta de resultados teóricos sobre el número de mínimos locales de la energía logarítmica. Se conjetura que el número de mínimos locales crece exponencialmente con N , pero no se conocen resultados teóricos al respecto.

1.2.3. Soluciones particulares

La solución del problema 7 de Smale solo se conoce para casos muy concretos:

N	Solución
2	Dos puntos antipodales
3	Vértices de un triángulo equilátero contenido en el ecuador
4	Vértices de un tetraedro ([32])
5	Dos puntos antipodales y tres más formando un triángulo equilátero en el ecuador ([32])
6	Vértices de un octaedro regular ([46])
12	Vértices de un icosaedro regular ([6])

Tabla 1.3: En esta tabla podemos ver las únicas soluciones conocidas del problema 7 de Smale.

El primer caso cuya solución no es conocida es el de $N = 7$.

Conjetura 1.2.10. *Para $N = 7$, la solución al problema 7 de Smale es la dada por dos puntos antipodales y cinco más equidistribuidos en el ecuador correspondiente a los puntos antipodales.*

Obtener soluciones aproximadas para el problema 7 de Smale tomando valores pequeños de N es un problema accesible sin embargo, debemos ser cautos con los resultados numéricos obtenidos. La dificultad aparece cuando se exige pruebas teóricas.

1.2.4. El conjunto diamante

Existen distintas formas conocidas (deterministas y probabilistas) para obtener colecciones de puntos en la esfera con energía “pequeña”, aunque no lo suficiente como para resolver el problema 7 de Smale. Se recomienda [41] y [23, Capítulo 7] para profundizar en el tema.

El *conjunto diamante* descrito en [13] es una manera de generar de forma aleatoria colecciones de puntos esféricos dependientes de varios parámetros. De hecho, para ciertos valores de los mismos, se puede calcular teóricamente

el valor asintótico esperado de la energía logarítmica obteniendo un valor muy próximo al valor mínimo conjeturado.

Construcción geométrica. Comenzamos fijando p paralelos, siendo un paralelo la circunferencia consistente en los puntos esféricos a una misma altura dada. En el paralelo j -ésimo, colocamos r_j puntos equidistribuidos, es decir, son las raíces r_j -ésimas de la unidad llevadas al paralelo correspondiente tras una homotecia y una traslación y están rotadas por un ángulo aleatorio $\theta_j \in [0, 2\pi)$. A dicha construcción le añadimos los polos norte y sur y la denotamos por $\Omega(p, r_j, z_j)$. Entonces, para $i \in \{0, 1, \dots, r_j - 1\}$,

$$\Omega(p, r_j, z_j) = \begin{cases} \mathcal{N} = (0, 0, 1) \\ p_j^i = \left(\sqrt{1 - z_j^2} \cos\left(\frac{2\pi i}{r_j} + \theta_j\right), \sqrt{1 - z_j^2} \sin\left(\frac{2\pi i}{r_j} + \theta_j\right), z_j \right) \\ \mathcal{S} = (0, 0, -1) \end{cases}$$

donde p_j^i es el i -ésimo punto situado en el j -ésimo paralelo y z_j es la altura del j -ésimo paralelo dada por

$$z_j = 1 - \frac{1 + r_j + 2 \sum_{k=1}^{j-1} r_k}{N - 1},$$

siendo N el número total de puntos. En [13, Proposición 2.5] se demuestra que esta elección de las alturas para los paralelos es la única que minimiza la energía logarítmica esperada de los correspondientes puntos. Finalmente, el conjunto queda completamente determinado tras fijar r_j . Imponemos que el número de puntos en cada paralelo verifique una ecuación lineal con coeficientes enteros junto con algunas hipótesis adicionales (véase [13, Definición 3.1] y [14] donde se rebajan dichas hipótesis). En [13, Teorema 2.6] se obtiene una fórmula explícita para el valor medio de la energía logarítmica. Pues resulta que para una cierta elección del número de puntos en cada paralelo ([13, Teorema 4.5.8]), la energía logarítmica esperada es

$$\kappa N^2 - \frac{1}{2} N \ln N - 0,0492 \dots N + o(N),$$

siendo, efectivamente, un valor muy próximo al mínimo conjeturado. Una representación gráfica de esta colección de puntos esféricos se puede ver en la Figura 1.2.1.

Por tanto, la estructura diamante nos proporciona puntos en la esfera bien distribuidos, en el sentido que tienen energía logarítmica esperada pequeña, y bien separados [13].

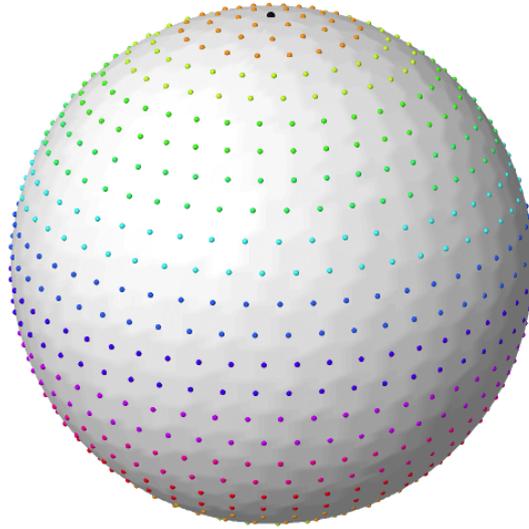


Figura 1.2.1: Estructura diamante para una elección determinada de los parámetros. Los diferentes colores corresponden a diferentes funciones lineales para el número de puntos en cada paralelo. Vemos fácilmente que tenemos puntos muy bien distribuidos y separados en la esfera según una definición intuitiva. Imagen extraída de [13].

1.3. Condicionamiento de polinomios

El enunciado del problema 7 de Smale fue originalmente propuesto por Michael Shub y Stephen Smale en 1993, cuando ambos trabajaron juntos en temas relacionados con teoría de la complejidad durante las décadas de los 80 y 90. Existe una relación sorprendente entre el problema 7 de Smale y el número de condición de un polinomio, estableciendo una estrecha relación entre dos campos aparentemente distanciados. Pero antes de nada, conviene definir el número de condición o condicionamiento de un polinomio.

1.3.1. Definición intuitiva

Intuitivamente, el condicionamiento de un polinomio es una cantidad asociada con las raíces de un polinomio que codifica cómo de sensibles son los ceros de un polinomio ante perturbaciones de sus coeficientes. Tiene diferentes fórmulas y propiedades dependiendo de cómo se midan estos cambios, véase por ejemplo [31, 73]. Entre las definiciones más populares y útiles está la dada por Shub y Smale en [62, 64], donde los polinomios son primero homogeneizados (por lo tanto los ceros se encuentran en $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$) y la norma de Bombieri–Weyl se utiliza para medir la perturbación del polinomio. Antes de dar las definiciones concretas, comentamos brevemente su definición intuitiva.

Consideramos el espacio de *inputs* como el lugar donde viven los polinomios y el espacio de *outputs* en el que habitan sus ceros. La variedad solución es una variedad riemanniana formada por los pares (P, z) donde P es el polinomio y z una de sus raíces. Nuestro polinomio P está bien condicionado cuando pequeñas perturbaciones de sus coeficientes implica pequeñas perturbaciones de z . Considerando las proyecciones naturales, el condicionamiento de P en una raíz z , se define como la norma de la composición de las diferenciales de las proyecciones:

$$\mu(P, z) = \|D\pi_2 D\pi_1^{-1}(P, z)\|$$

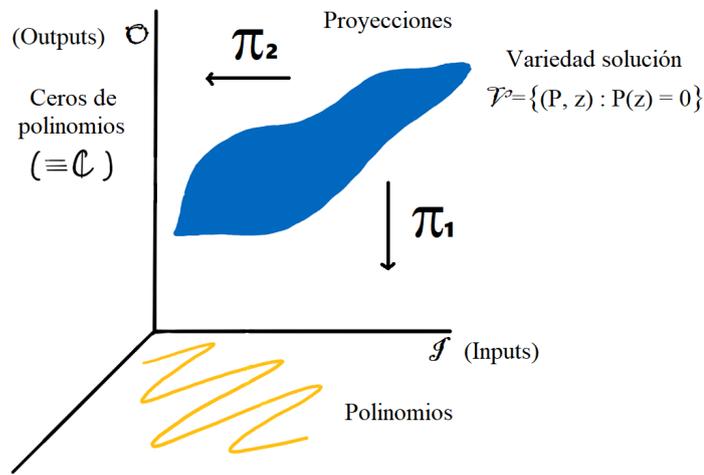


Figura 1.3.1: Boceto gráfico del ambiente del condicionamiento de polinomios.

Cuando no hay mención explícita a una raíz, entonces tomamos como condicionamiento el peor entre todas sus raíces, es decir, el máximo del condicionamiento entre todos sus ceros. Por definición, en las raíces dobles el condicionamiento es infinito. Formalizamos a continuación estas ideas.

1.3.2. Definición formal

A continuación damos la definición precisa y algunas propiedades del número de condición de polinomios. Consideremos un polinomio homogéneo bivariado con coeficientes complejos de grado $N \geq 1$,

$$h(x, y) = \sum_{i=0}^N a_i x^i y^{N-i}, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad a_N \neq 0.$$

Los ceros de h se encuentran en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$. Siguiendo [62], el número de condición normalizado de h en un cero $\zeta \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$

es

$$\mu_{\text{norm}}(h, \zeta) = \begin{cases} N^{1/2} \|(Dh(\zeta)|_{\zeta^\perp})^{-1}\| \|h\| \|\zeta\|^{N-1}, & \text{si } \exists (Dh(\zeta)|_{\zeta^\perp})^{-1}, \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aquí, $Dh(\zeta)|_{\zeta^\perp}$ es la restricción de la derivada $Dh(\zeta) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h \quad \frac{\partial}{\partial y} h \right)_{(x,y)=\zeta}$ al complemento ortogonal de ζ en \mathbb{C}^2 , y $\|h\|$ es la norma de Bombieri–Weyl (también conocida como norma de Kostlan o Bombieri o Weyl) de h , definida como

$$\|h\| = \left(\sum_{i=0}^N \binom{N}{i}^{-1} |a_i|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.3.1)$$

Si ζ es una raíz doble de h , entonces por definición $\mu_{\text{norm}}(h, \zeta) = \infty$. Por otro lado, si no hay mención a una raíz concreta de h , entonces definimos

$$\mu_{\text{norm}}(h) = \max_{\zeta \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2): h(\zeta)=0} \mu_{\text{norm}}(h, \zeta).$$

Sea

$$f(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^i, \quad a_N \neq 0,$$

un polinomio univariado de grado N con coeficientes complejos y $z \in \mathbb{C}$ un cero de f . Consideremos la contraparte homogénea de f ,

$$h(x, y) = \sum_{i=0}^N a_i x^i y^{N-i},$$

y definimos

$$\mu_{\text{norm}}(f, z) = \mu_{\text{norm}}(h, (z, 1)), \quad \mu_{\text{norm}}(f) = \max_{z \in \mathbb{C}: f(z)=0} \mu_{\text{norm}}(f, z).$$

Tomando $\|f\| = \|h\|$ y expandiendo la derivada, resulta que

$$\mu_{\text{norm}}(f, z) = \frac{N^{1/2} (1 + |z|^2)^{\frac{N-2}{2}}}{|f'(z)|} \|f\|, \quad (1.3.2)$$

que nos permite calcular fácilmente el número de condición para casos sencillos (véase [9, Lema 1.1] para una demostración elemental de esta última fórmula).

1.3.3. Una fórmula alternativa para el número de condición

La proyección estereográfica es una aplicación que nos permite identificar unívocamente puntos de \mathbb{S}^n con puntos de \mathbb{R}^n . Geométricamente, consideramos un hiperplano que pasa por el ecuador y entonces, para cualquier punto

$P \in \mathbb{S}^n \setminus \mathcal{N}$, con $\mathcal{N} = (0, \dots, 0, 1)$, existe una única recta que pasa por el polo norte \mathcal{N} y P , intersecando al hiperplano en un único punto P' . De esta forma identificamos de manera única P con P' .

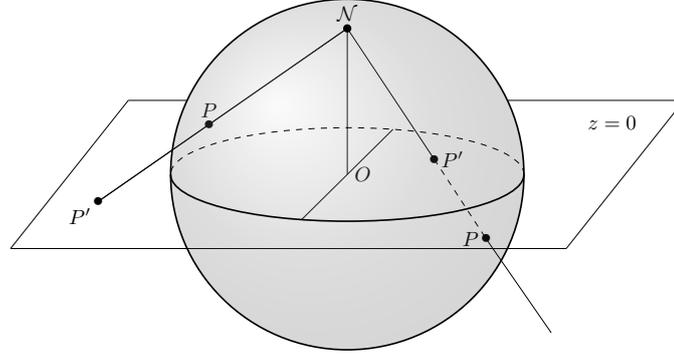


Figura 1.3.2: Proyección estereográfica para $n = 2$ desde el polo norte al plano ecuatorial. Imagen realizada por Pedro R. López-Gómez.

La proyección estereográfica y su inversa vienen dadas por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{S}^n \setminus \mathcal{N}} : \quad \mathbb{S}^n \setminus \mathcal{N} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\rightarrow \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right) \\ \varphi_{\mathbb{S}^n \setminus \mathcal{N}}^{-1} : \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \mathcal{N} \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \left(\frac{2x_1}{1 + \|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{1 + \|x\|^2} \right) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Dado que un polinomio está definido (salvo una constante multiplicativa) por sus ceros y éstos pueden verse como puntos esféricos, se puede intentar dar una fórmula para el número de condición de un polinomio que dependa únicamente de los puntos esféricos asociados. Shub y Smale lograron esta tarea. Adaptando la notación de [64] a la nuestra, tenemos:

Proposición 1.3.1. *Sea $P(z) = \prod_{i=1}^N (z - z_i)$ un polinomio y denotemos por p_i el punto en \mathbb{S}^2 obtenido a partir de la proyección estereográfica inversa de z_i . Entonces el condicionamiento de P es*

$$\mu_{norm}(P) = \frac{1}{2} \sqrt{N(N+1)} \max_{1 \leq i \leq N} \frac{\left(\int_{\mathbb{S}^2} \prod_{j=1}^N |p - p_j|^2 d\sigma(p) \right)^{1/2}}{\prod_{j \neq i} |p_i - p_j|}. \quad (1.3.4)$$

Aquí denotamos por $d\sigma$ la medida uniforme normalizada en \mathbb{S}^2 , es decir, $\sigma(B) = \text{vol}(B)/4\pi$ donde vol es la medida estándar de Lebesgue y $B \subseteq \mathbb{S}^2$ es cualquier conjunto medible.

1.3.4. Relación entre el problema 7 de Smale y el condicionamiento de polinomios

El problema 7 de Smale fue originalmente propuesto en 1993 por Michael Shub y Stephen Smale en su búsqueda de un algoritmo para generar explícitamente secuencias de polinomios bien condicionados:

Problema 1.3.2 (Principal problema en [64]). *Encontrar explícitamente una familia de polinomios de grado N cuyo número de condición es como máximo N .*

Se profundizará más en este problema en el Capítulo 3. Es bajo este contexto donde demuestran el siguiente teorema:

Teorema 1.3.3 (Principal resultado de [64]). *Si ω_N es una colección de N puntos esféricos en S^2 tal que*

$$\mathcal{E}(\omega_N) \leq m_N + c \ln N,$$

entonces los puntos complejos asociados a ω_N (a través de la proyección estereográfica) son los ceros de un polinomio cuyo condicionamiento es como máximo $\sqrt{N^{1+c}(N+1)}$.

Observe que la hipótesis del Teorema 1.3.3 es precisamente conocer una solución del problema 7 de Smale, siendo éste un problema aún más complejo que 1.3.2. Este teorema establece una relación sorprendente entre la teoría del potencial y la teoría de la complejidad. Inspirados por este resultado, Shub y Smale plantearon el problema de encontrar colecciones de puntos esféricos con energía logarítmica pequeña. Esto se incluyó posteriormente en la famosa lista de problemas de Smale para el siglo XXI, pasando entonces a conocerse como el problema 7 de Smale.

1.4. La función de Green en una variedad riemanniana compacta

La función o potencial de Green es un potencial natural en cualquier variedad compacta. Es la más apropiada para definir una función de energía para cualquier variedad riemanniana compacta debido a las buenas propiedades que posee.

Definición 1.4.1. *La energía de Green de N puntos p_1, \dots, p_N en una variedad riemanniana compacta \mathcal{M} es*

$$E_{\mathcal{M}}(p_1, \dots, p_N) = \sum_{i \neq j} G(\mathcal{M}; p_i, p_j),$$

donde $G : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \setminus \{(p, p) : p \in \mathcal{M}\} \rightarrow \mathbb{R}$ es la única función, conocida como función (potencial) de Green, con las siguientes propiedades:

1. $\Delta_q G = \mathcal{S}_p(q) - \text{vol}(\mathcal{M})^{-1}$, con \mathcal{S}_p la función delta de Dirac, en el sentido de las distribuciones.
2. Simetría: $G(\mathcal{M}; p, q) = G(\mathcal{M}; q, p)$.
3. $G(\mathcal{M}; p, \cdot)$ tiene media cero $\forall p \in \mathcal{M}$, es decir, $\int_{q \in \mathcal{M}} G(\mathcal{M}; p, q) dq = 0$.

En esta sección y en el Capítulo 4, seguimos la convención de que el laplaciano riemanniano está dado por $\Delta = -\text{div}\nabla$.

La búsqueda de minimizadores de la energía de Green es un problema matemático interesante y difícil. De hecho, la función de Green en \mathbb{S}^2 es

$$G(\mathbb{S}^2; p, q) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|p - q\| - \frac{1}{4\pi} + \frac{\ln 2}{2\pi}, \quad (1.4.1)$$

esto es, el potencial logarítmico excepto por constante multiplicativa y aditiva. Por tanto, la búsqueda de minimizadores de la energía de Green en \mathbb{S}^2 es equivalente al problema 7 de Smale.

Se sabe que los puntos que minimizan la energía de Green están asintóticamente uniformemente distribuidos en cualquier variedad riemanniana compacta (véase el principal resultado en [11] y [67]).

Proposición 1.4.2. *Sea $G(\mathcal{M}; p, q)$ la función de Green de una variedad \mathcal{M} y ν cualquier medida de signo finita tal que $\nu(\mathcal{M}) = 0$, es decir, $\int_{\mathcal{M}} \nu d\text{vol} = 0$. Entonces,*

$$\int_{p, q \in \mathcal{M}} G(\mathcal{M}; p, q) d\nu(p) d\nu(q) \geq 0,$$

con una igualdad si y solo si $\nu = 0$.

Demostración. Véase [11, pág. 166, Definición 3.2] y [11, pág. 175, Proposición 3.14]. \square

La función de Green de una variedad riemanniana general puede ser muy difícil de calcular. En [11], se da un método para calcularla en variedades armónicas compactas (ver [5] para un método alternativo y equivalente). Antes de explicar dicho método, recordamos brevemente las variedades armónicas compactas.

1.4.1. Variedades armónicas compactas

Las variedades armónicas compactas son las esferas y los espacios proyectivos real, complejo y cuaterniónico de cualquier dimensión, denotados respectivamente por $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$, así como el plano de Cayley $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. Estos espacios proyectivos son variedades riemannianas compactas y conexas que se construyen a partir del conjunto cociente $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, donde \sim es una relación de equivalencia cumpliendo que

$$z \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \lambda z = w,$$

siendo $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ y dando lugar a $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ respectivamente. El conjunto \mathbb{H} son los cuaterniones (también llamados cuaternios), una extensión de los números reales similar a la de los números complejos, pero con tres unidades imaginarias i, j y k . El plano de Cayley es el espacio proyectivo sobre los octoniones. Los octoniones se pueden considerar como octetos (u 8 tuplas) de números reales. Cada octonión $x \in \mathbb{O}$ es una combinación lineal real de los octoniones unitarios $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$:

$$x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7, \quad x_i \in \mathbb{R},$$

a lo que se añade una estructura de álgebra no asociativa. Cada espacio proyectivo también se puede definir como el espacio de las líneas vectoriales de \mathbb{K}^{n+1} que pasan por el origen.

Además, estas variedades son espacios homogéneos de 2 puntos, esto es, si $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathcal{M}$ satisfacen $d_R(p_1, q_1) = d_R(p_2, q_2)$ ($d_R(\cdot, \cdot)$ es la distancia riemanniana en \mathcal{M}) entonces existe una isometría de \mathcal{M} que lleva p_1 a p_2 y q_1 a q_2 . Esto implica que muchas propiedades geométricas (incluidas el cálculo de la función de Green) se puedan describir de una forma más simple que para variedades generales.

1.4.2. Cálculo de la función de Green en variedades armónicas compactas

Dada una variedad armónica compacta \mathcal{M} , su función de Green $G(\mathcal{M}; p, q)$ está dada por $G(\mathcal{M}; p, q) = \phi(\mathcal{M}; d_R(p, q)) = \phi(\mathcal{M}; r)$ para todo $p, q \in \mathcal{M}$, donde $\phi(\mathcal{M}; r)$ satisface

$$\phi'(\mathcal{M}; r) = -\frac{\int_r^D t^{d-1} \Omega(t) dt}{V r^{d-1} \Omega(r)}. \quad (1.4.2)$$

En esta fórmula usamos las siguientes notaciones:

- $d = d_{\mathcal{M}} = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ es la dimensión real de \mathcal{M} .
- $r = d_R(p, q)$ es la distancia riemanniana en \mathcal{M} .
- $D = D_{\mathcal{M}}$ es el diámetro de \mathcal{M} , es decir, la distancia riemanniana máxima entre dos puntos en \mathcal{M} .
- $V = V_{\mathcal{M}} = V_{\mathcal{M}}(D)$ es el volumen de \mathcal{M} .
- $\Omega(r) = \Omega_{\mathcal{M}}(r)$ es la función de densidad de volumen y puede definirse como el jacobiano $\text{Jac}(\exp_{p_0})(\exp_{p_0}^{-1}(q))$ para p_0, q tales que $d_R(p_0, q) = r$, donde el mapa exponencial $\exp_{p_0} = \exp_{\mathcal{M}, p_0}$ es

$$\begin{array}{ccc} \exp_{p_0} : \{v \in T_{p_0}\mathcal{M} : \|v\| < D\} & \rightarrow & \mathcal{M} \\ & v & \rightarrow \exp_{p_0}(v). \end{array}$$

Aquí, p_0 es cualquier punto en \mathcal{M} y $\exp_{p_0}(v)$ es igual a $\gamma_{p_0,v}(t = 1)$, con $\gamma_{p_0,v}$ la geodésica que pasa por p_0 con vector tangente v en $t = 0$. Por ser \mathcal{M} un espacio homogéneo de 2 puntos, la función de densidad de volumen es independiente de la elección concreta de p_0 y q .

Por tanto, basta introducir en (1.4.2) los datos de cada variedad armónica que aparecen en la Tabla 1.4 para hallar $\phi'(r)$. A continuación, integrando $\phi'(r)$ obtenemos la función de Green, tomando como constante de integración aquella que garantiza que la integral en \mathcal{M} de $G(\mathcal{M}; p, \cdot)$ es cero para todo $p \in \mathcal{M}$.

\mathcal{M}	d	$r^{d-1}\Omega(r)$	D	V
\mathbb{S}^n	n	$\sin^{n-1} r$	π	$\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$
$\mathbb{R}\mathbb{P}^n$	n	$\sin^{n-1} r$	$\pi/2$	$\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$
$\mathbb{C}\mathbb{P}^n$	$2n$	$\sin^{2n-1} r \cos r$	$\pi/2$	$\frac{\pi^n}{n!}$
$\mathbb{H}\mathbb{P}^n$	$4n$	$\sin^{4n-1} r \cos^3 r$	$\pi/2$	$\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$
$\mathbb{O}\mathbb{P}^2$	16	$\sin^{15} r \cos^7 r$	$\pi/2$	$\frac{\pi^8}{1320\Gamma(8)}$

Tabla 1.4: La dimensión real, densidad de volumen, diámetro y volumen de las variedades armónicas compactas. Pueden verse estos datos en [11]. Note que en esta referencia hay algunas ambigüedades en la elección de la normalización que producen factores constantes como potencias de 2 pero estas constantes no afectan al cálculo de la función de Green.

1.5. Funciones analíticas y funciones armónicas

La primera parte de esta sección es contenido básico impartido en un curso de variable compleja elemental. Se recomienda [7] y [43].

Definición 1.5.1. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y z_0 un punto interior de Ω . Definimos la derivada de f en z_0 como el límite (si existe):

$$f'(z_0) = \lim_{w \rightarrow 0, w \in \mathbb{C}} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}.$$

En tal caso, decimos que f es derivable en z_0 .

Definición 1.5.2. Dado un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$, decimos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en Ω si f es derivable en todo punto de Ω . En particular, si $\Omega = \mathbb{C}$ decimos que la función es entera.

Denotamos al disco abierto en \mathbb{C} centrado en z_0 con radio a como $\mathbb{D}(z_0, a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < a\}$ y al cerrado por $\overline{\mathbb{D}}(z_0, a)$. La circunferencia de centro z_0 y radio a es $\mathbb{C}(z_0, a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = a\}$.

Definición 1.5.3. Decimos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en Ω cuando para cada $z_0 \in \Omega$ se puede encontrar $\rho_{z_0} \in \mathbb{R}^+$, con $\mathbb{D}(z_0, \rho_{z_0}) \subset \Omega$, y una serie de potencias centrada en z_0 y con radio de convergencia mayor o igual que ρ_{z_0} , tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in \mathbb{D}(z_0, \rho_{z_0}),$$

siendo $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de números complejos.

Así que, una función es analítica cuando localmente puede obtenerse sumando series de potencias. Tendrá por tanto las mismas propiedades locales que la suma de una serie de potencias.

Teorema 1.5.4 (Caracterización de las funciones analíticas). *Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en Ω si y solo si f es indefinidamente derivable en Ω y para cada $z_0 \in \Omega$, $\exists \rho_{z_0} \in \mathbb{R}^+$ con $\mathbb{D}(z_0, \rho_{z_0}) \subset \Omega$ tal que la serie de Taylor de f centrada en z_0 tiene radio de convergencia mayor o igual que ρ_{z_0} y se verifica que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in \mathbb{D}(z_0, \rho_{z_0}).$$

Proposición 1.5.5. *Toda función holomorfa en un abierto del plano es analítica, y en particular infinitamente derivable, en dicho abierto.*

Teorema 1.5.6 (Teorema de Weierstrass). *Sea $\sum_{n \geq 0} f_n$ una serie de funciones complejas, definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ y $B \subset A$. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $M_n \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(z)| \leq M_n$, $\forall z \in B$. Si $\sum_{n \geq 0} M_n$ converge entonces $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolutamente y uniformemente en B .*

Teorema 1.5.7. *Sea (f_n) una sucesión de funciones, analíticas en un dominio abierto Ω tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en compactos. Entonces f es analítica en Ω .*

Extendiendo la Definición 1.1.17, decimos que una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $U \subset \mathbb{R}$ abierto y $\mathcal{C}^2(U)$, es armónica si $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = 0$. Decimos que f es subarmónica si $\Delta f \geq 0$.

Teorema 1.5.8. *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función analítica. Entonces, para todo $z = x + iy$, las funciones $u(x, y) = \operatorname{Re}f(x + iy)$ y $v(x, y) = \operatorname{Im}f(x + iy)$ son funciones armónicas.*

Denotemos a la bola de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $a > 0$ por $B(x_0, a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < a\}$ y a la esfera de centro x_0 con radio a como $S(x_0, a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = a\}$. El siguiente resultado puede verse en [37, Sección 2.2.2].

Teorema 1.5.9 (Propiedad del valor medio para funciones armónicas). *Sea $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica con $u \in \mathcal{C}^2(U)$. Entonces, para cada bola $B(x_0, a) \subset U$, se verifica*

$$u(x_0) = \frac{1}{\operatorname{vol}(S(x_0, a))} \int_{S(x_0, a)} u(y) dy = \frac{1}{\operatorname{vol}(B(x_0, a))} \int_{B(x_0, a)} u(y) dy.$$

Cabe señalar que el Teorema 1.5.9 no es válido para funciones armónicas en variedades riemannianas en general. El siguiente resultado sigue de [75, Teorema 1] y es cierto solo para variedades armónicas.

Teorema 1.5.10. *Sea \mathcal{M} una variedad riemanniana armónica y $S(x_0, a) = \{x \in \mathcal{M} : d_R(x, x_0) = a\}$ una esfera geodésica centrada en x_0 y radio a . Para cada función u con $\Delta u = C$, siendo C una constante, se verifica:*

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(S(x_0, a))} \int_{y \in S(x_0, a)} u(y) dy = u(x_0) + K(\mathcal{M}, a),$$

donde $K(\mathcal{M}, a)$ es una constante que depende únicamente del radio a .

En [8] el autor demuestra algunas propiedades armónicas del potencial logarítmico. Note que en esta referencia, los resultados se dan para la esfera de Riemann, es decir, la esfera de radio $1/2$.

Es conocido que (véase [8, Lema 2.2]) para $q \in \mathbb{S}^2$ fijado, la función $F_q : \mathbb{S}^2 \setminus \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_q(p) = \ln \|p - q\|^{-1}$ es subarmónica con $\Delta F_q(p) = 2$ para todo $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{q\}$.

En [8, Teorema 1.2], se demuestra que la energía logarítmica de N puntos distintos sobre \mathbb{S}^n es una función subarmónica donde es finita (fuera de sus polos), es decir, tiene laplaciano constante e igual a

$$\Delta_{\mathbb{S}^n} \mathcal{E} = \frac{N(N-1)}{2}.$$

El principio del máximo para funciones subarmónicas afirma que toda función subarmónica definida en un conjunto abierto no puede tener máximos locales. Por tanto, se deduce que no existen máximos locales para la energía logarítmica de N puntos distintos en \mathbb{S}^n .

1.6. Algunos resultados técnicos en la esfera

Finalizamos estos preliminares con una serie de resultados técnicos que usaremos a lo largo de los siguientes capítulos.

1.6.1. Resultado técnico para el cálculo de integrales esféricas

El teorema del cambio de variable proporciona una fórmula sencilla para calcular las integrales esféricas:

Lema 1.6.1. *La parametrización $(\theta, t) \rightarrow (\sqrt{1-t^2} \cos \theta, \sqrt{1-t^2} \sin \theta, t)$, con $\theta \in (0, 2\pi)$ y $t \in (-1, 1)$, tiene jacobiano unitario. Por tanto, para cualquier función integrable $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$4\pi \int_{p \in \mathbb{S}^2} f(p) d\sigma(p) = \int_{(0, 2\pi) \times (-1, 1)} f(\sqrt{1-t^2} \cos \theta, \sqrt{1-t^2} \sin \theta, t) d(\theta, t).$$

1.6.2. Un difeomorfismo en la esfera

Proposición 1.6.2. *Dado el difeomorfismo*

$$\begin{aligned} \phi : (0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (r, x) &\rightarrow rx \end{aligned}$$

se cumple que $|\text{Jac}(\phi(r, x))| = r^{n-1}$.

Demostración. Usando la interpretación geométrica del valor absoluto del determinante de una matriz de orden n como el volumen del n -paralelepípedo generado por las columnas de la matriz, tenemos que

$$|\text{Jac}(\phi(x))| = |\det(\langle D\phi(r, x)e_i, D\phi(r, x)e_j \rangle)^{1/2}|,$$

siendo $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal del plano tangente de $(0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ en el punto (r, x) . Determinemos dicha base:

Tomamos un punto $(r, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ y consideremos los vectores $(0, \dot{x}^i)$, para $i = 1, \dots, n-1$, que son ortonormales entre sí y a $(0, x)$. Completamos la base con el vector $(1, 0)$. Evidentemente, $(1, 0) \perp (0, \dot{x}^i)$. Entonces,

$$\mathcal{B} = \{(0, \dot{x}^1), \dots, (0, \dot{x}^{n-1}), (1, 0)\}$$

es una base ortonormal para $T_{(r, x)}(0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$. Ahora,

$$\begin{aligned} D\phi(r, x)(\dot{r}, \dot{x}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi((r, x), t(\dot{r}, \dot{x})) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi((r + t\dot{r}), (x + t\dot{x})) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (r + t\dot{r})(x + t\dot{x}) \\ &= \dot{r}(x + t\dot{x}) + (r + t\dot{r})\dot{x} \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

$$= \dot{r}x + r\dot{x}.$$

Así que, $D\phi(r, x)(0, \dot{x}^i) = r\dot{x}^i$, luego

$$\begin{aligned} \|D\phi(r, x)(0, \dot{x}^i)\|^2 &= r^2\|\dot{x}^i\|^2 = r^2, \\ \langle D\phi(r, x)(0, \dot{x}^i), D\phi(r, x)(0, \dot{x}^j) \rangle &= r^2\langle \dot{x}^i, \dot{x}^j \rangle = 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $D\phi(r, x)(1, 0) = x$ resulta que

$$\begin{aligned} \|D\phi(r, x)(1, 0)\|^2 &= \|x\|^2 = 1, \\ \langle D\phi(r, x)(0, \dot{x}^i), D\phi(r, x)(1, 0) \rangle &= r\langle \dot{x}^i, x \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $(\langle D\phi(r, x)e_i, D\phi(r, x)e_j \rangle)$ es una matriz diagonal de orden n cuyos elementos de la diagonal son todos r^2 , a excepción del elemento de la posición (n, n) que es 1, luego $|\det(\langle D\phi(r, x)e_i, D\phi(r, x)e_j \rangle)^{1/2}| = r^{n-1}$. \square

La parte radial de una clase de polinomios de Sobolev en la bola unidad

En este capítulo, consideramos un producto escalar de Sobolev creado a partir de una modificación del producto escalar clásico sobre la bola unidad de dimensión d , que involucra un término extra conteniendo a las derivadas en la dirección normal. Primero construimos una base mutuamente ortogonal de polinomios que son dados en términos de los armónicos esféricos y una familia de polinomios ortogonales univariados de Sobolev en la parte radial. A continuación, nos centramos en el estudio de esta familia de polinomios de la parte radial, deduciendo propiedades algebraicas, fórmulas de conexión y propiedades asintóticas. Finalizamos mostrando algunas pruebas numéricas para ilustrar el comportamiento de sus ceros. Es conveniente tener presente los resultados de la Sección 1.1 antes de leer este capítulo.

