



# VNiVERSiDAD D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

PROGRAMA DE DOCTORADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

---

GRUPO FUNDAMENTAL ÉTALE DE  
ESPACIOS ESQUEMÁTICOS

---

Tesis doctoral

Javier Sánchez González

Director: Carlos Tejero Prieto



Por este escrito, D. Carlos Tejero Prieto, de DNI 11951344S, certifica que la presente tesis doctoral, titulada *Grupo fundamental étale de espacios esquemáticos*, ha sido realizada por D. Javier Sánchez González bajo mi supervisión y autorizo su presentación.

En Salamanca, a 7 de octubre de 2022

Fdo. Carlos Tejero Prieto



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>9</b>
<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>I Preliminares</b>	<b>25</b>
<b>1. Espacios topológicos de Alexandroff</b>	<b>27</b>
1.1. Propiedades a nivel de objetos . . . . .	27
1.2. Propiedades categoriales . . . . .	31
1.3. Propiedades 2-categoriales . . . . .	32
1.4. Haces en A-espacios . . . . .	33
1.5. A-modelos . . . . .	36
<b>2. Categorías de <math>\mathcal{C}</math>-datos</b>	<b>41</b>
2.1. Caso 1-categorial . . . . .	41
2.1.1. Propiedades categoriales . . . . .	47
2.2. Caso 2-categorial . . . . .	49
2.2.1. Secciones en el caso 2-categorial . . . . .	53
2.3. El functor cilindro . . . . .	54
<b>II Elementos de espacios esquemáticos</b>	<b>61</b>
<b>3. Posets anillados</b>	<b>63</b>
3.1. Módulos y álgebras en posets anillados . . . . .	63
3.1.1. Cohomología de haces en espacios finitos . . . . .	69

3.2.	El espectro de un poset anillado . . . . .	69
3.2.1.	Ideales cuasicoherentes . . . . .	73
<b>4.</b>	<b>La categoría de espacios esquemáticos finitos</b>	<b>75</b>
4.1.	Espacios afines y esquemáticos . . . . .	75
4.2.	La categoría esquemática . . . . .	81
4.2.1.	Modelos finitos de esquemas . . . . .	84
4.3.	Caracterizaciones espectrales . . . . .	85
4.4.	Propiedades categoriales . . . . .	94
<b>5.</b>	<b>Inmersiones y localización</b>	<b>97</b>
5.1.	Los tres protagonistas . . . . .	98
5.2.	Localización por qc-isomorfismos . . . . .	103
5.3.	Puntos con valores . . . . .	107
5.4.	El cilindro esquemático . . . . .	108
5.5.	Descenso por inmersiones planas . . . . .	117
5.6.	La topología de las inmersiones planas . . . . .	120
5.6.1.	Haces versus descenso . . . . .	126
5.6.2.	Comparación con el sitio anillado topológico . . . . .	127
5.6.3.	Puntos y funtores fibra I . . . . .	133
<b>6.</b>	<b>Retractos de la categoría esquemática</b>	<b>137</b>
6.1.	Propiedades geométricas y reducciones . . . . .	137
6.2.	Espacios concisos . . . . .	140
6.3.	Espacios puntualmente conexos . . . . .	146
6.4.	Espacios geométricos . . . . .	152
6.4.1.	Puntos y funtores fibra II . . . . .	153
<b>7.</b>	<b>Clases geométricas de espacios y morfismos esquemáticos</b>	<b>157</b>
7.1.	Espacios esquemáticos algebraicos . . . . .	158
7.2.	Reducibilidad, irreducibilidad e integridad . . . . .	164
7.3.	Propiedades dadas «categorialmente» . . . . .	168
7.3.1.	Qc-equivalencias de morfismos . . . . .	168
7.3.2.	Qc-monomorfismos y qc-epimorfismos . . . . .	171
7.4.	Propiedades dadas por haces cuasicoherentes . . . . .	173
7.4.1.	Más sobre morfismos afines . . . . .	173
7.4.2.	Morfismos finitos . . . . .	181

7.4.3.	Inmersiones . . . . .	182
7.4.4.	Morfismos cerrados . . . . .	185
7.4.5.	Morfismos separados . . . . .	190
7.4.6.	Un criterio de descenso efectivo . . . . .	191
7.4.7.	Criterios valorativos . . . . .	192
7.5.	Propiedades dadas por morfismos de anillos . . . . .	197
7.5.1.	Propiedades pro-locales . . . . .	198
7.5.2.	Morfismos pro-localmente de tipo finito y propios . . . . .	202
7.6.	Teoremas fundamentales . . . . .	207
7.6.1.	El teorema de finitud de Grothendieck . . . . .	208
7.6.2.	Funciones formales y factorización de Stein . . . . .	209
7.7.	Inmersiones abiertas . . . . .	212
7.7.1.	Observaciones sobre el «sitio de Zariski» . . . . .	215
7.7.2.	Otros sitios «algebraicos» . . . . .	218

### III El grupo fundamental étale de espacios esquemáticos 221

<b>8.</b>	<b>Construcción de una categoría de Galois</b>	<b>223</b>
8.1.	Revestimientos étale finitos . . . . .	224
8.2.	Funtores fibra . . . . .	240
<b>9.</b>	<b>Generalización de resultados clásicos</b>	<b>245</b>
9.1.	La sucesión exacta de homotopía . . . . .	245
9.2.	El teorema de Seifert-Van Kampen . . . . .	249

### IV Apéndices 257

<b>A.</b>	<b>Apéndices a la Parte I</b>	<b>259</b>
A.1.	2-límites y 2-colímites en <b>Cat</b> . . . . .	259
A.2.	Posibles continuaciones: datos $\Phi$ -afines . . . . .	261
<b>B.</b>	<b>Apéndices a la Parte II</b>	<b>265</b>
B.1.	Espacios infinitos y no noetherianos . . . . .	265
B.2.	Epimorfismos planos de anillos . . . . .	269
B.3.	Sitios y topos . . . . .	283

B.4. Proesquemas . . . . .	287
<b>C. Apéndices a la Parte III</b>	<b>305</b>
C.1. Categorías de Galois . . . . .	305
C.1.1. Morfismos entre grupos fundamentales . . . . .	312
C.2. La topología pro-étale esquemática . . . . .	313
C.3. Grupos fundamentales prodiscreto y de Nori . . . . .	314
<b>Epílogo del autor</b>	<b>317</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>323</b>
<b>Índice de definiciones</b>	<b>327</b>

# Agradecimientos

Llegada esta parada en el camino, quiero dejar constancia de mi gratitud hacia una serie de personas sin las cuales el proyecto que nos ocupa no habría llegado a este puerto. Doy las gracias en primer lugar a mi director, Carlos Tejero Prieto, por su generosidad e interés en aconsejarme tanto en el trabajo de investigación como en las muy diversas cuestiones que han surgido mucho más allá de este, así como por su constante reafirmación de mis capacidades; y también a Fernando Sancho de Salas, quien siempre escuchó con paciencia mis desvaríos sobre espacios finitos y supo decir las palabras mágicas sin otro interés que las matemáticas. Agradecer por extensión a todo el personal docente del Departamento de Matemáticas por crear en él un ambiente propicio para el desarrollo de nuestra labor.

Quiero dar las gracias, con tanta fuerza como unas pocas palabras pueden albergar, a mi camarada Jesús Martín Ovejero. En el fragor de la «batalla del Pozo» descubrimos *el sol y el acero* y, con este arma y gallarda voluntad, cortamos a través de cualquier obstáculo que se nos interpuso; para después adelantar él su regreso al «mundo tras la tesis» y advertirme presto de sus virtudes y peligros. Sin ti esto no habría sido posible; tienes mi admiración y total disposición.

Muy agradecido también a mis compañeros de doctorado, Alicia Pérez y Juan Francisco Torres, por su amistad duradera y por recordarnos a todos que el amor existe en esta era; y a tres amigas filólogas: a Alicia Delgado, por descubrirme a mí mismo y a la Gran Comedia; a Clara Valcárcel, por grabar en mis retinas, con fugaz incandescencia, que el corolario de la acción es la grandeza; y a Emma Machado, por mostrarme que aún hay personas por cuya transparencia debemos preservar una pizca de cordura e inocencia.

No olvidar tampoco a mis amigos en la distancia, quienes cada noche

estuvieron ahí por ya casi una década, dando prueba rigurosa de que la fuerza a veces incrementa con la lejanía: Gabino, Iván, Adrián, Álvaro, Asier, Adela y tantos otros. Mencionar además a Jorge Mallo, con quien conversar siempre ha mantenido ese regusto de pasión matemática; y a Diego Alba, por sus esfuerzos por legitimarme estos últimos meses y a quien espero no decepcionar con el contenido de esta memoria.

En un pequeño paréntesis, me gustaría agradecer de antemano al futuro lector que, con paciencia y buen ánimo, se adentre en los pensamientos que aquí he tratado de organizar, por otorgarles valor con ese gesto.

Y por último, y de suprema importancia en tanto que de ellos pende todo lo anterior, agradecer a mis padres, que siempre *estuvieron* para cualquier cosa que pudiese necesitar, antes, durante y después; y apoyaron, en todos sus aspectos, este egoísmo mío que ha sido navegar cuatro años más de exilio vital. Gracias.

# Introducción

Los espacios topológicos de Alexandroff, aquellos en los que la intersección arbitraria de abiertos es abierta —en particular los espacios topológicos finitos—, son entes matemáticos engañosamente sencillos. Como prueba de ello, dejando al margen todas las cuestiones aún por conocer sobre su estructura, pueden emplearse como un medio para discretizar y, en ese sentido, *modelar*, información de una amplísima clase de espacios topológicos más complejos y de datos adicionales sobre estos. Así, su «complejidad» es comparable a la de los espacios topológicos arbitrarios. Además, es clásico que podemos interpretarlos de al menos tres formas distintas: además de la topológica, también pueden entenderse como conjuntos preordenados o como cierta clase de categorías pequeñas; lo cual nos proporciona un triple lenguaje con el que trabajar según la situación lo requiera. Nótese que en el caso  $T_0$ , que podremos suponer sin pérdida de generalidad, estamos hablando de conjuntos parcialmente ordenados —posets—.

Sus aplicaciones al estudio de los espacios topológicos, por ejemplo a los tipos de homotopía débil, son clásicas, véase [4]. La idea subyacente es muy sencilla: dado un espacio topológico  $S$  —pongamos que cuasicompacto, empleando la terminología de Bourbaki— y un recubrimiento abierto de este —pongamos que finito—  $\mathcal{U}$  de este, podemos definir un espacio finito  $X$  y una aplicación continua

$$\pi: S \rightarrow X$$

que llamamos «modelo finito» asociado a  $(S, \mathcal{U})$ . Si  $\mathcal{U}$  se elige de modo que para cada  $s \in S$  la intersección  $U^s$  de los entornos de  $s$  en  $\mathcal{U}$  sean homotópicamente triviales —resp. tengan  $\pi_n$  trivial para cierto  $n$ —, esta aplicación induce una equivalencia homotópica débil entre  $S$  y  $X$  —resp. induce un isomorfismo  $\pi_n(S) \simeq \pi_n(X)$ —.

Más recientemente, Fernando Sancho abordó el estudio de los espacios finitos *anillados* y de algunas de sus aplicaciones, lo que supuso el detonante para iniciar esta tesis doctoral. Por ejemplo, en [30] se extiende la teoría de homotopía clásica de espacios topológicos finitos —que incluye la generalización de un teorema de Stong de clasificación en términos de «espacios minimales» para los cuales *ser homótopos* implica *ser isomorfos*—, pero más críticamente se observa que el contexto anillado recoge tanto el caso topológico como el de la teoría de esquemas.

En efecto, hay un functor plenamente fiel de espacios topológicos a espacios anillados  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{RS}$  con  $S \mapsto (S, \mathbb{Z})$  adjunto a la derecha del functor olvido. Los  $\mathbb{Z}$ -módulos cuasicoherentes en  $(S, \mathbb{Z})$  son los haces de grupos abelianos localmente constantes en  $S$ , que es la categoría *clasificada* por el grupo fundamental  $\pi_1(S)$  —caso conexo—. Si en la construcción del modelo finito anterior se dota a  $X$  del haz estructural  $\pi_*\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}$  y se toma un recubrimiento tal que  $\pi_1(U^s)$  es *trivial* para todo  $s \in S$ , es decir, tal que todo  $\mathbb{Z}$ -módulo localmente constante en  $U^s$  es constante —i.e. tal que la categoría de  $\mathbb{Z}_{|U^s}$ -módulos cuasicoherentes es *trivial* en el sentido de ser equivalente, vía el functor de secciones globales, a la categoría de  $\mathbb{Z}$ -módulos,  $\mathbf{Qcoh}(U^s, \mathbb{Z}_{|U^s}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}(\mathbb{Z})$ —; se tiene una equivalencia adjunta entre las categorías de haces localmente constantes  $(\pi^* \dashv \pi_*)$ :  $\mathbf{Qcoh}(S, \mathbb{Z}) \simeq \mathbf{Qcoh}(X, \mathbb{Z})$ , es decir,  $\pi_1(S) \simeq \pi_1(X)$ .

Lo interesante es que esta línea de pensamiento generaliza a las categorías de módulos cuasicoherentes de esquemas: si  $S \equiv (S, \mathcal{O}_S)$  es un esquema —que habitualmente supondremos cuasicompacto y cuasiseparado (qc-qs)— y  $\mathcal{O}_X := \pi_*\mathcal{O}_S$ , se verifica que si los  $U^s$  son afines, es decir, si  $\mathbf{Qcoh}(U^s) \simeq \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_S(U^s))$  —i.e. si sus categorías de cuasicoherentes son *triviales*—, se obtiene una equivalencia  $\mathbf{Qcoh}(S) \simeq \mathbf{Qcoh}(X)$ . Dada la importancia suprema de la categoría de módulos cuasicoherentes para un esquema, que lo determina completamente, queda de relieve la utilidad de los espacios finitos anillados como modo de estudiar esquemas algebraicos. El espacio anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$  puede entenderse como un dato de construcción o de *recollement* del esquema  $S$ : una colección de anillos —esquemas afines— relacionados por morfismos que inducen inmersiones abiertas entre los correspondientes espectros.

Para motivar aún más esta situación, hay que destacar que el estudio de haces en posets es particularmente sencillo: dar un haz en un poset  $X$  con

valores en una categoría  $\mathfrak{C}$  no es más que dar un functor  $X \rightarrow \mathfrak{C}$ . En este lenguaje, un  $\mathcal{O}_X$ -módulo cuasicoherente es un haz de módulos *que cambia de base al restringir los abiertos*. Esta es una descripción muy operativa y cercana a las ideas originales sobre cómo debían definirse estos objetos. El lector puede observar que esta descripción es análoga a la que se tiene al tratar *esquemas simpliciales* —i.e. sitios anillados simpliciales—. De hecho, la teoría de espacios finitos anillados es, en cierto sentido, paralela a esta; pero, si bien perdemos la facilidad para realizar algunas construcciones universales que la categoría simplicial  $\Delta$  sí permite, ganamos adaptabilidad a cada problema particular y preservamos más estructura combinatoria de los espacios que estamos estudiando. Además, consideramos que el estudio de los espacios anillados finitos es, en mayor medida que su hermano simplicial, un fin geométrico-algebraico en sí mismo; afirmación que trataremos de defender en esta memoria.

En este contexto, F. Sancho procedió en [29] a caracterizar aquellos espacios anillados finitos que, sin ser necesariamente modelos de ningún esquema, exhibían un comportamiento similar al de estos. Sus esfuerzos cristalizaron en las definiciones de *espacio anillado afín* —que tiene sentido en contextos más generales, incluso diferenciables, véase [28]— y *espacio esquemático*, llevando finalmente a definir una categoría *esquemática* que quedó caracterizada como la mayor subcategoría de espacios anillados finitos cerrada por productos y gráficas, y cuyos morfismos preservan la cuasicoherencia —Proposición 4.4.6—. En este contexto, todo espacio esquemático  $X$  tiene asociado functorialmente un espacio localmente anillado  $\text{Spec}(X)$  —si  $X$  es un modelo de un esquema, esta construcción recupera dicho esquema—. En términos de la interpretación de *recollement* que mencionamos antes,  $\text{Spec}(X)$  será cierto espacio localmente anillado, cuasicompacto y cuasiseparado, que es localmente afín respecto a *monomorfismos planos*. En [29] también se define una clase de morfismos esquemáticos, los qc-isomorfismos, que inducen isomorfismos al tomar  $\text{Spec}(-)$  —cuya caracterización completamos en el Teorema 5.1.9—. Esta clase de morfismos define un sistema multiplicativo de flechas en la categoría, luego una *localización* —cociente de Verdier— de la categoría esquemática que contiene de modo fiel a la categoría de esquemas qc-qc y es estrictamente mayor que esta.