2.1	Introducción. Contexto histórico	40
2.2	Polinomios ortogonales de Sobolev en la bola	42
2.3	Un producto escalar de Sobolev univariado	45
2.3.1	Norma de los polinomios ortogonales de Sobolev univariados	49
2.3.2	Fórmula de conexión entre los polinomios de Jacobi y los ortogonales univariados de Sobolev	50
2.3.3	Una relación de recurrencia para el coeficiente $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$	52
2.3.4	Comportamiento asintótico de los coeficientes $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$	54
2.3.5	Polinomios límite	56
2.4	Experimentos numéricos	57
2.4.1	Experimentos numéricos para $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$	57
2.4.2	Ceros	58

2.1. Introducción. Contexto histórico

Durante muchos años, los polinomios ortogonales de Sobolev univariados han sido el tema principal de una gran cantidad de trabajos de investigación (véase Sección 1.1.8). Sin embargo, los polinomios ortogonales de Sobolev en varias variables tienen una historia más corta. Con gran frecuencia, el producto escalar considerado es alguna modificación del producto escalar clásico en \mathbb{B}^d (Sección 1.1.6), la bola unidad de \mathbb{R}^d , involucrando un término adicional que contiene los operadores de derivación multivariados habituales, como por ejemplo, los operadores gradiente, divergencia o laplaciano.

La extensión de los polinomios de Sobolev al caso multivariante comenzó en [77], donde el autor estudió un producto escalar de Sobolev motivado por una aplicación en la solución numérica de la ecuación de Poisson no lineal en el disco unidad con cero condiciones de contorno. La simetría central del producto escalar juega un papel esencial en la construcción de una base de polinomios mutuamente ortogonales, que se pueden expresar en términos de armónicos esféricos (Sección 1.1.5) y una parte radial dada por polinomios ortogonales de Sobolev univariados conectados con los pesos de Jacobi (Sección 1.1.3) con parámetros variables dependientes de su grado. En esta dirección, en [78] el autor consideró dos productos escalares diferentes que involucran al operador gradiente en la bola. Usando un razonamiento similar, se construyó explícitamente una familia de bases ortonormales para ambos productos escalares. En [59], un resultado interesante obtenido por los autores es que los polinomios ortogonales con respecto a uno de los productos escalares de Sobolev en [78] satisface una ecuación diferencial parcial con valores no estándar del parámetro.

Una generalización de estos resultados se consideró en [58], donde se estudió una familia de polinomios mutuamente ortogonales en la bola unidad con respecto al producto escalar de Sobolev

$$\langle f, g \rangle^S = \frac{1}{\omega_\mu} \int_{\mathbb{B}^d} f(x)g(x)W_\mu(x)dx + \frac{\lambda}{\omega_\mu} \int_{\mathbb{B}^d} \nabla f(x)\nabla g(x)W_\mu(x)dx, \quad (2.1.1)$$

para $\lambda > 0$, $W_\mu(x) = (1 - \|x\|^2)^\mu$, $\mu > -1$, la función peso clásica en la bola unidad, y ω_μ la constante de normalización dada en (1.1.19). Estos polinomios ortogonales se construyen en términos de armónicos esféricos y una secuencia de polinomios ortogonales de Sobolev en una variable. Estos últimos y, por tanto, los polinomios ortogonales con respecto a (2.1.1), pueden generarse mediante una fórmula recursiva.

Representamos por $\langle x, \nabla \rangle = \|x\|\partial/\partial \mathbf{n}$ al operador de la derivada normal hacia afuera modulado por la norma de $x \in \mathbb{R}^d$. En este capítulo, para $\lambda > 0$, consideramos el siguiente producto escalar de Sobolev

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{[\mu, \lambda]}^S &= \frac{1}{\omega_\mu} \int_{\mathbb{B}^d} f(x)g(x)W_\mu(x)dx \\ &+ \frac{\lambda}{\omega_\mu} \int_{\mathbb{B}^d} [\langle x, \nabla \rangle f(x)][\langle x, \nabla \rangle g(x)]W_\mu(x)dx. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Utilizando coordenadas polares esféricas construiremos una base mutuamente ortogonal de polinomios, que están dados en términos de armónicos esféricos y una familia de polinomios ortogonales de Sobolev en una variable en la parte radial. Una construcción similar se utilizó en [30] para obtener una secuencia de polinomios mutuamente ortogonales con respecto a un producto escalar de Sobolev que involucra la derivada normal hacia afuera en la esfera. Sin embargo, nuestro caso muestra algunas peculiaridades que merecen especial atención.

En el caso $d = 2$ y $\mu = \lambda = 0$, los polinomios de Zernike (Sección 1.1.7) constituyen una opción común para una familia de polinomios ortogonales en el disco unidad. Como ya se ha comentado, los polinomios de Zernike se han utilizado en óptica para modelar el frente de onda de salida con el fin de calibrar diferentes dispositivos ópticos. Su aplicación habitual es el análisis de la visión humana para detectar aberraciones ópticas en los ojos humanos. En este sentido, se utiliza un procedimiento de aproximación discreta por mínimos cuadrados basado en polinomios de Zernike para aproximar el frente de onda óptico a partir de datos de elevación proporcionados por dispositivos estándar. El método está bien establecido, pero todavía existen varias dificultades que superar, por ejemplo, el frente de onda calculado por el dispositivo de medición suele tener errores muy grandes en los bordes de la córnea. Estos errores están relacionados con el problema clínico de obtener buenas medidas en los bordes de la córnea (véase, por ejemplo, [28, 45, 66]).

En nuestra opinión, los polinomios ortogonales con respecto a los productos escalares de Sobolev como (2.1.2) pueden utilizarse para mejorar la reconstrucción del frente de onda. Nuestra motivación para esta afirmación es doble: por un lado, los polinomios ortogonales de Sobolev respecto a (2.1.2) proporcionarían superficies que aproximan simultáneamente el frente de onda y sus derivadas normales moduladas por su distancia al centro de la córnea, reduciendo la importancia de los datos cercanos al centro, y dando más importancia al borde. Por otro lado, los datos proporcionados por las máquinas de medición suelen ser desplazamientos en la dirección normal del frente de onda.

Para considerar el uso de los polinomios de Sobolev en lugar de los polinomios de Zernike, aunque los primeros son modificaciones de estos últimos, hay que tener en cuenta que ambas familias se basan en los polinomios de Jacobi, ya que sus partes radiales se obtienen a partir de una secuencia de

polinomios ortogonales que pueden expresarse en términos de los polinomios de Jacobi.

Nosotros consideramos el estudio teórico de las partes radiales de los polinomios de Sobolev ortogonales respecto a (2.1.2). La comparación numérica entre la aproximación de Zernike y la aproximación de Sobolev constituirá el objetivo principal de un futuro trabajo.

El producto escalar de Sobolev univariado que surge en la parte radial (relacionada con la medida de Jacobi) se construye utilizando un operador diferencial lineal de primer orden que juega un papel esencial y proporciona una construcción más sencilla. Sorprendentemente, por lo que sabemos, este producto escalar de Sobolev univariado no había sido considerado antes, y las propiedades de esta familia de polinomios ortogonales son diferentes de las que aparecen en los polinomios ortogonales de Sobolev previamente estudiados. Por tanto, nuestro principal objetivo es el estudio de las propiedades algebraicas y analíticas de esta familia de polinomios. Así que, tras construir una base mutuamente ortogonal con respecto al producto escalar de Sobolev (2.1.2) en la Sección 2.2, nos centramos en el estudio de la familia de polinomios ortogonales univariados de Sobolev de la parte radial.

2.2. Polinomios ortogonales de Sobolev en la bola

Sea $\lambda \geq 0$ una constante fijada y $\mu > -1$. Para $f, g \in \Pi^d$ (recuerde que Π^d denota el espacio vectorial de polinomios en d variables reales), definimos el siguiente producto escalar de Sobolev

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{[\mu, \lambda]}^S &= \frac{1}{\omega_\mu} \int_{\mathbb{B}^d} f(x)g(x)W_\mu(x)dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{\omega_\mu} \int_{\mathbb{B}^d} [\langle x, \nabla \rangle f(x)][\langle x, \nabla \rangle g(x)]W_\mu(x)dx, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

donde la constante ω_μ está dada en (1.1.19) y $\langle x, \nabla \rangle$ representa el operador de derivada normal hacia afuera modulado por la norma de x y definido por

$$\langle x, \nabla \rangle f(x) = \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \|x\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} f(x). \quad (2.2.2)$$

Note que para $\lambda = 0$ se recupera el producto escalar clásico en la bola unidad (1.1.18).

Para un número real $A \geq 0$ y $P \in \Pi$, introducimos el operador diferencial lineal \mathcal{L}_A de la siguiente forma

$$\mathcal{L}_A[P](t) = AP(t) + 2(1+t)P'(t). \quad (2.2.3)$$

Obviamente, este operador aplica polinomios en polinomios conservando su grado.

Lema 2.2.1. *Sea $Y(x)$ un armónico esférico de grado n y consideremos el operador \mathcal{L} recién definido en (2.2.3). Entonces, para un polinomio $P \in \Pi$ obtenemos*

$$\langle x, \nabla \rangle [P(2\|x\|^2 - 1)Y(x)] = \mathcal{L}_n[P](2\|x\|^2 - 1)Y(x).$$

Demostración. A partir de la derivada de un producto, (2.2.2) y (1.1.17) tenemos que,

$$\begin{aligned} \langle x, \nabla \rangle [P(2\|x\|^2 - 1)Y(x)] &= P(2\|x\|^2 - 1)\langle x, \nabla \rangle Y(x) + Y(x)\langle x, \nabla \rangle P(2\|x\|^2 - 1) \\ &= nP(2\|x\|^2 - 1)Y(x) + Y(x) \sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(2\|x\|^2 - 1) \\ &= nP(2\|x\|^2 - 1)Y(x) + 4\|x\|^2 P'(2\|x\|^2 - 1)Y(x), \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

El Lema 2.2.1 proporciona una representación para $\langle x, \nabla \rangle$ cuando se consideran las coordenadas polares esféricas. Esto nos agilizará los cálculos llevados a cabo para la demostración del siguiente teorema, donde se obtiene una base explícita de polinomios mutuamente ortogonales con respecto al producto escalar de Sobolev (2.2.1). Note que hemos usado una construcción similar a la dada en la Proposición 1.1.19.

Teorema 2.2.2. *Para $n \geq 0$ y $0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$, sea $\{S_j^{(\mu, \beta_j^n)}(t)\}_{j \geq 0}$ una secuencia de polinomios ortogonales univariados con respecto al producto escalar de Sobolev*

$$(f, g)_{\mu, \beta_j^n}^S = \int_{-1}^1 [f(t)g(t) + \lambda \mathcal{L}_{n-2j}[f](t) \mathcal{L}_{n-2j}[g](t)] \omega_{\mu, \beta_j^n}(t) dt,$$

siendo $\lambda \geq 0$, $\mu > -1$, $\beta_j^n = n - 2j + \frac{d-2}{2}$ y $\omega_{\mu, \beta_j^n}(t) = (1-t)^\mu (1+t)^{\beta_j^n}$ la función peso de Jacobi. Sea $\{Y_\nu^{n-2j}(x) : 1 \leq \nu \leq a_{n-2j}^d\}$ una base ortonormal de \mathcal{H}_{n-2j}^d (el espacio vectorial de polinomios armónicos de grado $n - 2j$ en d variables de dimensión a_{n-2j}^d (1.1.13)). Definimos los polinomios

$$Q_{j, \nu}^n(x) = S_j^{(\mu, \beta_j^n)}(2\|x\|^2 - 1) Y_\nu^{n-2j}(x). \quad (2.2.4)$$

Entonces el conjunto $\{Q_{j, \nu}^n(x) : 0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor, 1 \leq \nu \leq a_{n-2j}^d\}$ es una base de polinomios mutuamente ortogonales con respecto al producto escalar de Sobolev (2.2.1). Además,

$$\tilde{H}_{j, \nu}^n = \langle Q_{j, \nu}^n, Q_{j, \nu}^n \rangle_{[\mu, \lambda]}^S = \frac{s_\mu^d}{2^{n-2j}} \left(S_j^{(\mu, \beta_j^n)}, S_j^{(\mu, \beta_j^n)} \right)_{\mu, \beta_j^n}^S,$$

con

$$s_\mu^d = \frac{1}{2^{\mu + \frac{d}{2} + 1}} \frac{\sigma_d}{\omega_\mu},$$

donde $\sigma_d = \text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})$ está dada en (1.1.16).

Observe que la condición $0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ corresponde al máximo número entero y no superior a x , garantiza que $\beta_j^n > -1$ (condición necesaria para que la función peso de Jacobi ω_{μ, β_j^n} esté bien definida).

Demostración. Sea $\chi_{\mathbb{B}^d}(x)$ la función característica de la bola unidad \mathbb{B}^d de \mathbb{R}^d . En esta demostración usaremos la siguiente identidad

$$\int_{\mathbb{B}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \chi_{\mathbb{B}^d}(x) dx = \int_0^1 r^{d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(r\xi) d\sigma(\xi) dr, \quad (2.2.5)$$

que se deduce al tomar coordenadas polares esféricas, es decir, $x = r\xi$ con $\|x\| = r$ y $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, y aplicar la Proposición 1.6.2.

A partir de la definición del producto escalar de Soboler (2.2.1) y (2.2.4) tenemos

$$\begin{aligned} & \langle Q_{j,\nu}^n, Q_{k,\eta}^m \rangle_{[\mu,\lambda]}^S \\ &= \frac{1}{\omega_\mu} \int_{\mathbb{B}^d} Q_{j,\nu}^n(x) Q_{k,\eta}^m(x) W_\mu(x) dx \\ &+ \frac{\lambda}{\omega_\mu} \int_{\mathbb{B}^d} [\langle x, \nabla \rangle Q_{j,\nu}^n(x)] [\langle x, \nabla \rangle Q_{k,\eta}^m(x)] W_\mu(x) dx \\ &= \frac{1}{\omega_\mu} \int_{\mathbb{B}^d} S_j^{(\mu, \beta_j^n)} (2\|x\|^2 - 1) S_k^{(\mu, \beta_k^m)} (2\|x\|^2 - 1) \\ &\quad \times Y_\nu^{n-2j}(x) Y_\eta^{m-2k}(x) W_\mu(x) dx \\ &+ \frac{\lambda}{\omega_\mu} \int_{\mathbb{B}^d} \mathcal{L}_{n-2j} [S_j^{(\mu, \beta_j^n)}] (2\|x\|^2 - 1) \mathcal{L}_{m-2k} [S_k^{(\mu, \beta_k^m)}] (2\|x\|^2 - 1) \\ &\quad \times Y_\nu^{n-2j}(x) Y_\eta^{m-2k}(x) W_\mu(x) dx, \end{aligned}$$

donde en el último igual hemos usado el Lema 2.2.1. A continuación, aplicando (2.2.5), (1.1.14) y la ortonormalidad de los armónicos esféricos (1.1.15) deducimos que

$$\begin{aligned} \langle Q_{j,\nu}^n, Q_{k,\eta}^m \rangle_{[\mu,\lambda]}^S &= \frac{\sigma_d}{\omega_\mu} \delta_{n-2j, m-2k} \delta_{\nu, \eta} \\ &\quad \times \int_0^1 \left[S_j^{(\mu, \beta_j^n)} (2r^2 - 1) S_k^{(\mu, \beta_k^m)} (2r^2 - 1) \right. \\ &\quad \left. + \lambda \mathcal{L}_{n-2j} [S_j^{(\mu, \beta_j^n)}] (2r^2 - 1) \mathcal{L}_{m-2j} [S_k^{(\mu, \beta_k^m)}] (2r^2 - 1) \right] \\ &\quad \times r^{2(n-2j)+d-1} (1-r^2)^\mu dr. \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variable $t = 2r^2 - 1$ llegamos a

$$\begin{aligned} \langle Q_{j,\nu}^n, Q_{k,\eta}^m \rangle_{[\mu,\lambda]}^S &= \frac{S_\mu^d}{2^{n-2j}} \delta_{n-2j,m-2k} \delta_{\nu,\eta} \\ &\times \int_{-1}^1 \left[S_j^{(\mu,\beta_j^n)}(t) S_k^{(\mu,\beta_j^n)}(t) + \lambda \mathcal{L}_{n-2j}[S_j^{(\mu,\beta_j^n)}](t) \mathcal{L}_{n-2j}[S_k^{(\mu,\beta_j^n)}](t) \right] \omega_{\mu,\beta_j^n}(t) dt, \end{aligned}$$

y el resultado sigue a partir de la ortogonalidad de los polinomios univariados. \square

2.3. Un producto escalar de Sobolev univariado

Como hemos demostrado en la sección anterior, las partes radiales de los polinomios ortogonales multivariantes de Sobolev definidos en (2.2.4) constituyen una secuencia de polinomios ortogonales univariados asociados a un producto escalar de Sobolev-Jacobi. Estudiaremos este producto escalar univariado de Sobolev en un marco general.

Definición 2.3.1. *Sea $\lambda \geq 0$ y $d \geq 2$ constantes fijas. Para $\alpha > -1$ y $\beta \geq \frac{d-2}{2} \geq 0$, definimos*

$$(f, g)_{\alpha,\beta}^S = \int_{-1}^1 (f(t)g(t) + \lambda \mathcal{L}_A[f](t) \mathcal{L}_A[g](t)) \omega_{\alpha,\beta}(t) dt, \quad (2.3.1)$$

donde $A = A(\beta, d) = \beta - \frac{d-2}{2} \geq 0$ y $\omega_{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ es la función peso de Jacobi. Observe que $0 \leq A \leq \beta$.

En el caso $\beta = \frac{d-2}{2}$ obtenemos $A = 0$, y el producto escalar (2.3.1) se reduce a un producto escalar continuo de Sobolev de la forma

$$(f, g)_{\alpha,\beta}^S = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\omega_{\alpha,\beta}(t)dt + 4\lambda \int_{-1}^1 f'(t)g'(t)\omega_{\alpha,\beta+2}(t)dt.$$

A partir de ahora, denotaremos por $S_j^{(\alpha,\beta)}(t)$ al polinomio univariado de grado j ortogonal con respecto al producto escalar de Sobolev (2.3.1) y con el mismo coeficiente líder que $P_j^{(\alpha,\beta)}(t)$ (véase (1.1.5)). Esto incluye $S_0^{(\alpha,\beta)}(t) = P_0^{(\alpha,\beta)}(t) = 1$. Obviamente, si $\lambda = 0$ entonces $S_j^{(\alpha,\beta)}(t) = P_j^{(\alpha,\beta)}(t)$, para $j \geq 0$.

Nuestro primer resultado proporciona algunas propiedades de cuasi-ortogonalidad de Sobolev para los polinomios clásicos de Jacobi.

Proposición 2.3.2. *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(I) *Para cada polinomio $p(t)$ de grado $m \leq j - 2$, obtenemos*

$$(P_j^{(\alpha,\beta)}, p)_{\alpha+1,\beta}^S = 0.$$

(II) *Tenemos*

$$\begin{aligned} & (P_j^{(\alpha,\beta)}, t^{j-1})_{\alpha+1,\beta}^S \\ &= -\frac{h_j^{(\alpha,\beta)}}{k_j^{(\alpha,\beta)}} [1 + \lambda(A + 2(j-1))(A - 2(j + \alpha + \beta + 1))]. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

(III) *Para $j \geq 0$,*

$$\begin{aligned} (P_j^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S &= [1 + \lambda(A + 2j)^2] (a_j^{(\alpha,\beta)})^2 h_j^{(\alpha+1,\beta)} \\ &\quad + [1 + \lambda(A - 2(j + \alpha + \beta + 1))^2] (b_j^{(\alpha,\beta)})^2 h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

donde escribimos $h_{-1}^{(\alpha+1,\beta)} = 0$.

Los términos $h_j^{(\alpha,\beta)}$, $a_j^{(\alpha,\beta)}$ y $b_j^{(\alpha,\beta)}$ son dados en (1.1.6) y (1.1.9), respectivamente.

Demostración. Sea $p(t) = t^m + \dots$ un polinomio mónico de grado exacto m con $0 \leq m \leq j-1$. Primero, calculamos $(P_j^{(\alpha,\beta)}, p)_{\alpha+1,\beta}^S$:

$$(P_j^{(\alpha,\beta)}, p)_{\alpha+1,\beta}^S = \int_{-1}^1 (P_j^{(\alpha,\beta)}(t)p(t) + \lambda \mathcal{L}_A[P_j^{(\alpha,\beta)}](t) \mathcal{L}_A[p](t)) \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt.$$

Consideramos por separado las dos integrales

$$\begin{aligned} I_1^{(m)} &= \int_{-1}^1 P_j^{(\alpha,\beta)}(t)p(t) \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt = \int_{-1}^1 P_j^{(\alpha,\beta)}(t)p(t)(1-t) \omega_{\alpha,\beta}(t) dt, \\ I_2^{(m)} &= \int_{-1}^1 \mathcal{L}_A[P_j^{(\alpha,\beta)}](t) \mathcal{L}_A[p](t) \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt. \end{aligned}$$

Por la ortogonalidad de $P_j^{(\alpha,\beta)}(t)$, $I_1^{(m)}$ desaparece para $m < j-1$, mientras que para $m = j-1$, por (1.1.6) y la linealidad del producto escalar, deducimos que

$$I_1^{(j-1)} = - \int_{-1}^1 P_j^{(\alpha,\beta)}(t) t^j \omega_{\alpha,\beta}(t) dt = -\frac{h_j^{(\alpha,\beta)}}{k_j^{(\alpha,\beta)}}.$$

Ahora, usando (1.1.11) y la definición de \mathcal{L}_A (2.2.3), tenemos

$$\begin{aligned} I_2^{(m)} &= A \int_{-1}^1 P_j^{(\alpha,\beta)}(t)(1-t) \mathcal{L}_A[p](t) \omega_{\alpha,\beta}(t) dt \\ &\quad + (j + \alpha + \beta + 1) \int_{-1}^1 P_{j-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t) \mathcal{L}_A[p](t) \omega_{\alpha+1,\beta+1}(t) dt, \end{aligned}$$

por lo tanto $I_2^{(m)} = 0$ para $m < j - 1$ ya que $\mathcal{L}_A[p](t) = (A + 2m)t^m + \dots$ es un polinomio de grado exacto m . Para $m = j - 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} I_2^{(j-1)} &= (A + 2(j-1)) \left[A \int_{-1}^1 P_j^{(\alpha,\beta)}(t) t^{j-1} (1-t) \omega_{\alpha,\beta}(t) dt \right. \\ &\quad \left. + (j + \alpha + \beta + 1) \int_{-1}^1 P_{j-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t) t^{j-1} \omega_{\alpha+1,\beta+1}(t) dt \right] \\ &= - (A + 2(j-1)) \left[A \frac{h_j^{(\alpha,\beta)}}{k_j^{(\alpha,\beta)}} - (j + \alpha + \beta + 1) \frac{h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}}{k_{j-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}} \right], \end{aligned}$$

donde de nuevo hemos usado la ortogonalidad de los polinomios de Jacobi, la linealidad del producto escalar y (1.1.6). Ahora, sacamos factor común $\frac{h_j^{(\alpha,\beta)}}{k_j^{(\alpha,\beta)}}$ y a partir de (1.1.5) y (1.1.6) uno puede comprobar fácilmente que

$$\frac{k_j^{(\alpha,\beta)}}{k_{j-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}} \frac{h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}}{h_j^{(\alpha,\beta)}} = 2,$$

obteniendo así

$$I_2^{(j-1)} = - \frac{h_j^{(\alpha,\beta)}}{k_j^{(\alpha,\beta)}} (A + 2(j-1))(A - 2(j + \alpha + \beta + 1)).$$

La demostración de la segunda afirmación finaliza multiplicando $I_2^{(j-1)}$ por λ y sumándole $I_1^{(j-1)}$. Note que la primera también ha sido probada ya que $I_1^{(m)} = I_2^{(m)} = 0$, para $m < j - 1$.

Finalmente, para probar la última afirmación calculamos

$$(P_j^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S = \int_{-1}^1 [(P_j^{(\alpha,\beta)}(t))^2 + \lambda (\mathcal{L}_A[P_j^{(\alpha,\beta)}](t))^2] \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt.$$

Como en el caso anterior, consideramos las dos integrales del lado derecho por separado. Para la primera utilizamos (1.1.8) para obtener

$$\int_{-1}^1 (P_j^{(\alpha,\beta)}(t))^2 \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt = (a_j^{(\alpha,\beta)})^2 h_j^{(\alpha+1,\beta)} + (b_j^{(\alpha,\beta)})^2 h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}. \quad (2.3.4)$$

Para la segunda, usando (2.2.3) y (1.1.12) tenemos

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (\mathcal{L}_A[P_j^{(\alpha,\beta)}](t))^2 \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \left[AP_j^{(\alpha,\beta)}(t) + 2(1+t) \frac{d}{dt} P_j^{(\alpha,\beta)}(t) \right]^2 \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A^2 \int_{-1}^1 (P_j^{(\alpha,\beta)}(t))^2 \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt \\
&\quad + 4(a_j^{(\alpha,\beta)})^2 \int_{-1}^1 \left[(j+\beta)P_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(t) + jP_j^{(\alpha+1,\beta)}(t) \right]^2 \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt \\
&\quad + 4Aa_j^{(\alpha,\beta)} \int_{-1}^1 \left[(j+\beta)P_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(t) + jP_j^{(\alpha+1,\beta)}(t) \right] P_j^{(\alpha,\beta)}(t) \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt.
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando (2.3.4), y de nuevo la ortogonalidad de los polinomios de Jacobi, (1.1.5), (1.1.6) y (1.1.10) llegamos a

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 (\mathcal{L}_A[P_j^{(\alpha,\beta)}](t))^2 \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt \\
&= (A+2j)^2 (a_j^{(\alpha,\beta)})^2 h_j^{(\alpha+1,\beta)} \\
&\quad + [A^2 (b_j^{(\alpha,\beta)})^2 + 4(a_j^{(\alpha,\beta)})^2 (j+\beta)^2] h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)} \\
&\quad - 4Aa_j^{(\alpha,\beta)} (j+\beta) \frac{k_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}}{k_j^{(\alpha,\beta)}} h_j^{(\alpha,\beta)}.
\end{aligned}$$

A partir de (1.1.10), (1.1.9) y unas sencillas simplificaciones obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 (\mathcal{L}_A[P_j^{(\alpha,\beta)}](t))^2 \omega_{\alpha+1,\beta}(t) dt \\
&= (A+2j)^2 (a_j^{(\alpha,\beta)})^2 h_j^{(\alpha+1,\beta)} \\
&\quad + \left[A^2 + 4(j+\beta)^2 \left(\frac{a_j^{(\alpha,\beta)}}{b_j^{(\alpha,\beta)}} \right)^2 - 4A(j+\beta) \frac{a_j^{(\alpha,\beta)}}{b_j^{(\alpha,\beta)}} \right] (b_j^{(\alpha,\beta)})^2 h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)} \\
&= ((A+2j)a_j^{(\alpha,\beta)})^2 h_j^{(\alpha+1,\beta)} + ((A-2(j+\alpha+\beta+1))b_j^{(\alpha,\beta)})^2 h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}.
\end{aligned}$$

Basta multiplicar la expresión recién obtenida por λ y sumarle (2.3.4) para llegar al resultado. \square

Nota 2.3.3. *Alternativamente, (2.3.3) se puede expresar como*

$$\begin{aligned}
(P_j^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S &= (a_j^{(\alpha,\beta)})^2 h_j^{(\alpha+1,\beta)} \\
&\quad \times [1 + \lambda(A+2j)^2 + (1 + \lambda(A-2(j+\alpha+\beta+1)))^2] c_j^{(\alpha,\beta)}, \quad (2.3.5)
\end{aligned}$$

donde

$$c_j^{(\alpha,\beta)} = \left(\frac{b_j^{(\alpha,\beta)}}{a_j^{(\alpha,\beta)}} \right)^2 \frac{h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}}{h_j^{(\alpha+1,\beta)}} = \frac{j(j+\beta)(2j+\alpha+\beta+2)}{(j+\alpha+1)(j+\alpha+\beta+1)(2j+\alpha+\beta)}. \quad (2.3.6)$$

Nota que en el segundo igual de (2.3.6) hemos aplicado (1.1.6), (1.1.9) y un poco de aritmética.

2.3.1. Norma de los polinomios ortogonales de Sobolev univariados

Para $j \geq 0$, el cuadrado de la norma de Sobolev para $S_j^{(\alpha, \beta)}(t)$ se define, como es habitual

$$\tilde{h}_j^{(\alpha, \beta)} = (S_j^{(\alpha, \beta)}, S_j^{(\alpha, \beta)})_{\alpha, \beta}^S.$$

Para $j = 0$, tenemos

$$\tilde{h}_0^{(\alpha, \beta)} = (1 + \lambda A^2) h_0^{(\alpha, \beta)}. \quad (2.3.7)$$

En efecto, pues

$$\begin{aligned} (S_0^{(\alpha, \beta)}, S_0^{(\alpha, \beta)})_{\alpha, \beta}^S &= (1, 1)_{\alpha, \beta}^S = \int_{-1}^1 (1 + \lambda (\mathcal{L}_A[1])^2) \omega_{\alpha, \beta}(t) dt \\ &= (1 + \lambda A^2) \int_{-1}^1 \omega_{\alpha, \beta}(t) dt. \end{aligned}$$

En la siguiente proposición se obtienen algunas cotas para las normas de Sobolev.

Proposición 2.3.4. *Asumimos que $\alpha > 0$, entonces para $j \geq 0$ obtenemos*

$$1 + \lambda(A + 2j)^2 \leq \frac{\tilde{h}_j^{(\alpha, \beta)}}{h_j^{(\alpha, \beta)}} \leq 1 + \lambda(A + 2j)^2 + T_{j, \lambda}^{(\alpha-1, \beta)},$$

con

$$T_{j, \lambda}^{(\alpha-1, \beta)} = [1 + \lambda(A - 2(j + \alpha + \beta))^2] c_j^{(\alpha-1, \beta)},$$

donde $c_j^{(\alpha-1, \beta)}$ se definió en (2.3.6).

Demostración. Ya que $S_j^{(\alpha, \beta)}(t)$ y $P_j^{(\alpha, \beta)}(t)$ tienen el mismo coeficiente líder (1.1.5), se cumple

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A[S_j^{(\alpha, \beta)}](t) &= AS_j^{(\alpha, \beta)}(t) + 2(1+t) \frac{d}{dt} S_j^{(\alpha, \beta)}(t) \\ &= AP_j^{(\alpha, \beta)}(t) + \dots + 2(1+t) \frac{d}{dt} [k_j^{(\alpha, \beta)} t^j + \dots] \\ &= (A + 2j) P_j^{(\alpha, \beta)}(t) + h(t), \end{aligned}$$

con $h(t)$ un polinomio de grado menor que j . Entonces,

$$\tilde{h}_j^{(\alpha, \beta)} = \int_{-1}^1 (S_j^{(\alpha, \beta)}(t))^2 \omega_{\alpha, \beta}(t) dt + \lambda \int_{-1}^1 ((A + 2j) P_j^{(\alpha, \beta)}(t) + h(t))^2 \omega_{\alpha, \beta}(t) dt,$$

y desarrollando el término al cuadrado de la última integral, aplicando la ortogonalidad de $P_j^{(\alpha, \beta)}(t)$ y (1.1.6) llegamos a

$$\tilde{h}_j^{(\alpha, \beta)} = \int_{-1}^1 (S_j^{(\alpha, \beta)}(t))^2 \omega_{\alpha, \beta}(t) dt + \lambda(A + 2j)^2 h_j^{(\alpha, \beta)} + \lambda \int_{-1}^1 (h(t))^2 \omega_{\alpha, \beta}(t) dt.$$

Está claro que $\int_{-1}^1 (h(t))^2 \omega_{\alpha,\beta}(t) dt \geq 0$ por ser el integrando una función no negativa en $[-1, 1]$ y junto con la propiedad de la norma cuadrática mínima para los polinomios de Jacobi (véase Proposición 1.1.8) deducimos la cota inferior

$$\tilde{h}_j^{(\alpha,\beta)} \geq \int_{-1}^1 (P_j^{(\alpha,\beta)}(t))^2 \omega_{\alpha,\beta}(t) dt + \lambda(A+2j)^2 h_j^{(\alpha,\beta)} = (1 + \lambda(A+2j)^2) h_j^{(\alpha,\beta)}.$$

Por otro lado, los polinomios de Sobolev también satisfacen la propiedad de la norma cuadrática mínima, entonces para nuestro caso particular se verifica

$$\frac{1}{(k_j^{(\alpha,\beta)})^2} \tilde{h}_j^{(\alpha,\beta)} \leq (p_j(t), p_j(t))_{\alpha,\beta}^S,$$

para cualquier polinomio mónico $p_j(t)$ de grado j . Por lo tanto, para la cota superior concluimos

$$\tilde{h}_j^{(\alpha,\beta)} \leq \left[\frac{k_j^{(\alpha,\beta)}}{k_j^{(\alpha-1,\beta)}} \right]^2 (P_j^{(\alpha-1,\beta)}, P_j^{(\alpha-1,\beta)})_{\alpha,\beta}^S,$$

y el resultado sigue a partir de (1.1.10) y (2.3.5). \square

2.3.2. Fórmula de conexión entre los polinomios de Jacobi y los ortogonales univariados de Sobolev

El siguiente resultado muestra que cada polinomio de Jacobi se puede expresar como una combinación lineal de dos polinomios ortogonales de Sobolev consecutivos con un desplazamiento en el primer parámetro.

Proposición 2.3.5. *Para $j \geq 1$, se cumple la siguiente relación*

$$P_j^{(\alpha,\beta)}(t) = a_j^{(\alpha,\beta)} S_j^{(\alpha+1,\beta)}(t) + d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda) S_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(t), \quad (2.3.8)$$

donde

$$d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = -\frac{h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}}{\tilde{h}_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}} b_j^{(\alpha,\beta)} [1 + \lambda(A + 2(j-1))(A - 2(j + \alpha + \beta + 1))], \quad (2.3.9)$$

y $a_j^{(\alpha,\beta)}$, $b_j^{(\alpha,\beta)}$ están dados por (1.1.9).

Demostración. Si expandimos el polinomio de Jacobi $P_j^{(\alpha,\beta)}(t)$ en términos de los polinomios ortogonales de Sobolev $\{S_i^{(\alpha+1,\beta)}(t)\}_{i \geq 0}$, obtenemos

$$P_j^{(\alpha,\beta)}(t) = \sum_{i=0}^j d_i^{(j)} S_i^{(\alpha+1,\beta)}(t),$$

con

$$d_i^{(j)} = \frac{(P_j^{(\alpha,\beta)}, S_i^{(\alpha+1,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S}{\tilde{h}_i^{(\alpha+1,\beta)}}.$$

Para $0 \leq i \leq j-2$, usamos la primera afirmación de la Proposición 2.3.2 para deducir

$$(P_j^{(\alpha,\beta)}, S_i^{(\alpha+1,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S = 0,$$

y por tanto, $d_i^{(j)} = 0$, si $0 \leq i \leq j-2$. Luego

$$P_j^{(\alpha,\beta)}(t) = d_j^{(j)} S_j^{(\alpha+1,\beta)}(t) + d_{j-1}^{(j)} S_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(t),$$

y por igualación de los coeficientes principales obtenemos que

$$d_j^{(j)} = \frac{k_j^{(\alpha,\beta)}}{k_j^{(\alpha+1,\beta)}} \stackrel{(1.1.10)}{=} a_j^{(\alpha,\beta)}.$$

Denotamos $d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = d_{j-1}^{(j)}$. Note que podemos escribir la siguiente igualdad $S_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(t) = k_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)} t^{j-1} + p(t)$, siendo $p(t)$ un polinomio de grado menor que $j-1$, así a partir de la Proposición 2.3.2 tenemos que

$$d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = \frac{(P_j^{(\alpha,\beta)}, S_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S}{\tilde{h}_i^{(\alpha+1,\beta)}} = \frac{k_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}}{\tilde{h}_i^{(\alpha+1,\beta)}} (P_j^{(\alpha,\beta)}, t^{j-1})_{\alpha+1,\beta}^S.$$

Finalmente, basta usar (2.3.2) y (1.1.10) para obtener la expresión deseada de $d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$. \square

Además, un uso reiterado de (2.3.8) nos permite escribir algunos polinomios univariados de Sobolev como una combinación lineal de polinomios de Jacobi. Observamos que el siguiente corolario no puede utilizarse para expandir $S_j^{(\alpha,\beta)}$ si $\alpha \leq 0$.

Corolario 2.3.6. *Para $j \geq 0$, tenemos*

$$S_j^{(\alpha+1,\beta)}(t) = \frac{1}{a_j^{(\alpha,\beta)}} \left[P_j^{(\alpha,\beta)}(t) + \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j-i} \prod_{m=i}^{j-1} \frac{d_m^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_m^{(\alpha,\beta)}} P_i^{(\alpha,\beta)}(t) \right].$$

Demostración. Procedemos por inducción. La etapa base es inmediata, para la etapa de inducción, suponemos cierta la igualdad para grado $j-1$. A partir de (2.3.8) tenemos que

$$S_j^{(\alpha+1,\beta)}(t) = \frac{1}{a_j^{(\alpha,\beta)}} \left[P_j^{(\alpha,\beta)}(t) - d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda) S_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}(t) \right],$$

y por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
S_j^{(\alpha+1,\beta)}(t) &= \frac{1}{a_j^{(\alpha,\beta)}} P_j^{(\alpha,\beta)}(t) - \frac{d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_j^{(\alpha,\beta)} a_{j-1}^{(\alpha,\beta)}} P_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(t) \\
&\quad - \frac{d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_j^{(\alpha,\beta)} a_{j-1}^{(\alpha,\beta)}} \sum_{i=0}^{j-2} (-1)^{j-1-i} \prod_{m=i}^{j-2} \frac{d_m^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_m^{(\alpha,\beta)}} P_i^{(\alpha,\beta)}(t) \\
&= \frac{1}{a_j^{(\alpha,\beta)}} \left[P_j^{(\alpha,\beta)}(t) - \frac{d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_{j-1}^{(\alpha,\beta)}} P_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(t) \right] \\
&\quad + \frac{1}{a_j^{(\alpha,\beta)}} \sum_{i=0}^{j-2} (-1)^{j-i} \prod_{m=i}^{j-1} \frac{d_m^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_m^{(\alpha,\beta)}} P_i^{(\alpha,\beta)}(t) \\
&= \frac{1}{a_j^{(\alpha,\beta)}} \left[P_j^{(\alpha,\beta)}(t) + \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j-i} \prod_{m=i}^{j-1} \frac{d_m^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_m^{(\alpha,\beta)}} P_i^{(\alpha,\beta)}(t) \right],
\end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

2.3.3. Una relación de recurrencia para el coeficiente $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$

Aplicando tres veces la relación (2.3.8) deducimos

$$\begin{aligned}
0 &= (S_{j+1}^{(\alpha+1,\beta)}, S_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S = (S_{j+1}^{(\alpha+1,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S \\
&= \frac{1}{a_{j+1}^{(\alpha,\beta)}} (P_{j+1}^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S - \frac{d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_{j+1}^{(\alpha,\beta)} a_j^{(\alpha,\beta)}} (P_j^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S \\
&\quad + \frac{d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda) d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_{j+1}^{(\alpha,\beta)} a_j^{(\alpha,\beta)} a_{j-1}^{(\alpha,\beta)}} (P_j^{(\alpha,\beta)}, P_{j-1}^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S,
\end{aligned}$$

donde usamos $(S_{j-2}^{(\alpha+1,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S = 0$ por la Proposición 2.3.2. Entonces, despejando $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ en la ecuación de arriba obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.7. *Los coeficientes $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$, para $j \geq 0$, satisfacen la siguiente relación de recurrencia*

$$d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = \frac{a_j^{(\alpha,\beta)} (P_{j+1}^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S}{(P_j^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S - \frac{d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_{j-1}^{(\alpha,\beta)}} (P_j^{(\alpha,\beta)}, P_{j-1}^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S}, \quad (2.3.10)$$

y, a partir de (2.3.7) y (2.3.9),

$$d_0^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = -b_1^{(\alpha,\beta)} \left(1 - \frac{2\lambda A(\alpha + \beta + 2)}{1 + \lambda A^2} \right). \quad (2.3.11)$$

Proposición 2.3.8. Para $j \geq 0$, denotamos

$$\tilde{d}_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = \frac{d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_j^{(\alpha,\beta)}}.$$

Entonces, $\tilde{d}_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ es una función racional en λ de la forma

$$\tilde{d}_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = -\frac{p_{j+1}(\lambda)}{q_{j+1}(\lambda)},$$

donde $p_{j+1}(\lambda)$ y $q_{j+1}(\lambda)$ son polinomios de grado no mayor que $j + 1$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre j . A partir de (2.3.11), la expresión explícita de $d_0^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$, tenemos

$$\tilde{d}_0^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = -\frac{p_1(\lambda)}{q_1(\lambda)},$$

que es una función racional en la variable λ , donde

$$p_1(\lambda) = b_1^{(\alpha,\beta)}[(A^2 - 2A(\alpha + \beta + 2))\lambda + 1], \quad q_1(\lambda) = A^2\lambda + 1,$$

son polinomios en λ de grado exacto 1 para $A \neq 0$. Si $A = 0$ entonces $d_0^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = -b_1^{(\alpha,\beta)}$.

Ahora, suponemos que la afirmación es cierta para $j - 1$. Usando la Proposición 2.3.2 deducimos que los productos escalares involucrados en (2.3.10) son polinomios de grado 1 en λ de la forma

$$\begin{aligned} (P_j^{(\alpha,\beta)}, P_{j-1}^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S &= -(f_j\lambda + g_j), \\ (P_j^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S &= \tilde{f}_j\lambda + \tilde{g}_j, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} g_j &= k_{j-1}^{(\alpha,\beta)} h_j^{(\alpha,\beta)} / k_j^{(\alpha,\beta)}, \\ f_j &= g_j [A + 2(j-1)][A - 2(j + \alpha + \beta + 1)], \\ \tilde{g}_j &= [a_j^{(\alpha,\beta)}]^2 h_j^{(\alpha+1,\beta)} + [b_j^{(\alpha,\beta)}]^2 h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}, \\ \tilde{f}_j &= [a_j^{(\alpha,\beta)}]^2 h_j^{(\alpha+1,\beta)} (A + 2j)^2 + [b_j^{(\alpha,\beta)}]^2 h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)} [A - 2(j + \alpha + \beta + 1)]^2. \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción

$$\tilde{d}_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = -\frac{p_j(\lambda)}{q_j(\lambda)},$$

donde $p_j(\lambda)$ y $q_j(\lambda)$ son polinomios de grado no mayor que j . Entonces, usando (2.3.10), obtenemos

$$\tilde{d}_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda) = -\frac{f_{j+1}\lambda + g_{j+1}}{\tilde{f}_j\lambda + \tilde{g}_j - \frac{p_j(\lambda)}{q_j(\lambda)}(f_j\lambda + g_j)}$$

$$= -\frac{(f_{j+1}\lambda + g_{j+1})q_j(\lambda)}{(\tilde{f}_j\lambda + \tilde{g}_j)q_j(\lambda) - p_j(\lambda)(f_j\lambda + g_j)}.$$

Por lo tanto, el numerado y el denominador de la expresión de arriba son polinomios de grado no mayor que $j + 1$ satisfaciendo

$$\begin{aligned} p_{j+1}(\lambda) &= (f_{j+1}\lambda + g_{j+1})q_j(\lambda), \\ q_{j+1}(\lambda) &= (\tilde{f}_j\lambda + \tilde{g}_j)q_j(\lambda) - (f_j\lambda + g_j)^2q_{j-1}(\lambda), \end{aligned}$$

y condiciones iniciales $p_0(\lambda) = q_{-1}(\lambda) = 0$ y $q_0(\lambda) = (h_0^{(\alpha+1,\beta)})^{-1}$ (impuestas para que se cumpla (2.3.11)). \square

2.3.4. Comportamiento asintótico de los coeficientes $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$

Primero, relacionamos el cuadrado de la norma de los polinomios de Sobolev

$$\tilde{h}_j^{(\alpha+1,\beta)} = (S_j^{(\alpha+1,\beta)}, S_j^{(\alpha+1,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S,$$

con el cuadrado de la norma de los polinomios de Jacobi. En particular, probamos que su cociente satisface una relación de recurrencia no lineal.

Lema 2.3.9. *Para $j \geq 1$, tenemos*

$$\frac{\tilde{h}_j^{(\alpha+1,\beta)}}{h_j^{(\alpha+1,\beta)}} = M_j - \frac{N_j}{\frac{\tilde{h}_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}}{h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}}},$$

donde

$$\begin{aligned} M_j &= 1 + \lambda(A + 2j)^2 + (1 + \lambda(A - 2(j + \alpha + \beta + 1)))^2 c_j^{(\alpha,\beta)}, \\ N_j &= (1 + \lambda(A + 2(j - 1))(A - 2(j + \alpha + \beta + 1)))^2 c_j^{(\alpha,\beta)}, \end{aligned}$$

$c_j^{(\alpha,\beta)}$ está dada por (2.3.6), y se cumple la siguiente condición inicial

$$\frac{\tilde{h}_0^{(\alpha+1,\beta)}}{h_0^{(\alpha+1,\beta)}} = 1 + \lambda A^2.$$

Demostración. Si escribimos la inversa de (2.3.10),

$$\frac{1}{d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)} = \frac{(P_j^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S}{a_j^{(\alpha,\beta)}(P_{j+1}^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S} - \frac{(P_j^{(\alpha,\beta)}, P_{j-1}^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)}{a_j^{(\alpha,\beta)} a_{j-1}^{(\alpha,\beta)} (P_{j+1}^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S},$$

y sustituimos $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ y $d_{j-1}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ a partir de (2.3.9), obtenemos

$$\frac{\tilde{h}_j^{(\alpha+1,\beta)}}{h_j^{(\alpha+1,\beta)}} = M_j - \frac{N_j}{\frac{\tilde{h}_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}}{h_{j-1}^{(\alpha+1,\beta)}}},$$

donde

$$M_j = - \frac{b_{j+1}^{(\alpha,\beta)} [1 + \lambda(A + 2j)(A - 2(j + \alpha + \beta + 2))]}{a_j^{(\alpha,\beta)}} \frac{(P_j^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S}{(P_{j+1}^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S},$$

$$N_j = \frac{b_{j+1}^{(\alpha,\beta)} [1 + \lambda(A + 2j)(A - 2(j + \alpha + \beta + 2))]}{a_j^{(\alpha,\beta)}} \\ \times \frac{b_j^{(\alpha,\beta)} [1 + \lambda(A + 2(j - 1))(A - 2(j + \alpha + \beta + 1))]}{a_{j-1}^{(\alpha,\beta)}} \\ \times \frac{(P_j^{(\alpha,\beta)}, P_{j-1}^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S}{(P_{j+1}^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S}.$$

Ahora, ya que por la Proposición 2.3.2

$$(P_{j+1}^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S = k_j^{(\alpha,\beta)} (P_{j+1}^{(\alpha,\beta)}, t^j)_{\alpha+1,\beta}^S,$$

usando (2.3.2) deducimos que

$$\frac{1 + \lambda(A + 2j)(A - 2(j + \alpha + \beta + 2))}{(P_{j+1}^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S} = - \frac{k_{j+1}^{(\alpha,\beta)}}{k_j^{(\alpha,\beta)} h_{j+1}^{(\alpha,\beta)}}.$$

Por lo tanto,

$$M_j = \frac{b_{j+1}^{(\alpha,\beta)} k_{j+1}^{(\alpha,\beta)}}{a_j^{(\alpha,\beta)} k_j^{(\alpha,\beta)} h_{j+1}^{(\alpha,\beta)}} (P_j^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S,$$

$$N_j = - \frac{b_{j+1}^{(\alpha,\beta)} k_{j+1}^{(\alpha,\beta)} b_j^{(\alpha,\beta)} [1 + \lambda(A + 2(j - 1))(A - 2(j + \alpha + \beta + 1))]}{a_j^{(\alpha,\beta)} k_j^{(\alpha,\beta)} h_{j+1}^{(\alpha,\beta)} a_{j-1}^{(\alpha,\beta)}} \\ \times (P_j^{(\alpha,\beta)}, P_{j-1}^{(\alpha,\beta)})_{\alpha+1,\beta}^S.$$

Finalmente, para obtener M_j , sustituimos (2.3.5) en la expresión de arriba y usamos (1.1.10) para simplificar, y para N_j usamos (2.3.2), (1.1.10) y (2.3.6). La condición inicial viene de (2.3.7). □

A partir de (2.3.9), podemos ver que $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ es positivo para $\lambda, A > 0$ y j suficientemente grande. Entonces, a partir de la Proposición 2.3.4 y (2.3.9) tenemos

$$- \frac{b_{j+1}^{(\alpha,\beta)} [1 + \lambda(A + 2j)(A - 2(j + \alpha + \beta + 2))]}{1 + \lambda(A + 2j)^2 + [1 + \lambda(A - 2(j + \alpha + \beta + 1))]^2} c_j^{(\alpha,\beta)}$$

$$\leq d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda) \leq -\frac{b_{j+1}^{(\alpha,\beta)}[1 + \lambda(A+2j)(A-2(j+\alpha+\beta+2))]}{1 + \lambda(A+2j)^2},$$

y, si el límite de $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ existe, deducimos que

$$\frac{1}{4} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda) \leq \frac{1}{2}.$$

Nuestros experimentos numéricos en la Sección 2.4 nos hacen pensar que la cota superior es una igualdad.

2.3.5. Polinomios límite

Recordemos que los momentos de la función peso clásica de Jacobi, $\omega_{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, para $\alpha, \beta > -1$, se definen como

$$u_k = \int_{-1}^1 t^k \omega_{\alpha,\beta}(t) dt.$$

Los momentos correspondientes asociados al producto escalar de Sobolev univariado (2.3.1) se dan en términos de los momentos clásicos de Jacobi de la siguiente manera

$$\begin{aligned} v_{i,j} &= v_{j,i} = (t^i, t^j)_{\alpha,\beta}^S \\ &= \int_{-1}^1 (t^{i+j} + \lambda[At^i + 2i(1+t)t^{i-1}][At^j + 2j(1+t)t^{j-1}])\omega_{\alpha,\beta}(t) dt \\ &= u_{i+j} + \lambda[(A+2i)(A+2j)u_{i+j} + 2(A(i+j) + 4ij)u_{i+j-1} + 4ij u_{i+j-2}] \end{aligned}$$

Por lo tanto, como es habitual, podemos expresar los polinomios de Sobolev univariados ortogonales con respecto a (2.3.1) como

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(t) = k_n^{(\alpha,\beta)} \begin{vmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \cdots & v_{0,n} \\ v_{1,0} & v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,0} & v_{n-1,1} & \cdots & v_{n-1,n} \\ 1 & t & \cdots & t^n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \cdots & v_{0,n-1} \\ v_{1,0} & v_{1,1} & \cdots & v_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,0} & v_{n-1,1} & \cdots & v_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

donde $k_n^{(\alpha,\beta)}$ fue dado en (1.1.5) (véase, por ejemplo, [40, Sección IX.4]). Cada coeficiente en $S_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ es una función racional de λ cuyo numerador y

denominador tienen grado n . Por lo tanto, para $n \geq 0$, podemos definir el *polinomio límite con respecto a λ* como

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S_n^{(\alpha,\beta)}(t).$$

El polinomio $R_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ tiene grado exacto n y es independiente de λ . Estos polinomios satisfacen algunas propiedades de ortogonalidad. Observe que, para cada polinomio $p(t)$ de grado $m \leq n-1$, obtenemos

$$0 = (S_n^{(\alpha,\beta)}, p)_{\alpha,\beta}^S = \int_{-1}^1 (S_n^{(\alpha,\beta)}(t)p(t) + \lambda \mathcal{L}_A[S_n^{(\alpha,\beta)}](t)\mathcal{L}_A[p](t))\omega_{\alpha,\beta}(t)dt.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \mathcal{L}_A[R_n^{(\alpha,\beta)}](t)\mathcal{L}_A[p](t)\omega_{\alpha,\beta}(t)dt \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \mathcal{L}_A[S_n^{(\alpha,\beta)}](t)\mathcal{L}_A[p](t)\omega_{\alpha,\beta}(t)dt \\ &= - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 S_n^{(\alpha,\beta)}(t)p(t)\omega_{\alpha,\beta}(t)dt = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, deducimos que $\mathcal{L}_A[R_n^{(\alpha,\beta)}](t) \stackrel{(2.2.3)}{=} (A+2n)R_n^{(\alpha,\beta)}(t) + \dots$, es ortogonal a cada polinomio de grado no mayor que $n-1$ con respecto al producto escalar clásico de Jacobi, concluyendo pues por la unicidad de los polinomios de Jacobi (Corolario 1.1.6) que

$$\mathcal{L}_A[R_n^{(\alpha,\beta)}](t) = (A+2n)P_n^{(\alpha,\beta)}(t). \quad (2.3.12)$$

2.4. Experimentos numéricos

En esta sección, mostramos algunos experimentos numéricos sobre el coeficiente $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ para parámetros fijos y j creciente, y exploramos los ceros de los polinomios de Sobolev univariados.

2.4.1. Experimentos numéricos para $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$

Estudiamos el comportamiento de $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ para parámetros fijados $\lambda > 0$, $d \geq 2$, $\alpha > -1$, $\beta \geq \frac{d-2}{2}$, $A = \beta - \frac{d-2}{2}$, y crecientes en j . Calculamos $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ usando la relación de recurrencia (2.3.10). Nuestros experimentos numéricos muestran que la sucesión $\{d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)\}_{j \geq 0}$ tiende a $1/2$. En la Tabla 2.1 se dan algunos ejemplos numéricos.

d	$d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$	$j =$	0	5	10	25	50	70
2	$d_j^{(0,4)}(0.09091)$		0.55555	0.43570	0.46036	0.48205	0.49067	0.49327
2	$d_j^{(0,4)}(50)$		1.42589	0.74942	0.63873	0.55194	0.52090	0.51329
2	$d_j^{(0,15)}(0.09091)$		1.03201	0.67688	0.61253	0.56179	0.53652	0.52759
2	$d_j^{(1,5,4)}(0.09091)$		0.71895	0.49351	0.49290	0.49614	0.49793	0.49850
8	$d_j^{(0,4)}(0.09091)$		0.00000	0.34306	0.40097	0.45292	0.47486	0.48169
8	$d_j^{(0,4)}(50)$		7.68907	0.42515	0.44176	0.47285	0.48571	0.48964
8	$d_j^{(0,15)}(0.09091)$		1.45089	0.61400	0.55864	0.53360	0.52089	0.51608
8	$d_j^{(1,5,4)}(0.09091)$		0.14705	0.39462	0.43193	0.46683	0.48210	0.48691
15	$d_j^{(0,7)}(0.09091)$		-0.16000	0.29193	0.36109	0.43032	0.46192	0.47205
15	$d_j^{(0,7)}(50)$		25.8666	0.32081	0.38080	0.44088	0.46792	0.47652
15	$d_j^{(0,15)}(0.09091)$		2.19686	0.46774	0.47043	0.48723	0.49470	0.49666
15	$d_j^{(1,5,7)}(0.09091)$		-0.04637	0.33974	0.39095	0.44410	0.46913	0.47726

Tabla 2.1: Valores numéricos de $d_j^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ para parámetros fijados y creciente en j .

2.4.2. Ceros

A continuación, ilustramos el comportamiento no estándar de los ceros de los polinomios de Sobolev univariados.

Si $\lambda = 0$, el polinomio $S_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ se reduce a un polinomio de Jacobi y, como es bien sabido, sus ceros son reales, simples y están situados dentro del intervalo $(-1, 1)$ (véase Teorema 1.1.11). Esta propiedad ya no se cumple para $\lambda > 0$ y valores generales de los parámetros. Para ilustrar este comportamiento mostramos algunos ejemplos.

Comencemos obteniendo la expresión explícita de $S_1^{(\alpha,\beta)}(t)$. Sabemos que $S_1^{(\alpha,\beta)}(t) = P_1^{(\alpha,\beta)}(t) + \eta_\lambda$ donde η_λ es una constante dependiente de λ y además, $(S_1^{(\alpha,\beta)}, 1)_{\alpha,\beta}^S = 0$. Tenga en cuenta que, a partir de (2.2.3), la ortogonalidad de los polinomios de Jacobi, (1.1.5) y (1.1.6) deducimos que

$$\begin{aligned} (P_1^{(\alpha,\beta)}, 1)_{\alpha,\beta}^S &= \lambda 2Ak_1^{(\alpha,\beta)} \int_{-1}^1 (1+t)\omega_{\alpha,\beta}(t)dt \\ &= \lambda 2Ak_1^{(\alpha,\beta)} \int_{-1}^1 \omega_{\alpha,\beta+1}(t)dt = \lambda 2Ak_1^{(\alpha,\beta)} h_0^{(\alpha,\beta+1)}. \end{aligned}$$

Entonces por la linealidad del producto escalar y (2.3.7)

$$\begin{aligned} (S_1^{(\alpha,\beta)}, 1)_{\alpha,\beta}^S &= (P_1^{(\alpha,\beta)}, 1)_{\alpha,\beta}^S + \eta_\lambda (1, 1)_{\alpha,\beta}^S \\ &= \lambda 2Ak_1^{(\alpha,\beta)} h_0^{(\alpha,\beta+1)} + \eta_\lambda (1 + \lambda A^2) h_0^{(\alpha,\beta)} = 0, \end{aligned}$$

si y solo si

$$\eta_\lambda = -\frac{\lambda 2Ak_1^{(\alpha,\beta)} h_0^{(\alpha,\beta+1)}}{(1 + \lambda A^2) h_0^{(\alpha,\beta)}}.$$

Por tanto, a partir de (1.1.5), (1.1.6) y (1.1.7), tenemos

$$\begin{aligned} S_1^{(\alpha,\beta)}(t) &= P_1^{(\alpha,\beta)}(t) - \frac{2(\beta+1)\lambda A}{1+\lambda A^2} \\ &= \frac{\alpha+\beta+2}{2}t + \frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{2(\beta+1)\lambda A}{1+\lambda A^2}, \end{aligned}$$

y su raíz es

$$t_1 = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2} + \frac{4(\beta+1)\lambda A}{(\alpha+\beta+2)(1+\lambda A^2)},$$

donde es fácil comprobar que, como $\alpha, \beta > -1$, entonces siempre $t_1 > -1$, y el caso $t_1 < 1$ se da si y solo si

$$\lambda A(A(\alpha+1) - 2(\beta+1)) + \alpha + 1 > 0.$$

Ahora, fijamos algunos valores de los parámetros, tomamos $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $A = 5$ y $j = 2$. En este caso, el polinomio de Jacobi de segundo grado (1.1.7) es

$$P_2^{(1,5)}(t) = 11.25t^2 - 9t + 0.75,$$

y sus raíces son $t_1 = 0.09449$ y $t_2 = 0.70550$.

En la Tabla 2.2, mostramos los ceros y las expresiones explícitas de $S_2^{(1,5)}(t)$ para diferentes valores del parámetro λ .

λ	$S_2^{(1,5)}(t)$	Raíces	
0	$11.25t^2 - 9t + 0.75$	$t_1 = 0.09449$	$t_2 = 0.70550$
0.01	$11.25t^2 - 12.1580t + 2.28797$	$t_1 = 0.24268$	$t_2 = 0.83803$
0.1	$11.25t^2 - 15.1094t + 4.92329$	$t_1 = 0.55603$	$t_2 = 0.78705$
1	$11.25t^2 - 17.4119t + 7.78977$	$t_1 = 0.77386 - 0.30587i$	$t_2 = 0.77386 + 0.30587i$
10	$11.25t^2 - 17.9340t + 8.46446$	$t_1 = 0.79706 - 0.34216i$	$t_2 = 0.79706 + 0.34216i$

Tabla 2.2: $S_2^{(1,5)}(t)$ para $\lambda = 0, 0.01, 0.1, 1, 10$ y sus ceros.

Observe que, cambiando el valor de λ podemos percibir dos zonas diferentes para la ubicación de los ceros. Al principio (para λ cercano a cero), ambas raíces son reales, diferentes y están situadas dentro del intervalo $(-1, 1)$. En cambio, para λ suficientemente grande, encontramos dos raíces complejas conjugadas. El cambio del comportamiento aparece cuando $\lambda \approx 0.125214$, en este caso $S_2^{(1,5)}(t) \approx 11.25t^2 - 15.4055t + 5.27400$ tiene una raíz doble en $t \approx 0.684689$.

Para calcular la expresión explícita del polinomio límite $R_2^{(1,5)}(t)$ (con $A = 5$) consideramos $R_2^{(1,5)}(t) = at^2 + bt + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, y a partir de (2.2.3) y (2.3.12) tenemos que

$$\mathcal{L}_5[R_2^{(1,5)}](t) = 9at^2 + (4a + 7b)t + 2b + 5c = 9P_2^{(1,5)}(t),$$

y por igualación de coeficientes deducimos que $R_2^{(1,5)}(t) = 11.25t^2 - 18t + 8.55$. Este polinomio límite tiene dos raíces complejas conjugadas $t = 0.8 \pm 0.34641i$. En Figura 2.4.1 podemos ver las gráficas de estos polinomios conjuntamente.

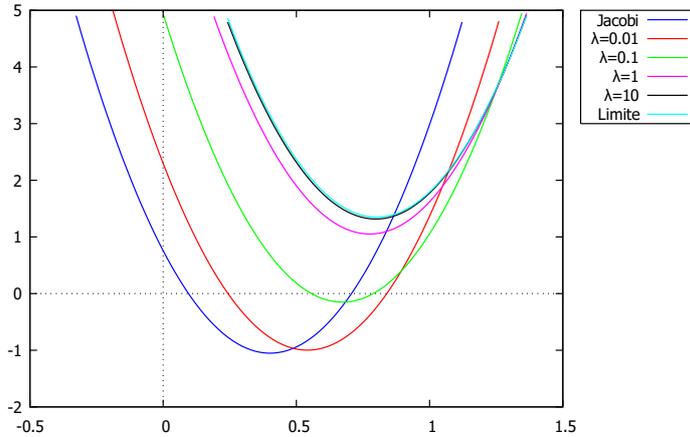


Figura 2.4.1: $P_2^{(1,5)}(t)$, $S_2^{(1,5)}(t)$ para $\lambda = 0.01, 0.1, 1, 10$, y $R_2^{(1,5)}(t)$.

La existencia de ceros complejos para los polinomios ortogonales univariados de Sobolev puede observarse incluso para valores no muy grandes del parámetro λ . En la Figura 2.4.2 se muestra los ceros de $S_n^{(0.5,5)}(t)$ para $d = 2$, $\lambda = 10$ y $n = 13, 14, 15, 16$.

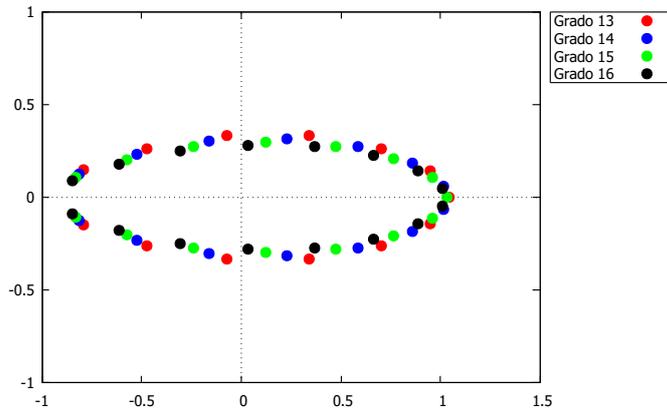


Figura 2.4.2: Ceros de $S_n^{(0.5,5)}(t)$ para $n = 13, 14, 15, 16$ y $\lambda = 10$.

En 1993, Shub y Smale plantearon el problema de encontrar una secuencia de polinomios univariados de grado N con número de condición acotado superiormente por N . En este capítulo damos una respuesta a este problema cuando $N = 4M^2$, siendo M un número entero positivo.

3.1	Exposición del problema principal	62
3.2	Solución del problema principal	63
3.3	Resultado principal	64
3.3.1	Descripción geométrica del conjunto de puntos $\mathcal{P}_N \in \mathbb{S}^2$	65
3.3.2	Idea general para la demostración del Teorema 3.3.1 .	67
3.3.3	Más resultados interesantes	68
3.4	Algunas sumas discretas	69
3.5	Comparación: integrales en paralelos y bandas	72
3.6	Comparación entre $-\kappa N$ y $\sum_j r_j \tilde{I}_j$	77
3.7	El numerador	79
3.8	El denominador	84
3.9	Demostración del resultado principal	87
3.9.1	Expresión explícita de P_N	88

3.1. Exposición del problema principal

Recordemos que el número de condición de un polinomio en una raíz es una medida de la variación de primer orden de la raíz bajo pequeñas perturbaciones de los coeficientes del polinomio. Existen diferentes definiciones, nosotros seguiremos la proporcionada por Shub y Smale. Recomendamos la Sección 1.3 donde se presenta dicha definición y algunas propiedades del condicionamiento de polinomios.

En [63, 64], Shub y Smale demostraron que con probabilidad de al menos $1/2$, (una cierta elección de) polinomios aleatorios tienen número de condición a lo sumo N . Esto llevó a plantear el siguiente problema:

Problema 3.1.1 (Principal problema en [64]). *Encontrar explícitamente una familia de polinomios de grado N cuyo número de condición es como máximo N .*

Shub y Smale también relajaron el problema cambiando “a lo sumo N ” por “a lo sumo N^c para cualquier constante c , digamos $c = 100$ ”. Por “encontrar explícitamente” querían decir “dar una descripción útil” o describir un algoritmo Blum-Shub-Smale –que esencialmente significa un algoritmo en el que se dispone de aritmética real exacta, véase [21]– que se ejecute en tiempo polinomial para resolver el problema. En otras palabras, el Problema 3.1.1 se puede resolver dando una fórmula cerrada para un polinomio de grado N cuyo número de condición esté acotado superiormente por N , o bien, describiendo un algoritmo que con entrada N genere el polinomio deseado, siempre y cuando el tiempo de ejecución sea polinomial en N .

Shub y Smale no fueron demasiados explícitos sobre cómo debe describirse el polinomio (¿por sus coeficientes? ¿por sus ceros?), pero el contexto donde surge el problema parece exigir la colección de ceros, a partir de los cuales se pueden producir ciertamente los coeficientes si se desea. Durante su conferencia plenaria en la reunión de FoCM’14 en Montevideo, Shub se refirió a esta cuestión como “encontrar heno en el pajar”, ya que sabemos que existen muchos polinomios de este tipo, ¡pero resulta bastante difícil describir uno!

La motivación de Shub y Smale para proponer el Problema 3.1.1 fue la búsqueda de un buen polinomio de partida para utilizarlo en los métodos de homotopía para la búsqueda de raíces de polinomios, es decir, el caso unidimensional del problema 17 de Smale. El problema 17 de Smale se resolvió finalmente sin encontrar la solución al Problema 3.1.1 ni a su análogo de alta dimensión, véase [19, 26, 47] o la monografía [27], dejando estas cuestiones abiertas (véase la sección Problemas abiertos en [27]).

3.2. Solución del problema principal

El Problema 3.1.1 fue finalmente resuelto en [15] donde se demostró que:

1. Existe una constante $a > 0$ tal que el número de condición de cualquier polinomio de grado N es por lo menos $a\sqrt{N}$.
2. Existe una construcción explícita de un polinomio de cualquier grado, dado por sus ceros, y una constante $b > 0$ tal que el número de condición del polinomio de grado N es a lo sumo $b\sqrt{N}$.

De [36] tenemos el valor concreto $a \geq e^{C_{\log}}/2$ donde la constante C_{\log} está definida por (1.2.3) y acotada en (1.2.4), pero el valor de b no se conoce. La solución propuesta en [15] consiste en un algoritmo para generar un polinomio de grado N cuyo número de condición es a lo sumo N . Dicho algoritmo, con entrada N , funciona del siguiente modo:

- Paso 1: calcula el polinomio de grado N a partir de la secuencia del punto (2) anterior. Esto es sólo una expresión cerrada dada por sus ceros y, por lo tanto, uno puede calcular directamente su número de condición. Si no es mayor que N , hemos terminado. En caso contrario, pasamos al paso 2.
- Paso 2: realiza un algoritmo de búsqueda de fuerza bruta que enumera colecciones de N racionales gaussianos (es decir, N puntos en \mathbb{C} cuyas partes real e imaginaria son números racionales). Primero se prueban todas las colecciones de N racionales gaussianos que se pueden escribir con enteros de 1 dígito en el numerador y el denominador, luego con enteros de 2 dígitos y así sucesivamente. Para cada una de estas colecciones de puntos, calcula el número de condición del polinomio mónico asociado (cuyos ceros son los puntos) y si no es mayor que N entonces para.