Motivados por las cuestiones topológica y esquemática, abordamos en esta memoria el estudio de la generalización del *grupo fundamental étale*

de revestimientos finitos del SGA I [15] al caso de espacios esquemáticos, buscando recuperar el de esquemas como caso particular. Una situación similar, en la cual estudiar una teoría en el contexto esquemático devuelve la de esquemas por restricción, se tiene con la teoría de dualidad de Grothendieck [31]. Para poder abordar nuestro objetivo inicial con cierta solvencia, necesitamos desarrollar toda una teoría de espacios esquemáticos análoga a la de esquemas, tarea a la que dedicamos la gran mayoría de esta memoria y motivo por el cual quizá debería haberse titulado como su segundo capítulo: *Elementos de espacios esquemáticos*, en nuestro humilde intento de honrar al clásico de la escuela francesa. En etapas tempranas de esta tarea nos dimos cuenta de que los objetos de la categoría esquemática son «buenos», pero sus propiedades dentro de la categoría no son tan «estables» como sería deseable —aunque sí en su localización—; en el fondo, porque la ligadura entre sus partes combinatoria o topológica y algebraica no es tan fuerte como en los espacios localmente anillados. Así, algunos de nuestros esfuerzos también van dirigidos a restringir la categoría esquemática en pos de reforzar esta interacción y hacer dichas propiedades más «geométricas», en un sentido que haremos preciso.

De este modo, el tema central de la memoria ha resultado superar por mucho en amplitud al grupo fundamental étale de espacios esquemáticos, cuyo estudio dejamos al nivel de su mera construcción y de dos teoremas muy generales —sucesión exacta de homotopía y Seifert-Van Kampen—, para convertirse en la redacción un tratado más o menos sistemático acerca de los espacios sobre los que lo definimos. Gracias a esto, con toda la nueva «tecnología» a nuestra disposición, cerramos la memoria alcanzando el objetivo de partida de la tesis, lográndolo además por cauces análogos a los de su homónimo para esquemas introducido clásicamente en [15] que no habrían sido navegables de otro modo. A tal efecto, con una mentalidad constructiva, describimos muchas de las sutilezas que diferencian esta teoría de espacios esquemáticos de su contraparte de esquemas, hacemos varias digresiones y aportamos detalles «innecesarios» con el objetivo de iluminar algunos rincones del mundo esquemático que habían permanecido en la sombra —como fin en sí mismo—, empleamos un tono más discursivo —a veces incluso informal— en diversos momentos para describir «moralmente» algunas situaciones y planteamos una serie de cuestiones abiertas que aún nos impiden peinar los últimos detalles desde un punto de vista unificado.

Tales son los objetivos principales de esta iteración final de la memoria y de la tesis doctoral, no tanto la persecución de problema «abierto» alguno.

Para terminar, mencionar que, aunque somos conscientes de la naturaleza de este trabajo, de generosa extensión y limitado pragmatismo, confiamos en que el lector encuentre ideas de su agrado y que despierten su interés por el mundo de los espacios esquemáticos.

## Estructura y contenidos

El documento se divide en tres partes, cada una con sus respectivos apéndices. Como a continuación incluimos una nota cronológica sobre el desarrollo de los conceptos presentados y, además, cada capítulo cuenta con una introducción propia especificando qué es y qué no es original y demás consideraciones particulares, solo hacemos ahora una síntesis.

La **primera parte** está dedicada a preliminares de tipo topológico o categorial: tenemos un **primer capítulo**, de contenidos clásicos, en el que nos dedicamos a repasar diferentes propiedades de los espacios de Alexandroff y de los haces sobre ellos; y un **segundo capítulo** donde formalizamos —para una 1-categoría o 2-categoría  $\mathfrak{C}$ — el concepto de « $\mathfrak{C}$ -dato», la noción de «espacio de Alexandroff anillado con un  $\mathfrak{C}$ -haz estructural», estudiándose sus propiedades, en especial una construcción functorial que llamaremos «cilindro», a modo de lenguaje vehicular para lo que resta de memoria.

Los **apéndices a la primera parte** incluyen un recordatorio de algunas nociones y construcciones explícitas de 2-límites y 2-colímites, así como sugerencias sobre una posible vía con la que continuar el trabajo sobre los  $\mathfrak{C}$ -datos, cuya idea de partida es dar definiciones que, generalizando las de espacios afines y esquemáticos, permitan estudiar problemas «de descenso» en un contexto más amplio.

La **segunda parte** recoge la mayor parte de la teoría general de espacios esquemáticos de que disponemos hasta la fecha. Su **primer capítulo** comienza con un tratamiento general de los posets anillados y sus módulos cuasicoherentes, en el que se trata de motivar la utilidad de algunas de las condiciones que más adelante forzará la noción de espacio esquemático; y prosigue con la definición y estudio de algunas propiedades elementales del functor Spec, que envía cada poset anillado al espacio localmente anilla-

do que entendemos como su *recollement*. Su **segundo capítulo** repasa la mayor parte del material conocido sobre espacios esquemáticos y lo completa con una serie de nuevas caracterizaciones y formas de interpretarlo. Su **tercer capítulo** define y caracteriza las tres clases de morfismos esquemáticos más importantes: los *qc-isomorfismos*, estudiándose la localización de la categoría esquemática que producen; así como las *inmersiones planas* y los *morfismos fielmente planos*. Las inmersiones planas juegan el papel de las «inmersiones abiertas» en el contexto esquemático y proporcionan la topología de Grothendieck natural con que equiparemos a estos, algunas de cuyas propiedades estudiamos en detalle. En relación con ello, se especializa la construcción del cilindro que habíamos visto para  $\mathcal{C}$ -datos al caso esquemático. Sigue un **cuarto capítulo** con la introducción de una idea general: buscar modos de «reducir» la categoría esquemática para que tenga un comportamiento más «geométrico», i.e. para que la interacción entre propiedades de la parte topológica y del haz de anillos sea más estrecha, como sucede en espacios localmente anillados. Definimos subcategorías de espacios *concisos*, *pw-conexos* y, finalmente, *geométricos*; aplicando todo ello a describir algunos *puntos* del topos de las inmersiones planas: sus *functores fibra*. Por último, el **quinto capítulo** de esta parte es un tratamiento muy extenso de diversas clases de espacios y morfismos esquemáticos que, en su mayor parte, busca extender las clases homónimas de la teoría de esquemas. La mayor parte de estos conceptos se introducen con objeto de lograr definir «morfismo propio» y probar las generalizaciones de los teoremas fundamentales clásicamente asociados a tal denominación. Se concluye con una sección final donde se aplica nuestra noción de «morfismo algebraico» —analogía de los morfismos representables de funtores— para describir la topología «de Zariski» en el contexto esquemático y algunas topologías relacionadas, como la que llamaremos «topología étale». Como quedará patente en el desarrollo de la memoria, las dificultades para llegar a este punto provienen de dos mundos: a pesar de nuestras reducciones, la parte topológica de los morfismos esquemáticos no codifica nociones tan sencillas como la de morfismo cerrado y, en general, los espacios esquemáticos no son compatibles con definiciones «algebraicas» que incluyan condiciones de tipo finito o presentación finita, por estar definidos localmente por epimorfismos planos de anillos sin suponer finitud alguna.

Los **apéndices a la segunda parte** incluyen algunos más específicos

y de importancia central: el primero da algunas —vagas— indicaciones sobre cómo podría generalizarse esta teoría al caso de posets infinitos y a la situación no noetheriana; el segundo es una recopilación de resultados algebraicos, algunos más conocidos que otros, relativos a los epimorfismos planos de anillos —que controlan la estructura local de los espacios esquemáticos—, así como muchas observaciones que tratan de poner en contexto los espacios esquemáticos en relación con otras áreas de las matemáticas modernas; el tercer apéndice recopila lenguaje estándar relativo a sitios de Grothendieck y resultados sobre sus topos correspondientes, para uso en varias partes de la memoria; y el cuarto apéndice, *cuyo verdadero lugar está quizá en el cuerpo principal de la tesis*, pero que relegamos aquí para preservar la lógica estructural de la exposición, describe las bases de la teoría de *proesquemats*: los espacios localmente anillados que aparecen como espectros de espacios esquemáticos, en parte debida a [32] y en parte original, y que pueden estudiarse en gran medida como puros espacios anillados gracias a que los monomorfismos planos de esquemas son una noción muy rígida. Si bien esta teoría presenta aún bastantes incógnitas, probamos resultados técnicos que sí empleamos de modo crítico —aunque quizá no absolutamente imprescindible— en la presentación y discurso de la segunda parte.

La **tercera parte**, mucho más breve que la anterior, aborda la construcción de la categoría de Galois de revestimientos finitos de espacios esquemáticos. En su **primer capítulo** se definen los *revestimientos finitos étale*, los *functores fibra* asociados a puntos geométricos, y se estudian las propiedades de ambos para probar que las parejas que conforman son categorías de Galois —recuperando las de esquemas cuando procede—. Gran parte de ello pivota sobre el hecho de que los revestimientos finitos étale que definimos son los objetos finitos localmente constantes del topos étale, definido por la «topología étale» que introducimos al final de la parte previa. Por último, su **segundo capítulo** da las generalizaciones a espacios esquemáticos de dos resultados muy clásicos: la sucesión exacta de homotopía, con idéntica demostración a la habitual para esquemas —por estar más relacionada con generalidades categoriales—, pero posible gracias a la teoría sobre «morfismos propios» introducida en la segunda parte; y de algunas variantes del Teorema de Seifert-Van Kampen que expresamos mediante el lenguaje de  $\mathcal{C}$ -datos.

Finalmente, los **apéndices a la tercera parte** hacen un *tour* sin de-

mostraciones por conceptos de la teoría de categorías de Galois y proponen posibles rutas para generalizar este trabajo más allá de los revestimientos *finitos* que nos hemos limitado a presentar.

## Nota cronológica

Para poner en relieve la exposición final que hemos realizado en esta memoria, vamos a vestirnos de arqueólogos y a repasar, con relativa brevedad, cómo se desarrollaron los diferentes conceptos introducidos en relación a los problemas que hallábamos en el camino.

La historia comenzó bajo la premisa de extender el grupo fundamental étale a unos espacios esquemáticos que, por aquel entonces, se limitaban a su definición y tratamiento cohomológicos que se exponen en el artículo fundacional [29]. En seguida resultó evidente que el rol de la localización por qc-isomorfismos en este contexto iba a impedir obtener una categoría de Galois conformada por «morfismos finitos étale» en sentido clásico debido a la no existencia de funtores «fibra» conservativos. Solo podríamos obtener funtores conservativos tras factorizarlos por la localización, y esto seguía teniendo inconvenientes.

La primera solución a esta situación fue aprovechar que se estaba tratando de construir el grupo fundamental de revestimiento étale *finitos*, luego afines: correspondientes por tanto a haces de álgebras cuasicoherentes —sin necesidad de localizar categoría alguna—. Esto permitió obtener una primera formulación del grupo fundamental étale de espacios esquemáticos como el asociado a cierta subcategoría de haces de álgebras cuasicoherentes. Para ello, fue necesario también desarrollar nociones de conexión adecuadas para espacios esquemáticos y para los propios haces de álgebras involucrados, lo cual acabó cristalizando en los espacios pw-conexos de la Sección 6.3. En paralelo y en relación con esto, completamos el estudio de los espacios concisos de la Sección 6.2, cuya utilidad quedaría patente más adelante. También comenzamos a ampliar nuestra comprensión de los espacios esquemáticos y a entenderlos como «datos de descenso», así como a tratar con nociones como la de inmersión plana, que a la postre resultarán centrales en el mundo esquemático.

En este punto nos interesaban dos cuestiones: buscar un modo «geométrico» de enunciar y trabajar con la teoría, más próximo a la formulación

clásica en términos de revestimientos como objetos localmente constantes en una topología dada —en un sitio—; y dar algunos de los resultados más clásicos sobre el grupo fundamental, como el teorema de Seifert-Van Kampen y la sucesión exacta de homotopía. Para la primera cuestión ya teníamos una especie de descripción de los «revestimientos», que hasta ahora tan solo entendíamos como haces cuasicoherentes, en términos de haces localmente constantes; pero esto, publicado ya en [27], se hacía sobre un *cositio* cuyos objetos eran haces de álgebras, no «espacios». En el fondo, el motivo era que no teníamos un modo razonable de definir «morfismo étale» o, por extensión y como mencionamos en la introducción, cualquier tipo de morfismo que requiriese condiciones de «tipo finito» o «presentación finita» —sin embargo, sí es inmediato definir «morfismo *débilmente étale*» para trabajar como en [5], aunque esto se desviaba de nuestros objetivos originales, ya que requiere tratar la situación no noetheriana, y queda como posible continuación de la tesis, véase el Apéndice C.2—. Esta misma cuestión impedía dar un enunciado y demostración de la sucesión exacta de homotopía para el grupo fundamental étale esquemático, dado que por el mismo motivo nos era imposible definir «morfismo propio».

Así, atacamos primero la cuestión del teorema de Seifert-Van Kampen. Desde bien temprano parecía claro que, en el fondo, solo estábamos diciendo que el grupo fundamental podía entenderse como una especie de «haz de grupos profinitos» sobre el poset subyacente al espacio esquemático dado: debería ser posible computarlo como un colímite —«secciones»— de los grupos fundamentales en cada punto. Formalizar este tipo de cuestiones nos llevó a definir la noción de « $\mathcal{C}$ -dato» —i.e. equipar a cada poset con un « $\mathcal{C}$ -haz estructural» y, lo más importante, tratar estas parejas como una categoría—, en principio de modo un tanto naif, enlazando con algunas ideas previas que teníamos acerca de entender los espacios esquemáticos como representaciones de *quivers*. El problema de fijar puntos base para los grupos fundamentales —que en [36] nos parecía resuelto de un modo bastante artificial— nos llevó a tratar la cuestión en términos del grupoide fundamental étale en una línea más próxima a la de [35], recuperándose los resultados para el grupo fundamental a partir de estos y un sencillo argumento. Además, este fue nuestro primer contacto con el mundo de las 2-categorías y de los topós —y consideraciones sobre 2-categorías de topós—, lo que puso de relieve la necesidad de admitir  $\mathcal{C}$ -datos con valo-

res en una 2-categoría estricta  $\mathcal{C}$ . Lo primero que vimos en esta línea fue que, como era de esperar, el grupoide fundamental étale puede computarse como el (2-)colímite de los grupoides fundamentales de los esquemas afines de cada punto del espacio esquemático: esto es lo que llamaríamos «Van Kampen interno» o, en un lenguaje más abstracto, «verificar descenso interno» —Definición 5.5.3—. Lo segundo fue «externalizar» este problema: dar un teorema de Seifert-Van Kampen en términos de un recubrimiento «natural» —a la postre, por inmersiones planas— del espacio esquemático. Este último paso, que más adelante veríamos cómo enunciar en términos de una equivalencia de topos, nos llevó a la noción de «cilindro de un codato esquemático» y a los teoremas que prueban su esquematicidad —Teorema 5.4.16—, que por entonces realizábamos de modo *ad hoc* y por analogía con la del cilindro de una aplicación continua. Este cilindro funciona como un colímite a todos los efectos y además su cómputo no requiere realizar «operaciones categoriales» con anillos o esquemas —a diferencia de, por ejemplo, un colímite de esquemas simpliciales—; pero tampoco parecía verificar la propiedad universal de los colímites y no sabíamos en qué contexto situarlo. En cualquier caso, obtuvimos la formulación esperada del teorema de Seifert-Van Kampen, que probaba el resultado para nuestro grupo fundamental respecto a recubrimientos de un espacio esquemático por inmersiones planas; obteniéndose además como corolario el resultado para el grupo fundamental étale de esquemas respecto a recubrimientos finitos por *monomorfismos planos*, lo cual, hasta donde sabemos, no se encontraba en la literatura.

En este periodo estábamos también interesados en desarrollar una teoría de espacios esquemáticos que sentase unas bases mucho más flexibles con las que tratar estos objetos y su categoría. Así, fuimos considerando ideas acerca del «espectro de un espacio esquemático» que se aproximaban a las de la Sección 4.3 —al mismo tiempo, apareció [32], donde se trataban algunas cuestiones más específicas sobre estos—, estudiando también los criterios valorativos y alguna posible definición de morfismos propio que relajase las condiciones de finitud que impedían su definición; así como el papel universal de los espacios proyectivos finitos —labor principalmente de F. Sancho en [26], no incluida en esta memoria—. También tratamos de probar sustitutos para los lemas de Dévissage y de Chow, que excluimos de esta versión de la tesis en consonancia con la omisión que hacemos de dicha teoría

de espacios proyectivos dado que, al final, puede darse una demostración de nuestro objetivo principal, el teorema de finitud de la cohomología para morfismos propios, sin pasar por este camino. En relación con el cilindro, comenzamos a coquetear con ideas que permitiesen emplear este objeto para dar una teoría de homotopía étale para espacios esquemáticos —en sentido clásico, mediante análogos para la noción de *hiperrecubrimiento*—, cuyo estado de desarrollo actual es muy insuficiente para presentarla; así como a buscar versiones «finitas» de otros objetos como los espacios algebraicos. Fue en este contexto cuando jugar con las ideas de 2-categorías, que habíamos tratado por necesidad con anterioridad, nos llevó a dar con la propiedad universal del cilindro: si entendíamos la categoría de posets como una 2-categoría de modo natural, ¡el cilindro no era más que un colímite laxo en esta! Esta idea podía extenderse a categorías de  $\mathfrak{C}$ -datos si se tenía cierto cuidado con las estructuras consideradas, lo que ponía por fin en contexto esta construcción hasta entonces misteriosa. Quizá puedan entenderse estas cuestiones en términos de colímites homotópicos, pero la versión puramente 2-categorial que presentamos es, a nuestro juicio, la más natural.

Este renovado interés en el cilindro llevó a la idea de tomar «modelos finitos» de espacios esquemáticos respecto a recubrimientos por inmersiones planas, y esto, a su vez, a una noción de morfismo «localmente de tipo finito respecto a la topología de las inmersiones planas»: los morfismos «pro-localmente» de tipo finito —y pro-localmente propios— de la Definición 7.5.13. Para ellos, se deducen del teorema para esquemas y la construcción de estos «modelos finitos» más generales, el teorema de finitud de la cohomología de Grothendieck y demás resultados relacionados. De hecho, *a priori*, estos resultados parecen generalizar los clásicos para esquemas a una noción de morfismo propio más débil, aunque, como discutimos más abajo, sospechamos que podría acabar restringiendo a la versión clásica. Módulo detalles técnicos y el desarrollo de fundamentos que realizamos en torno a esta definición, esto nos permite probar la sucesión exacta de homotopía para espacios esquemáticos, con idéntica demostración a su análogo para esquemas.

Durante el estudio de estos morfismos «pro-localmente de cierto tipo», planteamos también una alternativa, inspirada por la definición de transformación natural representable entre funtores: la de morfismo —y por extensión, espacio— esquemático «algebraico» de la Sección 7.1. A través

de esto, es posible extender a espacios esquemáticos, con buenas propiedades, cualquier clase de morfismos de esquemas razonable —local fpqc y estable por composición y cambio de base—. Conjeturamos incluso la posibilidad de que un morfismo pro-localmente de tipo finito sea algebraico y «de tipo finito» en este segundo sentido, lo cual parece estar conectado con que todo recubrimiento fpqc por monomorfismos planos de un esquema pueda o no ser refinado por un recubrimiento abierto —hecho relacionado a su vez con otra serie de cuestiones abiertas—. En particular, se probaría que todo morfismo entre espacios esquemáticos que provengan de esquemas es pro-localmente propio si y solo si el morfismo de esquemas correspondiente es propio, pero hasta el momento no nos resulta claro si esto y las cuestiones relacionadas que hemos mencionado son o no ciertas, siendo esta una de las incógnitas que quedan por esclarecer para situar a los espacios esquemáticos en el mapa conceptual de la geometría algebraica. Lo que sí probamos es que todo morfismo afín es algebraico —Teorema 7.4.16—, hecho muy técnico por su dependencia del Apéndice B.4, pero suficiente para nuestros propósitos.

Por último, la noción de morfismos algebraico también permite dar una definición razonable de morfismos étale y, por tanto, de sitio étale en el contexto esquemático. Como los morfismos afines son algebraicos, también se recoge aquí el concepto de morfismo finito étale sin pérdida alguna de generalidad —cuando los espacios provienen de esquemas, se corresponden exactamente con sus análogos clásicos—. Por otra parte, esto nos lleva a estudiar en mayor profundidad los haces y otras propiedades categoriales tanto de este tipo de sitios «algebraicos» como del de las inmersiones planas, estando en ambos casos los recubrimientos dados por familias finitas conjuntamente fielmente planas y en los que, como consecuencia, todo haz debe enviar qc-isomorfismos a isomorfismos —no son sitios subcanónicos, ¡hay que hacificar los funtores de puntos!—. Destacar que la comparación de los sitios de *morfismo algebraicos «de cierto tipo»* con sus homónimos esquemáticos tiene más pequeñas patologías de las que cabría esperar. En este contexto nos dimos cuenta de que, con ciertas condiciones adicionales sobre los espacios esquemáticos que consideramos —restringirnos a espacios «geométricos»: consisos y pw-conexos—, los haces de conjuntos finitos localmente constantes son representables, no ya en una categoría localizada, sino en dicha subcategoría de espacios esquemáticos —Lema 8.1.14 y los que

siguen—, y además por morfismos que trivializan localmente en un sentido totalmente análogo al que cabría esperar de los revestimientos «geométricos» de la literatura clásica. Esto nos lleva a definir una nueva subcategoría de morfismos afines que, aunque parezca una formalidad, nos permitirá tanto librarnos de la localización de la categoría de morfismos finitos étale como mantener una apariencia y operatividad más «geométricas» que las que teníamos al considerar una subcategoría de haces de álgebras cuasicoherentes al estilo de nuestra primera aproximación al problema: esta clase de morfismos afines será la subcategoría de morfismos «estándar afines». En ella, por ejemplo, monomorfismos y epimorfismos vienen caracterizados topológicamente, algo insólito en este mundo esquemático. Con este lenguaje, diremos que un *revestimiento* finito étale es un morfismo finito étale estándar afín, y para estos podemos recuperar todos los resultados anteriores en términos aún más análogos a los de la teoría para esquemas.



# Parte I

## Preliminares

Los sueños, los recuerdos, lo sagrado, todo es semejante en cuanto que está más allá de nuestro alcance. Una vez que nos separamos de lo que podemos tocar, ese objeto se santifica; adquiere la belleza de lo inalcanzable, la cualidad de milagroso. Todo, realmente, tiene esta cualidad, pero nosotros podemos profanarlo tocándolo. ¡Qué extraño es el hombre! Su contacto mancha, y sin embargo él es la fuente de los milagros.

*Nieve de primavera*, Yukio Mishima  
trad. Domingo Manfredi, Michael Gallagher



# Capítulo 1

## Espacios topológicos de Alexandroff

Todos los contenidos de este capítulo son clásicos o de demostración elemental, por lo que nuestro objetivo principal con su exposición será fijar lenguaje y notaciones para el resto de la memoria. Además, introducimos las definiciones en más generalidad de la requerida. Recordamos propiedades básicas de los espacios de Alexandroff, su correspondencia con los conjuntos preordenados y con categorías esqueléticas, y repasamos sus propiedades 1-categoriales —en especial la construcción explícita de cocientes— y 2-categoriales. Por último, describimos los haces en estos espacios y la construcción que nos permite entenderlos como modelos de otros espacios topológicos, poniendo ejemplos elementales.

### 1.1. Propiedades a nivel de objetos

**Definición 1.1.1.** Un espacio topológico  $X$  es un *A-espacio* o *espacio de Alexandroff* si la intersección arbitraria de subconjuntos abiertos es abierta. En particular, cada punto  $x \in X$  dispone de un entorno abierto mínimo —la intersección de todos sus entornos abiertos—, que denotamos  $U_x$ . De hecho, cada subconjunto  $S \subseteq X$  define un entorno abierto mínimo  $U_S$ .

*Ejemplo 1.1.2.* Todo espacio topológico finito es un A-espacio, pues cualquier intersección de subconjuntos es finita. Por otra parte, todo A-espacio

$X$  que sea  $T_1$  es discreto, pues de dicha condición de separabilidad se deduce fácilmente que  $U_x = \{x\}$  para todo  $x \in X$ . En virtud de este ejemplo, nuestro interés reside en estudiar A-espacios que no son  $T_1$ . Por último, obsérvese que los abiertos  $\{U_x\}_{x \in X}$  son base de la topología de  $X$ .

**Definición 1.1.3.** Una *conjunto preordenado* es una pareja  $X \equiv (X, \leq)$  donde  $X$  es un conjunto y  $\leq$  una relación binaria en  $X$  verificando las propiedades reflexiva y transitiva. Si además  $\leq$  verifica la propiedad anti-simétrica  $-(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$ — se dice que  $X$  es un *conjunto parcialmente ordenado* o *poset*.

*Observación 1.1.4.* Como es habitual, emplearemos notaciones  $\geq, < y >$ .

**Definición 1.1.5.** Una categoría (pequeña)  $X$  es una *categoría delgada* si para cualesquiera objetos  $x, y \in X \equiv \text{Ob}(X)$ , el conjunto  $\text{Hom}_X(x, y)$  es vacío o el conjunto de un elemento. Una categoría (pequeña) se dice *esqueletal* si cualesquiera dos objetos isomorfos son iguales, i.e. si los únicos isomorfismos son los morfismos identidad.

Denotemos por **ATop** a la categoría de A-espacios y aplicaciones continuas, por **ord** a la categoría de conjuntos preordenados y por **TiCat** a la (1-)categoría de categorías delgadas y funtores. A su vez, se tienen las subcategorías plenamente fieles de A-espacios  $T_0$ , **ATop**<sub>0</sub>; posets, **pos**; y categorías delgadas esqueletales, **SkCat**.

**Proposición 1.1.6.** Se tienen isomorfismos de categorías

$$\mathbf{ATop} \simeq \mathbf{ord} \simeq \mathbf{TiCat}, \quad \mathbf{ATop}_0 \simeq \mathbf{pos} \simeq \mathbf{SkCat}.$$

Además, las respectivas inclusiones naturales están dotadas de adjuntas a la izquierda —véase la demostración— que son la identidad sobre las subcategorías.

*Demostración.* La correspondencia es: a cada A-espacio  $X$  se le asigna un preorden tal que  $x \leq y$  si  $C_x \subseteq C_y$ , donde  $C_x \subseteq X$  denota el cierre del punto  $x \in X$ . Recíprocamente, cada preorden en  $X$  define una topología de Alexandroff sin más que establecer que los abiertos son los conjuntos crecientes (y los cerrados, los conjuntos decrecientes). Por otra parte, un

conjunto preordenado  $X$  se interpreta como una categoría delgada sin más que definir

$$\text{Ob}(X) = X, \quad \text{Hom}_X(x, y) = \begin{cases} \star & \text{si } x \leq y, \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por último, el functor adjunto mencionado no es más que el conocido *functor esqueleto*:  $\mathbf{Sk}: \mathbf{TiCat} \rightarrow \mathbf{SkCat}$ . A nivel topológico este se corresponde con el *functor  $T_0$ -ficación*  $T_0: \mathbf{ATop} \rightarrow \mathbf{ATop}_0$ , tal que  $T_0(X) = X / \sim$  con  $x \sim y$  cuando  $C_x = C_y$  y, en el conjunto cociente, las clases se ordenan estableciendo que  $[x] \leq [y]$  si  $C_x \subseteq C_y$ . Conviene señalar que, en vista de las correspondencias previas, la proyección  $X \rightarrow T_0(X)$  induce una biyección entre los conjuntos de abiertos de ambos espacios. En términos categoriales, esta proyección es una equivalencia de categorías y un isomorfismo si y solo si  $X$  es esquelético.  $\square$

*Observación 1.1.7.* En términos de abiertos mínimos, la correspondencia entre preórdenes y abiertos viene dada por:  $x \leq y \Leftrightarrow U_y \subseteq U_x$ .

*Observación 1.1.8.* Todo  $A$ -espacio  $T_0$  puede representarse de modo único mediante un grafo simple y sin lazos llamado *diagrama de Hasse*. Siempre asumiremos que estos diagramas están orientados de tal modo que los puntos maximales aparecen en su parte superior y los minimales en su inferior.

*Observación 1.1.9.* En general, dado un espacio topológico arbitrario  $X$  se define su *preorden de las especializaciones* como en la Proposición 1.1.6: estableciendo  $x \leq y \Leftrightarrow C_x \subseteq C_y$  —un orden parcial si  $X$  es  $T_0$ —. Si ahora denotamos por  $X_{\leq}$  al  $A$ -espacio definido por este preorden, la identidad conjuntística define un morfismo natural  $\text{Id}_X^{\leq}: X_{\leq} \rightarrow X$  en la categoría de espacios topológicos  $\mathbf{Top}$ . Más en general, probaremos como parte del Lema 1.4.3 que la asignación  $X \mapsto X_{\leq}$  define un functor  $\leq: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{ATop} \simeq \mathbf{ord}$ , que es adjunto por la derecha de la inclusión natural y donde  $\text{Id}_X^{\leq}$  es el correspondiente morfismo unidad. Es más, es evidente que *un espacio topológico es un  $A$ -espacio si y solo si  $\text{Id}_X^{\leq}$  es un homeomorfismo*. Alternativamente, la topología de  $X_{\leq}$  puede obtenerse «añadiendo» a la de  $X$  las intersecciones arbitrarias de abiertos.

*Ejemplo 1.1.10.* En relación con la Observación 1.1.9, recordemos que, dado un anillo (conmutativo y con unidad)  $A$ , podemos dotar al conjunto de todos

sus ideales de la topología del orden dada por las inclusiones en sentido inverso, es decir,  $I \leq J$  si y solo si  $J \subseteq I$  para ideales  $I, J \subseteq A$ . La topología de Zariski en  $\text{Spec}(A)$  es la restricción de esta topología de Alexandroff. Es interesante dilucidar cuándo la topología Zariski coincide con las de las especializaciones, como sucede por ejemplo en anillos de valoración.

A partir de ahora empleamos libremente el lenguaje que nos resulte más apropiado en cada momento —topológico, combinatorio o categorial—. El siguiente Lema es también una observación, pero destacamos su importancia conceptual:

**Lema 1.1.11.** Todo morfismo entre posets que induzca una biyección entre sus respectivos abiertos es un homeomorfismo. En otras palabras, toda equivalencia de categorías entre posets es un isomorfismo.

En virtud de los isomorfismos de la Proposición 1.1.6, se elabora un «diccionario» de traducción de conceptos entre los diferentes mundos. Listamos algunos ejemplos, que quedan como sencillos ejercicios de topología clásica o teoría de categorías elemental:

- Un  $A$ -espacio  $X$  es conexo si y solo si es arcoconexo, si y solo si es *orden conexo* como conjunto preordenado; es decir, si para cualesquiera dos puntos  $x, y \in X$  existe una cadena  $x = x_0 \equiv \dots \equiv x_f = y$  con « $\equiv$ » denotando  $\leq$  ó  $\geq$ .
- Un  $A$ -espacio  $X$  cuasicompacto dispone de un número finito de puntos cerrados (i.e. minimales). Si tiene algún punto minimal, el recíproco es cierto. Todo  $A$ -espacio  $T_0$  y cuasicompacto dispone de algún punto cerrado.

Un ejemplo de  $A$ -espacio  $T_0$  no cuasicompacto y sin puntos cerrados es  $(\mathbb{Z}, \leq)$ . Un  $A$ -espacio cuasicompacto sin puntos cerrados es  $X = \{a, b\}$  con  $a \leq b$  y  $b \leq a$ .

Por ejemplo, el espectro de un anillo conmutativo  $A$  con su topología del orden es compacto si y solo si  $A$  es semilocal.

- Un espacio  $X$  *finito* es irreducible si y solo si tiene un único punto genérico (i.e. maximal), es decir, si pensado como categoría tiene objeto final. En general, un  $A$ -espacio  $X$  cualquiera es irreducible si y solo si es filtrante como categoría.