A partir del punto (2) anterior, para N suficientemente grande no se utilizará el segundo paso del algoritmo, y por lo tanto el tiempo de ejecución depende sólo del primer paso, que es una construcción directa y requiere un tiempo de ejecución polinomial. Por otra parte, para cualquier N el segundo paso del algoritmo producirá finalmente una respuesta, ya que los polinomios con número de condición acotado por N contienen un conjunto abierto y, por lo tanto, algunos de estos polinomios sólo tienen racionales gaussianos como ceros. El algoritmo de [15] es por tanto una solución para el Problema 3.1.1. Pero esto no significa que sea totalmente satisfactorio. De hecho, deja una pregunta abierta:

Problema 3.2.1 (Principal problema después de [15]). *Encontrar una fórmula explícita para una familia de polinomios de grado N cuyo número de condición es como máximo N . También, encontrar límites asintóticos para el número de condición mínimo de un polinomio de grado N , $N \rightarrow \infty$.*

3.3. Resultado principal

Nosotros hemos hecho algunos progresos parciales en el Problema 3.2.1 que exponemos en este capítulo. Más exactamente, demostramos para la primera parte de este problema:

Teorema 3.3.1 (Principal resultado). *Sea $N = 4M^2$, con $M \geq 1$ un entero positivo. Definimos*

$$r_j = 4j, \quad h_j = 1 - \frac{4j^2}{N},$$

para $1 \leq j \leq M$ y consideramos el polinomio de grado N dado por

$$P_N(z) = (z^{r_M} - 1) \prod_{j=1}^{M-1} (z^{r_j} - \rho(h_j)^{r_j})(z^{r_j} - \rho(h_j)^{-r_j}),$$

donde $\rho(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Entonces $\mu_{\text{norm}}(P_N) \leq \min(N, (19/2)\sqrt{N+1})$.

Los primeros tres polinomios de tal sucesión se pueden ver en la Tabla 3.1.

M	N	Polinomio
1	4	$z^4 - 1$
2	16	$(z^8 - 1)(z^4 - 49)(z^4 - 1/49)$
3	36	$(z^{12} - 1)(z^8 - 2401/16)(z^8 - 16/2401)(z^4 - 289)(z^4 - 1/289)$

Tabla 3.1: Primeros polinomios de la secuencia construida en el Teorema 3.3.1 correspondiente a los grados 4, 16 y 36, respectivamente.

Definimos el polinomio P_N por sus ceros que corresponden, bajo la proyección estereográfica, a los puntos esféricos de un conjunto \mathcal{P}_N descrito en la siguiente sección. El motivo principal para relacionar los ceros del polinomio de grado N con sus puntos esféricos asociados es el hecho de poder usar la fórmula (1.3.4) para el número de condición de un polinomio. Recordemos dicha fórmula: para $P(z) = \prod_{i=1}^N (z - z_i)$ un polinomio y $p_i \in \mathbb{S}^2$ el punto esférico asociado de z_i , tenemos:

$$\mu_{\text{norm}}(P) = \frac{1}{2} \sqrt{N(N+1)} \max_{1 \leq i \leq N} \frac{\left(\int_{\mathbb{S}^2} \prod_{j=1}^N |p - p_j|^2 d\sigma(p) \right)^{1/2}}{\prod_{j \neq i} |p_i - p_j|}. \quad (3.3.1)$$

Recordemos que $d\sigma$ es la medida uniforme normalizada en \mathbb{S}^2 , es decir, $\sigma(B) = \text{vol}(B)/4\pi$ donde vol es la medida estándar de Lebesgue y $B \subseteq \mathbb{S}^2$ es cualquier conjunto medible.

Grosso modo, nuestra estrategia ha sido buscar un conjunto de puntos esféricos con “buenas propiedades” que permita acotar de forma razonable la expresión (3.3.1), y posteriormente, a través de la proyección estereográfica, obtener el polinomio correspondiente. Para tener garantías de éxito en la acotación de (3.3.1) necesitamos puntos bien distribuidos (para acotar el numerador, por ejemplo, puntos con energía logarítmica pequeña) y bien separados (para acotar el denominador, véase Definición 1.2.8).

3.3.1. Descripción geométrica del conjunto de puntos $\mathcal{P}_N \in \mathbb{S}^2$

Las principales características de nuestro conjunto de puntos $\mathcal{P}_N = \{p_1, \dots, p_N\}$ en \mathbb{S}^2 son:

1. Los N puntos esféricos ($N = 4M^2$, con M un entero positivo) se distribuyen en $2M - 1$ paralelos de altura variable en la esfera, siendo el M -ésimo paralelo el ecuador.
2. El paralelo de altura h_j , denotado por Q_{h_j} ,

$$Q_{h_j} = \{(a, b, c) \in \mathbb{S}^2 : c = h_j\},$$

donde la altura h_j se define como

$$h_j = \begin{cases} 1 - \frac{j^2}{M^2}, & 1 \leq j \leq M, \\ -1 + \frac{(2M - j)^2}{M^2}, & M \leq j \leq 2M - 1, \end{cases}$$

contiene r_j puntos que son (bajo una homotecia y una traslación) el conjunto de las r_j raíces de la unidad. Pueden tener fase o no (esto no será importante para nuestra demostración). Por tanto, tenemos puntos equiespaciados en cada uno de los paralelos. Los r_j puntos vienen dados por la siguiente expresión

$$r_j = \begin{cases} 4j, & 1 \leq j \leq M, \\ 4(2M - j), & M \leq j \leq 2M - 1. \end{cases}$$

Note que $N = r_1 + \dots + r_{2M-1}$.

3. La construcción es ecuatorialmente simétrica: $h_j = -h_{2M-j}$ y $r_j = r_{2M-j}$ y fíjese también que $h_M = 0$.
4. Los valores de h_j se eligen de forma que existe una *banda* de área normalizada r_j/N cuya altura central es h_j . A partir de ahora, nos referiremos a Q_j simplemente como el j -ésimo paralelo. Para todo $1 \leq j \leq 2M - 1$, definimos la j -ésima banda como

$$B_j = \{(a, b, c) \in \mathbb{S}^2, H_j \leq c \leq H_{j-1}\},$$

siendo

$$H_j = \begin{cases} 1 - \frac{j(j+1)}{M^2}, & 0 \leq j \leq M-1, \\ -1 + \frac{(2M-j-1)(2M-j)}{M^2}, & M \leq j \leq 2M-1. \end{cases}$$

Observe que Q_j es el paralelo central de la banda B_j , en el sentido que

$$h_j = \frac{H_{j-1} + H_j}{2} = H_{j-1} - \frac{r_j}{N} = H_j + \frac{r_j}{N}, \quad 1 \leq j \leq 2M-1.$$

Además, tenga en cuenta que B_1 y B_{2M-1} son sólo dos casquetes esféricos que rodean el polo norte y el polo sur respectivamente y que

$$\mathbb{S}^2 = \bigcup_{j=1}^{2M-1} B_j.$$

El área normalizada de cada banda es (utilice, por ejemplo, el Lema 1.6.1):

$$\sigma(B_j) = \frac{H_{j-1} - H_j}{2} = \frac{r_j}{N}, \quad 1 \leq j \leq 2M-1.$$

Por tanto, acabamos de describir geoméricamente el conjunto de puntos \mathcal{P}_N . Una ilustración gráfica de esta construcción puede verse en las figuras 3.3.1 y 3.3.2.

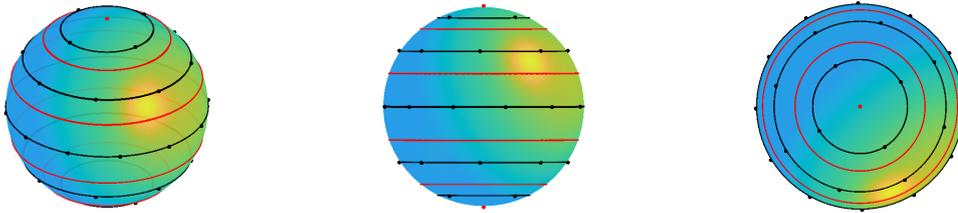


Figura 3.3.1: Nuestra construcción de puntos esféricos para $M = 3$, es decir para $N = 36$ puntos, desde tres puntos de vista diferentes (izquierda: inclinado; centro: ecuatorial; derecha: polo norte). Los paralelos Q_j son los círculos negros y los puntos están equidistribuidos en ellos. Las líneas rojas son los paralelos Q_{H_j} que delimitan las bandas (los polos norte y sur están marcados con puntos rojos y corresponden a H_0 y H_{2M-1} , pero no pertenecen a \mathcal{P}_N).

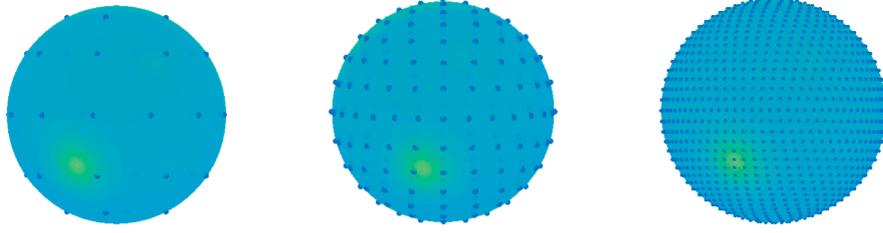


Figura 3.3.2: Nuestro conjunto \mathcal{P}_N para diferentes valores de M . El de la izquierda es \mathcal{P}_{36} (para $M = 3$), el central es \mathcal{P}_{196} (para $M = 7$) y el de la derecha es \mathcal{P}_{1600} (para $M = 20$).

En líneas generales, este conjunto podría considerarse una versión determinista del conocido conjunto diamante (*Diamond ensemble*), un conjunto constructivo de puntos esféricos con energía logarítmica pequeña (véase Sección 1.2.4). El motivo de nuestra elección se debe a que es un conjunto sencillo que está constituido por puntos bien distribuidos y puntos bien separados, hecho fundamental para obtener una cota pequeña en (3.3.1) (como ya hemos comentado). De hecho, los autores de [15] comenzaron probando con el conjunto diamante; sin embargo, no terminaba de encajar y tuvo que ser modificado.

3.3.2. Idea general para la demostración del Teorema 3.3.1

Una vez definido nuestro conjunto de puntos esféricos, para demostrar nuestro resultado principal procedemos como sigue:

- (A) Dado cualquier $q \in \mathbb{S}^2$ y cualquier banda B en la esfera, consideramos el paralelo central Q de B , y comparamos la integral I_B de $\ln |p - q|$ cuando p se encuentra en la banda con el valor esperado \tilde{I}_Q de la misma función cuando p se encuentra en Q . Concluimos que $I_B \approx \sigma(B)\tilde{I}_Q$ donde, recordemos, $\sigma(B) = \frac{\text{vol}(B)}{4\pi}$ es el área normalizada de B .
- (B) Dado cualquier $q \in \mathbb{S}^2$, dividimos la integral $I = -\kappa$ de $\ln |p - q|$ con $p \in \mathbb{S}^2$ en las diferentes bandas asociadas a nuestro conjunto de puntos. A partir de (A), el valor I_j en cada banda B_j es similar a $\sigma(B_j)\tilde{I}_j$ donde \tilde{I}_j es el valor esperado de la función a lo largo del paralelo Q_j , es decir $I_j \approx (r_j/N)\tilde{I}_j$ y $-\kappa N = IN = N \sum_j I_j \approx \sum_j r_j \tilde{I}_j$. La diferencia entre $-\kappa N$ y $\sum_j r_j \tilde{I}_j$ parece ser bastante pequeña excepto si q está muy cerca de los polos.
- (C) A continuación comparamos el valor de $r_j \tilde{I}_j$ con el de $\sum_{k=0}^{r_j-1} \ln |q - p_{j,k}|$ donde los $p_{j,k}$ son los r_j puntos en el correspondiente paralelo. Ambas cantidades son de nuevo muy similares (excepto para el paralelo más

cercano a q , donde la suma discreta puede divergir a $-\infty$). A partir de esto, obtenemos

$$\prod_{i=1}^n |q - p_i| = e^{\sum_{j=1}^{2M-1} \sum_{k=0}^{r_j-1} \ln |q - p_{j,k}|} \lesssim e^{\sum_{j=1}^{2M-1} r_j \tilde{I}_j} \approx e^{-\kappa N}.$$

Esto da esencialmente una cota superior para el numerador en (1.3.4), una vez que los detalles se establecen.

- (D) El mismo tipo de argumento, utilizando también que nuestro conjunto de puntos está bien separado, produce una cota inferior $\prod_{j \neq i} |p_i - p_j| \gtrsim \sqrt{N} e^{-N\kappa}$, válido para todos los i fijos, para el denominador de (1.3.4). Esto casi termina la prueba de nuestro resultado principal.

En la Sección 3.5 probaremos (A); en la Sección 3.6 demostraremos (B); las secciones 3.7 y 3.8 estarán dedicadas a demostrar (C) y (D) respectivamente. Por último, el resultado principal se demuestra en la Sección 3.9.

El procedimiento descrito es similar al de [15], pero en este trabajo todas las apariciones de $\approx, \lesssim, \gtrsim$ se estiman con constantes concretas. Una ventaja que obtenemos es que nuestro conjunto de puntos es más sencillo, ya que en [15] hay que distribuir los puntos en los paralelos de altura h_j pero además una parte de ellos se envía a los paralelos que delimitan las bandas esféricas, mientras que nosotros sólo tenemos que asignar puntos en los paralelos centrales.

La construcción en [15] tiene una propiedad que la nuestra no tiene: la medida discreta asociada puede utilizarse para aproximar la integral continua de $\ln |p - q|$ hasta un orden constante para cualquier q fijo. Esta propiedad (que es la razón de enviar parte de los puntos a los paralelos que delimitan las bandas) es un punto clave en la demostración del resultado principal de [15]. Nuestra construcción sólo consigue esto si q no está demasiado cerca de los polos norte y sur, sin embargo somos capaces de demostrar nuestro teorema principal a partir de esta propiedad más débil.

Modificando ligeramente \mathcal{P}_N , es muy probable que nuestra prueba se pueda adaptar a secuencias similares como, por ejemplo, $N = 4M^2 + 1$ o $N = 4M^2 + 2M$, pero resolver el problema para N general sigue estando fuera de nuestro alcance, ya que los cálculos explícitos se complican demasiado.

3.3.3. Más resultados interesantes

Nuestro método de prueba también produce el límite superior en el siguiente corolario, que es una primera respuesta a la segunda parte del Problema 3.2.1 (el límite inferior está demostrado por Etayo en [36] y utiliza un resultado reciente de Lauritsen ([48])):

Corolario 3.3.2. *El mínimo del condicionamiento $\alpha_N = \inf\{\mu_{norm}(P) : gr(P) = N\}$ de un polinomio de grado N satisface*

$$0,472\dots \leq \frac{e^{C_{log}}}{2} \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_N}{\sqrt{N}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} e^{15/8} = 5,647\dots$$

Un problema relacionado de gran importancia es el de encontrar la constante óptima C_N en la desigualdad multitérmino de Bombieri

$$\prod_{i=1}^N \|z - z_i\| \leq C_N \left\| \prod_{i=1}^N (z - z_i) \right\|,$$

que compara la norma de Bombieri–Weyl de un polinomio (1.3.1) y el producto de las normas de sus factores lineales. Encontrar el valor óptimo de C_N es un reto formidable. Un avance reciente de [36] es que el valor óptimo de esta constante es esencialmente $\sqrt{e^N/(N+1)}$. Más precisamente, define K_N por

$$C_N = K_N \sqrt{\frac{e^N}{N+1}}.$$

Entonces, tenemos $\alpha \leq K_N \leq 1$ para algún $\alpha > 0$ que es independiente de N . No se conocen cotas inferiores para α hasta ahora, pero de [36, Teorema 4.5] y el Corolario 3.3.2 anterior deducimos:

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} K_N \geq \frac{e^{C_{log}}}{\sqrt{3}e^{15/8}} \geq 0,083\dots$$

Finalmente, destacamos que nuestra construcción del conjunto de puntos \mathcal{P}_N no parece resolver el Problema 1.2.4; su energía logarítmica está acotada superiormente por $\kappa N^2 - \frac{1}{2}N \ln N + (9/8 - 1/2 \ln 2)N + o(N)$ (esto puede deducirse directamente de (1.2.1) y del Corolario 3.8.4 o verse como una consecuencia de [36, Teorema 1.5]).

3.4. Algunas sumas discretas

En esta sección demostramos algunas estimaciones técnicas y elementales que se utilizarán en las siguientes secciones.

Lema 3.4.1. *Sea $M \geq 2$ y $1 \leq \ell \leq M - 1$. Entonces,*

$$\ln \frac{M+1}{\ell+1} \leq \sum_{j=\ell+1}^M \frac{1}{j} \leq \ln \frac{M}{\ell}.$$

Demostración. Esto se deduce de la comparación de la suma y la integral asociada: $\int_{\ell+1}^{M+1} \frac{1}{x} dx$ para la cota inferior y $\int_{\ell+1}^{M+1} \frac{1}{x-1} dx$ para la cota superior. \square

Lema 3.4.2. Para $M \geq 2$, sea

$$R(M) = \sum_{j=1}^{M-1} \left(\frac{j}{M}\right)^{4j}.$$

Entonces, $R(M) \leq 1/16$ para todo $M \geq 2$, y $R(M) \leq 1/30$ para $M \geq 5$.

Demostración. Es fácil comprobar, con algunos cálculos racionales, que $R(5) \leq \dots \leq R(3) \leq R(2) = 1/16$ y también que $R(5) \leq 1/30$. Terminamos la prueba mostrando que $R(M) \leq 1/30$ para $M \geq 6$. En efecto, observe que $R(M)$ se puede escribir como

$$R(M) = \frac{1}{M^4} + \sum_{j=2}^{M-4} \left(\frac{j}{M}\right)^{4j} + \sum_{j=M-3}^{M-1} \left(\frac{j}{M}\right)^{4j}.$$

Por la regla del punto medio compuesta aplicada a la función convexa x^{4Mx} en el intervalo de integración $[0, 1]$ se cumple que

$$\int_{\frac{3}{2M}}^{1-\frac{7}{2M}} x^{4Mx} dx = \sum_{j=2}^{M-4} \int_{\frac{2j-1}{2M}}^{\frac{2j+1}{2M}} x^{4Mx} dx \geq \frac{1}{M} \sum_{j=2}^{M-4} \left(\frac{j}{M}\right)^{4j},$$

donde hemos usado que el error cometido (diferencia entre el valor exacto de la integral y el aproximado) es positivo por ser la función a integral convexa. Luego

$$R(M) \leq M \int_{\frac{3}{2M}}^{1-\frac{7}{2M}} x^{4Mx} dx + \sum_{j=M-3}^{M-1} \left(\frac{j}{M}\right)^{4j} + \frac{1}{M^4}.$$

A continuación acotamos cada uno de los términos anteriores. Por un lado, es fácil ver que

$$\sum_{j=M-3}^{M-1} \left(\frac{j}{M}\right)^{4j} + \frac{1}{M^4},$$

es decreciente en M y, por tanto, está acotado superiormente por $7/240$ para $M \geq 6$. Por otro lado, la función x^{4Mx} es decreciente en x en el intervalo $[3/2M, e^{-1}]$ y creciente para $[e^{-1}, 1 - 7/2M]$, así

$$M \int_{\frac{3}{2M}}^{1-\frac{7}{2M}} x^{4Mx} dx \leq \left(\frac{3}{2}\right)^6 \int_{\frac{3}{2M}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{M^5} dx + M \int_0^{1-\frac{7}{2M}} x^{4M/e} dx.$$

Resolviendo las integrales inmediatas anteriores comprobamos que la primera es decreciente en M y la segunda es creciente en M . Esto nos da una cota superior de $1/240$ para este término. Todo junto, concluimos entonces que $R(M) \leq 1/240 + 7/240 = 1/30$, como se ha dicho. \square

Lema 3.4.3. Para $1 \leq \ell \leq M - 2$, tenemos

$$\sum_{j=\ell+2}^M \left(\frac{\ell+1}{j}\right)^{4j} \leq \frac{1}{e^4 - 1}.$$

Demostración. Fíjese que para todo $j \geq \ell + 1$

$$\left(\frac{\ell+1}{j}\right)^{4j} = \left(1 - \frac{j-\ell-1}{j}\right)^{4j} \leq e^{-4(j-\ell-1)},$$

lo que da lugar a la siguiente cota superior para la suma del lema:

$$\sum_{j=\ell+2}^M e^{-4(j-\ell-1)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4k} = \frac{1}{e^4 - 1}.$$

□

Lema 3.4.4. Se cumple la siguiente desigualdad:

$$\sum_{\ell=1}^{M-1} \ell^{1/3} \left(\frac{e}{2}\right)^{4/\ell} \leq \frac{3}{4}M^{4/3} + 12(1 - \ln 2)M^{1/3} + 3.$$

Demostración. Escribimos

$$\left(\frac{e}{2}\right)^{4/\ell} = e^{4(1-\ln 2)/\ell} = 1 + \frac{4(1-\ln 2)}{\ell} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(4(1-\ln 2))^k}{k! \ell^k},$$

e intercambiamos los símbolos de la suma para obtener la siguiente expresión, equivalente a la suma del lema:

$$\sum_{\ell=1}^{M-1} \ell^{1/3} + 4(1-\ln 2) \sum_{\ell=1}^{M-1} \ell^{-2/3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(4(1-\ln 2))^k}{k!} \sum_{\ell=1}^{M-1} \ell^{1/3-k}.$$

Ahora acotamos cada uno de estos términos. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{M-1} \ell^{1/3} &\leq \int_1^M x^{1/3} dx \leq \frac{3}{4}M^{4/3}, \\ 4(1-\ln 2) \sum_{\ell=1}^{M-1} \ell^{-2/3} &\leq 4(1-\ln 2) \left(1 + \int_1^{M-1} x^{-2/3} dx \leq 3M^{1/3}\right) \\ &\leq 12(1-\ln 2)M^{1/3}. \end{aligned}$$

Finalmente, el tercer término es como máximo

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(4(1-\ln 2))^k}{k!} \left(1 + \int_1^{M-1} x^{1/3-k} dx\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(4(1-\ln 2))^k}{k!} \left(1 + \frac{3}{3k-4}\right) \\
&\leq \frac{5}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4(1-\ln 2))^k}{k!} - 1 - 4(1-\ln 2) \right) \\
&\leq \frac{5}{2} \left(\frac{e^4}{2^4} - 1 - 4(1-\ln 2) \right) \leq 3,
\end{aligned}$$

y sumando las cotas llegamos al resultado. \square

Lema 3.4.5. *Se verifica:*

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2, \quad (3.4.1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1), \quad (3.4.2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k+1)} = 2 - 2 \ln 2. \quad (3.4.3)$$

Demostración. Véase las igualdades (0.121.3), (0.121.5) y (0.234.8) de [39], respectivamente. \square

3.5. Comparación de las integrales en paralelos y bandas

Esta sección proporciona una herramienta de comparación que es independiente de la construcción geométrica \mathcal{P}_N . Posteriormente se aplicará a cada una de las bandas B_j descritas en la Sección 3.3.1. Sea B la banda contenida entre los paralelos de altura $h - \varepsilon$ y $h + \varepsilon$, con $Q = Q_h$ el paralelo central. El área normalizada de B es ε . Ahora demostramos que, para cualquier $q = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2$ fijado, la integral $I_B(q)$ de $\ln |p - q|$ con p elegido en B es aproximadamente igual al área normalizada de la banda, multiplicada por el valor esperado de la misma función en el paralelo central. Denotamos este valor esperado en el paralelo central por $\tilde{I}_Q(q)$, es decir,

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_Q(q) &= \mathbb{E}_{p \in Q} [\ln |p - q|] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \left(\sqrt{1-h^2} \cos \theta, \sqrt{1-h^2} \sin \theta, h \right) - q \right| d\theta,
\end{aligned}$$

donde \mathbb{E} denota el valor esperado.

Lema 3.5.1. *Sea $q = (a, b, c) \in \mathbb{S}^2$ y consideremos el paralelo de altura $t \in (-1, 1)$. El valor esperado $\tilde{I}_{Q_t}(q)$ satisface*

$$\tilde{I}_{Q_t}(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\ln(1+t) + \ln(1-c)), & \text{si } t \geq c, \\ \frac{1}{2} (\ln(1-t) + \ln(1+c)), & \text{si } t < c. \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Demostración. Por [13, Proposición 2.2], tenemos que

$$\tilde{I}_{Q_t}(q) = \frac{\ln(1 - ct + |c - t|)}{2}.$$

Entonces

$$\tilde{I}_{Q_t}(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(1 - ct + t - c) = \frac{1}{2} \ln(1 + t)(1 - c), & \text{si } t \geq c, \\ \frac{1}{2} \ln(1 - ct + c - t) = \frac{1}{2} \ln(1 - t)(1 + c), & \text{si } t < c, \end{cases}$$

y el resultado sigue. \square

A partir del Lema 1.6.1 con $f(p) = \ln|q - p|\chi_B(p)$ donde χ_B es la función característica de la banda B tenemos

$$\frac{1}{\varepsilon} I_B(q) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{p \in B} \ln|q - p| d\sigma(p) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{h-\varepsilon}^{h+\varepsilon} \tilde{I}_{Q_t}(q) dt. \quad (3.5.2)$$

Lema 3.5.2 (Comparación cuando q está fuera de la banda). *Con las notaciones de arriba, si $c \geq h + \varepsilon$ tenemos*

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{I}_Q(q) - \frac{1}{\varepsilon} I_B(q) - \frac{\varepsilon^2}{12(1-h)^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{4n(2n+1)(1-h)^{2n}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) \frac{\varepsilon^4}{(1-h)^4}, \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

y si $c \leq h - \varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{I}_Q(q) - \frac{1}{\varepsilon} I_B(q) - \frac{\varepsilon^2}{12(1+h)^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{4n(2n+1)(1+h)^{2n}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) \frac{\varepsilon^4}{(1+h)^4}. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Demostración. Suponemos primero que $c \geq h + \varepsilon$. Sea U la cantidad que queremos calcular, es decir,

$$U = \tilde{I}_Q(q) - \frac{1}{\varepsilon} I_B(q) - \frac{\varepsilon^2}{12(1-h)^2}.$$

Usando (3.5.1) y (3.5.2) y luego cancelando los factores $\ln(1+c)$ obtenemos

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (\ln(1-h) + \ln(1+c)) \\ &\quad - \frac{1}{4\varepsilon} \int_{h-\varepsilon}^{h+\varepsilon} [\ln(1-t) + \ln(1+c)] dt - \frac{\varepsilon^2}{12(1-h)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(1-h) - \frac{1}{4\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \ln(1-h+t) dt - \frac{\varepsilon^2}{12(1-h)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\ln(1-h+t) - \ln(1-h)) dt - \frac{\varepsilon^2}{12(1-h)^2} \\
&= -\frac{1}{4\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \ln\left(1 + \frac{t}{1-h}\right) dt - \frac{\varepsilon^2}{12(1-h)^2} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4\varepsilon n(1-h)^n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t^n dt - \frac{\varepsilon^2}{12(1-h)^2}, \tag{3.5.5}
\end{aligned}$$

donde en el último igual hemos usado el desarrollo en serie de potencias de la función logaritmo, es decir,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \tag{3.5.6}$$

Note que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t^n dt = 0$ si n es impar, luego los términos impares en n de la suma en (3.5.5) son 0 y, por lo tanto, tenemos

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{4n(2n+1)(1-h)^{2n}} - \frac{\varepsilon^2}{12(1-h)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{4n(2n+1)(1-h)^{2n}},$$

como queríamos. La última desigualdad se obtiene de la observación de que $\varepsilon/(1-h) \leq 1$ (esta cota se deduce fácilmente a partir de $1 \geq c \geq h + \varepsilon$) y calculando la suma (use, por ejemplo, (3.4.3)). En efecto,

$$U \leq \frac{\varepsilon^4}{4(1-h)^4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = \frac{\varepsilon^4}{4(1-h)^4} \left(2 - 2 \ln 2 - \frac{1}{3}\right),$$

y llegamos al valor de la cota.

El otro caso, $c \leq h - \varepsilon$, se prueba del mismo modo. Sea

$$V = \tilde{I}_Q(q) - \frac{1}{\varepsilon} I_B(q) - \frac{\varepsilon^2}{12(1+h)^2}.$$

De nuevo, por (3.5.1) y (3.5.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} (\ln(1+h) + \ln(1-c)) \\
&\quad - \frac{1}{4\varepsilon} \int_{h-\varepsilon}^{h+\varepsilon} [\ln(1+t) + \ln(1-c)] dt - \frac{\varepsilon^2}{12(1+h)^2} \\
&= \frac{1}{2} \ln(1+h) - \frac{1}{4\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \ln(1+h-t) dt - \frac{\varepsilon^2}{12(1+h)^2} \\
&= -\frac{1}{4\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\ln(1+h-t) - \ln(1+h)) dt - \frac{\varepsilon^2}{12(1+h)^2} \\
&= -\frac{1}{4\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \ln\left(1 - \frac{t}{1+h}\right) dt - \frac{\varepsilon^2}{12(1+h)^2}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\varepsilon n(1+h)^n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t^n dt - \frac{\varepsilon^2}{12(1+h)^2},$$

donde en el último igual hemos aplicado

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Al igual que en el caso anterior, los términos impares en n de la suma son 0 y, por lo tanto, tenemos

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{4n(2n+1)(1+h)^{2n}} - \frac{\varepsilon^2}{12(1+h)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{4n(2n+1)(1+h)^{2n}},$$

como queríamos. Como $-1 \leq c \leq h - \varepsilon$ entonces $\varepsilon/(1+h) \leq 1$ y por (3.4.3), deducimos la cota correspondiente. \square

Lema 3.5.3 (Comparación cuando q está dentro de la banda). *Siguiendo las notaciones de arriba, asumimos ahora que $h - \varepsilon \leq c \leq h + \varepsilon$. Entonces,*

$$-\frac{\varepsilon/4}{1-h^2} \leq \tilde{I}_Q(q) - \frac{1}{\varepsilon} I_B(q) \leq \begin{cases} \frac{(1-\ln 2)\varepsilon^2}{2(1-h)^2}, & h \leq c \leq h + \varepsilon, \\ \frac{(1-\ln 2)\varepsilon^2}{2(1+h)^2}, & h - \varepsilon \leq c \leq h. \end{cases}$$

Demostración. Definimos $U(c) = \tilde{I}_Q(q) - \frac{1}{\varepsilon} I_B(q)$. Asumimos primero que $c \in [h, h + \varepsilon]$. Entonces, por (3.5.1) y (3.5.2) tenemos

$$U(c) = \frac{1}{2} \ln(1-h) + \frac{1}{2} \ln(1+c) - \frac{1}{4\varepsilon} \int_{h-\varepsilon}^c [\ln(1-t) + \ln(1+c)] dt \\ - \frac{1}{4\varepsilon} \int_c^{h+\varepsilon} [\ln(1+t) + \ln(1-c)] dt.$$

Con un poco de aritmética es fácil ver que

$$U'(c) = \frac{h + \varepsilon - c}{\varepsilon(2 - 2c^2)} \geq 0, \quad c \in [h, h + \varepsilon].$$

El máximo y el mínimo de U en el intervalo $c \in [h, h + \varepsilon]$ están por tanto en los extremos. El caso $c = h + \varepsilon$ está cubierto por (3.5.3), que (usando $\varepsilon/(1-h) \leq 1$) da:

$$U(c) \leq U(h + \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{4n(2n+1)(1-h)^{2n}} \leq \frac{\varepsilon^2}{4(1-h)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)},$$

y de nuevo a partir de (3.4.3) obtenemos el resultado. Para el mínimo, tenemos

$$\begin{aligned} U(c) \geq U(h) &= \frac{1}{4}(\ln(1-h) + \ln(1+h)) \\ &\quad - \frac{1}{4\varepsilon} \left(\int_{h-\varepsilon}^h \ln(1-t) dt + \int_h^{h+\varepsilon} \ln(1+t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{4\varepsilon} \left(\int_{h-\varepsilon}^h \ln\left(1 + \frac{h-t}{1-h}\right) dt + \int_h^{h+\varepsilon} \ln\left(1 + \frac{t-h}{1+h}\right) dt \right) \\ &= -\frac{1}{4\varepsilon} \left(\int_0^\varepsilon \ln\left(1 + \frac{t}{1-h}\right) dt + \int_0^\varepsilon \ln\left(1 + \frac{t}{1+h}\right) dt \right). \end{aligned}$$

Expandiendo los logaritmos en serie de potencias (3.5.6) e integrando los términos obtenemos

$$U(c) \geq U(h) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^n}{n(n+1)} \frac{1}{(1-h)^n} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^n}{n(n+1)} \frac{1}{(1+h)^n},$$

y ya que $\varepsilon/(1-h)$ y $\varepsilon/(1+h)$ son a lo sumo iguales a 1 vemos que ambas series alternas tienen términos decrecientes, concluyendo así:

$$U(c) \geq U(h) \geq -\frac{\varepsilon}{8(1-h)} - \frac{\varepsilon}{8(1+h)} = -\frac{\varepsilon/4}{1-h^2}.$$

Para $c \in [h-\varepsilon, h]$ razonamos del mismo modo. De nuevo, por (3.5.1) y (3.5.2) tenemos

$$\begin{aligned} U(c) &= \frac{1}{2} \ln(1+h) + \frac{1}{2} \ln(1-c) - \frac{1}{4\varepsilon} \int_{h-\varepsilon}^c [\ln(1-t) + \ln(1+c)] dt \\ &\quad - \frac{1}{4\varepsilon} \int_c^{h+\varepsilon} [\ln(1+t) + \ln(1-c)] dt, \end{aligned}$$

de donde se deduce, tras unos sencillos cálculos, que

$$U'(c) = \frac{h-\varepsilon-c}{\varepsilon(2-2c^2)} \leq 0, \quad c \in [h-\varepsilon, h].$$

El máximo y el mínimo de U en el intervalo $c \in [h-\varepsilon, h]$ están en los extremos. El mínimo ($U(h)$) ya ha sido tratado. El máximo, para $c = h-\varepsilon$, está cubierto por (3.5.4), que (usando $\varepsilon/(1+h) \leq 1$) da:

$$U(c) \leq U(h-\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{4n(2n+1)(1+h)^{2n}} \leq \frac{\varepsilon^2}{4(1+h)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)},$$

y por (3.4.3) concluimos el resultado. \square

3.6. Comparación entre $-\kappa N$ y $\sum_j r_j \tilde{I}_j$

Recordemos que:

- $I_j(q)$ es la integral de $\ln|p - q|$ cuando p se encuentra en la j -ésima banda B_j , así que

$$-\kappa = \int_{\mathbb{S}^2} \ln|p - q| d\sigma(p) = \sum_{j=1}^{2M-1} I_j(q), \quad q \in \mathbb{S}^2. \quad (3.6.1)$$

- $\tilde{I}_j(q)$ es el valor esperado de $\ln|p - q|$ cuando p está en el j -ésimo paralelo Q_j . A partir de (3.5.1) tenemos

$$\tilde{I}_j(q) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\ln(1 + h_j) + \ln(1 - c)), & \text{si } h_j \geq c, \\ \frac{1}{2}(\ln(1 - h_j) + \ln(1 + c)), & \text{si } h_j < c. \end{cases} \quad (3.6.2)$$

Los resultado en la Sección 3.5 producen $NI_j(q) \approx r_j \tilde{I}_j(q)$ donde el significado de \approx es preciso y tiene diferentes cotas para q fuera y dentro de la banda B_j .