- La dimensión topológica de  $X$  se corresponde con la dimensión combinatoria: el máximo de las longitudes de cadenas irrefinables de puntos totalmente ordenados.
- Una pareja de aplicaciones  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  definen una *conexión de Galois* si son adjuntas como funtores. Un ejemplo sería la correspondencia entre ideales de un anillo conmutativo con unidad y subconjuntos de su espectro —vía los funtores de *ceros de un ideal* y del *ideal de elementos que se anulan en un subconjunto*—.

## 1.2. Propiedades categoriales

Como **ATop** es subcategoría plenamente fiel de **Top** y el functor de  $T_0$ -ficación es un adjunto a la izquierda —luego conmuta con colímites—, se demuestra:

**Proposición 1.2.1.** La categoría **ATop** es completa y cocompleta; además, la inclusión **ATop**  $\subset$  **Top** preserva límites y colímites. Lo análogo es cierto si nos restringimos a espacios  $T_0$ . Si nos restringimos al caso finito, existen límites y colímites *finitos*.

Nos limitamos a indicar cómo se describen los productos fibrados finitos y colímites de posets en términos del orden. Los primeros no revisten dificultad: dados morfismos  $f: X \rightarrow Z$  e  $g: X \rightarrow Z$ , el producto  $X \times_Z Y$  se equipa con el orden inducido por el obvio en el producto directo, es decir, dados  $(x, y), (x', y') \in X \times_Z Y$ ,

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ e } y \leq y'.$$

La construcción de colímites es más delicada y se basa la descripción de los epimorfismos efectivos en la categoría de posets, lo cual será de utilidad más adelante. Referimos a [8] para más detalles. Recordemos que  $f: X \rightarrow Y$  es un epimorfismo efectivo si  $Y$  es isomorfo al coequalizador de las proyecciones  $X \times_Y X \rightrightarrows X$ . Como **pos** tiene productos fibrados, puede demostrarse que esta noción es equivalente a las de epimorfismo regular y epimorfismo estricto que no emplearemos como tales en esta memoria.

**Definición 1.2.2.** Dado un poset  $X$  y una partición  $P = \{X_j\}$  de  $X$ , se define el *preorden de  $P$ -bloques*  $\leq_P$  como el dado por, para cada  $x, y \in X$ ,

$$x \leq_P y \Leftrightarrow \exists x = a_0 b_0 \dots a_n b_n = y$$

tal que  $a_i, b_i \in X_{j_i}$  para cada  $i$  y cierto  $j_i$ ; y  $b_i \leq a_{i+1}$  en  $X$  para todo  $i$ .

Una aplicación de conjuntos entre dos posets  $f: X \rightarrow Y$  define una partición de  $X$  dada por las fibras  $\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ . Denotemos por  $\leq_f$  al preorden asociado.

**Definición 1.2.3.** Una aplicación epiyectiva entre dos posets  $f: X \rightarrow Y$  se dice *de fibras coherentes* cuando  $f(x_1) \leq f(x_2)$  si y solo si  $x_1 \leq_f x_2$  para cualesquiera  $x_1, x_2 \in X$ . En particular,  $\leq_f$  es un orden parcial y  $f$  es continua.

**Proposición 1.2.4.** [8, Proposition 4.1<sup>1</sup>] Los epimorfismos efectivos en **pos** son exactamente los morfismos de fibras coherentes.

Dado un diagrama de posets  $I \rightarrow \mathbf{pos}$  ( $i \mapsto X_i$ ), su colímite se computa en **Top** y aparece como un cociente: es decir, el morfismo

$$\pi : \coprod_i X_i \rightarrow \operatorname{colim}_i X_i$$

es un epimorfismo efectivo. Como el orden en  $\coprod_i X_i$  viene dado por la relación « $(i, x) \leq (j, y)$  si y solo si  $i = j$  y  $x \leq y$  en  $X_i$ », la Proposición 1.2.4 nos garantiza que el orden de  $\operatorname{colim}_i X_i$  queda descrito explícitamente en términos del orden de bloques asociado a las fibras de  $\pi$ .

### 1.3. Propiedades 2-categoriales

En lo que resta de memoria, por *2-categoría* entenderemos *2-categoría estricta*: una categoría enriquecida en la 1-categoría de categorías **Cat**. Con frecuencia trabajaremos con categorías pequeñas o finitas, por lo que obviaremos consideraciones «de tamaño» tanto como sea posible. Denotamos

<sup>1</sup>[9, Proposition 2.4] para el caso general.

también **Cat** a la 2-categoría de 1-categorías localmente pequeñas en este sentido, cuyos 2-morfismos son las transformaciones naturales, quedando claro por el contexto si nos referimos a esta o a su 1-categoría subyacente.

Un aspecto importante de la descripción de los conjuntos preordenados (resp. posets) como categorías es que **ord** (resp. **pos**) está dotada de una estructura de 2-categoría, justo la inducida por la inclusión  $\mathbf{ord} \subseteq \mathbf{Cat}$ . Es más, **ord** está enriquecida en conjuntos preordenados (resp. **pos** está enriquecida en posets): dados morfismos  $f, g: X \rightarrow Y$ , es fácil comprobar que las transformaciones naturales  $f \rightarrow g$  son

$$\text{Nat}(f, g) \equiv \text{Hom}_{\text{Hom}(X, Y)}(f, g) = \begin{cases} \star & \text{si } f \leq g, \\ \emptyset & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

donde  $f \leq g$  cuando  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X$ .

*Observación 1.3.1.* En particular, cuando nos restringimos a la 2-categoría **pos** y demos propiedades 2-universales, como toda equivalencia entre posets es un isomorfismo, estas vendrán dadas siempre en términos de isomorfismos entre las categorías de 1-morfismos.

En su vertiente topológica, es clásico que dos aplicaciones  $f \leq g$  como antes son homótopas. En general, dos aplicaciones  $f, g$  son homótopas si pertenecen a la misma componente conexa del espacio topológico  $\text{Hom}(X, Y)$  (es decir, si existe una cadena de aplicaciones conectadas por el orden con origen en  $f$  y final en  $g$ ). Esto indica que la estructura 2-categorial de **ord** codifica la homotopía, y por eso nos referiremos a ella como *estructura 2-categorial homotópica* —sin referencia alguna a jerga n-categorial más general o a estructuras de categorías de modelos—.

*Observación 1.3.2.* Si nos restringimos a la categoría de espacios topológicos *finitos*, puede plantearse reinterpretar el teorema de clasificación homotópica de Stong [34] en términos categoriales.

## 1.4. Haces en A-espacios

Una de las ventajas principales de los A-espacios es que, en condiciones mínimas, los haces sobre ellos vienen descritos en términos de sus fibras.

En lo que sigue y para no sobrecargar terminología, diremos que una categoría  $\mathfrak{C}$  tiene *suficiente límites* (resp. *suficientes colímites*) si tiene todos los límites (resp. colímites) indexados por los diagramas que aparezcan en la situación considerada en el contexto del enunciado. Habitualmente las categorías de diagramas consideradas serán **pos** o su subcategoría de posets finitos, que denotaremos igual si la distinción está clara por el contexto. Emplearemos terminología análoga para los diferentes 2-límites y 2-colímites en el caso 2-categorial. En todos los ejemplos explícitos sucederá que nuestras categorías tienen límites (resp. colímites) pequeños o finitos.

Sea  $X$  un  $A$ -espacio,  $\mathbf{Sh}(X, \mathfrak{C})$  su categoría de haces con valores en una categoría  $\mathfrak{C}$  y  $[X, \mathfrak{C}]$  la categoría de funtores y transformaciones naturales.

**Proposición 1.4.1.** Si  $\mathfrak{C}$  tiene suficientes límites, se tiene una equivalencia

$$\mathbf{Sh}(X, \mathfrak{C}) \simeq [X, \mathfrak{C}].$$

Cada haz  $\mathcal{F}$  define un functor  $\mathcal{F}: X \rightarrow \mathfrak{C}$  poniendo  $\mathcal{F}(x) := \mathcal{F}_x = \mathcal{F}(U_x)$ .

*Demostración.* Claramente la correspondencia es plenamente fiel. Solo queda observar que, como los  $U_x$  son base para la topología de  $X$  y las secciones de un haz en estos abiertos coinciden con sus fibras, la condición de haz determina las secciones en cualquier otro abierto. Explícitamente, dado un functor  $\mathcal{G}: X \rightarrow \mathfrak{C}$ , se describen las secciones en  $U \subseteq X$  como

$$\Gamma(U, \mathcal{G}) \equiv \mathcal{G}(U) = \lim \mathcal{G}|_U \equiv \lim_{x \in U} \mathcal{G}(x),$$

donde  $\mathcal{G}|_U$  denota la restricción de  $\mathcal{G}$  a  $U$ . □

De ahora en adelante identificaremos los haces en  $A$ -espacios con sus correspondientes funtores. Como consecuencia de la Proposición 1.4.1, todas las «operaciones categoriales» que realicemos en  $\mathbf{Sh}(X, \mathfrak{C})$  cuyo valor en cada fibra —en *stalks*— coincida con la operación en  $\mathfrak{C}$  correspondiente quedará determinada por esta. Por ejemplo, si  $\mathcal{F}: I \rightarrow \mathbf{Sh}(X, \mathfrak{C})$  ( $i \mapsto F_i$ ) es un diagrama y  $\mathcal{F}(x): I \rightarrow \mathfrak{C}$  ( $i \mapsto \mathcal{F}_i(x)$ ) tiene límite y/o colímite para todo  $x \in X$ , entonces  $\mathcal{F}$  tiene límite y/o colímite determinado por

$$(\lim \mathcal{F})(x) = \lim(\mathcal{F}(x)), \quad (\text{colim } \mathcal{F})(x) = \text{colim}(\mathcal{F}(x));$$

o si, por ejemplo  $(\mathfrak{C}, \otimes)$  es una categoría monoidal, su categoría de haces en  $X$  lo es y para todo  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathbf{Sh}(X, \mathfrak{C})$ ,

$$(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)(x) = \mathcal{F}_1(x) \otimes \mathcal{F}_2(x).$$

**Corolario 1.4.2.** Si  $\mathfrak{C}$  tiene suficientes límites y  $X_0$  es la  $T_0$ -ficación de  $X$ ,

$$\mathbf{Sh}(X, \mathfrak{C}) \simeq \mathbf{Sh}(X_0, \mathfrak{C}).$$

*Demostración.* La  $T_0$ -ficación es el functor esqueleto, luego  $X \rightarrow X_0$  es una equivalencia de categorías, y por tanto también lo es  $[X_0, \mathfrak{C}] \rightarrow [X, \mathfrak{C}]$ .  $\square$

Como nuestro interés principal reside en estudiar haces en A-espacios, el Corolario 1.4.2 nos permite suponer que trabajamos en el caso  $T_0$ .

*A partir de este punto, todos los A-espacios considerados serán  $T_0$ , es decir, todos los conjuntos preordenados serán posets.*

Por último, dado un espacio anillado (resp. localmente anillado) arbitrario  $S$ , podemos dotar a su A-espacio asociado  $S_{\leq}$  del haz de anillos (resp. en anillos locales) inducido por el morfismo  $\text{Id}_{\leq}: S_{\leq} \rightarrow S$ . Por la Proposición 1.4.1, este queda determinado por su valor en las fibras:  $\mathcal{O}_{S_{\leq}, s} = \mathcal{O}_{S, s}$  —y lo morfismos de restricción, que vienen inducidos por morfismos entre colímites—. Generalizando así la Observación 1.1.9:

**Lema 1.4.3.** El functor  $S \mapsto S_{\leq}$  es *adjunto a la derecha* de la inclusión de la categoría de posets anillados (resp. localmente anillados) en la de espacios anillados **RS** (resp. localmente anillados, **LRS**). Es decir, para todo  $X$  poset anillado (resp. localmente anillado) y  $S$  espacio anillado arbitrario (resp. localmente anillado), se tienen biyecciones functoriales

$$\text{Hom}_{\mathbf{RS}}(X, S_{\leq}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{RS}}(X, S)$$

(resp. ídem para **LRS**).

*Demostración.* Para cada  $g: X \rightarrow S$  se tiene un diagrama conmutativo de conjuntos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S_{\leq} \\ & \searrow g & \downarrow \text{Id}_{\leq} \\ & & S \end{array}$$

con  $f = g$ . Si probamos que  $f$  es continua, obtenemos la afirmación topológica de la Observación 1.1.9. En efecto, como  $S_{\leq}$  es un poset basta ver que  $f^{-1}(U_s)$  es abierto para cualquier  $s \in S$ , donde  $U_s$  es el abierto mínimo del punto, pero esto es

$$f^{-1}(U_s) = f^{-1}\left(\bigcap_{s \in U} U\right) = \bigcap_{s \in U} g^{-1}(U)$$

—donde la intersección recorre los entornos abiertos de  $s$  en  $S$ —, que es abierto por continuidad de  $g$  y ser  $S$  un poset —de hecho, esto es válido para cualquier A-espacio por la propiedad universal de la  $T_0$ -ficación—. Esto extiende a haces de anillos por adjunción:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_S, g_*\mathcal{O}_X) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Id}_{\leq}^{-1}\mathcal{O}_S, f_*\mathcal{O}_X) \equiv \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{S_{\leq}}, f_*\mathcal{O}_X).$$

El razonamiento es válido tanto para espacios anillados como localmente anillados.  $\square$

## 1.5. A-modelos

Nuestra filosofía a lo largo de la memoria será emplear posets (habitualmente finitos) como medio de codificar la información «combinatoria» de un recubrimiento de un espacio topológico. Describimos a continuación este proceso y su comportamiento functorial.

*Notación 1.5.1.* El lector observará que a partir de este punto utilizaremos  $X, Y, Z$ , etc. para referirnos a posets y  $S, T$ , etc. para referirnos a espacios topológicos ordinarios, espacios anillados o esquemas.

Vamos a considerar recubrimientos del siguiente tipo:

**Definición 1.5.2.** Dado un espacio topológico  $S$ , un recubrimiento —no necesariamente abierto—  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  se dice *puntualmente abierto* si, para todo  $s \in S$ , el subconjunto

$$U^s = \bigcap_{s \in U_i} U_i$$

es abierto.

*Ejemplo 1.5.3.* Todo recubrimiento abierto puntualmente finito —tal que todo  $s \in S$  solo está contenido en un número finito de sus abiertos— es puntualmente abierto. En particular, todo recubrimiento abierto finito verifica la condición.

**Construcción 1.5.4.** Dado  $S$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  un recubrimiento puntualmente abierto de  $S$  (resp. recubrimiento abierto finito), se define el A-modelo (resp. modelo finito) asociado a  $(S, \mathcal{U})$  como el cociente conjuntístico

$$\pi: S \rightarrow X$$

con  $X = S / \sim$  para la relación  $s \sim s'$  si y solo si  $U^s = U^{s'}$ . Se dota a  $X$  de un orden parcial definiendo  $\pi(s) \leq \pi(s')$  si y solo si  $U^{s'} \subseteq U^s$ , el cual hace el morfismo  $\pi$  continuo, pues

$$\pi^{-1}(U_{\pi(s)}) = U^s$$

para todo  $s \in S$ . Nótese que, en general, la topología que hemos puesto en  $X$  no coincide con la cociente. Si se prefiere,  $X$  es también la  $T_0$ -ficación del A-espacio  $S^{\mathcal{U}}$  cuyo conjunto subyacente es  $S$  y cuya topología es la generada por los  $U^s$ .

Será habitual hablar de  $X$  como el A-modelo de  $S$ , sin hacer referencia explícita al recubrimiento o a el morfismo de paso al cociente.

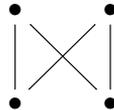
*Observación 1.5.5.* La construcción del morfismo  $\pi: S \rightarrow X$  tiene sentido para cualquier subconjunto de las partes de  $S$ . La única patología es que la aplicación no será, en general, continua. Nótese también que, a efectos de esta construcción, podemos reemplazar el recubrimiento  $\mathcal{U}$  por  $\{U^s\}_{s \in S}$ .