Lema 3.6.1. *Sea $q = (a, b, c) \in B_\ell \subseteq \mathbb{S}^2$ con $\ell \leq M$ y $M \geq 5$. Definimos*

$$S_N = S_N(q) = \sum_{j=1}^{2M-1} r_j \tilde{I}_j(q). \quad (3.6.3)$$

Entonces,

$$-1 \leq S_N + N\kappa - T(\ell) \leq \frac{2(1 - \ln 2)}{\ell} + \frac{1}{15},$$

donde

$$T(\ell) = \sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{r_j^3}{12N^2(1 + h_j)^2} + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} \frac{r_j^3}{12N^2(1 - h_j)^2}. \quad (3.6.4)$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} (\star) &= S_N + N\kappa - T(\ell) \\ &= r_\ell \left(\tilde{I}_\ell(q) - \frac{N}{r_\ell} I_\ell(q) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\ell-1} r_j \left(\tilde{I}_j(q) - \frac{N}{r_j} I_j(q) - \frac{r_j^2}{12N^2(1 + h_j)^2} \right) \\ &\quad + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} r_j \left(\tilde{I}_j(q) - \frac{N}{r_j} I_j(q) - \frac{r_j^2}{12N^2(1 - h_j)^2} \right), \end{aligned}$$

donde por (3.6.1), (3.6.3) y (3.6.4) hemos reagrupado los sumandos. A partir de las características de nuestro conjunto de puntos \mathcal{P}_N y los lemas 3.5.2 (con $\varepsilon = r_j/N$) y 3.5.3 (con $\varepsilon = r_\ell/N$) tenemos por un lado

$$(\star) \geq -\frac{r_\ell^2}{4N(1-h_\ell^2)} = -\frac{1}{2-\frac{\ell^2}{M^2}} \geq -1,$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} (\star) &\leq \frac{(1-\ln 2)r_\ell^3}{2N^2(1-h_\ell)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{r_j^5}{N^4(1+h_j)^4} + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} \frac{r_j^5}{N^4(1-h_j)^4} \right) \\ &\leq \frac{2(1-\ln 2)}{\ell} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) \left(2 \sum_{j=1}^{M-1} \frac{r_j^5}{N^4(1+h_j)^4} + \sum_{j=\ell+1}^M \frac{r_j^5}{N^4(1-h_j)^4} \right) \\ &\leq \frac{2(1-\ln 2)}{\ell} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) \left(8 \sum_{j=1}^{M-1} \frac{j^5}{(2M^2-j^2)^4} + 4 \sum_{j=\ell+1}^M \frac{1}{j^3} \right) \\ &\leq \frac{2(1-\ln 2)}{\ell} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) \left(8 \sum_{j=1}^{M-1} \frac{j^5}{M^8} + 4 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^3} \right) \\ &\leq \frac{2(1-\ln 2)}{\ell} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) \left(\frac{1}{30} + 4[\zeta(3) - 1] \right), \end{aligned}$$

donde $\zeta(3)$ es la constante de Apéry. Note que hemos usado (3.4.2) y $M \geq 5$ para deducir que

$$8 \sum_{j=1}^{M-1} \frac{j^5}{M^8} = \frac{2(M-1)^2}{3M^5} \left(2(M-1) - \frac{1}{M} \right) \leq \frac{1}{30}.$$

El lema sigue después de un poco de aritmética junto con las cotas $\ln 2 \geq 0,69$ y $\zeta(3) \leq 1,203$. \square

El siguiente resultado nos ofrece una cota inferior y superior para $T(\ell)$.

Lema 3.6.2. *Sea $q \in B_\ell$ con $\ell \leq M$. Entonces,*

$$\frac{1}{3} \ln \frac{M+1}{\ell+1} \leq T(\ell) \leq \frac{1}{3} \ln \frac{M}{\ell} + \frac{1}{6}.$$

Demostración. A partir de (3.6.4) y la simetría con respecto al ecuador de \mathcal{P}_N , tenemos

$$\begin{aligned} T(\ell) &= \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{r_j^3}{N^2(1+h_j)^2} + \frac{1}{12} \sum_{j=\ell+1}^M \frac{r_j^3}{N^2(1-h_j)^2} + \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{r_j^3}{N^2(1+h_j)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{j^3}{(2M^2-j^2)^2} + \frac{1}{3} \sum_{j=\ell+1}^M \frac{1}{j} + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{j^3}{(2M^2-j^2)^2}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{1}{3} \sum_{j=\ell+1}^M \frac{1}{j} \leq T(\ell) \leq \frac{1}{3} \sum_{j=\ell+1}^M \frac{1}{j} + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{j^3}{(2M^2 - j^2)^2}.$$

Note que $\sum_{j=\ell+1}^M \frac{1}{j}$ desaparece para $\ell = M$. Llegamos al resultado a partir de las siguientes dos cotas: por un lado

$$\frac{2}{3} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{j^3}{(2M^2 - j^2)^2} \leq \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{j^3}{M^4} \stackrel{(3.4.1)}{=} \frac{(M-1)^2}{6M^2} \leq \frac{1}{6},$$

y por otro lado, a partir del Lema 3.4.1 tenemos

$$\frac{1}{3} \ln \frac{M+1}{\ell+1} < \frac{1}{3} \sum_{j=\ell+1}^M \frac{1}{j} < \frac{1}{3} \ln \frac{M}{\ell},$$

y se concluye la prueba. \square

Proposición 3.6.3. *Sea $q \in B_\ell$ con $\ell \leq M$ y $M \geq 5$. Entonces,*

$$-1 \leq -1 + \frac{1}{3} \ln \frac{M+1}{\ell+1} \leq S_N + N\kappa \leq \frac{1}{3} \ln \frac{M}{\ell} + \frac{2(1 - \ln 2)}{\ell} + \frac{1}{4}.$$

En otras palabras, $-N\kappa \approx \sum_j r_j \tilde{I}_j(q)$ donde el símbolo \approx esconde esencialmente $\frac{1}{3} \ln \frac{M}{\ell}$.

Demostración. Inmediata a partir de los lemas 3.6.1 y 3.6.2. \square

3.7. El numerador de la fórmula del número de condición

Esta sección está dedicada a obtener una cota superior para el término

$$\ln \prod_{k=1}^N |p - p_k| - S_N,$$

con $S_N = S_N(p)$ la suma discreta definida en (3.6.3), produciendo así una cota superior para el numerador en (3.3.1). Necesitamos algunos lemas técnicos.

Lema 3.7.1. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in [0, 2\pi/r]$, tenemos*

$$\prod_{i=0}^{r-1} \left(x^2 + y^2 - 2xy \cos \left(\varphi + \frac{2\pi i}{r} \right) \right) = x^{2r} + y^{2r} - 2x^r y^r \cos(r\varphi).$$

Demostración. Véase [39, (1.394)]. □

A continuación, vamos a dar una expresión exacta para la cantidad

$$\Theta^2 = \prod_{i=0}^{r-1} |p - q_i|^2,$$

donde $p = (\sqrt{1-c^2}, 0, c)$ es un punto esférico y q_0, \dots, q_{r-1} son r puntos equidistribuidos en el paralelo de altura h , es decir

$$q_i = \left(\sqrt{1-h^2} \cos\left(\varphi + \frac{2\pi i}{r}\right), \sqrt{1-h^2} \sin\left(\varphi + \frac{2\pi i}{r}\right), h \right),$$

con $\varphi \in [0, 2\pi/r]$ cualquier fase que represente que los puntos pueden estar en cualquier posición.

Lema 3.7.2. *Tenemos $\Theta^2 = x^{2r} + y^{2r} - 2x^r y^r \cos(r\varphi)$, donde*

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1-c}\sqrt{1+h}, \\ y &= \sqrt{1+c}\sqrt{1-h}. \end{aligned}$$

En particular, el mínimo y máximo de Θ son alcanzados respectivamente en $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi/r$ y obtenemos

$$|x^r - y^r| \leq \Theta \leq |x^r + y^r|.$$

Demostración. Escribimos

$$\begin{aligned} \Theta^2 &= \prod_{i=0}^{r-1} |p - q_i|^2 \\ &= \prod_{i=0}^{r-1} (2 - 2\langle p, q_i \rangle) \\ &= \prod_{i=0}^{r-1} \left(2 - 2\sqrt{1-h^2}\sqrt{1-c^2} \cos\left(\varphi + \frac{2\pi i}{r}\right) - 2hc \right). \end{aligned}$$

Tomando x e y como en el enunciado de arriba y aplicando el Lema 3.7.1 deducimos que

$$\Theta^2 = x^{2r} + y^{2r} - 2x^r y^r \cos(r\varphi),$$

es decir, la primera afirmación del lema. La segunda es directa: como el valor máximo y el mínimo del coseno son ± 1 basta con observar que

$$x^{2r} + y^{2r} \pm 2x^r y^r = |x^r \pm y^r|^2.$$

□

Proposición 3.7.3. *Sea $p \in \mathbb{S}^2$ y S_N dada en (3.6.3). Denotamos por $p_k \in \mathcal{P}_N$ los puntos de nuestra colección. Entonces, para $M \geq 5$,*

$$\ln \prod_{k=1}^N |p - p_k| \leq S_N(p) + \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, tomamos $p = (\sqrt{1-c^2}, 0, c)$ perteneciente a la banda B_ℓ , con $1 \leq \ell \leq M$. Denotamos por $q_{j,0}, \dots, q_{j,r_j-1}$ los r_j puntos equidistribuidos en el j -ésimo paralelo. A partir del Lema 3.7.2, tenemos

$$\ln \prod_{k=1}^N |p - p_k| = \ln \prod_{j=1}^{2M-1} \prod_{i=0}^{r_j-1} |p - q_{j,i}| \leq \sum_{j=1}^{2M-1} \ln |x_{h_j,c}^{r_j} + y_{h_j,c}^{r_j}|, \quad (3.7.1)$$

donde

$$\begin{aligned} x_{h_j,c} &= \sqrt{1-c} \sqrt{1+h_j}, \\ y_{h_j,c} &= \sqrt{1+c} \sqrt{1-h_j}. \end{aligned}$$

Note que la cota obtenida en (3.7.1) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2M-1} \ln |x_{h_j,c}^{r_j} + y_{h_j,c}^{r_j}| &= \sum_{j=1}^{\ell-1} \ln |x_{h_j,c}^{r_j} (1 + y_{h_j,c}^{r_j}/x_{h_j,c}^{r_j})| + \ln |x_{h_\ell,c}^{r_\ell} + y_{h_\ell,c}^{r_\ell}| \\ &\quad + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} \ln |y_{h_j,c}^{r_j} (1 + x_{h_j,c}^{r_j}/y_{h_j,c}^{r_j})| \\ &= R_{\ell,j} + S_{\ell,j}, \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} R_{\ell,j} &= \sum_{j=1}^{\ell-1} r_j \ln x_{h_j,c} + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} r_j \ln y_{h_j,c} + \ln |x_{h_\ell,c}^{r_\ell} + y_{h_\ell,c}^{r_\ell}|, \\ S_{\ell,j} &= \sum_{j=1}^{\ell-1} \ln |1 + y_{h_j,c}^{r_j}/x_{h_j,c}^{r_j}| + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} \ln |1 + x_{h_j,c}^{r_j}/y_{h_j,c}^{r_j}|. \end{aligned}$$

Procedemos a acotar superiormente $R_{\ell,j}$ y $S_{\ell,j}$. Sabemos que $c \in [H_\ell, H_{\ell-1}]$. Entonces, para $1 \leq j \leq \ell - 1$ tenemos $h_j > c$ y por tanto $x_{h_j,c} > y_{h_j,c}$. Recíprocamente, para $\ell + 1 \leq j \leq 2M - 1$ obtenemos $x_{h_j,c} < y_{h_j,c}$. Además, si $c \in [H_\ell, h_\ell]$ entonces $h_\ell \geq c$ y $x_{h_\ell,c} \geq y_{h_\ell,c}$, así

$$\ln |x_{h_\ell,c}^{r_\ell} + y_{h_\ell,c}^{r_\ell}| = r_\ell \ln x_{h_\ell,c} + \ln |1 + y_{h_\ell,c}^{r_\ell}/x_{h_\ell,c}^{r_\ell}| \leq r_\ell \ln x_{h_\ell,c} + \ln 2,$$

y deducimos que

$$R_{\ell,j} \leq \ln 2 + \sum_{j=1}^{\ell} r_j \ln x_{h_j,c} + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} r_j \ln y_{h_j,c} \stackrel{(3.6.2)}{=} \ln 2 + \sum_{j=1}^{2M-1} r_j \tilde{I}_j(p)$$

$$\stackrel{(3.6.3)}{=} \ln 2 + S_N(p)$$

Es fácil comprobar que esta desigualdad también es válida para $c \in (h_\ell, H_{\ell-1}]$. En efecto, para este caso $y_{h_\ell, c} \geq x_{h_\ell, c}$, luego

$$\ln |x_{h_\ell, c}^{r_\ell} + y_{h_\ell, c}^{r_\ell}| = r_\ell \ln y_{h_\ell, c} + \ln |1 + x_{h_\ell, c}^{r_\ell}/y_{h_\ell, c}^{r_\ell}| \leq r_\ell \ln y_{h_\ell, c} + \ln 2,$$

y tenemos

$$R_{\ell, j} \leq \ln 2 + \sum_{j=1}^{\ell-1} r_j \ln x_{h_j, c} + \sum_{j=\ell}^{2M-1} r_j \ln y_{h_j, c} = \ln 2 + S_N(p),$$

donde en el igual hemos usado de nuevo (3.6.2) y (3.6.3). En cualquier caso, obtenemos

$$R_{\ell, j} \leq \ln 2 + S_N(p).$$

Acotamos ahora $S_{\ell, j}$. Usando $\ln(1 + \alpha) \leq \alpha$ para $\alpha > 0$, $H_\ell \leq c \leq H_{\ell-1}$ y la simetría de nuestro conjunto de puntos \mathcal{P}_N respecto al ecuador, tenemos

$$\begin{aligned} S_{\ell, j} &\leq \sum_{j=1}^{\ell-1} \left(\frac{(1+c)(1-h_j)}{(1-c)(1+h_j)} \right)^{r_j/2} + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} \left(\frac{(1-c)(1+h_j)}{(1+c)(1-h_j)} \right)^{r_j/2} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell-1} \left(\frac{(1+H_{\ell-1})(1-h_j)}{(1-H_{\ell-1})(1+h_j)} \right)^{r_j/2} + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} \left(\frac{(1-H_\ell)(1+h_j)}{(1+H_\ell)(1-h_j)} \right)^{r_j/2} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell-1} \left(\frac{(1+H_{\ell-1})(1-h_j)}{(1-H_{\ell-1})(1+h_j)} \right)^{r_j/2} + \sum_{j=\ell+1}^M \left(\frac{(1-H_\ell)(1+h_j)}{(1+H_\ell)(1-h_j)} \right)^{r_j/2} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M-1} \left(\frac{(1-H_\ell)(1-h_j)}{(1+H_\ell)(1+h_j)} \right)^{r_j/2}. \end{aligned}$$

Nótese que para $\ell = 1$ la primera suma desaparece. Para finalizar la acotación de $S_{\ell, j}$, sustituimos las expresiones de h_j, H_ℓ y $H_{\ell-1}$ y volvemos a realizar algunas estimaciones elementales:

$$\begin{aligned} S_{\ell, j} &\leq \sum_{j=1}^{\ell-1} \left(\frac{(2M^2 - \ell(\ell-1))j^2}{\ell(\ell-1)(2M^2 - j^2)} \right)^{2j} + \sum_{j=\ell+1}^M \left(\frac{\ell(\ell+1)(2M^2 - j^2)}{(2M^2 - \ell(\ell+1))j^2} \right)^{2j} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M-1} \left(\frac{\ell(\ell+1)j^2}{(2M^2 - \ell(\ell+1))(2M^2 - j^2)} \right)^{2j} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell-1} \left(\frac{j^2}{\ell(\ell-1)} \right)^{2j} + \sum_{j=\ell+1}^M \left(\frac{\ell(\ell+1)}{j^2} \right)^{2j} + \sum_{j=1}^{M-2} \left(\frac{j}{M} \right)^{4j} \\ &\quad + \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 2M - 1} \right)^{2(M-1)} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}.$$

Veamos en más detalle cómo deducir esta última cota. Para $\ell \geq 4$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\ell-1} \left(\frac{j^2}{\ell(\ell-1)} \right)^{2j} &= \sum_{j=1}^{\ell-2} \left(\frac{j^2}{\ell(\ell-1)} \right)^{2j} + \left(\frac{\ell-1}{\ell} \right)^{2(\ell-1)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell-2} \left(\frac{j}{\ell-1} \right)^{4j} + \left(\frac{\ell-1}{\ell} \right)^{2(\ell-1)} \leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema 3.4.2 y el hecho de que el último sumando es una función decreciente en ℓ . Uno puede comprobar rápidamente que la cota obtenida es válida para los casos $\ell = 2, 3$ (para $\ell = 1$ la suma desaparece). Para la siguiente suma aplicamos el Lema 3.4.3:

$$\begin{aligned} \sum_{j=\ell+1}^M \left(\frac{\ell(\ell+1)}{j^2} \right)^{2j} &= \sum_{j=\ell+2}^M \left(\frac{\ell(\ell+1)}{j^2} \right)^{2j} + \left(\frac{\ell}{\ell+1} \right)^{2(\ell+1)} \\ &\leq \sum_{j=\ell+2}^M \left(\frac{\ell+1}{j} \right)^{4j} + e^{-2} \leq \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Note que dicha suma desaparece si $\ell = M$. Finalmente, aplicando de nuevo el Lema 3.4.2 concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{M-2} \left(\frac{j}{M} \right)^{4j} + \left(\frac{M^2-1}{M^2+2M-1} \right)^{2(M-1)} \\ \leq \frac{1}{30} - \left(\frac{M-1}{M} \right)^{4(M-1)} + \left(\frac{M^2-1}{M^2+2M-1} \right)^{2(M-1)} \leq \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

donde en la última cota hemos usado que el conjunto de términos en M representa una función decreciente en M y que $M \geq 5$.

Así que hemos probado que

$$\sum_{j=1}^{2M-1} \ln |x_{h_j,c}^{r_j} + y_{h_j,c}^{r_j}| = R_{\ell,j} + S_{\ell,j} \leq \ln 2 + S_N(p) + \frac{1}{2},$$

y sustituyendo en (3.7.1), la proposición se concluye. \square

El resultado final de esta sección se utilizará en la demostración de nuestro teorema principal.

Corolario 3.7.4. *Si $p \in B_\ell$ con $\ell \leq M$ y $M \geq 5$, entonces*

$$\prod_{k=1}^N |p - p_k| \leq 2e^{-\kappa N} \left(\frac{M}{\ell} \right)^{1/3} e^{3/4} \left(\frac{e}{2} \right)^{2/\ell}.$$

Demostración. Inmediata a partir de las proposiciones 3.7.3 y 3.6.3. \square

3.8. El denominador de la fórmula del número de condición

Los resultados obtenidos en la sección anterior nos dan una cota superior para el numerador de (3.3.1). Ahora, para cualquier $i = 1, \dots, N$ fijo, necesitamos una cota inferior para el denominador.

Lema 3.8.1. *Sea r fijo y sean p_0, \dots, p_{r-1} puntos equidistribuidos en la circunferencia unidad. Entonces*

$$\ln \prod_{k=1}^{r-1} |p_k - p_0| = \ln r.$$

Demostración. Rotamos los puntos de tal forma que $p_k = e^{2i\pi k/r}$. Ya que el polinomio $z^r - 1$ tiene r raíces de la unidad como ceros, tenemos

$$\prod_{k=0}^{r-1} (z - p_k) = z^r - 1 = (z - 1)(1 + z + \dots + z^{r-1}).$$

Quitando el factor $z - 1$ en ambos lados de la igualdad y sustituyendo $z = 1$ obtenemos el resultado. \square

Lo siguiente es una consecuencia inmediata:

Corolario 3.8.2. *Para r fijo, sean p_0, \dots, p_{r-1} , r puntos equidistribuidos en una circunferencia de radio s . Entonces*

$$\ln \prod_{k=1}^{r-1} |p_k - p_0| = \ln r + (r - 1) \ln s.$$

Demostración. Sean z_0, \dots, z_{r-1} las r raíces de la unidad. Tenemos

$$\begin{aligned} \ln \prod_{k=1}^{r-1} |p_k - p_0| &= \ln \prod_{k=1}^{r-1} s |z_k - z_0| \\ &= \ln \left(s^{r-1} \prod_{k=1}^{r-1} |z_k - z_0| \right) = (r - 1) \ln s + \ln \prod_{k=1}^{r-1} |z_k - z_0|, \end{aligned}$$

y aplicando el Lema 3.8.1 llegamos al resultado. \square

Proposición 3.8.3. *Sea $p \in \mathcal{P}_N$ fijo y S_N como en (3.6.3). Para $M \geq 5$, se cumple la siguiente desigualdad*

$$\ln \prod_{\substack{p_i \in \mathcal{P}_N \\ p_i \neq p}} |p_i - p| \geq S_N(p) + \ln(2\sqrt{2}M) - \frac{1}{8}.$$

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $p = q_{\ell,0} = (\sqrt{1-h_\ell^2}, 0, h_\ell)$ es un punto perteneciente a nuestro conjunto \mathcal{P}_N situado en el ℓ -ésimo paralelo, con $1 \leq \ell \leq M$. Como antes, denotamos por $q_{j,0}, \dots, q_{j,r_j-1}$ los r_j puntos equidistribuidos en el j -ésimo paralelo. Escribimos

$$\begin{aligned} \ln \prod_{\substack{p_i \in \mathcal{P}_N \\ p_i \neq p}} |p_i - p| &= \ln \prod_{i=1}^{r_\ell-1} |q_{\ell,0} - q_{\ell,i}| + \ln \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{2M-1} \prod_{i=0}^{r_j-1} |q_{\ell,0} - q_{j,i}| \\ &\geq \ln 2\sqrt{2}M + r_\ell \ln x_{h_\ell, h_\ell} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{2M-1} \ln |x_{h_j, h_\ell}^{r_j} - y_{h_j, h_\ell}^{r_j}|, \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

donde hemos usado por un lado, el Lema 3.7.2,

$$\ln \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{2M-1} \prod_{i=0}^{r_j-1} |q_{\ell,0} - q_{j,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{2M-1} \ln |x_{h_j, h_\ell}^{r_j} - y_{h_j, h_\ell}^{r_j}|,$$

con

$$\begin{aligned} x_{h_j, h_\ell} &= \sqrt{1-h_\ell} \sqrt{1+h_j}, \\ y_{h_j, h_\ell} &= \sqrt{1+h_\ell} \sqrt{1-h_j}, \end{aligned}$$

y por otro lado, a partir del Corolario 3.8.2

$$\begin{aligned} \ln \prod_{i=1}^{r_\ell-1} |q_{\ell,0} - q_{\ell,i}| &= \ln r_\ell + (r_\ell - 1) \ln \sqrt{1-h_\ell^2} \\ &= \ln \frac{r_\ell}{\sqrt{1-h_\ell^2}} + r_\ell \ln x_{h_\ell, h_\ell} \\ &= \ln \frac{4M}{\sqrt{2-\ell^2/M^2}} + r_\ell \ln x_{h_\ell, h_\ell} \\ &\geq \ln(2\sqrt{2}M) + r_\ell \ln x_{h_\ell, h_\ell}. \end{aligned}$$

Para $1 \leq j \leq \ell - 1$, $h_j > h_\ell$ así $x_{h_j, h_\ell} > y_{h_j, h_\ell}$. Recíprocamente, $x_{h_j, h_\ell} < y_{h_j, h_\ell}$ para $\ell < j \leq 2M - 1$. Por lo tanto,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{2M-1} \ln |x_{h_j, h_\ell}^{r_j} - y_{h_j, h_\ell}^{r_j}| = \sum_{j=1}^{\ell-1} r_j \ln x_{h_j, h_\ell} + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} r_j \ln y_{h_j, h_\ell} + T_{\ell, j},$$

donde

$$T_{\ell, j} = \sum_{j=1}^{\ell-1} \ln |1 - y_{h_j, h_\ell}^{r_j} / x_{h_j, h_\ell}^{r_j}| + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} \ln |1 - x_{h_j, h_\ell}^{r_j} / y_{h_j, h_\ell}^{r_j}|. \quad (3.8.2)$$

Note que para $\ell = 1$ la primera suma desaparece. Sustituyendo en (3.8.1) obtenemos

$$\ln \prod_{\substack{p_i \in \mathcal{P}_N \\ p_i \neq p}}^N |p_i - p| \geq \ln(2\sqrt{2}M) + S_N(p) + T_{\ell,j},$$

ya que por (3.6.2) y (3.6.3)

$$\sum_{j=1}^{\ell} r_j \ln x_{h_j, h_\ell} + \sum_{j=\ell+1}^{2M-1} r_j \ln y_{h_j, h_\ell} = \sum_{j=1}^{2M-1} r_j \tilde{I}_j(q_{\ell,0}) = S_N(p).$$

Nos queda por acotar inferiormente $T_{\ell,j}$ definida en (3.8.2). Para ello, usaremos la siguiente estimación

$$\ln(1 - \alpha) \geq -\frac{16}{15}\alpha, \quad \alpha \in [0, 1/16]. \quad (3.8.3)$$

Comprobemos que efectivamente podemos usar (3.8.3) para acotar (3.8.2). Para $j \in [1, \ell - 1]$:

$$0 \leq \left(\frac{y_{h_j, h_\ell}}{x_{h_j, h_\ell}} \right)^{r_j} = \left(\frac{(2M^2 - \ell^2)j^2}{\ell^2(2M^2 - j^2)} \right)^{2j} \leq \left(\frac{j}{\ell} \right)^{4j} \leq \left(\frac{\ell - 1}{\ell} \right)^{4\ell} \leq e^{-4} \leq \frac{1}{16}.$$

Para $j \in [\ell + 1, M]$:

$$0 \leq \left(\frac{x_{h_j, h_\ell}}{y_{h_j, h_\ell}} \right)^{r_j} = \left(\frac{\ell^2(2M^2 - j^2)}{(2M^2 - \ell^2)j^2} \right)^{2j} \leq \left(\frac{\ell}{j} \right)^{4j} \leq \left(\frac{\ell}{\ell + 1} \right)^{4(\ell+1)} \leq e^{-4}.$$

Si $j \in [M + 1, 2M - 1]$, usamos la simetría de \mathcal{P}_N con respecto al ecuador. Entonces, para $j \in [1, M - 1]$:

$$0 \leq \left(\frac{x_{h_j, h_\ell}}{y_{h_j, h_\ell}} \right)^{r_j} \leq \left(\frac{\ell^2(2M^2 - j^2)}{(2M^2 - \ell^2)j^2} \right)^{2j} \leq \left(\frac{j}{M} \right)^{4j} \leq \left(\frac{M - 1}{M} \right)^{4M} \leq e^{-4}.$$

Por tanto, por (3.8.3) llegamos a

$$\begin{aligned} -T_{\ell,j} &\leq \frac{16}{15} \sum_{j=1}^{\ell-1} \left(\frac{y_{h_j, h_\ell}}{x_{h_j, h_\ell}} \right)^{r_j} + \frac{16}{15} \sum_{j=\ell+1}^M \left(\frac{x_{h_j, h_\ell}}{y_{h_j, h_\ell}} \right)^{r_j} + \frac{16}{15} \sum_{j=M+1}^{2M-1} \left(\frac{x_{h_j, h_\ell}}{y_{h_j, h_\ell}} \right)^{r_j} \\ &\leq \frac{16}{15} \sum_{j=1}^{\ell-1} \left(\frac{j}{\ell} \right)^{4j} + \frac{16}{15} \sum_{j=\ell+1}^M \left(\frac{\ell}{j} \right)^{4j} + \frac{16}{15} \sum_{j=1}^{M-1} \left(\frac{j}{M} \right)^{4j} \\ &\leq \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

donde hemos usado los lemas 3.4.2 y 3.4.3. \square

Utilizaremos el siguiente corolario en la última sección:

Corolario 3.8.4. *Sea p cualquier punto de \mathcal{P}_N . Entonces*

$$\prod_{\substack{p_i \in \mathcal{P}_N \\ p_i \neq p}} |p_i - p| \geq \sqrt{2N} e^{-\kappa N} e^{-9/8}.$$

Demostración. Inmediato a partir de las proposiciones 3.8.3 y 3.6.3. \square

3.9. Demostración del resultado principal

Si $M \leq 4$ nuestra demostración es asistida por ordenador: construimos el polinomio P_N (que tiene coeficientes racionales) y el conjunto de puntos \mathcal{P}_N (cuyos puntos son algebraicos y por tanto pueden representarse exactamente en un paquete de álgebra computacional), lo que nos permite calcular exactamente $\mu_{\text{norm}}(P_N)$ a partir de (1.3.2), mostrando que está acotado superiormente por $N = 4M^2 = \min\{N, \frac{19}{2}\sqrt{N+1}\}$. Nosotros hemos utilizado el programa `wxMaxima` para llevar a cabo dicho proceso y el código implementado se puede ver en el Apéndice B.

Para $M \geq 5$, a partir de (3.3.1) y el Corolario 3.8.4 tenemos

$$\begin{aligned} \mu_{\text{norm}}(P_N) &= \frac{1}{2} \sqrt{N(N+1)} \max_{1 \leq i \leq N} \frac{\left(\int_{\mathbb{S}^2} \prod_{j=1}^N |p - p_j|^2 d\sigma(p) \right)^{1/2}}{\prod_{j \neq i} |p_i - p_j|} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{N(N+1)} \frac{\left(\sum_{\ell=1}^{2M-1} \int_{B_\ell} \prod_{j=1}^N |p - p_j|^2 d\sigma(p) \right)^{1/2}}{\sqrt{2N} e^{-\kappa N} e^{-9/8}}. \end{aligned}$$

Note que, por la simetría de la construcción,

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\ell=1}^{2M-1} \int_{B_\ell} \prod_{j=1}^N |p - p_j|^2 d\sigma(p) \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{B_M} \prod_{j=1}^N |p - p_j|^2 d\sigma(p) + 2 \sum_{\ell=1}^{M-1} \int_{B_\ell} \prod_{j=1}^N |p - p_j|^2 d\sigma(p) \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.9.1}$$

Usando el Corolario 3.7.4 y recordando que el área normalizada de B_ℓ es $r_\ell/N = \ell/M^2$, llegamos a

$$\begin{aligned} (3.9.1) &\leq \left(4e^{-2\kappa N} e^{3/2} \left(\frac{1}{M} \left(\frac{e}{2} \right)^{4/M} + \frac{2}{M^{4/3}} \sum_{\ell=1}^{M-1} \ell^{1/3} \left(\frac{e}{2} \right)^{4/\ell} \right) \right)^{1/2}, \\ &\stackrel{\text{Lema 3.4.4}}{\leq} 2e^{-\kappa N} e^{3/4} \left(\frac{1}{M} \left(\frac{e}{2} \right)^{4/M} + \frac{3}{2} + \frac{24(1 - \ln 2)}{M} + \frac{6}{M^{4/3}} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Hemos probado entonces:

$$\mu_{\text{norm}}(P_N) \leq \sqrt{\frac{N+1}{2}} e^{3/4+9/8} \left(\frac{1}{M} \left(\frac{e}{2} \right)^{4/M} + \frac{3}{2} + \frac{24(1-\ln 2)}{M} + \frac{6}{M^{4/3}} \right)^{1/2} \quad (3.9.2)$$

Esto demuestra nuestro Teorema 3.3.1: el término dentro del paréntesis decrece con M y concluimos después de un poco de aritmética que

$$\mu_{\text{norm}}(P_N) \leq \frac{19}{2} \sqrt{N+1},$$

que es menor que N para $M \geq 5$. Además, también obtenemos una prueba del Corolario 3.3.2 ya que considerando el límite cuando $M \rightarrow \infty$ del miembro derecho de (3.9.2) deducimos que

$$\mu_{\text{norm}}(P_N) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} e^{3/4+9/8} \sqrt{N+1}.$$

3.9.1. Expresión explícita de P_N

A continuación, deducimos la expresión explícita del polinomio P_N del Teorema 3.3.1. Como ya hemos mencionado, los ceros de nuestro polinomio P_N se corresponden, bajo la proyección estereográfica, con el conjunto de puntos esféricos \mathcal{P}_N construido en la Sección 3.3.1. Entonces,

$$P_N(z) = \prod_{j=1}^{2M-1} \prod_{k=0}^{r_j-1} (z - \tilde{z}_{j,k}),$$

donde $\tilde{z}_{j,k} = (x_{j,k} + iy_{j,k})$ siendo $(x_{j,k}, y_{j,k}) \in \mathbb{R}^2$ el punto obtenido en el plano tras aplicar la proyección estereográfica al punto esférico $p_{j,k} \in \mathcal{P}_N$, es decir, al k -ésimo punto del j -ésimo paralelo, que se puede escribir como

$$p_{j,k} = \left(\sqrt{1-h_j^2} \cos \left(\varphi + \frac{2\pi k}{r_j} \right), \sqrt{1-h_j^2} \sin \left(\varphi + \frac{2\pi k}{r_j} \right), h_j \right),$$

con $\varphi \in [0, 2\pi/r_j]$. Además, sabemos que los r_j puntos en el j -ésimo paralelo son (bajo una homotecia y una traslación) el conjunto de las r_j raíces de la unidad, es decir, son solución de la ecuación $z^{r_j} - T_j^{r_j} = 0$, donde T_j es el módulo de dichas raíces. En base a esto,

$$P_N(z) = \prod_{j=1}^{2M-1} (z^{r_j} - T_j^{r_j}).$$

A partir de la proyección estereográfica (1.3.3), cada punto $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ se corresponde con $\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \in \mathbb{R}^2$ donde

$$\left| \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} \right| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1-z)^2}},$$

deduciendo así que

$$T_j = \sqrt{\frac{1+h_j}{1-h_j}}.$$

A partir de esto, y usando la simetría respecto al ecuador de nuestro conjunto de puntos \mathcal{P}_N obtenemos que

$$P_N(z) = (z^{r_M} - 1) \prod_{j=1}^{M-1} (z^{r_j} - T_j^{r_j})(z^{r_j} - 1/T_j^{r_j}),$$

esto es, la expresión dada en el Teorema 3.3.1.