*Ejemplos 1.5.6.* Algunos ejemplos icónicos de A-modelos serían:

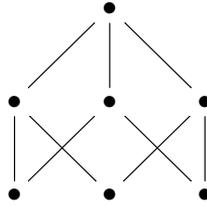
- 1) Dada la circunferencia  $S^1$  y el recubrimiento dado por dos segmentos abiertos de circunferencia  $U_0$  y  $U_1$  con  $U_0 \cap U_1 = V_0 \amalg V_1$ , el A-modelo asociado a estos datos es

$$X = \{0, 0', 1, 1'\}, \text{ con el orden parcial } 0 \leq 1, 1' \text{ y } 0' \leq 1, 1'.$$

Es decir, su diagrama de Hasse es



- 2) Dada la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$  —sobre un anillo cualquiera— dotada de coordenadas homogéneas  $\{x_0, x_1\}$  (en el sentido que el lector prefiera) y el recubrimiento por abiertos  $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ ,  $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ ; el modelo finito correspondiente son las partes no vacías de  $\Delta_1 = \{0, 1\}$  dotadas del orden parcial dado por la inclusión. En general, el modelo finito de  $\mathbb{P}^n$  asociado al recubrimiento estándar es el poset de partes no vacías de  $\Delta_n = \{0, \dots, n\}$ . Para  $n = 2$ , el diagrama de Hasse correspondiente sería



Mientras que otros más exóticos podrían ser:

- 3) Sea  $A = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$  el anillo de polinomios en infinitas variables (no noetheriano), pongamos que indexadas por  $\mathbb{N}$ , y sea  $S = \text{Spec}(A)$ . El recubrimiento estándar  $\{U_i\}$  con  $U_i = \text{Spec}(A_{x_i})$  (es decir, con « $U_i = \{x_i \neq 0\}$ ») no es puntualmente finito, pero sus intersecciones arbitrarias siguen siendo abiertas: localizar en las variables correspondientes. El A-modelo asociado a  $(S, \{U_i\})$  es  $\pi: S \rightarrow \mathcal{P}^*(\mathbb{N})$  (las partes no vacías de  $\mathbb{N}$ ), que es de dimensión infinita.
- 4) Sea  $B$  un anillo de valoración con un número infinito de ideales primos y consideremos  $\text{Spec}(B)$ . Como dichos ideales están totalmente ordenados, se tiene un recubrimiento (afín) infinito  $\{V_i\}$  donde  $V_i = A_{\mathfrak{p}_i}$  para cierto ideal primo  $\mathfrak{p}_i$  (localizar en el ideal maximal devuelve el propio  $A$ ). Las intersecciones arbitrarias de los  $V_i$  vuelven a ser los propios  $V_i$ , por lo que siguen siendo abiertas. El modelo finito de  $T$  respecto a este recubrimiento es, de hecho, el morfismo identidad  $\pi = \text{id}: \text{Spec}(B) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(B)$ , de dimensión infinita (para un anillo de valoración, las topologías de Zariski y especializaciones en su espectro coinciden).
- 5) El ejemplo anterior era de dimensión infinita pero sí tenía un punto cerrado. El siguiente tiene un punto genérico, pero no un punto cerrado:

sea  $S = \mathbb{R}^n$  con la topología métrica ordinaria (o un espacio métrico cualquiera) y consideremos el recubrimiento abierto  $\{D(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$ , donde  $D(0, n)$  es la bola abierta de centro en 0 y radio  $n$ . De nuevo, este recubrimiento no es puntualmente finito, pero como sus abiertos están totalmente ordenados sí obtenemos un morfismo continuo

$$\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{Z}_{\leq 1}, \leq) \quad a \mapsto -n, \text{ donde } n = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : a \in D(0, m)\}.$$

En particular, esto puede verse en que  $\mathbb{Z}_{\leq 1}$  no tiene ningún punto cerrado para la topología del orden: además de ser de dimensión infinita, no es compacto.

Esta construcción es functorial en las parejas  $(S, \mathcal{U})$ :

**Definición 1.5.7.** Sea  $S$  un espacio topológico y  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  y  $\mathcal{V} = \{V_j\}$  recubrimientos puntualmente abiertos de este. Diremos que  $\mathcal{V}$  *refina* a  $\mathcal{U}$  si, para todo  $s \in S$ , se tiene la inclusión  $V^s \subseteq U^s$ .

**Definición 1.5.8.** Sea  $g: S \rightarrow T$  una aplicación continua,  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  un recubrimiento puntualmente abierto de  $T$  y denotemos a su antiimagen  $g^{-1}(\mathcal{U}) = \{g^{-1}(U_i)\}$ . Se dice que un recubrimiento  $\mathcal{V} = \{V_j\}$  de  $S$  puntualmente abierto *g-refina* a  $\mathcal{U}$  si refina a  $g^{-1}(\mathcal{U})$ .

**Proposición 1.5.9.** En la situación de la Definición 1.5.8, si  $\pi_X: S \rightarrow X$  y  $\pi_Y: T \rightarrow Y$  son los respectivos A-modelos, se verifica que  $\mathcal{V}$  *g-refina* a  $\mathcal{U}$  si y solo si existe un morfismo de A-espacios  $f: X \rightarrow Y$  haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & T \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

*Demostración.* Si  $\mathcal{V}$  *g-refina* a  $\mathcal{U}$  entonces se define  $f(x) = \pi_Y(g(s))$ , con  $s \in \pi_X^{-1}(x)$  cualquiera. Esto tiene sentido porque, si tomamos otro  $s' \in \pi_X^{-1}(x)$  en la misma fibra,  $V^s = V^{s'}$ , luego  $s, s' \in g^{-1}(U^{g(s)}), g^{-1}(U^{g(s')})$ , y por tanto  $g(s), g(s') \in U^{g(s)} \cap U^{g(s')}$ ; pero como estos son los mínimos abiertos conteniendo a los puntos, sucede que  $U^{g(s)} = U^{g(s')}$ , luego  $\pi_Y(g(s)) = \pi_Y(g(s'))$ . Recíprocamente, si existe  $f$  como en el diagrama, se tiene que para todo

$s \in S$ ,  $U^s = \pi_X^{-1}(U_{\pi_X(s)})$ , pero como por la monotonía de  $f$  se tienen inclusiones  $U_{\pi_X(s)} \subseteq f^{-1}(U_{f(\pi_X(s))}) = f^{-1}(U_{\pi_Y(g(s))})$ , tomando antiimágenes concluimos que  $U^s \subseteq \pi_X^{-1}(f^{-1}(U_{\pi_Y(g(s))})) = g^{-1}(U^{g(s)})$ .  $\square$

*Ejemplo 1.5.10.* La construcción de A-modelos topológicos es clásica y su utilidad para estudiar propiedades de espacios topológicos se remonta a McCord —[20]—. Por ejemplo, se demuestra en [4, Thm. 1.4.2] que si la pareja  $(S, \mathcal{U})$  se elige de modo tal que los  $U^s$  son homotópicamente triviales (resp. con leves modificaciones,  $\pi_n(U^s) = 0$  para cierto  $n \geq 0$ , asumiendo independencia del punto base por simplicidad), entonces la proyección natural  $\pi: S \rightarrow X$  es una equivalencia homotópica débil (resp.  $\pi_n(S) \simeq \pi_n(X)$  para cierto  $n \geq 0$ ). Esto es un caso particular de un proceso más general.

### A-modelos de espacios anillados

La construcción de A-modelos extiende a espacios anillados del modo evidente: si  $(S, \mathcal{O}_S)$  es un espacio anillado y  $\mathcal{U}$  un recubrimiento puntualmente abierto, podemos convertir la proyección asociada

$$\pi: S \rightarrow X$$

en una de espacios anillados sin más que definir  $\mathcal{O}_X := \pi_* \mathcal{O}_S$ . Esto sigue siendo functorial en las parejas  $(S, \mathcal{U})$  en el sentido de la Proposición 1.5.9. En la Sección 3.1 y en el espíritu del Ejemplo 1.5.10 veremos que, si  $S$  es un esquema cuasicompacto y cuasiseparado y  $\mathcal{U}$  un recubrimiento finito puntualmente afín (es decir, trivial para el invariante «módulos cuasicoherentes»), la pareja  $(\pi^* \dashv \pi_*)$  induce una equivalencia entre las categorías de módulos cuasicoherentes en  $S$  y  $X$ . Es más, si consideramos la categoría de espacios anillados  $\mathbf{RS}$  y la inmersión canónica  $\mathbf{Top} \hookrightarrow \mathbf{RS}$  tal que  $S \mapsto (S, \mathbb{Z})$ , se verifica que los haces módulos cuasicoherentes en  $S$  se corresponden con los haces localmente constantes, y la equivalencia entre módulos cuasicoherentes anterior es exactamente la equivalencia entre grupos fundamentales  $\pi_1(S) \simeq \pi_1(X)$  del Ejemplo 1.5.10. De nuevo, esto es un caso particular de un proceso más general; compárese también con las « $\Phi$ -equivalencias» del Anexo A.2.

## Capítulo 2

# Categorías de $\mathfrak{C}$ -datos

Introducimos ahora uno de los ejes centrales del lenguaje que emplearemos durante el resto de la memoria. Informalmente, dada una categoría  $\mathfrak{C}$ , la categoría de  $\mathfrak{C}$ -datos asociada será la categoría de *posets equipados con un  $\mathfrak{C}$ -haz estructural*. Consideraremos tanto el caso donde  $\mathfrak{C}$  es una 1-categoría ordinaria como donde  $\mathfrak{C}$  es una 2-categoría, y veremos las diferentes estructuras «homotópicas» que aparecen como herencia de la estructura de **pos** y de la propia  $\mathfrak{C}$ . Creemos que este lenguaje tiene más potencial que el aquí expuesto para tratar «problemas de descenso» en un sentido muy general —siendo los espacios esquemáticos que estudiamos en el cuerpo de la memoria un caso particular de ello— y, por tanto, daremos algunas ideas al respecto en el Anexo A.2. Todo lo expuesto es original, si bien mucho de ello se reduce a buscar un lenguaje adecuado para nuestros objetivos.

### 2.1. Caso 1-categorial

La siguiente definición está motivada por la Proposición 1.4.1. Como ya indicamos, dado que vamos a estudiar categorías salvo equivalencia, vamos a suponer que todos los A-espacios considerados son posets.

**Definición 2.1.1.** Sea  $\mathfrak{C}$  una categoría y  $X$  un poset. Un  $\mathfrak{C}$ -dato en  $X$  es un functor  $\mathcal{F}: X \rightarrow \mathfrak{C}$ . Se define la *categoría de  $\mathfrak{C}$ -datos en  $X$*  como  $\mathfrak{C}\text{-data}_X := [X, \mathfrak{C}]$ .

Dado un morfismo continuo  $f: X \rightarrow Y$ , se tiene el functor *imagen in-*

versa natural

$$f^{-1}: \mathfrak{C}\text{-data}_Y \rightarrow \mathfrak{C}\text{-data}_X$$

tal que  $(f^{-1}\mathcal{F})(x) = \mathcal{F}(f(x))$ . Esta construcción define un prehaz de categorías indexado por **pos**: el 2-functor *estricto* con valores en la 2-categoría de categorías **Cat**:

$$\begin{aligned} \underline{\mathfrak{C}\text{-data}}: \mathbf{pos}^{\text{op}} &\rightarrow \mathbf{Cat} \\ X &\mapsto \mathfrak{C}\text{-data}_X \\ f &\mapsto f^{-1}. \end{aligned}$$

**Definición 2.1.2.** Sea  $\mathfrak{C}$  una categoría. Se define la *categoría de  $\mathfrak{C}$ -datos*, denotada  **$\mathfrak{C}$ -data**, como la asociada a  $\mathfrak{C}$ -data a través de la construcción de Grothendieck ; es decir, la categoría fibrada sobre **pos** definida por:

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathfrak{C}\text{-data}) &= \{(X, \mathcal{F}) : X \in \mathbf{pos}, \mathcal{F} \in \mathfrak{C}\text{-data}_X\}, \\ \text{Hom}_{\mathfrak{C}\text{-data}}((X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})) &= \\ &= \{(f, f^\sharp) : f \in \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y), f^\sharp \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}\text{-data}_X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})\}, \\ | - |: \mathfrak{C}\text{-data} &\rightarrow \mathbf{pos} \text{ es el functor } \textit{espacio subyacente} \ (X, \mathcal{F}) \mapsto X. \end{aligned}$$

Por brevedad, diremos que un dato en  $\mathfrak{C}^{\text{op}}$  es un *codato* en  $\mathfrak{C}$ . Denotaremos  **$\mathfrak{C}$ -codata** :=  $\mathfrak{C}^{\text{op}}$ -**data**. El functor  $\mathcal{F}$  es el *functor estructural*.

Nótese que para toda subcategoría plenamente fiel  $\mathfrak{P} \subseteq \mathbf{pos}$ , podemos restringir la categoría de índices de  **$\mathfrak{C}$ -data** a  $\mathfrak{P}$  sin más que considerar el producto fibrado (estricto)

$$\mathfrak{P} \times_{\mathbf{pos}} \mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow \mathfrak{P};$$

es decir, salvo equivalencia, la subcategoría formada por los  $(X, \mathcal{F}) \in \mathfrak{C}\text{-data}$  tales que  $X \in \mathfrak{P}$ . Habitualmente tomaremos  $\mathfrak{P}$  la categoría de *posets finitos* —en particular, las categorías «fibra»  $\mathfrak{C}\text{-data}_X$  serán del «mismo tamaño» que  $\mathfrak{C}$ —. Dado que siempre quedará claro por el contexto qué  $\mathfrak{P}$  subyace, usaremos la notación  **$\mathfrak{C}$ -data** para todas.

*Observación 2.1.3.* Si dotamos a **pos** de estructura de sitio con su topología conjuntística natural, es fácil comprobar que  $\mathfrak{C}$ -data es un *stack* o 2-haz.

*Ejemplos 2.1.4.*

- El ejemplo a tener presente es el de  $\mathfrak{C} = \mathbf{CRing}$ , la categoría de anillos conmutativos con unidad; para la cual **CRing-data** es la categoría de *posets anillados*. En la práctica consideraremos posets finitos anillados.
- Si  $\mathfrak{C}$  es una categoría abeliana,  **$\mathfrak{C}$ -data $_X$**  es una categoría abeliana para todo  $X$ . En particular,  **$\mathfrak{C}$ -data** es una categoría fibrada en categorías abelianas (similar para aditiva). Si  $\mathfrak{C}$  es un grupoide,  **$\mathfrak{C}$ -data** es una fibración en grupoides.
- Si  $S$  es un espacio topológico y  $\pi: S \rightarrow X$  un A-modelo de este, podemos replicar la construcción de A-modelos de espacios anillados y convertir a  $X$  en un **Top-codato**  $(X, \mathcal{S})$  con  $\mathcal{S}(x) = \pi^{-1}(U_x)$ .

*Notación 2.1.5.* Denotamos  $\mathcal{F} \equiv (X, \mathcal{F})$ , con poset subyacente  $|\mathcal{F}|$ . Para cada  $x \leq y$  en  $X$ , denotaremos  $\mathcal{F}_{xy}: \mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(y)$  a su imagen vía  $\mathcal{F}$ . La excepción será el caso de posets anillados, donde mantenemos la notación habitual  $X \equiv (X, \mathcal{O}_X)$  y los morfismos de restricción serán denotados  $r_{xy}: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,y}$ .

Para toda categoría  $\mathfrak{C}$  se tiene una inclusión natural plenamente fiel

$$i_{\mathfrak{C}}: \mathfrak{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{C}\text{-data}, \quad c \mapsto (\star, c).$$

**Definición 2.1.6.** El functor de *secciones*  $\Gamma \equiv \Gamma_{\mathfrak{C}}: \mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{op}}$  es, si existe, el adjunto a la izquierda de la inclusión  $i_{\mathfrak{C}}$ . El functor de *cosecciones*  $L \equiv L_{\mathfrak{C}}$  es, si existe, el adjunto a la derecha de  $i_{\mathfrak{C}}$ .

**Proposición 2.1.7.** Si  $\mathfrak{C}$  tiene suficientes límites (resp. colímites), existe  $\Gamma$  (resp.  $L$ ) y es

$$\Gamma(\mathcal{F}) = \lim \mathcal{F} = \lim_{x \in |\mathcal{F}|} \mathcal{F}(x)$$

(resp.  $L(\mathcal{F}) = \text{colim } \mathcal{F} = \text{colim}_{x \in |\mathcal{F}|} \mathcal{F}(x)$ ).