Una cota inferior para la energía logarítmica en \mathbb{S}^2 y para la energía de Green en \mathbb{S}^n

En este capítulo mostramos una prueba alternativa del mejor límite inferior conocido hasta la fecha para la energía logarítmica mínima en la esfera unidad \mathbb{S}^2 . A continuación, generalizamos esta demostración para obtener nuevas cotas inferiores para la energía de Green en la n -esfera unidad \mathbb{S}^n .

4.1	Introducción	92
4.2	Argumento de Lauritsen	92
4.3	Valor medio del potencial logarítmico en \mathbb{S}^2	97
4.4	Prueba para la cota inferior de C_{\log}	98
4.5	La función de Green en \mathbb{S}^n	100
4.6	Sobre una función dada por su serie	102
4.7	Valor medio en una bola	107
4.8	Una función no negativa	112
4.9	Cota inferior para la energía de Green	114
4.10	Experimentos numéricos	117

4.1. Introducción

Uno de los problemas abiertos más importantes en teoría del potencial es el cálculo exacto de la constante del término de orden N en la expansión asintótica de la energía logarítmica mínima en \mathbb{S}^2 (1.2.3), que hemos denotado por C_{\log} , y cuyas cotas volvemos a recordar a continuación:

$$-0,0568\dots = \ln 2 - \frac{3}{4} \leq C_{\log} \leq 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} + 3 \ln \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/3)} = -0,0556\dots \quad (4.1.1)$$

Se ha conjeturado que la cota superior es una igualdad. La cota inferior $\ln 2 - \frac{3}{4} \leq C_{\log}$, demostrada por Lauritsen en [48], proviene de un argumento en el plano real y luego involucra un resultado sofisticado de Bétermin y Sandier [20, pág. 3, Teorema 1.5] que relaciona la energía en \mathbb{S}^2 con una cierta energía renormalizada en el plano, y que es un argumento puramente 2-dimensional que no parece fácil trasladar a dimensiones superiores. A continuación, explicamos cómo Lauritsen obtiene dicha cota. No obstante, señalamos que describir su argumento con total detalle es una tarea que excede con creces el objetivo de esta memoria, pues precisamente nuestra aportación consiste en describir una demostración alternativa y mucho más sencilla.

4.2. Argumento de Lauritsen para la cota inferior de C_{\log}

Lauritsen comienza definiendo en [48] una energía llamada “energía jellium” del siguiente modo: la energía jellium de N partículas x_1, \dots, x_N en un dominio $\Omega_N \subseteq \mathbb{R}^2$ de tamaño $|\Omega_N| = N$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{Jel}}(\Omega_N, x_1, \dots, x_N) = & - \sum_{i < j} \ln \|x_i - x_j\| + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_N} \ln \|x_i - y\| dy \\ & - \frac{1}{2} \iint_{\Omega_N \times \Omega_N} \ln \|x - y\| dx dy. \end{aligned}$$

En este modelo físico, los electrones se consideran partículas clásicas discretas en un fondo uniforme (positivo), de modo que todo el sistema es neutro. Los electrones y el fondo interactúan a través de la interacción de Coulomb, en dos dimensiones.

Note que el primer sumatorio en la energía jellium se toma sobre $i < j$ en lugar de $i \neq j$. A lo largo del capítulo, excepto en esta sección que es una réplica de los resultados de Lauritsen, seguimos la notación de la mayoría de los trabajos actuales en el área, esta es, $i \neq j$.

Además, en [61], se demuestra que el límite termodinámico

$$e_{\text{Jel}} = \lim_{\Omega_N \rightarrow \mathbb{R}^2} \min_{x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^2} \frac{\mathcal{E}_{\text{Jel}}(\Omega_N, x_1, \dots, x_N)}{|\Omega_N|},$$

existe bajo condiciones no muy restrictivas en la secuencia de dominios Ω_N . Por ejemplo, $\Omega_N = N^{1/2}\Omega$ con Ω un conjunto convexo fijo de tamaño $|\Omega| = 1$.

Lauritsen muestra que la energía jellium también es equivalente a una “energía renormalizada” estudiada en varios trabajos de Serfaty, Bétermin, Sandier y otros (ver, por ejemplo, las referencias 12 y 14–21 de [48]). De hecho, Bétermin y Sandier demuestran en [20, pág. 3, Teorema 1.5] que

$$C_{\log} = \frac{1}{\pi} \min_{\mathcal{A}_1} W + \frac{\ln 4\pi}{2},$$

(véase [20, Sección 2] para definiciones precisas de W y \mathcal{A}_1). En [48, Corolario IV.4], Lauritsen prueba que

$$\min_{\mathcal{A}_1} W = 2\pi e_{\text{Jel}},$$

relacionando así la energía jellium con la “energía renormalizada”. El límite inferior de e_{Jel} dado en [50] y [61] se conoce desde hace muchos años. A partir de la cota inferior de e_{Jel} y la relación anterior entre las energías, Lauritsen deduce una cota inferior para $\min_{\mathcal{A}_1} W$ dada por

$$\min_{\mathcal{A}_1} W = 2\pi e_{\text{Jel}} \geq -\pi \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \pi \right). \quad (4.2.1)$$

A partir de (4.2.1) y el Teorema 1.5 de Bétermin y Sandier en [20], se deduce que

$$C_{\log} = \frac{1}{\pi} \min_{\mathcal{A}_1} W + \frac{\ln 4\pi}{2} = 2e_{\text{Jel}} + \frac{\ln 4\pi}{2} \geq \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Lauritsen escribe con más detalle la prueba de la cota inferior para la energía jellium en [48, pág. 16, Apéndice B] a partir de [50] y [61]. Dicho apéndice se presenta a continuación junto con [48, pág. 8, Proposición V.1] ya que se utiliza en él.

Proposición 4.2.1. ([48, Proposición V.1]). *Supongamos que f tiene $\int f dx = 0$. Entonces, $D(f) \geq 0$.*

Hay que tener en cuenta que se ha utilizado la notación

$$D(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \int \int -\ln \|x - y\| d\mu(x) d\nu(y), \quad D(\mu) = D(\mu, \mu),$$

para dos medidas (finitas) μ, ν . Es la energía de interacción de Coulomb entre las distribuciones de carga μ y ν .

Proposición 4.2.2. ([48, Apéndice B]). *Sea Ω_N un dominio con $|\Omega_N| = N$, y $x_1, \dots, x_N \in \Omega_N$ cualquier configuración de puntos. Entonces,*

$$\mathcal{E}_{\text{Jel}}(\Omega_N, x_1, \dots, x_N) \geq - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \ln \pi \right) N \simeq -0,66118N.$$

En particular, $e_{\text{Jel}} \geq - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \ln \pi \right) \simeq -0,66118$.

En la demostración de este resultado se denota por $B(x, a)$ a la bola de centro x y radio a de \mathbb{R}^2 , $B(0, a) = B_a$ y $|B_a|$ su volumen.

Demostración. La idea es extender los electrones a una bola de radio a de carga uniforme. Luego, optimizar el resultado sobre el radio a . Definimos

$$\begin{aligned} U_{BB} &= -\frac{1}{2} \iint_{\Omega_N \times \Omega_N} \ln \|x - y\| dx dy, && \text{energía continua,} \\ U_i &= \int_{\Omega_N} \ln \|x_i - y\| dy, && \begin{array}{l} \text{interacción partícula } i \\ \text{- energía continua,} \end{array} \\ U_{ij} &= -\ln \|x_i - x_j\|, && \begin{array}{l} \text{interacción partícula } i \\ \text{y partícula } j, \end{array} \\ \widehat{U}_i &= \frac{1}{|B_a|} \int_{B(x_i, a)} \int_{\Omega_N} \ln \|x - y\| dx dy, && \begin{array}{l} \text{interacción bola } i \\ \text{y energía continua,} \end{array} \\ \widehat{U}_{ij} &= -\frac{1}{|B_a|^2} \int_{B(x_i, a)} \int_{B(x_j, a)} \ln \|x - y\| dx dy, && \begin{array}{l} \text{interacción bola } i \\ \text{y bola } j. \end{array} \end{aligned}$$

Entonces, \widehat{U}_{ii} es el doble de la energía de la bola i . Escribimos

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{\text{Jel}}(\Omega_N, x_1, \dots, x_N) \\ &= \underbrace{U_{BB} + \sum_{i=1}^N \widehat{U}_i}_{(\alpha)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \widehat{U}_{ij} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (U_i - \widehat{U}_i)}_{(\beta)} + \underbrace{\frac{-1}{2} \sum_{i=1}^N \widehat{U}_{ii}}_{(\gamma)} + \underbrace{\sum_{i < j} (U_{ij} - \widehat{U}_{ij})}_{(\delta)} \end{aligned}$$

Ahora, (α) es la energía electrostática total de la distribución de carga combinada de los electrones esparcidos y del fondo, es decir $(\alpha) = D \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{|B_a|} \chi_{B(x_i, a)} - \chi_{\Omega} \right)$. Como toda la configuración es neutra, tenemos $(\alpha) \geq 0$ por la Proposición 4.2.1. Además, $(\delta) \geq 0$, ya que si las bolas no se solapan, entonces este término es 0, pero si se solapan, por el resultado que Lauritsen llama *teorema de Newton*, este término es positivo. Ahora, (β) se puede acotar por el *teorema de Newton*

$$U_i - \widehat{U}_i = \int_{\Omega_N} \left(\ln \|x_i - z\| - \frac{1}{|B_a|} \int_{B(x_i, a)} \ln \|x - z\| dx \right) dz$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{|B_a|} \int_{B(x_i, a)} \int_{B(x_i, a)} (\ln \|x_i - z\| - \ln \|x - z\|) dx dz \\ &= \frac{1}{|B_a|} \iint_{B_a \times B_a} (\ln \|z\| - \ln \|x - z\|) dx dz. \end{aligned}$$

Tenemos igualdad si $B(x_i, a) \subset \Omega_N$ pero, en general, siempre la desigualdad se cumple. Por último, (γ) está dada por $(\gamma) = \frac{N}{2|B_a|^2} \iint_{B_a \times B_a} \ln \|x - y\| dx dy$.

Calculando (γ) y la cota para (β) , llegamos a $\mathcal{E}_{\text{Jel}} \geq (\frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{8} - \frac{\pi}{4} a^2) N$. Por optimización sobre a , obtenemos $\mathcal{E}_{\text{Jel}} \geq -(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \ln \pi) N$ como queríamos. \square

Aclaraciones sobre la demostración de la Proposición 4.2.2:

1. El resultado llamado en [48] *teorema de Newton* es el siguiente:

Proposición 4.2.3. *Para $y \in B(x_i, a)$ fijo, se verifica:*

$$\frac{1}{|B_a|} \int_{x \in B(x_i, a)} \ln \|x - y\| dx \geq \ln \|x_i - y\|.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, por la simetría de $B(x_i, a)$ podemos tomar $x_i = 0$. Entonces, teniendo en cuenta que $y = (y_1, y_2) \in B_a$ fijo, por un cambio a coordenadas polares, el uso de la siguiente fórmula (véase [39, pág. 532, (4.225.4)])

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \ln(1 + a^2 + b^2 + 2a \sin \theta + 2b \cos \theta) d\theta \\ &= \begin{cases} 0, & a^2 + b^2 \leq 1, \\ 2\pi \ln(a^2 + b^2), & a^2 + b^2 \geq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

y un poco de aritmética, llegamos a

$$\frac{1}{|B_a|} \int_{x \in B(x_i, a)} \ln \|x - y\| dx = \frac{\|y\|^2}{2a^2} + \ln a - \frac{1}{2}. \quad (4.2.2)$$

Definimos la siguiente función $\mathcal{C}^\infty((0, a])$:

$$\begin{aligned} F : (0, a] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \frac{t^2}{2a^2} + \ln a - \frac{1}{2} - \ln t \end{aligned}$$

Uno puede comprobar fácilmente que la función es decreciente en $(0, a]$, luego se cumple que $F(t) \geq F(a) = 0$, para todo $t \in (0, a]$ y, además $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = +\infty$. Por tanto, $F(\|y\|) \geq 0$, y el resultado sigue. \square

2. Note que para $y \in \mathbb{R}^2$ fijo, la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln \|x - y\|$ es armónica si $y \notin U$.

3. Para acotar (δ) se distinguen dos casos. Si $B(x_i, a) \cap B(x_j, a) = \emptyset$ por el Teorema 1.5.9 se deduce que $(\delta) = 0$, mientras que en caso contrario, por la Proposición 4.2.3 se concluye que $(\delta) \geq 0$.
4. Para acotar (β) , note que

$$\begin{aligned}
U_i - \widehat{U}_i &= \int_{z \in \Omega_N \setminus B(x_i, a)} \left[\ln \|x_i - z\| - \frac{1}{|B_a|} \int_{x \in B(x_i, a)} \ln \|x - z\| dx \right] dz \\
&+ \int_{z \in B(x_i, a) \cap \Omega_N} \left[\ln \|x_i - z\| - \frac{1}{|B_a|} \int_{x \in B(x_i, a)} \ln \|x - z\| dx \right] dz \\
&= \int_{z \in B(x_i, a) \cap \Omega_N} \left[\ln \|x_i - z\| - \frac{1}{|B_a|} \int_{x \in B(x_i, a)} \ln \|x - z\| dx \right] dz,
\end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema 1.5.9. A partir de aquí, si $B(x_i, a) \subset \Omega_N$ entonces $B(x_i, a) \cap \Omega_N = B(x_i, a)$ y por simetría, podemos tomar $x_i = 0$. Si $B(x_i, a) \not\subset \Omega_N$, por la Proposición 4.2.3 tenemos

$$\ln \|x_i - z\| - \frac{1}{|B_a|} \int_{x \in B(x_i, a)} \ln \|x - z\| dx \leq 0,$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}
&\int_{z \in B(x_i, a) \cap \Omega_N} \left[\ln \|x_i - z\| - \frac{1}{|B_a|} \int_{x \in B(x_i, a)} \ln \|x - z\| dx \right] dz \\
&\geq \int_{z \in B(x_i, a)} \left[\ln \|x_i - z\| - \frac{1}{|B_a|} \int_{x \in B(x_i, a)} \ln \|x - z\| dx \right] dz.
\end{aligned}$$

De nuevo, basta tomar $x_i = 0$ en la cota inferior obtenida.

5. Para el cálculo explícito del término (γ) y de la cota obtenida para (β) es suficiente usar la igualdad

$$\int \int_{B_a \times B_a} \ln \|x - y\| dx dy = \pi^2 a^4 (\ln a - 1/4),$$

la cual se deduce fácilmente integrando (4.2.2) respecto a B_a y aplicando un cambio a coordenadas polares.

A continuación, describimos cómo el argumento de Lauritsen se puede adaptar directamente a la 2-esfera para obtener el mismo resultado sin necesidad de utilizar [20, pág. 3, Teorema 1.5]. La idea es proceder como en la demostración de la Proposición 4.2.2 sustituyendo Ω_N por \mathbb{S}^2 . Pero antes de nada, establecemos notación y resultados auxiliares necesarios que nos permitirán agilizar los cálculos.

4.3. Valor medio del potencial logarítmico en \mathbb{S}^2

Sea $B(p_0, a)$ la bola geodésica centrada en $p_0 \in \mathbb{S}^2$ con radio $a > 0$, es decir, $B(p_0, a) = \{p \in \mathbb{S}^2 : d_R(p_0, p) < a\} \subseteq \mathbb{S}^2$ donde $d_R(\cdot, \cdot) = \arccos\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la distancia riemanniana en la esfera unidad. Sea $|B_a|$ el volumen de esta bola. Se conoce el siguiente resultado:

Proposición 4.3.1. *Sean $p_0, p \in \mathbb{S}^2$ y $a \in (0, \pi)$. Entonces, $|B_a| = 4\pi \sin^2 \frac{a}{2}$ y*

I) *Si $p \notin B(p_0, a)$*

$$\frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| dq = \ln \|p - p_0\| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2}.$$

II) *Si $p \in B(p_0, a)$*

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| dq \\ = \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{\cot^2 \frac{a}{2}}{2} \ln \left(1 - \frac{\|p - p_0\|^2}{4} \right) + \ln \left(\sin \frac{a}{2} \right). \end{aligned}$$

Este resultado es [8, Proposición 3.2]. Nótese que en esa referencia, el resultado se da para la esfera de radio $1/2$ en \mathbb{R}^3 . La traslación a la esfera unitaria no es complicada.

Lema 4.3.2. *La función $F : (0, 2) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(t, \alpha) = \ln 2 + \ln \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\cot^2 \frac{\alpha}{2}}{2} \left(2 \ln \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right) - \ln \left(1 - \frac{t^2}{4} \right) \right) - \ln t,$$

es no negativa.

Demostración. Es fácil ver que $F(t, \alpha)$ tiene un mínimo en $t = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ para cualquier $\alpha \in (0, \pi)$ fijado. En efecto, $\lim_{t \rightarrow 0} F(t, \alpha) = \lim_{t \rightarrow 2} F(t, \alpha) = \infty$ y

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, \alpha) = t \frac{\cot^2 \frac{\alpha}{2}}{4 - t^2} - \frac{1}{t}, \quad \text{que es } 0 \quad \text{si y solo si} \quad t = 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

así el mínimo está en $t = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$. Finalmente, $F(2 \sin \frac{\alpha}{2}, \alpha) \equiv 0$ y ya hemos acabado. \square

Corolario 4.3.3. *Sea $p_0, p \in \mathbb{S}^2$ y $a > 0$. Entonces,*

$$\frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| dq \geq \ln \|p - p_0\| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2},$$

con una igualdad si $p \notin B(p_0, a)$.

Demostración. Inmediata a partir de la Proposición 4.3.1 y el Lema 4.3.2 (tomando en este último $t = \|p - p_0\|$ y $\alpha = a$). \square

Nos encontramos ya en disposición de presentar nuestra prueba alternativa para la cota inferior de C_{\log} .

4.4. Prueba para la cota inferior de C_{\log}

Para $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{S}^2$, definimos

$$I(p_1, \dots, p_N) = \mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) + \frac{2N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \sum_{i=1}^N \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p_i - q\| dq \\ - \frac{N^2}{(\text{vol}(\mathbb{S}^2))^2} \int_{p, q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dp dq.$$

A partir de

$$\frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dq = \ln 2 - \frac{1}{2} = -\kappa, \quad (4.4.1)$$

deducimos inmediatamente que

$$I(p_1, \dots, p_N) = \mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) - \kappa N^2.$$

Definimos

$$U_{BB} = -\frac{N^2}{(\text{vol}(\mathbb{S}^2))^2} \int_{p, q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dp dq \stackrel{(4.4.1)}{=} \kappa N^2, \\ U_i = \frac{2N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \int_{\mathbb{S}^2} \ln \|p_i - q\| dq \stackrel{(4.4.1)}{=} -2\kappa N, \\ U_{ij} = -\ln \|p_i - p_j\|, \\ \widehat{U}_i = \frac{2N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)|B_a|} \int_{B(p_i, a)} \int_{\mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dp dq \stackrel{(4.4.1)}{=} -2\kappa N, \\ \widehat{U}_{ij} = -\frac{1}{|B_a|^2} \int_{B(p_i, a)} \int_{B(p_j, a)} \ln \|p - q\| dp dq.$$

Claramente,

$$I(p_1, \dots, p_N) \\ = \underbrace{U_{BB} + \sum_{i=1}^N \widehat{U}_i + \sum_{i, j} \widehat{U}_{ij}}_{\alpha} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (U_i - \widehat{U}_i)}_{\beta} - \underbrace{\sum_{i=1}^N \widehat{U}_{ii}}_{\gamma} + \underbrace{\sum_{i \neq j} (U_{ij} - \widehat{U}_{ij})}_{\delta}.$$

Procedemos a acotar inferiormente y, cuando sea posible, a calcular exactamente, los términos α, β, γ y δ . A partir de la Proposición 1.4.2, y del hecho de que el potencial logarítmico es la función de Green (excepto constante multiplicativa y aditiva: véase (1.4.1)) deducimos que $\alpha \geq 0$. En efecto, basta tomar la siguiente medida

$$\mu(p) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{|B_a|} \chi_{B(p_i, a)}(p) - \frac{N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)},$$

(note que $\int_{\mathbb{S}^2} \mu(p) dp = 0$) donde χ_A denota la función característica de un subconjunto $A \subset \mathbb{S}^2$, y darse cuenta de que

$$\alpha = - \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| d\mu(p) d\mu(q).$$

Además, obviamente tenemos $\beta = 0$. La expresión explícita de γ se obtiene inmediatamente utilizando la Proposición 4.3.1, ya que el valor de \hat{U}_{ii} no depende del punto p_i :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \int_{B(p_1, a)} \ln \|p - q\| dp dq \\ &= \frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \left(\int_{\mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dp - \int_{B(-p_1, \pi-a)} \ln \|p - q\| dp \right) dq \\ &= - \frac{4\pi N \kappa}{|B_a|} - \frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \int_{B(-p_1, \pi-a)} \ln \|p - q\| dp dq \\ &= - \frac{4\pi N \kappa}{|B_a|} - \frac{N(4\pi - |B_a|)}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \left(\ln \| -p_1 - q\| - \frac{1}{2} - \frac{\ln \cos \frac{\pi-a}{2}}{\tan^2 \frac{\pi-a}{2}} \right) dq \\ &= - \frac{4\pi N \kappa}{|B_a|} + \frac{N(4\pi - |B_a|)}{|B_a|} \left(1 + \frac{\ln \cos \frac{\pi-a}{2}}{\tan^2 \frac{\pi-a}{2}} - \ln 2 + \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right) \\ &= N \left[-\kappa + \ln \sin \frac{a}{2} + \cot^2 \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} + \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por último, acotamos δ . Observe que

$$\delta = \sum_{i \neq j} (U_{ij} - \hat{U}_{ij}),$$

y aplicando el Corolario 4.3.3 dos veces, obtenemos para todo i, j :

$$\begin{aligned} U_{ij} - \hat{U}_{ij} &\geq -\ln \|p_i - p_j\| + \frac{1}{|B_a|} \int_{B(p_i, a)} \left(\ln \|p_j - q\| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right) dq \\ &\geq -1 - 2 \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

(Una desigualdad similar con constantes menos explícitas se ha dado recientemente en [56, Lema 3.1]). Por lo tanto, hemos obtenido que

$$\begin{aligned} I(p_1, \dots, p_N) &\geq N(N-1) \left(-1 - 2 \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right) \\ &\quad + N \left[\ln 2 - \frac{1}{2} + \ln \sin \frac{a}{2} + \cot^2 \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} + \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Esta cota inferior es válida para cualquier elección de a . Para C una constante, eligiendo $\sin^2 \frac{a}{2} = C/N$ llegamos a:

$$I(p_1, \dots, p_N) \geq N(N-1) \left(-1 - \frac{N-C}{C} \ln \left(1 - \frac{C}{N} \right) \right) - \frac{1}{2} N \ln N$$

$$\begin{aligned}
& +N \left[\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln C + \frac{N-C}{C} \left(\frac{1}{2} + \frac{N-C}{2C} \ln \left(1 - \frac{C}{N} \right) \right) \right] \\
& \geq -\frac{1}{2}N \ln N + N \frac{2 \ln C - 2C + 4 \ln 2 - 1}{4} - \frac{C^2}{2} + O\left(\frac{1}{N}\right),
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad elemental

$$-\frac{C}{N} - \frac{C^2}{2N^2} - \frac{C^3}{N^3} \leq \ln \left(1 - \frac{C}{N} \right) \leq -\frac{C}{N} - \frac{C^2}{2N^2}, \quad \forall N \geq 2C.$$

Tomando $C = 1$ (que es el valor óptimo) concluimos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) &= \kappa N^2 + I(p_1, \dots, p_N) \\
&\geq \kappa N^2 - \frac{1}{2}N \ln N + N \left(\ln 2 - \frac{3}{4} \right) + o(N),
\end{aligned}$$

demostrando que $C_{\log} \geq \ln 2 - \frac{3}{4}$ como se afirmó.

Como vemos, mediante un cálculo directo obtenemos la misma cota inferior para C_{\log} que la dada en [48] sin usar el resultado sofisticado de Bétermin y Sandier.

Una pregunta natural es la siguiente:

¿Cómo debemos extender la energía logarítmica a la n -esfera unidad $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$?

En la literatura es bastante frecuente estudiar los potenciales de Riesz (1.2.2) y también utilizar el mismo potencial logarítmico en este contexto. Sin embargo, en una variedad riemanniana general \mathcal{M} la energía de Green (véase la Definición 1.4.1) es una opción más natural ya que no depende de cantidades extrínsecas, y está atrayendo más atención en los últimos años, véase [38, 68, 5]. Afirmamos que la razón profunda por la que el argumento de Lauritsen puede realizarse directamente en \mathbb{S}^2 , como hemos hecho en la Sección 4.4, es precisamente el hecho de que la función de Green en \mathbb{S}^2 (1.4.1) es el potencial logarítmico excepto constantes multiplicativa y aditiva. Por lo tanto, es posible una extensión de esta manera de proceder para obtener cotas inferiores para la energía de Green en \mathbb{S}^n .

Antes de adentrarnos en esta tarea vamos a obtener la expresión explícita de la función de Green en la esfera de dimensión n .

4.5. La función de Green en \mathbb{S}^n

Denotamos

$$V_n = \text{vol}(\mathbb{S}^n) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Proposición 4.5.1. *La energía de Green para \mathbb{S}^n es $G(\mathbb{S}^n; p, q) = g(\|p - q\|)$, donde*

$$g(t) = \frac{2}{nV_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \left[\left(1 - \frac{t^2}{4}\right)^{k+1} - \frac{B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k + 1\right)}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} \right].$$

(Véase (A.0.2) para la definición del símbolo de Pochhammer $(n)_k$ y note que $B(\cdot, \cdot)$ es la función beta (A.0.5)).

En [5] se presenta una expresión alternativa y equivalente de la función de Green para \mathbb{S}^n , aunque con distinta normalización.

Demostración. Siguiendo el método de la Sección 1.4.2, tenemos

$$G(\mathbb{S}^n; p, q) = \phi(\mathbb{S}^n; d_R(p, q)) = \phi(\mathbb{S}^n; r), \quad \text{con}$$

$$\phi(\mathbb{S}^n; r) = \int_r^\pi \frac{2^{n-1} B_{\cos^2 \frac{s}{2}}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)}{V_n \sin^{n-1} s} ds + C,$$

para C una constante y donde hemos usado también el Lema A.0.1. A partir de (A.0.7) y (A.0.4) obtenemos

$$\phi(\mathbb{S}^n; r) = \frac{1}{nV_n} \int_r^\pi \sin s {}_2F_1\left(1, n; \frac{n}{2} + 1; \cos^2 \frac{s}{2}\right) ds + C.$$

Usando (A.0.3), las identidades del ángulo mitad y el cambio de variable $t = \frac{1+\cos s}{2}$ tenemos

$$\phi(\mathbb{S}^n; r) = \frac{1}{nV_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \frac{1}{2^k (k+1)} (1 + \cos r)^{k+1} + C.$$

Es inmediato comprobar que $\|p - q\|^2 = 2(1 - \langle p, q \rangle)$ y $r = \arccos \langle p, q \rangle$. Por tanto,

$$(1 + \cos r)^{k+1} = 2^{k+1} \left(1 - \frac{\|p - q\|^2}{4}\right)^{k+1}, \quad p, q \in \mathbb{S}^n,$$

y así llegamos a

$$G(\mathbb{S}^n; p, q) = \frac{2}{nV_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \left(1 - \frac{\|p - q\|^2}{4}\right)^{k+1} + C.$$

La constante C es elegida tal que $G(\mathbb{S}^n; p, \cdot)$ tenga media cero en \mathbb{S}^n . Sin pérdida de generalidad tomamos $p = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{S}^n$. Sea $\varphi_{\mathbb{S}^n \setminus \mathcal{N}}^{-1}$ la parametrización de \mathbb{S}^n dada por la proyección estereográfica inversa en (1.3.3), cuyo jacobiano es igual a $2^n / (1 + \|z\|^2)^n$. Entonces

$$\|\varphi_{\mathbb{S}^n \setminus \mathcal{N}}^{-1}(0) - \varphi_{\mathbb{S}^n \setminus \mathcal{N}}^{-1}(z)\|^2 = \frac{4\|z\|^2}{1 + \|z\|^2},$$

y así tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V_n} \int_{\mathbb{S}^n} G(\mathbb{S}^n; p, q) dq \\ &= C + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2}{nV_n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \left(\frac{1}{1 + \|z\|^2}\right)^{k+1} \frac{2^n}{(1 + \|z\|^2)^n} dz, \end{aligned}$$

que es 0 si y solo si

$$C = -\frac{2^{n+1}}{nV_n^2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \left(\frac{1}{1 + \|z\|^2}\right)^{n+k+1} dz.$$

Ahora, cambiamos la suma por la integral, pasamos a coordenadas polares (Proposición 1.6.2), aplicamos el cambio de variable $t = r^2$ y usamos la definición de la función beta (A.0.5)

$$\begin{aligned} C &= -\frac{2^{n+1}V_{n-1}}{nV_n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{n+k+1}} dr \\ &= -\frac{2^n V_{n-1}}{nV_n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{(1+t)^{n+k+1}} dt \\ &= -\frac{2^n V_{n-1}}{nV_n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k + 1\right). \end{aligned}$$

Basta usar el siguiente hecho

$$V_n = 2^{n-1} V_{n-1} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right),$$

para concluir el resultado. \square

4.6. Una cota y el comportamiento asintótico de una función dada por su serie

En las sucesivas secciones usaremos varias veces la función

$$S_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} s^{k+1} = s + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} s^{k+1}, \quad s \in [0, 1). \quad (4.6.1)$$

En este apartado mostramos algunos límites elementales y asintóticos respecto a $S_n(s)$. Para $x > 0$, recordemos la siguiente fórmula elemental

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1, \quad (4.6.2)$$

y la fórmula de Stirling (válida para $x > 0$):

$$\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x \leq \Gamma(x) \leq \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{1}{12x}},$$

de la que se deduce el siguiente resultado.

Lema 4.6.1. Para $k \geq 1$ y $n \geq 2$ se cumple:

$$\frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(n)} k^{\frac{n}{2}-2} + O(k^{\frac{n}{2}-3}).$$

Demostración. Usaremos las siguientes desigualdades fundamentales:

$$D_1 : e^x \leq 1 + 2x, \quad 0 \leq x \leq \ln 2,$$

$$D_2 : \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq e^x \left(1 - \frac{x^2}{n}\right), \quad n > 1, |x| \leq n,$$

$$D_3 : 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \leq \sqrt{1-x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$D_4 : \sqrt{1+x} \leq 1+x, \quad x \geq 0,$$

$$D_5 : \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Note que, para $n \geq 2$, se cumple:

$$(n+k)^{\frac{n}{2}-1} = k^{\frac{n}{2}-1} + O(k^{\frac{n}{2}-2}). \quad (4.6.3)$$

En efecto, si n par es evidente por el binomio de Newton, mientras que si n es impar, entonces

$$(n+k)^{\frac{n}{2}-1} = \frac{(n+k)^{\frac{n-1}{2}}}{(n+k)^{\frac{1}{2}}} = \frac{k^{\frac{n-1}{2}} + O(k^{\frac{n-3}{2}})}{k^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

y basta aplicar las siguientes cotas

$$1 - \frac{n}{k+n} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n}{k}}} \leq 1,$$

deducidas a partir de D_4 . Ahora, por la fórmula de Stirling tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} \\ &= \frac{\Gamma(n+k)\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)(k+1)} \\ &\leq \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(n)} \sqrt{1 - \frac{\frac{n}{2} - 1}{n+k}} \left(1 + \frac{\frac{n}{2} - 1}{\frac{n}{2} + k + 1}\right)^{\frac{n}{2} + k + 1} \frac{(n+k)^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{1}{12(n+k)}}}{e^{\frac{n}{2}-1} k} \\ &\leq \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(n)} \frac{(n+k)^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{1}{12(n+k)}}}{k}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos aplicado

$$\sqrt{1 - \frac{\frac{n}{2} - 1}{n+k}} \leq 1, \quad y \quad \left(1 + \frac{\frac{n}{2} - 1}{\frac{n}{2} + k + 1}\right)^{\frac{n}{2} + k + 1} \leq e^{\frac{n}{2}-1}.$$

A partir de (4.6.3) y la desigualdad D_1 llegamos a

$$\frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} \leq \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(n)} k^{\frac{n}{2}-2} + O(k^{\frac{n}{2}-3}).$$

De nuevo, por la fórmula de Stirling, deducimos que:

$$\begin{aligned} \frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} &\geq \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(n)} \sqrt{1 - \frac{\frac{n}{2} - 1}{n+k}} \left(1 + \frac{\frac{n}{2} - 1}{\frac{n}{2} + k + 1}\right)^{\frac{n}{2}+k+1} \\ &\quad \times \frac{(n+k)^{\frac{n}{2}-1}}{e^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{1}{12(n/2+k+1)}} (k+1)}. \end{aligned}$$

Por las desigualdades D_1, D_2, D_3, D_5 , (4.6.3) y el hecho de que

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{6(n/2+k+1)}} = 1 - \frac{1}{6(n/2+k+1)+1} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

obtenemos

$$\frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} \geq \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(n)} k^{\frac{n}{2}-2} + O(k^{\frac{n}{2}-3}),$$

y el resultado sigue. \square

Lema 4.6.2. Para $p > -1$ y $s \in (0, 1)$, se cumple:

$$\int_0^\infty x^p s^{x+1} dx = \frac{s\Gamma(p+1)}{\left(\ln \frac{1}{s}\right)^{p+1}}. \quad (4.6.4)$$

Demostración.

$$\int_0^\infty x^p s^{x+1} dx = \frac{s}{\left(\ln \frac{1}{s}\right)^p} \int_0^\infty \left(x \ln \frac{1}{s}\right)^p e^{-x \ln \frac{1}{s}} dx = \frac{s}{\left(\ln \frac{1}{s}\right)^{p+1}} \int_0^\infty t^p e^{-t} dt,$$

donde hemos aplicado el cambio de variable $t = x \ln \frac{1}{s}$. Basta usar (A.0.1) para llegar al resultado. \square

Lema 4.6.3. Sea $p > -1$. Entonces

$$\sum_{k=1}^\infty k^p s^{k+1} \leq \frac{sC(p)}{(1-s)^{p+1}}, \quad s \in [0, 1),$$

para alguna constante $C(p)$ dependiente solo de p . En particular, para $n \geq 3$,

$$S_n(s) \leq \frac{sC(n)}{(1-s)^{\frac{n}{2}-1}},$$

donde $S_n(s)$ está dada en (4.6.1).

Demostración. Asumimos que $s > 0$. Sea $f(x) = x^p s^{x+1}$, para $x > 0$. Distinguimos dos casos según el valor de p . En primer lugar, si $p \in (-1, 0]$ entonces $f(x)$ es una función decreciente y a partir de (4.6.4) y (4.6.2) deducimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^p s^{k+1} \leq \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{s\Gamma(p+1)}{\left(\ln \frac{1}{s}\right)^{p+1}} \leq \frac{sC(p)}{(1-s)^{p+1}}.$$

Ahora, si $p > 0$, $f(x)$ alcanza su máximo global en $x_{\text{máx}} = \frac{p}{\ln \frac{1}{s}}$ con valor

$$f(x_{\text{máx}}) = s x_{\text{máx}}^p e^{(x_{\text{máx}} \ln s)} = s \left(\frac{p}{e \ln \frac{1}{s}} \right)^p.$$

La comparación de la suma con la integral debe hacerse en los dos intervalos separados por este punto ya que en un lado los términos son crecientes y en el otro son decrecientes. Todo junto, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^p s^{k+1} &\leq \int_1^{[x_{\text{máx}}]} f(x) dx + \int_{[x_{\text{máx}}]}^{[x_{\text{máx}}]+1} f(x_{\text{máx}}) dx + \int_{[x_{\text{máx}}]+1}^{\infty} f(x-1) dx \\ &\leq f(x_{\text{máx}}) + \int_1^{[x_{\text{máx}}]} f(x) dx + \int_{[x_{\text{máx}}]}^{\infty} f(x) dx \\ &\leq \frac{sC(p)}{\left(\ln \frac{1}{s}\right)^p} + \int_0^{\infty} x^p s^{x+1} dx \\ &\stackrel{(4.6.4)}{=} \frac{sC(p)}{\left(\ln \frac{1}{s}\right)^p} + \frac{s\Gamma(p+1)}{\left(\ln \frac{1}{s}\right)^{p+1}}, \end{aligned} \tag{4.6.5}$$

y finalmente por (4.6.2) el lema se cumple. Por un argumento similar de comparación, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^p s^{k+1} &\geq \int_1^{[x_{\text{máx}}]} f(x-1) dx + \int_{[x_{\text{máx}}]}^{[x_{\text{máx}}]+1} -f(x_{\text{máx}}) dx + \int_{[x_{\text{máx}}]+1}^{\infty} f(x) dx \\ &\geq -f(x_{\text{máx}}) + \int_0^{[x_{\text{máx}}]-1} f(x) dx + \int_{[x_{\text{máx}}]+1}^{\infty} f(x) dx \\ &\geq -\frac{sC(p)}{\left(\ln \frac{1}{s}\right)^p} + \int_0^{\infty} x^p s^{x+1} dx \\ &\stackrel{(4.6.4)}{=} -\frac{sC(p)}{\left(\ln \frac{1}{s}\right)^p} + \frac{s\Gamma(p+1)}{\left(\ln \frac{1}{s}\right)^{p+1}}. \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

Para la cota de $S_n(s)$ basta aplicar el Lema 4.6.1 y la cota superior recién obtenida para $p = \frac{n}{2} - 2$. En efecto, para $C(n) > 0$ una constante y por $(1-s)^{\frac{n}{2}-1} \leq 1$, tenemos

$$S_n(s) \leq s + \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{C(n)}{k}\right) k^{\frac{n}{2}-2} s^{k+1}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{s}{(1-s)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)(1+C(n))}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{n}{2}-2} s^{k+1} \\ &\leq \frac{sC(n)}{(1-s)^{\frac{n}{2}-1}}. \end{aligned}$$

□

Un análisis más fino del argumento de aproximación anterior desvela la asintótica de S_n a medida que su argumento se acerca 1:

Lema 4.6.4. *La siguiente igualdad asintótica es válida para $n \geq 3$:*

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{\frac{n}{2}-1} S_n(1-s) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(n)}.$$

Demostración. A partir del Lema 4.6.1 tenemos para alguna constante $C(n) > 0$:

$$\begin{aligned} s^{\frac{n}{2}-1} S_n(1-s) &\leq s^{\frac{n}{2}-1} \left(1-s + \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{n}{2}-2} \left(1 + \frac{C(n)}{k} \right) (1-s)^{k+1} \right) \\ &\leq s^{\frac{n}{2}-1} (1-s) + \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(n)} s^{\frac{n}{2}-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{n}{2}-2} (1-s)^{k+1} \\ &\quad + \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)C(n)}{\Gamma(n)} s^{\frac{n}{2}-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{n}{2}-3} (1-s)^{k+1}. \end{aligned}$$

Fíjese que por el Lema 4.6.3 tenemos

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)C(n)}{\Gamma(n)} s^{\frac{n}{2}-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{n}{2}-3} (1-s)^{k+1} \leq s(1-s)C(n),$$

luego dicho término junto con $s^{\frac{n}{2}-1}(1-s)$ son irrelevantes (son cero) en el límite. Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s^{\frac{n}{2}-1} S_n(1-s) &\leq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(n)} s^{\frac{n}{2}-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{n}{2}-2} (1-s)^{k+1} \\ &\stackrel{(4.6.5)}{\leq} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)s^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(n)} \left(\frac{(1-s)C(n)}{\left(\ln \frac{1}{1-s}\right)^{\frac{n}{2}-2}} + \frac{(1-s)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\left(\ln \frac{1}{1-s}\right)^{\frac{n}{2}-1}} \right) \\ &\stackrel{(4.6.2)}{\leq} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)s^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(n)} \left(\frac{(1-s)C(n)}{s^{\frac{n}{2}-2}} + \frac{(1-s)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{s^{\frac{n}{2}-1}} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(n)}. \end{aligned}$$

El límite inferior se demuestra de la misma manera. Esta vez la constante $C(n)$ es negativa, pero de nuevo no juega ningún papel en el límite, llegando a

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} s^{\frac{n}{2}-1} S_n(1-s) &\geq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(n)} s^{\frac{n}{2}-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{n}{2}-2} (1-s)^{k+1} \\
&\stackrel{(4.6.6)}{\geq} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1) s^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(n)} \left(-\frac{(1-s)C(n)}{\left(\ln \frac{1}{1-s}\right)^{\frac{n}{2}-2}} + \frac{(1-s)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\left(\ln \frac{1}{1-s}\right)^{\frac{n}{2}-1}} \right) \\
&\stackrel{(4.6.2)}{\geq} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1) s^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(n)} \left(\frac{(s-1)C(n)}{s^{\frac{n}{2}-2}} + \frac{(1-s)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}-1)}{s^{\frac{n}{2}-1}} \right) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(n)}.
\end{aligned}$$

□

En las siguientes dos secciones, escribimos el análogo a la Proposición 4.3.1 en la primera, el Lema 4.3.2 y el Corolario 4.3.3 en la segunda.

4.7. Valor medio de la función de Green en una bola geodésica

Como antes, sean $B(p_0, a)$ la bola geodésica centrada en $p_0 \in \mathbb{S}^n$ con radio $a > 0$ y $|B_a|$ el volumen de esta bola. La siguiente cantidad jugará el papel del término “ $-\frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2}$ ” de la Proposición 4.3.1:

$$K(\mathbb{S}^n, a) = \frac{2}{nV_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2}+1\right)_k (k+1)} \frac{B_{\sin^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{n}{2}+k+1, \frac{n}{2}\right)}{B_{\sin^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)}, \quad a \in (0, \pi).$$

Observe que, a partir de la Proposición 4.5.1,

$$G(\mathbb{S}^n; p, -p) = g(2) = -K(\mathbb{S}^n, \pi), \quad \forall p \in \mathbb{S}^n. \quad (4.7.1)$$

Proposición 4.7.1 (\mathbb{S}^n -análogo de la Proposición 4.3.1). *Sean $p_0, p \in \mathbb{S}^n$ y $a \in (0, \pi)$. Entonces, $|B_a| = 2^{n-1} V_{n-1} B_{\sin^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ y además,*

I) Si $p \notin B(p_0, a)$:

$$\frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dq = G(\mathbb{S}^n; p, p_0) + K(\mathbb{S}^n, a).$$

II) Si $p \in B(p_0, a)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dq \\
&= -\frac{B_{\cos^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)}{B_{\sin^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} (G(\mathbb{S}^n; p, -p_0) + K(\mathbb{S}^n, \pi - a)).
\end{aligned}$$

Demostración. Sea $S(p_0, r) \subset \mathbb{S}^n$ una esfera geodésica contenida en \mathbb{S}^n . Ya que $S(p_0, r)$ es una esfera de dimensión $(n-1)$ con radio $\sin r$, su volumen es $\text{vol}(S(p_0, r)) = V_{n-1} \sin^{n-1} r$. El volumen de la bola geodésica es entonces (usando el Lema A.0.1):

$$|B_a| = \int_0^a \text{vol}(S(p_0, r)) dr = V_{n-1} \int_0^a \sin^{n-1} r dr = 2^{n-1} V_{n-1} B_{\sin^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)$$

La igualdad del primer ítem, para $p \notin B(p_0, a)$, es un resultado esencialmente conocido (al menos la existencia de la constante $K(\mathbb{S}^n, a)$, aunque su valor exacto no parece estar presente en la literatura): considere la función $H(q) = G(\mathbb{S}^n; p, q) - G(\mathbb{S}^n; -p_0, q)$. Entonces, ya que $p, -p_0 \notin B(p_0, a)$, concluimos que $\Delta H \equiv 0$ en esa bola. A partir del Teorema 1.5.10, el valor medio de H en $S(p_0, r)$ con $r < a$ es igual a $H(p_0) = G(\mathbb{S}^n; p, p_0) - G(\mathbb{S}^n; -p_0, p_0)$. Es decir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{vol}(S(p_0, r))} \int_{q \in S(p_0, r)} (G(\mathbb{S}^n; p, q) - G(\mathbb{S}^n; -p_0, q)) dq \\ = G(\mathbb{S}^n; p, p_0) - G(\mathbb{S}^n; -p_0, p_0). \end{aligned}$$

Entonces, reorganizando los términos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{vol}(S(p_0, r))} \int_{q \in S(p_0, r)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dq - G(\mathbb{S}^n; p, p_0) \\ = \frac{1}{\text{vol}(S(p_0, r))} \int_{q \in S(p_0, r)} G(\mathbb{S}^n; -p_0, q) dq - G(\mathbb{S}^n; -p_0, p_0), \end{aligned}$$

llegamos a

$$\begin{aligned} \int_{q \in S(p_0, r)} (G(\mathbb{S}^n; p, q) - G(\mathbb{S}^n; p, p_0)) dq \\ = \int_{q \in S(p_0, r)} (G(\mathbb{S}^n; -p_0, q) - G(\mathbb{S}^n; -p_0, p_0)) dq. \end{aligned}$$

Ahora, integrando ambos miembros de la igualdad justo de arriba cuando $q \in B(p_0, a)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_{q \in S(p_0, r)} (G(\mathbb{S}^n; p, q) - G(\mathbb{S}^n; p, p_0)) dq dr \\ = \int_0^a \int_{q \in S(p_0, r)} (G(\mathbb{S}^n; -p_0, q) - G(\mathbb{S}^n; -p_0, p_0)) dq dr. \end{aligned}$$

En otras palabras, podemos asumir que $p = -p_0$ para acabar el cálculo del valor medio. Ahora se trata de un cálculo sencillo: denotamos por

$$A = \frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} G(\mathbb{S}^n; -p_0, q) dq - G(\mathbb{S}^n; -p_0, p_0).$$

Entonces, a partir de las expresiones de $|B_a|$ y $\text{vol}(S(p_0, r))$ así como las relaciones del ángulo doble tenemos:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{|B_a|} \int_0^a \int_{q \in S(p_0, r)} G(\mathbb{S}^n; -p_0, q) dq - G(\mathbb{S}^n; -p_0, p_0) \\
&= \frac{1}{|B_a|} \int_0^a \text{vol}(S(p_0, r)) \frac{2}{nV_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \sin^{2k+2} \frac{r}{2} dr \\
&= \frac{2}{2^{n-1} n V_n B_{\sin^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \int_0^a \sin^{n-1} r \sin^{2k+2} \frac{r}{2} dr \\
&= \frac{2}{n V_n B_{\sin^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \int_0^a \sin^{2k+n+1} \frac{r}{2} \cos^{n-1} \frac{r}{2} dr.
\end{aligned}$$

Note que en el segundo igual hemos usado las igualdades

$$\begin{aligned}
\| -p_0 - q \|^2 &= 4 - \|p_0 - q\|^2, \quad \forall p_0, q \in \mathbb{S}^n, \\
\|p_0 - q\|^2 &= 4 \sin^2 \frac{r}{2}, \quad \forall q \in S(p_0, r).
\end{aligned}$$

Mediante el cambio de variable $u = \sin^2 \frac{r}{2}$ y la definición de la función beta incompleta (A.0.7) llegamos a

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2}{n V_n B_{\sin^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \int_0^{\sin^2 \frac{a}{2}} u^{k+\frac{n}{2}} (1-u)^{\frac{n}{2}-1} du \\
&= \frac{2}{n V_n B_{\sin^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} B_{\sin^2 \frac{a}{2}} \left(k + \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2}\right) \\
&= K(\mathbb{S}^n, a),
\end{aligned}$$

como afirmamos.

Ahora, suponemos que $p \in B(p_0, a)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{q \in B(p_0, a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dq &= \int_{q \in \mathbb{S}^n} G(\mathbb{S}^n; p, q) dq - \int_{q \in B(-p_0, \pi-a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dq \\
&= - \int_{q \in B(-p_0, \pi-a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dq, \tag{4.7.2}
\end{aligned}$$

ya que $G(\mathbb{S}^n; p, \cdot)$ tiene media cero para todo $p \in \mathbb{S}^n$. Del primer ítem tenemos:

$$\int_{q \in B(-p_0, \pi-a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dq = |B_{\pi-a}| (G(\mathbb{S}^n; p, -p_0) + K(\mathbb{S}^n, \pi - a)),$$

sustituyendo en (4.7.2) y dividiendo por $|B_a|$ llegamos a la expresión deseada, para lo cual simplemente debemos tener presente la siguiente igualdad

$$\frac{|B_{\pi-a}|}{|B_a|} = \frac{B_{\cos^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)}{B_{\sin^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)},$$

hecho que se deduce de las relaciones $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$ y $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$. \square

Establezcamos a continuación algunas propiedades básicas de $K(\mathbb{S}^n, a)$. La primera solo muestra que $K(\mathbb{S}^2, a)$ es igual a $-1/2 - \cot^2(a/2) \ln \cos(a/2)$ bajo la constante multiplicativa $-1/(2\pi)$, que tiene sentido a la luz de (1.4.1).

Lema 4.7.2. *Tenemos*

$$K(\mathbb{S}^2, a) = -\frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right), \quad \text{para } a \in (0, \pi).$$

Además,

$$K(\mathbb{S}^n, a) = \frac{a^2}{(2n+4)V_n} + o(a^2),$$

$$K(\mathbb{S}^n, \pi - a) = K(\mathbb{S}^n, \pi) - \frac{a^2}{(2n-4)V_n} + o(a^2).$$

Demostración. Si $n = 2$, denotando $s = \sin^2 \frac{a}{2}$ tenemos

$$K(\mathbb{S}^2, a) = \frac{1}{4\pi s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{k+2}}{(k+1)(k+2)}.$$

Ahora, la suma infinita es una función analítica en el disco unitario complejo y su segunda derivada es $\sum_{k \geq 0} s^k = 1/(1-s)$. Integrando dos veces deducimos el valor de la suma infinita anterior que es $s + (1-s) \ln(1-s)$. Todo junto, tenemos

$$K(\mathbb{S}^2, a) = \frac{1}{4\pi} + \frac{\cos^2 \frac{a}{2} \ln \cos^2 \frac{a}{2}}{4\pi \sin^2 \frac{a}{2}},$$

y la primera afirmación queda demostrada. Para la segunda, observemos que $K(\mathbb{S}^n, a)$ es analítica compleja en el disco unitario. En efecto, a partir del Lema 4.6.1 uno puede comprobar que

$$K(\mathbb{S}^n, a) \leq \frac{2}{nV_n} \frac{B_{\sin^2 \frac{a}{2}}(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2})}{B_{\sin^2 \frac{a}{2}}(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})} + \frac{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{nV_n\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{n/2-3} + O(k^{n/2-4}) \right) \frac{a^{2k+2}}{2}, \quad (4.7.3)$$

y por el criterio del cociente para series se verifica que la serie (4.7.3) es convergente en el disco unidad y por el Teorema 1.5.6 concluimos que $K(\mathbb{S}^n, a)$ converge absoluta y uniformemente. Entonces, por el Teorema 1.5.7, $K(\mathbb{S}^n, a)$ es analítica en el disco unidad. Por lo tanto, por el Teorema 1.5.4, podemos calcular su serie de Taylor en $a = 0$ término a término, y sólo el término $k = 0$ tiene una segunda derivada no nula en $a = 0$, lo que da como resultado

$$K(\mathbb{S}^n, a) = \frac{2}{nV_n} \frac{B_{\sin^2 \frac{a}{2}}(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2})}{B_{\sin^2 \frac{a}{2}}(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})} + o(a^2) = \frac{a^2}{(2n+4)V_n} + o(a^2).$$

Para probar la segunda asintótica, denotemos

$$L(n) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} (K(\mathbb{S}^n, \pi) - K(\mathbb{S}^n, \pi - a)).$$

Usando (A.0.8) tenemos que

$$\begin{aligned} B_{\cos^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2} + k + 1, \frac{n}{2} \right) &= B \left(\frac{n}{2} + k + 1, \frac{n}{2} \right) - B_{\sin^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k + 1 \right), \\ \frac{1}{B \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)} - \frac{1}{B_{\cos^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)} &= - \frac{B_{\sin^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)}{B_{\cos^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) B \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)}, \end{aligned}$$

y es fácil comprobar que $L(n) = L_1(n) + L_2(n)$ donde

$$\begin{aligned} L_1(n) &= \frac{-2}{nV_n} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} \frac{B_{\sin^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) B \left(\frac{n}{2} + k + 1, \frac{n}{2} \right)}{B_{\cos^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) B \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)}, \\ L_2(n) &= \frac{2}{nV_n} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} \frac{B_{\sin^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k + 1 \right)}{B_{\cos^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Tenemos que $L_1(n) \leq 0$, y por la cota superior elemental del Lema A.0.2

$$L_1(n) \geq \frac{-4}{n^2 V_n} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} \frac{\sin^n \frac{a}{2} B \left(\frac{n}{2} + k + 1, \frac{n}{2} \right)}{B_{\cos^2 \frac{a}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) B \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)},$$

de donde deducimos que $L_1(n) = 0$ si $n \geq 3$. En cuanto a $L_2(n)$, la asintótica $a/2 \sim \sin a/2$ (que implica $a^2 \sim 4 \sin^2 \frac{a}{2}$), la definición de la función beta incompleta (A.0.7), el teorema de convergencia monótona y el cambio de variable $t = u \sin^2 \frac{a}{2}$ dan sucesivamente

$$\begin{aligned} L_2(n) &= \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sin^2 \frac{a}{2}} \int_0^{\sin^2 \frac{a}{2}} \frac{t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1}}{2nV_n B \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)} \frac{(n)_k (1-t)^{k+1}}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 \frac{a}{2}} \int_0^{\sin^2 \frac{a}{2}} \frac{t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1}}{2nV_n B \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k (1-t)^{k+1}}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{(u \sin^2 \frac{a}{2})^{\frac{n}{2}-1} (1 - u \sin^2 \frac{a}{2})^{\frac{n}{2}-1}}{2nV_n B \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k (1 - u \sin^2 \frac{a}{2})^{k+1}}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} du. \end{aligned}$$

A partir de la cota superior del Lema 4.6.3, el integrando está acotado superiormente por alguna constante $C(n)$ cuyo valor no necesitamos conocer. Por lo tanto, podemos intercambiar límite e integral por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue obteniendo

$$L_2(n) = \int_0^1 \frac{1}{2nV_n B \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)} \lim_{a \rightarrow 0} \left(\left(u \sin^2 \frac{a}{2} \right)^{\frac{n}{2}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k (1 - u \sin^2 \frac{a}{2})^{k+1}}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k (k+1)} \right) du.$$

Finalmente, a partir del Lema 4.6.4, el límite justo de arriba es constantemente igual a $\Gamma(\frac{n}{2} + 1)\Gamma(\frac{n}{2} - 1)/\Gamma(n)$. Usando la propiedad P.3 de la Sección A.0.1 y (A.0.6) llegamos a

$$L_2(n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)\Gamma(\frac{n}{2} - 1)}{2nV_nB(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})\Gamma(n)} = \frac{1}{(2n - 4)V_n},$$

y el lema sigue. \square

4.8. Una función no negativa

Lema 4.8.1 (\mathbb{S}^n -análogo al Lema 4.3.2). *La función $F : (0, 2) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(t, a) = g(t) + K(\mathbb{S}^n, a) + \frac{B_{\cos^2 \frac{a}{2}}(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})}{B_{\sin^2 \frac{a}{2}}(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})} \left(g(\sqrt{4 - t^2}) + K(\mathbb{S}^n, \pi - a) \right),$$

con $g(t)$ como en la Proposición 4.5.1, es no negativa.

A partir de (A.0.8) y las definiciones de $g(t)$ y $K(\mathbb{S}^n, a)$, la función $F(t, a)$ puede escribirse como

$$F(t, a) = \frac{2}{nV_nB_{\sin^2 \frac{a}{2}}(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{2}k(k+1)} \times \left[B_{\sin^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \left(1 - \frac{t^2}{4}\right)^{k+1} + B_{\cos^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \left(\frac{t^2}{4}\right)^{k+1} + H(a) \right]$$

donde

$$\begin{aligned} H(a) &= B_{\sin^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{n}{2} + k + 1, \frac{n}{2}\right) + B_{\cos^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{n}{2} + k + 1, \frac{n}{2}\right) \\ &\quad - B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k + 1\right) \\ &\stackrel{(A.0.8)}{=} B_{\sin^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{n}{2} + k + 1, \frac{n}{2}\right) - B_{\sin^2 \frac{a}{2}}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k + 1\right). \end{aligned}$$

Tomando ahora $s = \frac{t^2}{4}$ y $\alpha = \sin^2 \frac{a}{2}$ en $F(t, a)$, el Lema 4.8.1 queda implicado por lo siguiente.

Proposición 4.8.2. *La función $\widehat{F} : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\begin{aligned} \widehat{F}(s, \alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{2}k(k+1)} Q_k(s, \alpha), \text{ donde} \\ Q_k(s, \alpha) &= (1 - s)^{k+1} B_{\alpha}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + s^{k+1} B_{1-\alpha}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \\ &\quad + B_{\alpha}\left(\frac{n}{2} + k + 1, \frac{n}{2}\right) - B_{\alpha}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k + 1\right), \end{aligned}$$

es no negativa.

Demostración. Primero fijamos s y buscamos los mínimos en $Q_k(s, \alpha)$ con respecto a α . Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Q_k(s, \alpha) = \alpha^{\frac{n}{2}-1} (1-\alpha)^{\frac{n}{2}-1} [(1-s)^{k+1} - s^{k+1} + \alpha^{k+1} - (1-\alpha)^{k+1}],$$

lo que implica fácilmente que $Q_k(s, \alpha)$ es una función decreciente de α en $(0, s)$ y una función creciente de α en $(s, 1)$. Es decir, $Q(s, \alpha)$ tiene un mínimo global en $\alpha = s$ y consecuentemente también lo tiene $\widehat{F}(s, \alpha)$. Por lo tanto, basta comprobar que $\widehat{F}(s, s) \geq 0$, para todo $s \in (0, 1)$. Resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \widehat{F}(s, s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{\left(\frac{n}{2}+1\right)_k} \left(s^k B_{1-s} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) - (1-s)^k B_s \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) \right) \\ &= B_{1-s} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) {}_2F_1 \left(1, n; \frac{n}{2} + 1; s \right) \\ &\quad - B_s \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) {}_2F_1 \left(1, n; \frac{n}{2} + 1; 1-s \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado (A.0.3) y (A.0.4) en el segundo y tercer igual, respectivamente. Entonces $\widehat{F}(s, s)$ es constante para $s \in (0, 1)$. Probaremos que $\lim_{s \rightarrow 0} \widehat{F}(s, s) = 0$ para concluir el resultado. Para este fin, definimos

$$\begin{aligned} T_1(s) &= B_s \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{\left(\frac{n}{2}+1\right)_k (k+1)} (1-s)^{k+1}, \\ T_2(s) &= B_{1-s} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{\left(\frac{n}{2}+1\right)_k (k+1)} s^{k+1}, \\ T_3(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{\left(\frac{n}{2}+1\right)_k (k+1)} B_s \left(\frac{n}{2} + k + 1, \frac{n}{2} \right), \\ T_4(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{\left(\frac{n}{2}+1\right)_k (k+1)} B_s \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k + 1 \right). \end{aligned}$$

Así que $\widehat{F}(s, s) = T_1(s) + T_2(s) + T_3(s) - T_4(s)$. Ahora basta con comprobar que cada $T_i(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow 0$, que es bastante inmediato a partir de los lemas A.0.2 and 4.6.3:

$$\begin{aligned} T_1(s) &\leq C(n) s^{\frac{n}{2}} S_n(1-s) \leq C(n) s, \\ T_2(s) &\leq C(n) S_n(s) \leq \frac{C(n) s}{(1-s)^{\frac{n}{2}-1}}, \\ T_3(s) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{\left(\frac{n}{2}+1\right)_k (k+1)} s^{\frac{n}{2}+k+1} = s^{\frac{n}{2}} S_n(s) \leq \frac{s^{\frac{n}{2}+1} C(n)}{(1-s)^{\frac{n}{2}-1}}, \\ T_4(s) &\leq \int_0^s t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} S_n(1-t) dt \leq C(n) \int_0^s (1-t)^{n/2} dt \leq C(n) s, \end{aligned}$$

como $T_i(s) \geq 0$, para $s \in (0, 1)$ y las cotas superiores recién obtenidas para cada $T_i(s)$ verifican que tienden a 0 cuando $s \rightarrow 0$, concluimos que $T_i(s) \rightarrow 0$ y, por tanto, $\widehat{F}(s, s) = 0$. Tenga en cuenta que cada aparición de $C(n)$ puede ser una constante diferente. Con esto termina la prueba. \square

Corolario 4.8.3 (\mathbb{S}^n -análogo al Corolario 4.3.3). Sean $p_0, p \in \mathbb{S}^n$ y $a > 0$. Entonces,

$$\frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dq \leq G(\mathbb{S}^n; p, p_0) + K(\mathbb{S}^n, a),$$

con una igualdad si $p \notin B(p_0, a)$.

Demostración. Inmediata a partir de la Proposición 4.7.1 y el Lema 4.8.1. \square

Nos encontramos ya en disposición de presentar y demostrar el principal resultado de este capítulo: una cota inferior de la energía de Green para la esfera de dimensión n .

4.9. Cota inferior para la energía de Green en \mathbb{S}^n

Recordemos que dados $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{S}^n$, su energía de Green es

$$E_{\mathbb{S}^n}(p_1, \dots, p_N) = \sum_{i \neq j} G(\mathbb{S}^n; p_i, p_j).$$

Nuestro principal resultado de este capítulo es la siguiente cota inferior para la energía de Green en \mathbb{S}^n :

Teorema 4.9.1 (Principal resultado). Sean p_1, \dots, p_N , N puntos en \mathbb{S}^n con $n \geq 3$. Entonces,

$$E_{\mathbb{S}^n}(p_1, \dots, p_N) \geq -\frac{n^{1+2/n}}{(n^2 - 4)V_n^{1-2/n}V_{n-1}^{2/n}}N^{2-2/n} + o(N^{2-2/n}),$$

donde, recordemos, V_n es el volumen de \mathbb{S}^n .

Nótese que se conocen resultados similares para la energía de Green en espacios proyectivos [5, 12]. Para demostrar el Teorema 4.9.1 se procede exactamente igual que en la Sección 4.4, cambiando \mathbb{S}^2 por \mathbb{S}^n :

(A) Escribimos la energía de Green como sigue:

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{S}^n}(p_1, \dots, p_N) &= \sum_{i \neq j} G(\mathbb{S}^n; p_i, p_j) - \frac{2N}{V_n} \sum_{i=1}^N \int_{q \in \mathbb{S}^n} G(\mathbb{S}^n; p_i, q) dq \\ &\quad + \frac{N^2}{V_n^2} \int_{p, q \in \mathbb{S}^n} G(\mathbb{S}^n; p, q) dpdq. \end{aligned}$$

Observe que a partir de la Definición 1.4.1, estas dos nuevas integrales son cero.

(B) Sean

$$\begin{aligned}
U_{BB} &= \frac{N^2}{V_n^2} \int_{p,q \in \mathbb{S}^n} G(\mathbb{S}^n; p, q) dpdq = 0, \\
U_i &= -\frac{2N}{V_n} \int_{\mathbb{S}^n} G(\mathbb{S}^n; p_i, q) dq = 0, \\
U_{ij} &= G(\mathbb{S}^n; p_i, p_j), \\
\hat{U}_i &= -\frac{2N}{V_n |B_a|} \int_{B(p_i, a)} \int_{\mathbb{S}^n} G(\mathbb{S}^n; p, q) dpdq = 0, \\
\hat{U}_{ij} &= \frac{1}{|B_a|^2} \int_{B(p_i, a)} \int_{B(p_j, a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dpdq.
\end{aligned}$$

Definimos α, β, γ y δ por

$$\begin{aligned}
&E_{\mathbb{S}^n}(p_1, \dots, p_N) \\
&= \underbrace{U_{BB} + \sum_{i=1}^N \hat{U}_i}_{\alpha} + \underbrace{\sum_{i,j} \hat{U}_{ij}}_{\beta} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (U_i - \hat{U}_i)}_{\beta} - \underbrace{\sum_{i=1}^N \hat{U}_{ii}}_{\gamma} + \underbrace{\sum_{i \neq j} (U_{ij} - \hat{U}_{ij})}_{\delta}.
\end{aligned}$$

Procedemos a acotar y, cuando sea posible a calcular, los términos α, β, γ y δ . De nuevo $\alpha \geq 0$ a partir de la Proposición 1.4.2. En efecto, basta tomar

$$\nu(p) = \frac{N}{V} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{|B_a|} \chi_{B(p_i, a)}(p),$$

y darse cuenta que

$$\alpha = \int_{p,q \in \mathbb{S}^n} G(\mathbb{S}^n; p, q) d\nu(p) d\nu(q).$$

Por ser $U_i = \hat{U}_i = 0$, es inmediato ver que $\beta = 0$. Como en la Sección 4.4 y usando en este caso el primer ítem de la Proposición 4.5.1 tenemos

$$\begin{aligned}
\gamma &= -\frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \int_{B(p_1, a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dpdq \\
&= -\frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \left(\int_{\mathbb{S}^n} G(\mathbb{S}^n; p, q) dp - \int_{B(-p_1, \pi-a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dp \right) dq \\
&= \frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \int_{B(-p_1, \pi-a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dpdq \\
&= \frac{N|B_{\pi-a}|}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} (G(\mathbb{S}^n; -p_1, q) + K(\mathbb{S}^n, \pi - a)) dq \\
&= \frac{N|B_{\pi-a}|}{|B_a|} (K(\mathbb{S}^n, \pi - a) + K(\mathbb{S}^n, a) + G(\mathbb{S}^n; -p_1, p_1))
\end{aligned}$$

$$= \frac{N|B_{\pi-a}|}{|B_a|} (K(\mathbb{S}^n, \pi - a) + K(\mathbb{S}^n, a) - K(\mathbb{S}^n, \pi)),$$

donde en la última igualdad hemos usado (4.7.1). Acotamos también δ siguiendo el mismo método que en la Sección 4.4: para cada $i \neq j$, a partir del Corolario 4.8.3 tenemos

$$\begin{aligned} U_{ij} - \widehat{U}_{ij} &= G(\mathbb{S}^n; p_i, p_j) - \frac{1}{|B_a|^2} \int_{B(p_i, a)} \int_{B(p_j, a)} G(\mathbb{S}^n; p, q) dpdq \\ &\geq G(\mathbb{S}^n; p_i, p_j) - \frac{1}{|B_a|} \int_{B(p_i, a)} (G(\mathbb{S}^n; p_j, q) + K(\mathbb{S}^n, a)) dq \\ &\geq -K(\mathbb{S}^n, a) + G(\mathbb{S}^n; p_i, p_j) - (G(\mathbb{S}^n; p_j, p_i) + K(\mathbb{S}^n, a)) \\ &= -2K(\mathbb{S}^n, a). \end{aligned}$$

Por tanto, llegamos a

$$\delta \geq -2N(N-1)K(\mathbb{S}^n, a),$$

y concluimos:

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{S}^n}(p_1, \dots, p_N) &\geq -2N(N-1)K(\mathbb{S}^n, a) \\ &\quad + \frac{N|B_{\pi-a}|}{|B_a|} (K(\mathbb{S}^n, \pi - a) + K(\mathbb{S}^n, a) - K(\mathbb{S}^n, \pi)). \end{aligned}$$

(C) La desigualdad anterior es válida para cualquier $a \in (0, \pi)$. En particular, para valores suficientemente pequeños de a tenemos que $|B_{\pi-a}| \sim |B_\pi| = V_n$ y además, a partir de los lemas 4.7.2 y A.0.3 la cota inferior puede ser reescrita del siguiente modo

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{S}^n}(p_1, \dots, p_N) &\geq -N(N-1) \left(\frac{a^2}{(n+2)V_n} + o(a^2) \right) \\ &\quad + \frac{NnV_n}{V_{n-1}a^n + o(a^n)} \left(\frac{-2a^2}{(n-2)(n+2)V_n} + o(a^2) \right). \end{aligned}$$

Tomando $a = C^{1/2}N^{-1/n}$ con $C > 0$ una constante y $n \geq 3$ (a es suficientemente pequeño), concluimos que

$$E_{\mathbb{S}^n}(p_1, \dots, p_N) \geq -\frac{N^{2-2/n}}{n+2} \left(\frac{C}{V_n} + \frac{2nC^{1-n/2}}{(n-2)V_{n-1}} \right) + o(N^{2-2/n}).$$

La constante C puede ser cualquier valor positivo. Es fácil comprobar que $C = \left(\frac{nV_n}{V_{n-1}} \right)^{2/n}$ es un máximo de

$$-\left(\frac{C}{V_n} + \frac{2nC^{1-n/2}}{(n-2)V_{n-1}} \right).$$

Considerando el valor óptimo de C llegamos a

$$E_{\mathbb{S}^n}(p_1, \dots, p_N) \geq -\frac{n^{1+2/n}}{(n^2-4)V_n^{1-2/n}V_{n-1}^{2/n}}N^{2-2/n} + o(N^{2-2/n}),$$

finalizando la prueba del Teorema 4.9.1.