*Demostración.* En efecto, para todo  $c \in C$  y  $\mathcal{F} \in \mathfrak{C}\text{-data}$  se tiene, denotando  $|\mathcal{F}| = X$  y  $\pi: X \rightarrow \star$  a la proyección al objeto final de **pos**,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{C}^{\text{op}}}(\lim \mathcal{F}, c) &= \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(c, \lim \mathcal{F}) = \\ &= \text{Hom}_{[X, \mathfrak{C}]}(\pi^{-1}c, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathfrak{C}\text{-data}}(\mathcal{F}, i_{\mathfrak{C}}(c)); \end{aligned}$$

y de modo análogo para las cosecciones. □

La construcción de  $\mathcal{C}$ -**data** es también functorial en la categoría: dado un functor  $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  se tiene un functor inducido

$$\Phi_*: \mathcal{C}\text{-data} \rightarrow \mathcal{D}\text{-data}, \quad \mathcal{F} \mapsto \Phi \circ \mathcal{F}.$$

Nótese que si  $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \star$  es la proyección a la categoría terminal, se tiene que  $\star\text{-data} = \mathbf{pos}$  y, por tanto,  $\Phi_* = |-|: \mathcal{C}\text{-data} \rightarrow \mathbf{pos}$  es el functor espacio subyacente.

*Observación 2.1.8.* El comportamiento de los funtores de secciones  $\Gamma_{\mathcal{C}}$  y  $\Gamma_{\mathcal{D}}$  en relación con  $\Phi$  y  $\Phi_*$ , concretamente el estudio de la transformación natural  $\eta_{\Phi}: \Phi \circ \Gamma_{\mathcal{C}} \rightarrow \Gamma_{\mathcal{D}} \circ \Phi_*$ , es de gran interés, pues codifica un problema de conmutación de  $\Phi$  con límites de «forma fija» y, en última instancia, permite tratar problemas de descenso. Un ejemplo serán los espacios afines que trataremos en esta memoria, pero consideramos que el concepto es de aplicación mucho más general. Remitimos al Anexo A.2 para más detalle.

Un caso especial se tiene cuando consideramos el functor de Yoneda  $Y_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \hookrightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ . Como  $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$  es completa y cocompleta, esto nos permite interpretar la existencia de las secciones de un  $\mathcal{C}$ -dato en términos de la representabilidad de las secciones de su imagen en  $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ . Más concretamente, se tiene un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\text{op}} & \xrightarrow{(Y_{\mathcal{C}})^{\text{op}}} & [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]^{\text{op}} \\ \downarrow i_{\mathcal{C}} & & \downarrow i_{[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]} \\ \mathcal{C}\text{-data} & \xrightarrow{(Y_{\mathcal{C}})_*} & [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]\text{-data} \end{array}$$

donde  $i_{[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]}$  tiene adjuntas: secciones y cosecciones. Es decir, podemos hablar de secciones de un  $\mathcal{C}$ -dato aunque el functor  $\Gamma$  no exista. La siguiente definición coincide con la de los funtores de secciones y cosecciones en caso de que estos existan:

**Definición 2.1.9.** Dado un  $\mathcal{C}$ -dato  $\mathcal{F}$ , sus secciones  $\Gamma(\mathcal{F})$  (resp. cosecciones  $L(\mathcal{F})$ ), si existen, son el representante de  $\Gamma_{[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]}((Y_{\mathcal{C}})_*(\mathcal{F}))$ :  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  (resp.  $L_{[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]}((Y_{\mathcal{C}})_*(\mathcal{F}))$ ).

*Notación 2.1.10.* Dado un  $\mathfrak{C}$ -dato  $\mathcal{F}$  y un abierto  $i: U \hookrightarrow |\mathcal{F}|$ , denotaremos a las *secciones en  $\mathcal{F}$  en  $U$*  como

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \Gamma(i^{-1}\mathcal{F}).$$

Si  $\mathfrak{C}$  tiene suficientes límites, estas son precisamente las secciones en  $U$  del haz asociado a  $\mathcal{F}$  vía la Proposición 1.4.1.

*Ejemplo 2.1.11.* Los morfismos de la categoría de  $\mathfrak{C}$ -datos en un  $X$  fijo se pueden convertir a su vez en un **Set**-dato —con  $\mathfrak{C}$  localmente pequeña—. Dados  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{C}\text{-data}_X$ , se define

$$\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}): X \rightarrow \mathbf{Set}, \quad x \mapsto \text{Hom}_{[U_x, \mathfrak{C}]}(i_x^{-1}\mathcal{F}, i_x^{-1}\mathcal{G});$$

donde  $i_x: U_x \rightarrow X$  es la inclusión natural. Pero a su vez, cada restricción  $f|_{U_x} \in \text{Hom}_{[U_x, \mathfrak{C}]}(i_x^{-1}\mathcal{F}, i_x^{-1}\mathcal{G})$  está determinada por morfismos en  $\mathfrak{C}$  para cada  $y \geq x$ , luego se deduce que  $\Gamma(U, \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = \text{Hom}_{[U, \mathfrak{C}]}(i^{-1}\mathcal{F}, i^{-1}\mathcal{G})$  para cualquier  $i: U \subseteq X$ . Denotamos  $\underline{\text{End}}(\mathcal{F})$  al dato de endomorfismos de  $\mathcal{F}$ , que es de modo natural un dato con valores en monoides. De manera análoga, denotamos  $\underline{\text{Aut}}(\mathcal{F})$  al dato de automorfismos, que valora en la categoría de grupos. Si  $\mathfrak{C} = \mathbf{Ab}$  es la categoría de grupos abelianos,  $\underline{\text{End}}(\mathcal{F})$  es un **Ring**-dato, con **Ring** la categoría de anillos (con unidad).

**Lema 2.1.12.** Si  $\mathfrak{C}$  tiene suficientes límites, para todo  $f: X \rightarrow Y$  en **pos**, el functor  $f^{-1}$  tiene una adjunta a la derecha, denotada  $f_*$  y llamada *imagen directa*. En este caso, dar un morfismo de  $\mathfrak{C}$ -datos  $(f, f^\sharp): (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$  es equivalente a dar una pareja  $(f, f_\sharp)$  con  $f_\sharp: \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$  un morfismo en  $\mathfrak{C}\text{-data}_Y$ .

*Demostración.* En efecto, dado un dato  $\mathcal{F}$  en  $X$ , se define

$$(f_*\mathcal{F})(y) = \Gamma(f^{-1}(U_y), \mathcal{F}),$$

que es claramente adjunta a la derecha de  $f^{-1}$ . El morfismo  $f_\sharp$  es el correspondiente a  $f^\sharp$  vía la adjunción.  $\square$

Por último, observamos que, como todo poset tiene un morfismo único al objeto terminal  $\star$ , si consideramos la proyección  $\pi_X: X \rightarrow \star$ , obtenemos que  $\mathfrak{C}\text{-data}_\star = \mathfrak{C}$  y que el functor

$$\Gamma: \mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{op}}$$

se identifica con la imagen directa al objeto terminal para cada dato, i.e.  $\Gamma(\mathcal{F}) = \pi_{|\mathcal{F}|*}(\mathcal{F})$ .

*Observación 2.1.13.* El functor de cosecciones nos permite tratar con nociones de *cohasz* definidas a partir de funtores covariantes sobre *cerrados*: dado un  $\mathfrak{C}$ -dato  $\mathcal{F}$  y un cerrado  $j: C \hookrightarrow |\mathcal{F}|$ , pueden definirse las secciones de  $\mathcal{F}$  en  $C$  como

$$L(C, \mathcal{F}) := L(j^{-1}\mathcal{F}) = \operatorname{colim} j^{-1}\mathcal{F}.$$

Si  $C \subseteq C'$ , se tiene un morfismo *de extensión* inducido  $L(C, \mathcal{F}) \rightarrow L(C', \mathcal{F})$ . Estos cohases se estudian, por ejemplo, en [7] (sobre posets finitos), y su descripción no es objetivo de esta memoria.

Por otra parte, si  $\mathfrak{C}$  tiene suficientes colímites,  $\mathfrak{C}\text{-codata} \simeq \mathbf{Sh}(X, \mathfrak{C}^{\text{op}})$ , donde esta última puede entenderse como una categoría de *cohases* sobre *abiertos*: funtores covariantes de abiertos a  $\mathfrak{C}$  que verifican una condición análoga a la de *haz*, pero relativa a la exactitud a la derecha de una sucesión con coproductos en  $\mathfrak{C}$ . Esta interpretación no involucra el functor  $L_{\mathfrak{C}}$ . Nos limitamos a enfatizar que ambos conceptos de *cohasz* son completamente diferentes.

*Observación 2.1.14* (Representabilidad «local» vía  $\mathfrak{C}$ -datos). A colación de la definición de secciones vía el functor de Yoneda, podemos destacar que los  $\mathfrak{C}$ -datos también permiten dar cierta interpretación estructurada del concepto de functor «localmente representable». Sea  $\mathfrak{C}$  una categoría y  $(Y_{\mathfrak{C}})_*: \mathfrak{C}\text{-data} \hookrightarrow [\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]\text{-data}$  el functor plenamente fiel inducido por la inmersión de Yoneda. Puede pensarse que un objeto en la imagen esencial de  $(Y_{\mathfrak{C}})_*$  es un *functor localmente representable*. Nótese que si  $\mathfrak{C}$  tiene límites, las secciones de este objeto representan las secciones del  $\mathfrak{C}$ -dato de partida; es decir, sería *globalmente representable*. Por otra parte, puede considerarse la inmersión de Yoneda  $Y_{\mathfrak{C}\text{-data}}: \mathfrak{C}\text{-data} \hookrightarrow [\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ . La clave es observar que podemos definir un tercer functor

$$\mathcal{D}: [\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]\text{-data} \rightarrow [\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$$

de modo que, dado un objeto  $\mathcal{X} \in [\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]\text{-data}$ , es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{X}): \mathfrak{C}\text{-data}^{\text{op}} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ \mathcal{G} &\mapsto \operatorname{Hom}_{[\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]\text{-data}}((Y_{\mathfrak{C}})_*(\mathcal{G}), \mathcal{X}). \end{aligned}$$

Es claro que con esta definición, por ser  $Y_*$  plenamente fiel, se tiene un triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & & [\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]\text{-data} \\
 & \nearrow^{(Y_{\mathfrak{C}})_*} & \downarrow \mathcal{D} \\
 \mathfrak{C}\text{-data} & & \\
 & \searrow_{Y_{\mathfrak{C}\text{-data}}} & [\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]
 \end{array}$$

*Lema.* El functor  $\mathcal{D}$  es plenamente fiel. En particular, si  $\mathcal{X}$  es tal que  $\mathcal{D}(\mathcal{X})$  es representable por un  $\mathcal{F} \in \mathfrak{C}\text{-data}$ , se verifica que  $(Y_{\mathfrak{C}})_*(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{X}$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morfismo en  $[\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]\text{-data}$  tal que, para todo  $\mathcal{G} \in \mathfrak{C}\text{-data}$ , induce

$$\text{Hom}_{[\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]\text{-data}}((Y_{\mathfrak{C}})_*(\mathcal{G}), \mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{[\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]\text{-data}}((Y_{\mathfrak{C}})_*(\mathcal{G}), \mathcal{Y}).$$

Como las categorías de prehaces son compactamente generadas por los prehaces representables —todo prehaz es colímite filtrante de representables—, por el lema de Yoneda para  $[\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]\text{-data}$  se concluye que  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  es un isomorfismo.  $\square$

Es decir, el problema de representar cada  $\mathcal{X}(p)$  de modo compatible es equivalente a representar  $\mathcal{D}(\mathcal{X})$  por un  $\mathfrak{C}$ -dato.

### 2.1.1. Propiedades categoriales

Límites y colímites, en particular productos y coproductos fibrados, existen en  $\mathfrak{C}\text{-data}$  en la medida en que sus duales existan en  $\mathfrak{C}$ . Esto se sigue de que la parte topológica de los  $\mathfrak{C}$ -datos no está ligada al functor estructural.

**Proposición 2.1.15.** Si  $\mathfrak{C}$  tiene suficientes colímites (resp. límites), entonces  $\mathfrak{C}\text{-data}$  tiene suficientes límites (resp. colímites).

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}: I \rightarrow \mathfrak{C}\text{-data}$  ( $i \mapsto \mathcal{F}_i$ ,  $(i \rightarrow j) \mapsto \mathcal{F}_{ij}$ ) un diagrama y  $|\mathcal{F}| = |-\circ \mathcal{F}$ . Es inmediato comprobar que el  $\mathfrak{C}$ -dato lím  $\mathcal{F}$  definido como

$$\begin{aligned}
 |\text{lím } \mathcal{F}| &= \text{lím } |\mathcal{F}| = \{(x_i) \in |\mathcal{F}_i| \text{ tales que } \mathcal{F}_{ij}(x_i) = x_j\}, \\
 (\text{lím } \mathcal{F})((x_i)) &= \text{colim}_{i \in I} \mathcal{F}_i(x_i),
 \end{aligned}$$

verifica la propiedad universal. De modo análogo,  $\text{colim } \mathcal{F}$  es

$$\begin{aligned} |\text{colim } \mathcal{F}| &= \text{colim } |\mathcal{F}|, \\ (\text{colim } \mathcal{F})([x_i]) &= \lim_{x_j \sim x_i} \mathcal{F}_j(x_j), \end{aligned}$$

donde el colímite de posets es el descrito en la Proposición 1.2.4 y el límite se toma sobre el diagrama formado por todos los puntos en la clase de  $x_i$  y todos los morfismos inducidos posibles, tanto por los  $\mathcal{F}_{ij}$  como internos a cada  $\mathcal{F}_i$ .<sup>1</sup>  $\square$

*Observación 2.1.16.* Nótese que si estamos considerando  $\mathfrak{C}$ -**data** fibrada sobre posets *finitos*, solo podemos garantizar la existencia de colímites finitos: el colímite arbitrario de posets finitos no es necesariamente finito.

El hecho de que  $\mathfrak{C}$ -**data** tenga suficientes límites (resp. colímites) nos garantiza que la inclusión natural

$$i_{\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{op}}} : \mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow (\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}$$

tiene adjuntas. En concreto, el functor de secciones  $\Gamma_{\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{op}}}$  conlleva computar un colímite en  $\mathfrak{C}$ -**data**, el cual existe, pero es complicado de explicitar. Más en particular, la situación que nos interesará en la memoria será la de una subcategoría  $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{C}\text{-data}$  fiel pero no plena (que será la categoría de espacios esquemáticos  $\mathbf{SchFin} \subseteq \mathbf{CRing}\text{-data}$ ). Este colímite —estas secciones— representan el *recollement* de objetos en dicha subcategoría, y nos interesa determinar si dicha operación es «cerrada» dentro de  $\mathfrak{S}$ .

La solución a este problema será llevar el problema al nivel 2-categorial. Para esto, notamos que  $\mathfrak{C}$ -**data** viene equipada de modo natural con una estructura de 2-categoría:

**Definición 2.1.17.** Dada  $\mathfrak{C}$  una 1-categoría, definimos la *estructura 2-categorial homotópica* de  $\mathfrak{C}$ -**data** como aquella cuyos 2-morfismos son

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathfrak{C}\text{-data}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})}(f, g) &= \\ &= \begin{cases} \{\star\} & \text{si y solo si } f \leq g \text{ y } g_x^\sharp = \mathcal{G}_{f(x)g(x)} \circ f_x^\sharp \text{ para todo } x \in |\mathcal{F}|, \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Esto es más natural con el lenguaje que introducimos en la Sección 2.3: se tiene que  $\coprod_i |\mathcal{F}_i| \rightarrow \text{colim } |\mathcal{F}|$  factoriza por  $\pi : \text{Cyl}(|\mathcal{F}|) \rightarrow \text{colim } |\mathcal{F}|$ . El límite en cuestión es el límite de la restricción del  $\mathfrak{C}$ -dato  $\text{Cyl}(\mathcal{F})$  al subposet  $\pi^{-1}([x_i])$ .

De este modo,  $\mathfrak{C}$ -**data** es una categoría enriquecida en **pos**.

*Observación 2.1.18.* Para futura referencia, la condición de compatibilidad de la Definición 2.1.17 se expresa mediante la conmutatividad de los diagramas en  $\mathfrak{C}$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}(g(x)) & \xrightarrow{g_p^\#} & \mathcal{F}(x) \\
 \mathcal{G}_{f(x)g(x)} \uparrow & & \nearrow f_x^\# \\
 \mathcal{G}(f(x)) & & 
 \end{array} \tag{2.1.1}$$

para todo  $x \in |\mathcal{F}|$ . Nótese también que esta es precisamente la estructura que se utiliza en [30] para desarrollar la homotopía de espacios anillados en un sentido «clásico», que depende enteramente de la homotopía de posets.