4.10. Experimentos numéricos

A la luz de (4.1.1), vemos que la cota inferior proporcionada por el argumento anterior en el caso $n = 2$ es sorprendentemente precisa. En el caso de \mathbb{S}^n para $n \geq 3$ no hemos encontrado cotas superiores de la energía de Green con las que comparar, por lo que hemos realizado algunos experimentos numéricos para dar una idea de la agudeza de nuestro resultado. En la Figura 4.10.1 representamos el valor mínimo (hallado numéricamente por un método estándar de gradiente riemanniano) de la energía de Green con $n = 4$ para un número creciente de puntos. Este gráfico sugiere que nuestra cota inferior es de nuevo bastante precisa en dimensiones más altas.

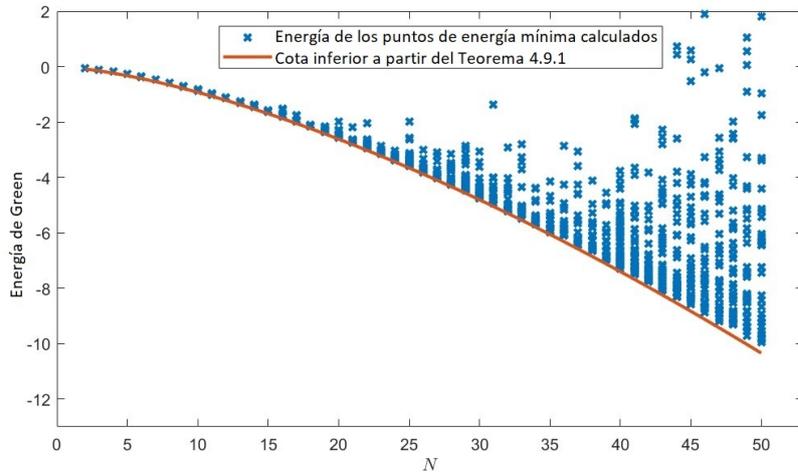


Figura 4.10.1: El mínimo de la energía de Green para valores crecientes del número de puntos N , se compara con la cota inferior proporcionada por el Teorema 4.9.1 (línea continua) en el caso $n = 4$. Los puntos de energía mínima se han obtenido utilizando la función de Matlab `fminsearch`, y las cruces en las mismas líneas verticales corresponden a los mínimos locales calculados por Matlab para diferentes puntos de partida.

Futuras líneas de investigación

A la luz de los trabajos [51, 16, 17] surgen los siguientes problemas abiertos:

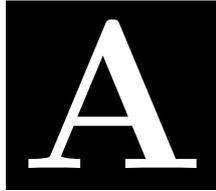
Problema abierto 1. *¿Los polinomios ortogonales respecto al producto escalar de Sobolev (2.1.2) proporcionarían mejores resultados que los ofrecidos por los polinomios de Zernike para detectar aberraciones ópticas en los ojos humanos y calibrar diferentes dispositivos ópticos?*

Problema abierto 2. *Encontrar una fórmula explícita para una familia de polinomios de grado N cuyo número de condición es como máximo N , válido para cualquier N natural.*

Problema abierto 3. *¿Existe la posibilidad de controlar el error cometido al acotar el término α y δ en nuestro método desarrollado en el Capítulo 4? ¿Se podría dar una cota inferior mejor para C_{\log} a partir de la modificación de nuestro método?*

Problema abierto 4. *¿Se podría aplicar el método desarrollado en el Capítulo 4 para obtener cotas inferiores de la energía de Green para otras variedades?*

La respuesta es afirmativa para variedades armónicas y se trata de un trabajo que hemos realizado recientemente y enviado a una revista para su publicación. Una primera versión se puede ver en [12].



El contenido de este apéndice es estándar y está tomado principalmente de [23] y [39]. En él recopilamos las definiciones y propiedades básicas de algunas funciones especiales que son usadas en más de una ocasión en los diferentes capítulos.

A.0.1	Función gamma	121
A.0.2	Símbolo de Pochhammer y la serie hipergeométrica de Gauss	122
A.0.3	Función beta	122

A.0.1. Función gamma

La función gamma, $\Gamma(\cdot)$, es una aplicación que extiende el concepto de factorial a los números reales y complejos. Para $\text{Re}(z) > 0$, se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{A.0.1}$$

Puede ser extendida a todo el plano complejo por continuidad analítica, excepto a los enteros negativos donde la función presenta polos simples. A continuación, destacamos algunas propiedades fundamentales:

- P.1. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- P.2. $\Gamma(n) = (n - 1)!$, $n \in \mathbb{N}$.
- P.3. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$.
- P.4. $\frac{d}{dz}\Gamma(z + 1) = \frac{d}{dz}z\Gamma(z) = z\Gamma'(z) + \Gamma(z)$.

P.5. $\Gamma(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

P.6. Fórmula de duplicación de Legendre:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{k}{2} : k \in \mathbb{Z}_0^-\right\}.$$

P.7. Fórmula de reflexión de Euler: $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

A.0.2. Símbolo de Pochhammer y la serie hipergeométrica de Gauss

Sea $n \in \mathbb{C}$ y $k \geq 0$ un entero. El símbolo de Pochhammer, denotado por $(n)_k$, se define como

$$(n)_k = n(n+1)\cdots(n+k-1), \quad (n)_0 = 1. \quad (\text{A.0.2})$$

Claramente, $(1)_k = k!$, y si $n, n+k$ no son cero ni enteros negativos, entonces

$$(n)_k = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}.$$

Recordemos que la serie hipergeométrica de Gauss es analítica en $|z| < 1$ y definida por una serie de potencias

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (\text{A.0.3})$$

con $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $c \neq 0, -1, -2, \dots$, por tanto, es indefinida para los enteros $c \leq 0$. Si a, b o ambos, son enteros no positivos, la serie (A.0.3) tiene un número finito de términos, convirtiéndose en un polinomio de grado $-a, -b$ o $\min\{-a, -b\}$, respectivamente. Una fórmula útil es (véase [39, pág. 1008, (9.131.1)]):

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z). \quad (\text{A.0.4})$$

A.0.3. Función beta

Se define la función beta de Euler como

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}, \quad \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (\text{A.0.5})$$

y claramente es simétrica, es decir, $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$. Puede expresarse en términos de la función gamma como

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (\text{A.0.6})$$

Se verifica que

$$B(\alpha, \alpha) = 2^{1-2\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \alpha\right).$$

Además, la función beta puede generalizarse del siguiente modo

$$B_x(\alpha, \beta) = \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{x^\alpha}{\alpha} {}_2F_1(\alpha, 1-\beta; \alpha+1; x), \quad (\text{A.0.7})$$

recibiendo el nombre de **función beta incompleta**. Se cumple que

$$B(\alpha, \beta) = B_x(\alpha, \beta) + B_{1-x}(\beta, \alpha). \quad (\text{A.0.8})$$

Mediante el cambio de variable $r = \frac{t}{1-t}$, puede expresarse de la siguiente forma

$$B_x(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{x}{1-x}} \frac{r^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+\beta}} dr.$$

Lema A.0.1. Para todo $r \in [0, \pi]$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^r \sin^{n-1} t \, dt &= 2^{n-1} B_{\sin^2 \frac{r}{2}}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right), \\ \int_r^\pi \sin^{n-1} t \, dt &= 2^{n-1} B_{\cos^2 \frac{r}{2}}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

Demostración. En ambos casos, las funciones involucradas tiene el mismo valor en $r = 0$ o $r = \pi$ respectivamente, son de tipo \mathcal{C}^∞ y sus derivadas coinciden, por lo tanto, son iguales. \square

Lema A.0.2. Para $0 < s < 1$ y $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ se cumple:

$$\frac{(1-s)^{\beta-1} s^\alpha}{\alpha} = (1-s)^{\beta-1} \int_0^s t^{\alpha-1} dt \leq B_s(\alpha, \beta) \leq \int_0^s t^{\alpha-1} dt = \frac{s^\alpha}{\alpha}.$$

Lema A.0.3. Para $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ y $a > 0$ suficientemente pequeño tenemos que,

$$B_{\sin^2 \frac{a}{2}}(\alpha, \beta) = \frac{a^{2\alpha}}{2^{2\alpha} \alpha} + o(a^{2\alpha}).$$

Demostración. Basta usar el Lema A.0.2 y a continuación, aplicar el Teorema de Taylor a cada una de dichas cotas. \square

B

Código de la prueba computacional del Teorema 3.3.1 cuando $M \leq 4$.

En este apéndice mostramos el código implementado para llevar a cabo la prueba computacional del Teorema 3.3.1 para $M \leq 4$. El código tiene comentarios sobre las distintas órdenes. El argumento de entrada es M y la función devuelve:

- La expresión de P_N .
- El cuadrado de la norma de Bombieri–Weyl de P_N .
- El valor del cociente del condicionamiento al cuadrado de P_N entre N^2 .

Es importante tener presente que se ha seguido la explicación de la Sección 3.9.1 para el cálculo de la expresión de P_N , y para su condicionamiento hemos aplicado la fórmula (1.3.2), donde interviene la norma de Bombieri–Weyl definida en (1.3.1). Finalmente, llamamos al bloque implementado en `wxMaxima` haciendo uso de una lista para que nos muestre estos cálculos de los polinomios correspondiente al considerar $M \in [1, 4]$. Esto se puede ver en las dos páginas siguientes.

Observe que la lista obtenida del condicionamiento al cuadrado de P_N entre N^2 es:

[0.0625, 0.02634676461173857, 0.01255690143219006, 0.007264097713449253]

cumpléndose así que $\mu_{\text{norm}}(P_N) \leq N = \min(N, (19/2)\sqrt{N+1})$, para $M \in [1, 4]$, como queríamos comprobar.

```

Polinomio(NumeroParalelos):=block([M:NumeroParalelos,N,L_rj,L_hj,L_Tj,k:1,j:0,s,
                                  P:1,L_raices,L_raicesF,L_raicesG,Cond2,
                                  max:-1,Cociente,Norm2,Pexp],
N:4*M^2, /* Definimos el total de puntos*/
L_rj:makelist(0,i,0,M-1), /* Lista para almacenar los valores de r_j, j=1,...,M*/
L_hj:makelist(0,i,0,M-1), /* Lista para almacenar los valores de h_j, j=1,...,M*/
L_Tj:makelist(0,i,0,M-1), /* Lista para almacenar los valores de T_j, j=1,...,M*/
L_raices:makelist(0,i,0,4*M-1), /* Lista para almacenar las raíces de P_N*/
while j<4*M do(
  L_raices[j+1]:%e^(2*%pi*%i*j/(4*M)), /* Guardamos raíces paralelo M*/
  j:j+1
),
while k<M do(
  L_rj[k]:4*k, /* Guardamos valores de r_j en su lista*/
  L_hj[k]:1-4*k^2/N, /* Guardamos valores de h_j en su lista*/
  L_Tj[k]:sqrt((1+L_hj[k])/(1-L_hj[k])), /* Guardamos valores de T_j*/
  s:0,
  L_raicesF:makelist(0,i,0,L_rj[k]-1), /* Lista para guardar (z^(rj)-T^(rj))*/
  L_raicesG:makelist(0,i,0,L_rj[k]-1), /* Lista para guardar (z^(rj)-(1/T)^(rj))*/
  /* Fíjese que en cada iteración del bucle estas listas son redefinidas*/
  while s<=L_rj[k]-1 do(
    L_raicesF[s+1]:L_Tj[k]*%e^((2*%pi*%i*s)/L_rj[k]),
    L_raicesG[s+1]:(1/L_Tj[k])*%e^((2*%pi*%i*s)/L_rj[k]),
    s:s+1
  ),
  /*Añadimos a la lista de raíces que teníamos las nuevas calculadas*/
  L_raices:append(L_raices,L_raicesF,L_raicesG),
  P:P*(z^(L_rj[k])-L_Tj[k]^(L_rj[k]))*(z^(L_rj[k])-L_Tj[k]^(-L_rj[k])),
  k:k+1
),
P:P*(z^(4*M)-1), /*Expresión final del Polinomio P_N*/
Pexp:expand(P),
Norm2:sum(coeff(Pexp,z^i)^2/binomial(N,i),i,0,N), /*Norma Bombieri-Weyl*/
while k<N do( /*Condicionamiento al cuadrado de P_N en cada raíz*/
  Cond2:N*(1+abs(L_raices[k])^2)^(N-2)*Norm2
  /abs(substitute(z=L_raices[k],diff(P,z)^2)),
  if Cond2>max then max:Cond2, /* Voy almacenando el máximo del condicio-
namiento al cuadrado de P en cada raíz. Al final, en la variable max se encuentra el
máximo de estos valores, luego el condicionamiento al cuadrado de P*/
  k:k+1
),
Cociente:max/N^2, /*Comparo el condicionamiento al cuadrado de P_N con N^2*/
print("Para M=",M,"El polinomio es: ",P," La norma de Bombieri-Weyl al cuadra-
do del polinomio es: ",float(Norm2)," El condicionamiento de P_N entre N^2 es:
",float(Cociente))
)$

```

`makelist(Polinomio(M),M,1,4);`

Para M=1 El polinomio es:

$$z^4 - 1$$

La norma de Bombieri-Weyl al cuadrado del polinomio es: 1,0

El condicionamiento de P entre N^2 es:

$$0,0625$$

Para M=2 El polinomio es:

$$\left(z^4 - 49\right) \left(z^4 - \frac{1}{49}\right) \left(z^8 - 1\right)$$

La norma de Bombieri-Weyl al cuadrado del polinomio es:

$$3,640659798344096$$

El condicionamiento de P entre N^2 es: 0,02634676461173857

Para M= 3 El polinomio es:

$$\left(z^4 - 289\right) \left(z^4 - \frac{1}{289}\right) \left(z^8 - \frac{2401}{16}\right) \left(z^8 - \frac{16}{2401}\right) \left(z^{12} - 1\right)$$

La norma de Bombieri-Weyl al cuadrado del polinomio es:

$$6,842757338340481$$

El condicionamiento de P entre N^2 es:

$$0,01255690143219006$$

Para M= 4 El polinomio es:

$$\begin{aligned} &\left(z^4 - 961\right) \left(z^4 - \frac{1}{961}\right) \left(z^8 - 2401\right) \left(z^8 - \frac{1}{2401}\right) \\ &\quad \times \left(z^{12} - \frac{148035889}{531441}\right) \left(z^{12} - \frac{531441}{148035889}\right) \left(z^{16} - 1\right) \end{aligned}$$

La norma de Bombieri-Weyl al cuadrado del polinomio es:

$$10,44761139456852$$

El condicionamiento de P entre N^2 es:

$$0,007264097713449253$$

Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. y Stegun, I. A. (1972). *Handbook of mathematical functions* (9^a ed.). New York: Dover.
- [2] Álvarez-Nodarse, R. (2001). *Polinomios ortogonales: historia y aplicaciones*. Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, 18, 19–45.
- [3] Álvarez-Nodarse, R. (2003). *Polinomios hipergeométricos clásicos y q -polinomios*. Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano, 26, Universidad de Zaragoza.
- [4] Althammer, P. (1962). *Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 211, 192–204. <https://doi.org/10.1515/crll.1962.211.192>
- [5] Anderson, A., Dostert, M., Grabner, P. J., Matzke, R. W. y Stepaniuk, T. A. (2022). *Riesz and Green energy on projective spaces*. ArXiv:2204.04015 [math.CA]. <https://arxiv.org/abs/2204.04015>
- [6] Andreev, N. N. (1996). *An extremal property of the icosahedron*. East Journal on Approximations 2, no. 4, 459–462.
- [7] Bak, J. y Newman, D. J. (2010). *Complex Analysis*, Springer-Verlag.
- [8] Beltrán, C. (2013). *Harmonic Properties of the Logarithmic Potential and the Computability of Elliptic Fekete Points*. Constructive Approximation, 37, 135–165. <https://doi.org/10.1007/s00365-012-9158-y>
- [9] Beltrán, C. (2015). *A facility location formulation for stable polynomials and elliptic Fekete points*. Foundations of Computational Mathematics, 15, 125–157. <https://doi.org/10.1007/s10208-014-9213-0>
- [10] Beltrán, C. (2020). *Sobre el problema número 7 de Smale*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 23(3), 507–534.

-
- [11] Beltrán, C., Corral, N. y G. Criado del Rey, J. (2019). *Discrete and continuous green energy on compact manifolds*. Journal of Approximation Theory, 237, 160–185. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2018.09.004>
- [12] Beltrán, C., de la Torre, V. y Lizarte, F. (2022). *Lower bound for the Green energy of point configurations in harmonic manifolds*. ArXiv:2212.12526 [math.CA]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.12526>
- [13] Beltrán, C. y Etayo, U. (2020). *The Diamond ensemble: A constructive set of spherical points with small logarithmic energy*. Journal of Complexity, 59, 101471. <https://doi.org/10.1016/j.jco.2020.101471>
- [14] Beltrán, C., Etayo, U. y López-Gómez, P. R. (2023). *Low-energy points on the sphere and the real projective plane*. Journal of Complexity (accepted).
- [15] Beltrán, C., Etayo, U., Marzo, J. y Ortega-Cerdà, J. (2021). *A sequence of polynomials with optimal condition number*. Journal of the American Mathematical Society, 34(1), 219–244. <https://doi.org/10.1090/jams/956>
- [16] Beltrán, C. y Lizarte, F. (2022). *On the minimum value of the condition number of polynomials*. IMA Journal of Numerical Analysis, 42, 2959–2983. <https://doi.org/10.1093/imanum/drab070>
- [17] Beltrán, C. y Lizarte, F. (2023). *A lower bound for the logarithmic energy on \mathbb{S}^2 and for the Green energy on \mathbb{S}^n* . Constructive Approximation. Aceptado.
- [18] Beltrán, C., Marcellán F. y Martínez-Finkelshtein, A. (2018). *Algunas propiedades extremas de las raíces de polinomios ortogonales*. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 21, no. 2, 345–366.
- [19] Beltrán, C. y Pardo, L. M. (2009). *Smale’s 17th problem: average polynomial time to compute affine and projective solutions*. Journal of the American Mathematical Society, 22(2), 363–385. <https://doi.org/10.1090/S0894-0347-08-00630-9>
- [20] Bétermin, L. y Sandier, E. (2018). *Renormalized energy and asymptotic expansion of optimal logarithmic energy on the sphere*. Constructive Approximation, 47, 39–74. <https://doi.org/10.1007/s00365-016-9357-z>
- [21] Blum, L., Cucker, F., Shub, M. y Smale, S. (1998). *Complexity and real computation*. New York: Springer-Verlag.
- [22] Borodachov, S. V., Hardin, D. P., y Saff, E. B. (2007). *Asymptotics of Best-Packing on Rectifiable Sets*. Proceedings of the American Mathematical Society, 135(8): 2369–2380. DOI: 10.1070/SM2008v199n11ABEH003973

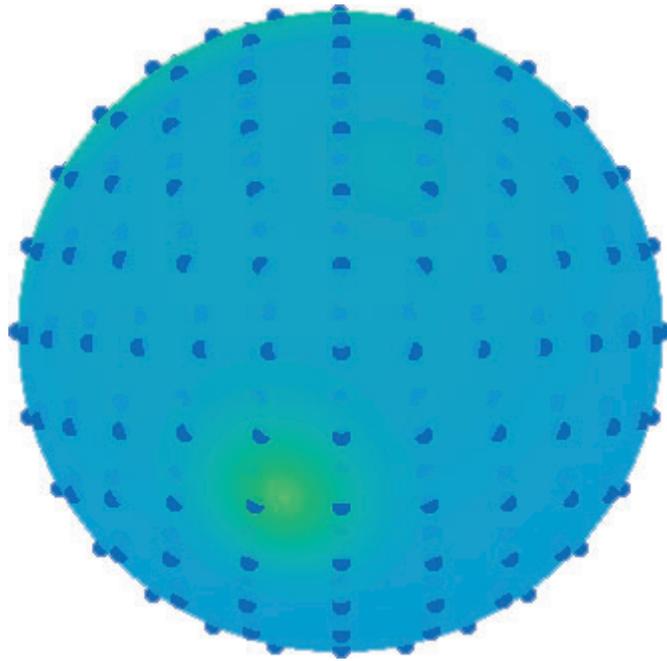
-
- [23] Borodachov, S. V., Hardin, D. P. y Saff, E. B. (2019). *Discrete energy on rectifiable sets*. New York: Springer.
- [24] Brauchart, J. S. (2008). *Optimal logarithmic energy points on the unit sphere*. *Mathematics of Computation*, 77(263), 1599–1613. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-08-02085-1>
- [25] Brauchart, J. S., Hardin, D. P. y Saff, E. B. (2012). *The next-order term for optimal Riesz and logarithmic energy asymptotics on the sphere*. En J. Arvesú y G. López Lagomasino (Eds.), *Recent Advances in Orthogonal Polynomials, Special Functions, and Their Applications* (Vol. 578, pp. 31–61). *Contemporary Mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society. <http://dx.doi.org/10.1090/conm/578>
- [26] Bürgisser, P. y Cucker, F. (2011). *On a problem posed by Steve Smale*. *Annals of Mathematics*, 174, 1785–1836. <http://doi.org/10.4007/annals.2011.174.3.8>
- [27] Bürgisser, P. y Cucker, F. (2013). *Condition. The geometry of numerical algorithms*. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* (Vol. 349). Berlin Heidelberg: Springer.
- [28] Carvalho, L. A. (2005). *Accuracy of Zernike polynomials in characterizing optical aberrations and the corneal surface of the eye*. *Investigative Ophthalmology & Visual Science* (Vol. 46(6), pp. 1915–1926).
- [29] Chihara, T. S. (1978). *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach Science Publishers, New York.
- [30] Delgado, A. M., Fernández, L., Lubinsky, D. S., Pérez, T. E. y Piñar, M. A. (2016). *Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 440, 716–740. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.03.041>
- [31] Demmel, J. W. (1987). *On condition numbers and the distance to the nearest ill-posed problem*. *Numerische Mathematik*, 51, 251–289. <https://doi.org/10.1007/BF01400115>
- [32] Dragnev, P. D., Legg, D. A. y Townsend, D. W. (2002). *Discrete logarithmic energy on the sphere*. *Pacific Journal of Mathematics* 207, no. 2, 345–358.
- [33] Dubickas, A. (1996). *On the maximal product of distances between points on a sphere*. *Lithuanian Mathematical Journal*, 36, 241–248. <https://doi.org/10.1007/BF02986850>
- [34] Dunkl, C. F. y Xu, Y. (2014). *Orthogonal polynomials of several variables*. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* (2^a ed., Vol., 155). Cambridge University Press.

- [35] Fejér, L. (1932). *Bestimmung derjenigen abszissen eines intervalles, für welche die quadratsumme der grundfunktionen der lagrangeschen interpolation im intervalle ein möglichst kleines maximum besitzt*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Ser. 2, 1(3), 263–276.
- [36] Etayo, U. (2021). *A sharp Bombieri inequality, logarithmic energy and well conditioned polynomials*. Transactions of the American Mathematical Society, 374, 5113–5129. <https://doi.org/10.1090/tran/8384>
- [37] Evans, L. C. (1998). *Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics*, vol. 19. American Mathematical Society, Providence.
- [38] G. Criado del Rey, J. (2018). *Métricas de condicionamiento y puntos bien distribuidos en variedades*. Tesis doctoral, Universidad de Cantabria. <http://hdl.handle.net/10902/14707>
- [39] Gradshteyn, I. S. y Ryzhik, I. M. (2015). *Table of integrals, series, and products* (8^a ed.). Amsterdam: Elsevier/Academic Press.
- [40] Gantmacher, F. R. (1998). *The theory of matrices* (Vol. 1). Providence, RI: AMS Chelsea Publishing. Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Reprint of the 1959 translation.
- [41] Hardin, D., Michaels, T. y Saff, E. (2016). *A comparison of popular point configurations on \mathbb{S}^2* . Dolomites Research Notes on Approximation, 9, 16–49.
- [42] Ismail, M. E. (2005). *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 96, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [43] Jost, J. (2005). *Postmodern Analysis*, Springer.
- [44] Kessler, R. y Harley, M. (2012). *Polen: La sexualidad oculta de las flores*. Turner, Madrid.
- [45] Klyce, S. D., Karon, M. D. y Smolek, M. K. (2004). *Advantages and disadvantages of the Zernike expansion for representing wave aberration of the normal and aberrated eye*. Journal of Refractive Surgery, 20(5), 527–541. <https://doi.org/10.3928/1081-597X-20040901-25>
- [46] Kolushov, A. V. y Yudin, V. A. (1997). *Extremal dispositions of points on the sphere*. Analysis Mathematica 23, 25–34. <https://doi.org/10.1007/BF02789828>

-
- [47] Lairez, P. (2017). *A Deterministic algorithm to Compute Approximate Roots of Polynomial Systems in Polynomial Average Time*. Foundations of Computational Mathematics, 17, 1265–1292. <https://doi.org/10.1007/s10208-016-9319-7>
- [48] Lauritsen, A. B. (2021). *Floating wigner crystal and periodic Jellium configurations*. Journal of Mathematical Physics, 62, 083305. <https://doi.org/10.1063/5.0053494>
- [49] Lewis, D. C. (1947). *Polynomial least square approximations*. American Journal of Mathematics, 69, 273–278. <https://doi.org/10.2307/2371851>
- [50] Lieb, E. H. y Narnhofer, H. (1975). *The thermodynamic limit for jellium*. Journal of Statistical Physics, 12, 291–310. <https://doi.org/10.1007/BF01012066>
- [51] Lizarte, F., Pérez, T. E. y Piñar, M. A. (2021). *The radial part of a class of Sobolev polynomials on the unit ball*. Numerical Algorithms, 87, 1369–1389. <https://doi.org/10.1007/s11075-020-01011-7>
- [52] Marcellán, F., Branquinho, A. y Petronilho, J. (1994). *Classical orthogonal polynomials: a functional approach*. Acta Applicandae Mathematicae 34 (3), 283–303. <https://doi.org/10.1007/BF00998681>
- [53] Marcellán, F., Martínez-Finkelshtein, A. y Martínez-González, P. (2007). *Electrostatic models for zeros of polynomials: Old, new, and some open problems*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 207(2), 258–272. Proceedings of The Conference in Honour of Dr. Nico Temme on the Occasion of his 65th birthday.
- [54] Marcellán, F. y Xu, Y. (2015). *On Sobolev orthogonal polynomials*. Expositiones Mathematicae, 33, 308–352. <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2014.10.002>
- [55] Martínez-Finkelshtein, A., Martínez-González, P. y Orive, R. (2000). *Zeros of Jacobi polynomials with varying non-classical parameters, Special functions*. World Scientific Publication, River Edge, NJ, (Hong Kong, 1999), 98–113. https://doi.org/10.1142/9789812792303_0008
- [56] Marzo, J. y Mas, A. (2021). *Discrepancy of Minimal Riesz Energy Points*. Constructive Approximation, 54, 473–506. <https://doi.org/10.1007/s00365-021-09534-5>
- [57] Orive, R. y Sánchez-Lara, J. (2015). *Equilibrium measures in the presence of certain rational external fields*. Journal of Mathematical Analysis Applications, 431, no. 2, 1224–1252. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.06.022>

-
- [58] Pérez, T. E., Piñar, M. A. y Xu, Y. (2013). *Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball*. Journal of Approximation Theory, 171, 84–104. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2013.03.004>
- [59] Piñar, M. A. y Xu, Y. (2009). *Orthogonal Polynomials and Partial Differential Equations on the Unit Ball*. Proceedings of the American Mathematical Society, 137, 2979–2987. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-09-09932-8>
- [60] Rakhmanov, E. A., Saff, E. B. y Zhou, Y. M. (1994). *Minimal discrete energy on the sphere*. Mathematical Research Letters, 1(6), 647–662. <https://dx.doi.org/10.4310/MRL.1994.v1.n6.a3>
- [61] Sari, R. R. y Merlini, D. (1976). *On the ν -dimensional one-component classical plasma: The thermodynamic limit problem revisited*. Journal of Statistical Physics, 14, 91–100. <https://doi.org/10.1007/BF01011761>
- [62] Shub, M. y Smale, S. (1993). *Complexity of Bezout's theorem. I. Geometric aspects*. Journal of American Mathematical Society, 6(2), 459–501. <https://doi.org/10.1090/S0894-0347-1993-1175980-4>
- [63] Shub, M. y Smale, S. (1993). *Complexity of Bezout's theorem. II. Volumes and probabilities*. En F. Eyssette y A. Galligo (Eds.), Computational Algebraic Geometry. Progress in Mathematics (Vol. 109, pp. 267–285). Boston, MA: Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2752-6_19
- [64] Shub, M. y Smale, S. (1993). *Complexity of Bezout's theorem. III. Condition number and packing*. Journal of Complexity, 9, 4–14. <https://doi.org/10.1006/jcom.1993.1002>
- [65] Smale, S. (2000). *Mathematical problems for the next century*. Mathematics: Frontiers and Perspectives, (pp. 271–294). Providence, R.I: American Mathematical Society. ISBN: 978-0-8218-2697-3.
- [66] Smolek, M. K. y Klyce, S. D. (2003). *Zernike polynomial fitting fails to represent all visually significant corneal aberrations*. Investigative Ophthalmology & Visual Science (Vol. 44, pp. 4676–4681). <https://doi.org/10.1167/iovs.03-0190>
- [67] Steinerberger, S. (2021). *A Wasserstein inequality and minimal Green energy on compact manifolds*. Journal of Functional Analysis, 281, 109076. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2021.109076>
- [68] Steinerberger, S. (2022). *On the Logarithmic Energy of Points on \mathbb{S}^2* . Journal d'Analyse Mathématique, 148, 187–211. <https://doi.org/10.1007/s11854-022-0225-4>

-
- [69] Suetin, P. K. (1999). *Orthogonal polynomials in two variables*. Gordon and Breach, Amsterdam.
- [70] Szegő, G. (1978). *Orthogonal polynomials* (4^a ed. Vol. 23). Providence RI: American Mathematical Society Colloquium Publications.
- [71] Tammes, P. M. L. (1930). *On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen-grains*. Recueil des travaux botaniques neerlandais 27. Dissertation, J. H. De Bussy, Groningen.
- [72] Thomson, J. J. (1904). *On the structure of the atom*. Philosophical Magazine, 7, no. 6, 237–265.
- [73] Trefethen, L. N. y Bau III, D. (1997). *Numerical linear algebra*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- [74] Wagner, G. (1989). *On the product of distances to a point set on a sphere*. Journal of the Australian Mathematical Society, 47(3), 466–482.
- [75] Willmore, T. J. (1950). *Mean value theorems in harmonic Riemannian spaces*. Journal of the London Mathematical Society, 25, 54–57. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-25.1.54>
- [76] Wünsche, A. (2005). *Generalized Zernike or disc polynomials*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 174, 135–163. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.04.004>
- [77] Xu, Y. (2006). *A family of Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball*. Journal of Approximation Theory, 138, 232–241. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2005.11.009>
- [78] Xu, Y. (2008). *Sobolev orthogonal polynomials defined via gradient on the unit ball*. Journal of Approximation Theory, 152, 52–65. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2007.11.001>
- [79] Zernike, F. (1934). *Beugungstheorie des Schneidenverfahrens und Seiner Verbesserten Form, der Phasenkontrastmethode*. Physica, 1, 689–704. [https://doi.org/10.1016/S0031-8914\(34\)80259-5](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(34)80259-5)



Las contribuciones científicas originales incluidas en esta tesis doctoral son el resultado de tres artículos. En el primero estudiamos un producto escalar de Sobolev creado a partir de una modificación del producto escalar clásico sobre la bola unidad de dimensión d , que involucra un término extra conteniendo a las derivadas en la dirección normal. En el segundo trabajo, encontramos una secuencia explícita de polinomios univariados bien condicionados. Esto ofrece una respuesta más explícita que las anteriormente conocidas a un problema planteado por Shub y Smale en 1993. En el tercer artículo, mostramos una prueba alternativa de la mejor cota conocida hasta la fecha para la energía logarítmica en la esfera usual. Además, generalizamos esta demostración para obtener nuevas cotas inferiores para la energía de Green en la n -esfera unidad.

The original scientific contributions included in this doctoral thesis are the result of three papers. In the first one, we study a Sobolev inner product formed from a modification of the classical inner product on the unit ball of dimension d , which involves an extra term containing the outward normal derivatives. In the second work, we find an explicit sequence of well-conditioned univariate polynomials. This offers a more explicit answer than those previously known to a problem posed by Shub and Smale in 1993. In the third article, we show an alternative proof of the sharpest known lower bound for the logarithmic energy on the usual sphere. In addition, we generalize this proof to get new lower bounds for the Green energy on the unit n -sphere.