En la Sección 2.2 que sigue, vamos a estudiar  $\mathfrak{D}$ -**data** y la inclusión  $i_{\mathfrak{D}}$  cuando  $\mathfrak{D}$  es una 2-categoría. Posteriormente, en la Sección 2.3 particularizaremos al caso  $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}$ -**data** con  $\mathfrak{C}$  una 1-categoría y  $\mathfrak{D}$  equipada con la estructura que acabamos de introducir. En estas hipótesis, vamos a ver que  $i_{\mathfrak{C}\text{-data}}^{\text{op}}$  admite un functor de secciones *laxas* que no requiere realizar operaciones categoriales en  $\mathfrak{C}$ , pero que nos dará objetos que a nuestros propósitos serán equivalentes a las secciones «verdaderas»; haciendo así la comprobación de que dicha operación es cerrada en una subcategoría  $\mathfrak{S}$  totalmente explícita. Además, este nuevo functor existirá aunque la categoría  $\mathfrak{C}$  de partida no tenga suficientes límites.

*Observación 2.1.19.* Con la estructura de la Definición 2.1.17, el functor  $\mathfrak{C}\text{-data}: \mathbf{pos}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Cat}$  levanta ahora a un 2-functor (con cada  $f \leq g$  en **pos** siendo asignado a la transformación natural obvia  $f^{-1} \rightarrow g^{-1}$  definida por los propios morfismos de restricción de cada  $\mathfrak{C}$ -dato al que se aplica) y puede verse como un *prederivador*.

## 2.2. Caso 2-categorial

Sea ahora  $\mathfrak{C}$  una 2-categoría. Vamos a construir la 1-categoría  $\mathfrak{C}$ -**data** de tres maneras alternativas. Esto se debe a que la categoría cuyos objetos son *pseudofuntores*, donde  $X \rightarrow \mathfrak{C}$ , donde  $X$  se entiende con su estructura trivial de 2-categoría —tal que todos sus 2-morfismos son la identidad—,

admite ahora tres estructuras diferentes. En primer lugar, recordamos que dar un pseudofunctor en este caso es exactamente dar un functor ordinario a la 1-categoría subyacente a  $\mathfrak{C}$  y especificar 2-morfismos invertibles para todas las condiciones de compatibilidad habituales<sup>2</sup>. Las estructuras de categoría en esta colección de objetos son:

$[X, \mathfrak{C}]_{\text{Strict}}$  = «categoría de funtores y transformaciones naturales estrictas»;

$[X, \mathfrak{C}]$  = «categoría de funtores y transformaciones pseudonaturales»;

$[X, \mathfrak{C}]_{\text{Lax}}$  = «categoría de funtores y transformaciones naturales laxas».

En nuestro caso, dados funtores  $\mathcal{F}, \mathcal{G}: X \rightarrow \mathfrak{C}$ , una transformación natural laxa  $\eta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  consiste en dar, para todo  $x \in X$ , un 1-morfismo  $\eta_x: \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathcal{F}(x)$  y, para cada pareja de elementos ordenados  $x \leq y$ , un 2-morfismo  $\eta_{xy}: \mathcal{F}_{xy} \circ \eta_x \rightarrow \eta_y \circ \mathcal{G}_{xy}$  (de modo adecuadamente compatible). Una transformación natural laxa se dice *pseudonatural* si  $\eta_{xy}$  es invertible para todo  $x \leq y$ ; además, se dice *estricta* si  $\eta_{xy}$  es la *identidad* para todo  $x \leq y$ , es decir, si es una transformación natural en sentido 1-categorial.

*Observación 2.2.1.* Nótese que si  $\mathfrak{C}$  está enriquecida en **pos** (por ejemplo  $\mathfrak{C} = \mathbf{pos}$  o  $\mathfrak{C}$  la categoría de  $\mathfrak{C}$ -datos de una 1-categoría), entonces  $[X, \mathfrak{C}]_{\text{Strict}} = [X, \mathfrak{C}]$ ; mientras que si  $\mathfrak{C}$  está enriquecida en grupoides **Gpd**,  $[X, \mathfrak{C}] = [X, \mathfrak{C}]_{\text{Lax}}$ . Además, conviene destacar que trabajar con transformaciones natural estrictas y la noción de límite que producen no suele ser adecuado, puesto que viola el «principio de equivalencia»: en una  $n$ -categoría solo es adecuado hablar de igualdades entre  $n$ -morfismos, dado que la noción de isomorfismo «natural» en la  $(n + 1)$ -categoría de  $n$ -categorías preserva las correspondientes *clases de isomorfismo de  $k$ -morfismos* para  $k < n$ , no los representantes de estas —por ejemplo, dos 1-categorías son equivalentes, es decir, isomorfas en la 2-categoría de 1-categorías, si y solo si tienen

---

<sup>2</sup>En las aplicaciones, o bien  $\mathfrak{C}$  estará enriquecida en posets, luego estos 2-morfismos invertibles serán la identidad, o bien el functor estará definido de tal manera que vendrán *canónicamente* determinados por alguna propiedad universal: salvo *isomorfismo canónico* —o incluso podrían ser únicos salvo *único* isomorfismo—; luego bastará dar un functor ordinario a la 1-categoría  $\mathfrak{C}$  subyacente y se sobreentenderá que estamos considerando el isomorfismo canónico correspondiente. Además, en estos casos las imágenes de los 2-morfismos identidad serán también la identidad. No insistiremos demasiado en estos detalles para no complicar en exceso la exposición, por lo que a menudo hablaremos de «2-functor», «pseudofunctor» o «functor» sin dar mayores indicaciones, pero quede constancia de que se han tenido en cuenta.

las mismas clases de isomorfismo de objetos y los mismos 1-morfismos—. Es por esto que evitaremos hablar de transformaciones naturales estrictas salvo cuando estas coincidan con las pseudonaturales, como en el caso de categorías enriquecidas en posets que hemos descrito.

Las construcciones análogas a la de la Definición 2.1.2, pero siendo  $\mathfrak{C}$  una 2-categoría  $\mathfrak{C}$  y diferenciando las diversas posibilidades de 2-morfismos que hemos considerado, nos dan ahora tres *1-categorías* distintas de  $\mathfrak{C}$ -datos, con los mismos objetos pero distintos morfismos, y funtores fieles pero no plenos entre ellas:

$$\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{Strict}} \rightarrow \mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow \mathfrak{C}\text{-data}^{\text{Lax}}.$$

Explícitamente, dar un morfismo de  $\mathfrak{C}$ -datos  $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  en  $\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{Lax}}$ ,  $\mathfrak{C}\text{-data}$  o  $\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{Strict}}$  es dar una pareja  $(f, f^\#)$  con  $f^\#$  una transformación natural laxa, pseudonatural o estricta, según corresponda. Esto es, para cada  $x \leq y \in |\mathcal{F}|$  especificar un 2-morfismo

$$\eta_{xy}^f: \mathcal{F}_{xy} \circ f_x^\# \rightarrow f_y^\# \circ \mathcal{G}_{f(x)f(y)}, \quad (2.2.1)$$

exigiendo que sea invertible (resp. la identidad) en el caso pseudonatural (resp. estricto).

Ahora queremos convertir al 1-functor

$$i_{\mathfrak{C}}: \mathfrak{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{C}\text{-data}$$

en un 2-functor. Primero notemos que, tanto  $\mathfrak{C}\text{-data}$  como sus análogas laxa y estricta, admiten a su vez tres estructuras diferentes de 2-categoría. Sean  $f, g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  dos morfismos de  $\mathfrak{C}$ -datos, considerados en sentido estricto, pseudonatural o laxo.

- Estructura homotópica laxa. Un 2-morfismo  $\eta: f \rightarrow g$  puede existir si y solo si  $f \leq g$ ; y está especificado por 2-morfismos.

$$\eta_x: f_x^\# \rightarrow g_x^\# \circ \mathcal{G}_{f(x)g(x)}$$

functoriales en  $x \in |\mathcal{F}|$ . Es decir, se dan 2-morfismo rellenando los diagramas 2.1.1.

- Estructura pseudohomotópica. Un 2-morfismo  $\eta: f \rightarrow g$  es solo un 2-morfismo en el sentido de la estructura homotópica laxa, pero tal que  $\eta_x$  es invertible para todo  $x \in |\mathcal{F}|$ ; es decir, los diagramas 2.2.1 conmutan salvo isomorfismo especificado.
- Estructura homotópica estricta. Existe un único 2-morfismo  $f \rightarrow g$  si y solo si  $f \leq g$  y, para todo  $x \in |\mathcal{F}|$ , los diagramas 2.2.1 conmutan idénticamente; es decir, es un 2-morfismo en el sentido laxo tal que  $\eta_x$  es la identidad para todo  $x \in |\mathcal{F}|$ . *Con esta definición, la estructura 2-categorial de  $\mathfrak{C}$  no juega ningún papel, la estructura obtenida es exactamente la Definición 2.1.17.*

**Definición 2.2.2.** Dada una 2-categoría  $\mathfrak{C}$ , se definen respectivamente las 2-categorías de  $\mathfrak{C}$ -datos estrictos,  $\mathfrak{C}$ -datos y  $\mathfrak{C}$ -datos laxos como aquellas cuyas 1-categorías subyacentes son  $\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{Strict}}$ ,  $\mathfrak{C}\text{-data}$  y  $\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{Lax}}$ , dotadas de sus *estructuras homotópicas laxas*.

Tenemos 2-funtores olvido

$$\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{Strict}} \rightarrow \mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow \mathfrak{C}\text{-data}^{\text{Lax}}$$

que son la identidad en objetos y plenamente fieles en las categorías de 1-morfismos.

*Denotando a partir de ahora —y siempre que no sea imprescindible distinguir— por  $\mathfrak{C}\text{-data}$  a cualquiera de las tres categorías, con esta definición tenemos un 2-functor*

$$\begin{aligned} i_{\mathfrak{C}}: \mathfrak{C}^{\text{op}} &\rightarrow \mathfrak{C}\text{-data} \\ c &\mapsto (\star, c) \\ c \xrightarrow{f} d \text{ (en } \mathfrak{C}) &\mapsto (\star, d) \xrightarrow{(\text{Id}, f)} (\star, c) \end{aligned}$$

tal que el 2-morfismo  $\eta: f \rightarrow g$  va al 2-morfismo  $(\text{Id}, f) \rightarrow (\text{Id}, g)$  definido por  $\eta_{\star} = \eta$ .

*Observación 2.2.3.* Si  $\mathfrak{C}$  está enriquecida en posets,  $\mathfrak{C}\text{-data}$  también lo está: entre dos  $f, g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  hay, como mucho, un 2-morfismo: el dado por el orden tanto de las aplicaciones topológicas subyacentes como por el de los 2-morfismos de  $\mathfrak{C}$ .

### 2.2.1. Secciones en el caso 2-categorial

Las tres 2-categorías de  $\mathfrak{C}$ -datos que hemos introducido producen correspondientes nociones de secciones. Como comentamos en la Observación 2.2.1, nos limitaremos a estudiar  $\mathfrak{C}\text{-data}$  y  $\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{Lax}}$ . Denotemos temporalmente por  $i_{\mathfrak{C}}$  y  $i_{\mathfrak{C}}^{\text{Lax}}$  a los 2-funtores correspondientes a las respectivas inclusiones naturales de  $\mathfrak{C}^{\text{op}}$  —coincidiendo el segundo la composición con el functor olvido—. Si existen, las 2-adjuntas a la izquierda, expresadas en términos de equivalencias de categorías de 1-morfismos, se corresponden con las nociones de *2-límite* (*pseudolímite*), *2-lím*, y *límite laxo*  $\text{LaxLím}$ . Cabe destacar que se pueden pedir propiedades universales más fuertes en términos de isomorfismos de categorías —en cuyo caso se habla de *pseudolímite estricto* y *límite laxo estricto*—; pero ambas versiones coinciden si  $\mathfrak{C}\text{-data}$  está enriquecida en posets. Salvo que se indique lo contrario, consideraremos propiedades universales salvo equivalencia. En el Anexo A.1 detallamos explícitamente la bien conocida descripción de algunos 2-límites y 2-colímites en  $\mathbf{Cat}$  que, de modo análogo a cómo los límites de conjuntos expresan las propiedades universales de límites y colímites 1-categoriales —«los  $\text{Hom}$  del límite son el límite de los  $\text{Hom}$ »—, nos permitirán dar propiedades universales explícitas en los casos 2-categoriales.

**Definición 2.2.4.** El 2-functor de *2-secciones*  $\Gamma: \mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{op}}$  es, si existe, el 2-adjunto a la izquierda de la inclusión  $i_{\mathfrak{C}}$ . Por otro lado, el 2-functor de *2-secciones laxas*  $\text{Lax}\Gamma: \mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{op}}$  es, si existe, el 2-adjunto a la izquierda de la inclusión  $i_{\mathfrak{C}}^{\text{Lax}}$ . Análogamente para 2-cosecciones y adjuntas a la derecha.

**Proposición 2.2.5.** Si  $\mathfrak{C}$  tiene suficientes 2-límites (resp. límites laxos), entonces  $\Gamma$  (resp.  $\text{Lax}\Gamma$ ) existe y es, para un  $\mathfrak{C}$ -dato  $\mathcal{F}$ ,

$$\Gamma(\mathcal{F}) = 2\text{-lím } \mathcal{F} = 2\text{-lím}_{x \in |\mathcal{F}|} \mathcal{F}(x)$$

$$(\text{resp. } \text{Lax}\Gamma(\mathcal{F}) = \text{LaxLím } \mathcal{F} = \text{LaxLím}_{x \in |\mathcal{F}|} \mathcal{F}(x).)$$

*Demostración.* Es la definición de 2-límite (resp. límite laxo) y el argumento de la Proposición 2.1.7. Las propiedades universales se piden mediante isomorfismos o equivalencias según se requiera.  $\square$

*Observación 2.2.6.* Argumentos similares a los de la Definición 2.1.9 pueden hacerse con el 2-functor de Yoneda, pero dado que siempre vamos a considerar 2-categorías admitiendo todos los límites que queremos, omitimos dicha cuestión.

### 2.3. El functor cilindro

Sea ahora  $\mathfrak{C}$  una 1-categoría,  $\mathfrak{C}\text{-data}$  con su estructura homotópica de 2-categoría (Definición 2.1.17) y consideremos el 2-functor de inclusión descrito en la sección previa —que por conveniencia tomamos para el opuesto,  $i_{\mathfrak{C}\text{-data}}^{\text{op}}$ —:

$$i_{\mathfrak{C}}^2: \mathfrak{C}\text{-data} \hookrightarrow (\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}.$$

Ya hemos visto que si  $\mathfrak{C}$  tiene suficientes límites,  $\mathfrak{C}\text{-data}$  tiene suficientes colímites, que por ser una categoría enriquecida en posets se corresponden con *pseudocolímites* (estrictos); y en ese caso el functor  $i_{\mathfrak{C}}^2$  tiene una 2-adjunta por la izquierda,  $\Gamma$ , tal que, para todo dato  $\mathcal{X} \in (\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}$  —indicando la categoría en los superíndices—,

$$\Gamma(\mathcal{X}) = 2\text{-lím}_{p \in |\mathcal{X}|}^{\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{op}}} \mathcal{X}(p) = 2\text{-colím}_{p \in |\mathcal{X}|}^{\mathfrak{C}\text{-data}} \mathcal{X}(p) \equiv \text{colim}_{p \in |\mathcal{X}|}^{\mathfrak{C}\text{-data}} \mathcal{X}(p).$$

Vamos a construir el functor  $\text{Lax}\Gamma: (\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}^{\text{Lax}} \rightarrow \mathfrak{C}\text{-data}$ , que *existe sin hipótesis sobre  $\mathfrak{C}$* . Comenzamos con una definición *ad hoc* y acabamos viendo que verifica la propiedad universal correspondiente. Esta construcción es una vasta generalización del «cilindro de un morfismo» definido en [32] que, a su vez, generaliza el «cilindro de un espacio esquemático» definido en [28]. También existe una noción categorial de «cilindro de un objeto» —con diferentes matices— para categorías con equivalencias débiles, que también es un caso particular de la definición que sigue, véase la Observación 5.4.21 que haremos al especializar la construcción al caso de espacios esquemáticos —que puede extenderse al caso de  $\mathfrak{C}$ -datos mediante el contenido del Apéndice A.2—.

**Definición 2.3.1.** Dado un  $\mathcal{X} \in (\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}$ , se define el *cilindro* de  $\mathcal{X}$  como el  $\mathfrak{C}$ -dato  $\text{Cyl}(\mathcal{X})$  tal que, como conjunto, es

$$|\text{Cyl}(\mathcal{X})| = \coprod_{p \in |\mathcal{X}|} |\mathcal{X}(p)|;$$

equipado con el preorden tal que, para cada  $x_p \in |\mathcal{X}(p)|, y_q \in |\mathcal{X}(q)|$ ,

$$x_p \leq y_q \Leftrightarrow p \leq q \text{ y } x_p \leq \mathcal{X}_{pq}(y_q);$$

y que viene definido por el functor  $\text{Cyl}(\mathcal{X}): |\text{Cyl}(\mathcal{X})| \rightarrow \mathfrak{C}$  tal que

$$\text{Cyl}(\mathcal{X})(x_p) = \mathcal{X}(p)(x_p) \text{ para todo } x_p \in |\mathcal{X}(p)|,$$

con morfismos de restricción siendo los inducidos por  $\mathcal{X}_{pq}: \mathcal{X}(q) \rightarrow \mathcal{X}(p)$  (en **C-data**) de  $\mathcal{X}$  para cada  $p \leq q$  —en particular, si  $p = q$ , son los del **C-dato**  $\mathcal{X}(p)$ —.

La construcción es claramente functorial, luego tenemos

$$\text{Cyl}: (\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata} \rightarrow \mathfrak{C}\text{-data},$$

que, se comprueba, es un 2-functor con las estructuras introducidas. Nótese que  $\text{Cyl} \circ i_{\mathfrak{C}}^2 = \text{Id}$ .

*Observación 2.3.2.* Si todos los  $|\mathcal{X}(p)|$  y  $|\mathcal{X}|$  son posets finitos, también lo es  $|\text{Cyl}(\mathcal{X})|$ .

Para ver que verifica la propiedad universal, comenzamos analizando el caso topológico, es decir,  $\mathfrak{C} = \star$  y **C-data** = **pos**.

**Lema 2.3.3.** Para todo poset  $Y$  y **pos**-codato  $\mathcal{X}$ , se tiene un *isomorfismo* categorial functorial

$$\text{Hom}_{\mathbf{pos}}(\text{Cyl}(\mathcal{X}), Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{pos}\text{-codata}^{\text{Lax}}}(\mathcal{X}, Y);$$

es decir,  $\text{Cyl}(\mathcal{X})$  es isomorfo a las secciones laxas de  $\mathcal{X}$ . En particular, la 2-categoría **pos** tiene colímites laxos indexados por posets, siendo el cilindro el colímite laxo de los  $\mathcal{X}(p)$ .

*Demostración.* Como el codato  $Y \equiv i(Y)$  tiene al objeto terminal  $\star$  como poset subyacente, si denotamos  $|\mathcal{X}| \equiv X$ , se tiene una identificación  $\text{Hom}_{\mathbf{pos}\text{-codata}^{\text{Lax}}}(\mathcal{X}, Y) = \text{Hom}_{[X, \mathbf{pos}]^{\text{Lax}}}(\mathcal{X}, Y)$ . Ahora, dado un morfismo  $f: \text{Cyl}(\mathcal{X}) \rightarrow Y$ , tenemos determinada por construcción una familia de morfismos  $\{f_p: \mathcal{X}(p) \rightarrow Y\}_{p \in X}$  tales que, para todo  $p \leq q$ , se verifica  $f_p \circ \mathcal{X}_{pq} \leq f_q$  (por continuidad de  $f$ ). Esta es precisamente la información

de una transformación natural laxa  $\mathcal{X} \rightarrow Y$ : para cada  $p \in X$  dar un functor (i.e. aplicación continua)  $\mathcal{X}(p) \rightarrow Y(p) = Y$  y, para todo  $p \leq q$ , un 2-morfismo en el diagrama conmutativo correspondiente, que no es más que pedir que se verifique la relación de orden anterior. El recíproco se sigue del mismo argumento, donde dado  $g: \mathcal{X} \rightarrow Y$ , las  $g_p^\sharp$  son las  $f_p$  anteriores.

Por último, si  $f, g: \text{Cyl}(\mathcal{X}) \rightarrow Y$  son dos morfismos verificando  $f \leq g$ , estamos diciendo que, para todo  $p \in X$ ,  $f_p \leq g_p$ . Esto es precisamente con la noción de 2-morfismo en  $\mathbf{pos-codata}^{\text{Lax}}$ . La functorialidad de la equivalencia es un ejercicio.  $\square$

*Observación 2.3.4.* En el caso de  $\mathfrak{C} = \star$  y  $\mathfrak{C}\text{-data} = \mathbf{pos}$  que acabamos de estudiar, como ya comentamos en la Observación 2.2.3, la equivalencia de categorías es automáticamente un isomorfismo. Lo mismo sucede en el caso general que estudiamos a continuación, puesto que  $\mathfrak{C}\text{-data}$  siempre está enriquecida en posets.

**Teorema 2.3.5.** Sea  $\mathfrak{C}$  una 1-categoría y  $\mathcal{X}$  un  $(\mathfrak{C}\text{-data})$ -codato. Para todo  $\mathfrak{C}$ -dato  $Y$  se tiene un *isomorfismo* categorial functorial

$$\text{Hom}_{\mathfrak{C}\text{-data}}(\text{Cyl}(\mathcal{X}), Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}^{\text{Lax}}}(\mathcal{X}, Y);$$

es decir,  $\text{Cyl}(\mathcal{X})$  es isomorfo a las secciones laxas de  $\mathcal{X}$ , es decir, al colímite laxo de los  $\mathcal{X}(p)$  en la 2-categoría de  $\mathfrak{C}$ -datos.

*Demostración.* La parte topológica de la demostración es exactamente el Lema 2.3.3, por lo que solo es necesario ver la parte concerniente a los funtores a  $\mathfrak{C}$ . La correspondencia entre objetos viene dada de modo idéntico: siguiendo aquella notación, cada  $f_p: \mathcal{X}(p) \rightarrow Y$  es un morfismo de  $\mathfrak{C}\text{-data}$  tal que

$$f_p \circ \mathcal{X}_{pq} \leq f_q: \mathcal{X}(q) \rightarrow Y$$

en  $\mathfrak{C}\text{-data}$ . Es decir, están ordenadas como aplicaciones y verifican que, para cada punto  $y_q \in |\mathcal{X}(q)|$ , se tiene la relación

$$Y_{(f_p \circ \mathcal{X}_{pq})(y_q)} \circ (f_p \circ \mathcal{X}_{pq})_{y_q}^\sharp = Y_{(f_p \circ \mathcal{X}_{pq})(y_q)} \circ (\mathcal{X}_{pq})_{y_q}^\sharp \circ (f_p)_{\mathcal{X}_{pq}(y_q)}^\sharp = (f_q)_{y_q}^\sharp;$$

pero por la construcción del cilindro y definición del morfismo  $\text{Cyl}(\mathcal{X}) \rightarrow Y$ , se verifica que, para todo  $p \leq q$  e  $y_q \in |\mathcal{X}(q)|$  con imagen  $x_p = \mathcal{X}_{pq}(y_q)$ ,

$$\text{Cyl}(\mathcal{X})_{x_p y_q} \circ (f_p)_{x_p}^\sharp = (f_q)_{y_q}^\sharp, \quad (2.3.1)$$

donde  $\text{Cyl}(\mathcal{X})_{x_p y_q} = (\mathcal{X}_{pq})_{y_q}^\sharp$ , como queríamos. La correspondencia inversa se sigue de las mismas relaciones.

Si ahora tenemos  $f, g: \text{Cyl}(\mathcal{X}) \rightarrow Y$  con  $f \leq g$  en  $\mathfrak{C}\text{-data}$ , por definición verifican  $|f| \leq |g|$  como aplicaciones entre posets y además, para todo  $x_p \in |\text{Cyl}(\mathcal{X})|$ ,

$$g_{x_p}^\sharp \circ Y_{f(x_p)g(x_p)} = f_{x_p}^\sharp. \quad (2.3.2)$$

Si  $\{f_p: \mathcal{X}(p) \rightarrow Y\}$  y  $\{g_p: \mathcal{X}(p) \rightarrow Y\}$  son las familias que conforman los morfismos en  $[X, (\mathfrak{C}\text{-data})^{\text{op}}]_{\text{Lax}}$  correspondientes, tenemos que ver que  $\{f_p\} \leq \{g_p\}$ . En efecto, esto implica ver que, topológicamente, para todo  $p \leq q$ , se tiene una desigualdad  $|f_p| \leq |g_p|$ , lo cual proviene de que  $|f| \leq |g|$ ; y que para cada punto  $x_p \in \mathcal{X}(p)$  conmutan en  $\mathfrak{C}$  los diagrama correspondientes, lo cual se sigue de la ecuación 2.3.2. Una vez más, dadas transformaciones naturales ordenadas de este modo, los morfismos que se obtienen a partir de ellas están ordenados en  $\mathfrak{C}\text{-data}$ . La functorialidad queda, de nuevo, como ejercicio.  $\square$

Destacamos que el cilindro conmuta con productos fibrados —estrictos, que coinciden aquí con los pseudoproductos—, como demuestra un cálculo directo con la construcción explícita, que dejamos al lector:

**Proposición 2.3.6.** Si  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$  son morfismos de  $(\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}$ , entonces se tiene un isomorfismo natural de  $\mathfrak{C}\text{-data}$

$$\text{Cyl}(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{X}) \times_{\text{Cyl}(\mathcal{Z})} \text{Cyl}(\mathcal{Y}).$$

Para no extender esta parte de la memoria, nos hemos limitado a dar esta descripción del cilindro y la comprobación de su propiedad universal. Para nuestros propósitos aquí, nos bastarán las siguientes observaciones elementales.

Consideremos  $\mathcal{X} \in (\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}$  para cierta 1-categoría  $\mathfrak{C}$ . Vamos a comparar  $\text{Cyl}(\mathcal{X}) \equiv \text{LaxLím } \mathcal{X}$  con  $\Gamma(\mathcal{X}) \equiv 2\text{-lím } \mathcal{X}$  —donde estos límites se entienden en  $(\mathfrak{C}\text{-data})^{\text{op}}$ , i.e. colímites en  $\mathfrak{C}\text{-data}$ ; y observamos que el 2-límite que aparece es en realidad isomorfo al límite en sentido 1-categorial por estar  $\mathfrak{C}\text{-data}$  enriquecida en poset y ser, por tanto, toda equivalencia un isomorfismo—. En primer lugar, es fácil ver que hay un morfismo natural en  $\mathfrak{C}\text{-data}$

$$\text{Cyl}(\mathcal{X}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}),$$

puesto que  $\Gamma(\mathcal{X})$  es un cociente de  $\coprod_{p \in |\mathcal{X}|} \mathcal{X}(p)$  y el epimorfismo efectivo de proyección preserva trivialmente el orden del cilindro. Este morfismo es el inducido por la transformación natural de inclusión  $2\text{-lím} \rightarrow \text{LaxLím}$  a nivel de categorías de  $\text{Hom}_{\mathfrak{C}\text{-data}}$ . Además, tomando secciones, *como límites conmutan con límites* se obtienen isomorfismos  $\Gamma_{\mathfrak{C}}(\text{Cyl}(\mathcal{X})) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\mathfrak{C}}(\Gamma_{\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{op}}}(\mathcal{X}))$ . Es decir, hay un isomorfismo de funtores

$$\Gamma_{\mathfrak{C}} \circ \text{Cyl} \simeq \Gamma_{\mathfrak{C}} \circ \Gamma_{\mathfrak{C}\text{-data}^{\text{op}}}.$$

Por otra parte, sea ahora  $\mathfrak{C}$  una 1-categoría,  $\Phi: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  un functor y mantengamos todas las notaciones anteriores. Como es evidente de la construcción explícita, se verifica que el cilindro conmuta idénticamente con  $\Phi_*$  (en las categorías correspondientes), es decir

$$\Phi \circ \text{Cyl} = \text{Cyl} \circ \Phi_*.$$

En particular, esto se verifica para el functor  $|-|$ : *el cilindro de los posets subyacentes es el poset subyacente del cilindro*; como ya justificaba considerar el Lema 2.3.3 como tal.

Como consecuencia de ambas observaciones previas, si definimos el functor de *secciones relativas a*  $\Phi$  como  $\Gamma_{\Phi} = \Gamma_{\mathfrak{D}} \circ \Phi_*$ , se verifica también

$$\Gamma_{\Phi} \circ \text{Cyl} \simeq \Gamma_{\mathfrak{D}} \circ \Gamma_{\mathfrak{D}\text{-data}^{\text{op}}} \circ (\Phi_*)_* \equiv \Gamma_{\mathfrak{D}} \circ \Gamma_{\Phi_*} \quad (2.3.3)$$

—donde el  $\Gamma_{\Phi_*}$  es la composición de  $\Gamma_{\mathfrak{D}\text{-data}^{\text{op}}}$  con el functor inducido por  $\Phi$  en  $(\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata} \rightarrow (\mathfrak{D}\text{-data})\text{-codata}$ —. Si ahora *definimos* que un morfismo de  $\mathfrak{C}$ -datos  $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es una  $\Phi$ -*equivalencia* —véase el Apéndice A.2— cuando  $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\Phi}(\mathcal{G})$  es un isomorfismo, se verifica que, para todo  $\mathcal{X} \in (\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}$  y functor  $\Phi$  que *conmute con límites*, el morfismo natural

$$\text{Cyl}(\mathcal{X}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X})$$

es una  $\Phi$ -equivalencia.

### El segundo functor de inclusión

Ya hemos visto que dada una 1-categoría  $\mathfrak{C}$  se tiene un functor natural

$$i_{\mathfrak{C}}^2: \mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow (\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}$$

que admite un functor de «secciones laxas» en forma del cilindro  $\text{Cyl}$ : el colímite laxo de  $\mathfrak{C}\text{-data}$  con las estructuras previamente introducidas.

Sin embargo, el lector puede observar que hay un segundo functor «obvio»: el functor  $i_{\mathfrak{C}\star}$  inducido por (el opuesto de)  $i_{\mathfrak{C}}: \mathfrak{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{C}\text{-data}$ . Esto es,

$$\widehat{i}_{\mathfrak{C}}^2: \mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow (\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}$$

tal que  $\widehat{i}_{\mathfrak{C}}^2(\mathcal{F})$  es el codato con  $|\widehat{i}_{\mathfrak{C}}^2(\mathcal{F})| = |\mathcal{F}|$  y  $\widehat{i}_{\mathfrak{C}}^2(\mathcal{F})(x) = (\star, \mathcal{F}(x))$  para cada  $x \in |\mathcal{F}|$ . Obsérvese que también se verifica  $\text{Cyl} \circ \widehat{i}_{\mathfrak{C}}^2(\mathcal{F})$ , pero la adjunción no se mantiene.

*Notación 2.3.7.* Al igual que dado un  $\mathfrak{C}$ -dato  $\mathcal{F}$ , mantenemos la notación « $\mathcal{F}$ » cuando lo consideramos en  $(\mathfrak{C}\text{-data})\text{-codata}$  vía la inclusión natural  $i_{\mathfrak{C}}^2$  —es decir,  $\mathcal{F} \equiv (\star, \mathcal{F})$ —; mientras que, cuando queramos considerar su imagen vía  $\widehat{i}_{\mathfrak{C}}^2$ , emplearemos la notación  $\underline{\mathcal{F}}$ .

En general, se tiene una transformación natural

$$\eta: \widehat{i}_{\mathfrak{C}}^2 \rightarrow i_{\mathfrak{C}}^2 \tag{2.3.4}$$

tal que, para todo  $\mathcal{F}$ , está dada por el morfismo  $\underline{\mathcal{F}} \rightarrow (\star, \mathcal{F})$  que es la proyección al objeto final entre los posets subayentes y, a nivel de  $\mathfrak{C}$ -datos, para todo  $x \in |\mathcal{F}|$ , por el morfismo de inclusión natural  $(\star, \mathcal{F}(x)) \rightarrow \mathcal{F}$  tal que  $\star \mapsto x \in |\mathcal{F}|$  y que es la identidad a nivel de objetos de  $\mathfrak{C}$ .

Sin entrar en excesivos detalles, esta transformación natural puede emplearse para codificar ciertos problemas de descenso. Haremos uso de una versión ligeramente modificada de ella en la Sección 5.5.

*Ejemplo 2.3.8.* Como curiosa aplicación topológica de este lenguaje, podemos definir con un cilindro espacios del tipo  $\{(x', x) : x' \geq x\} \subseteq X \times X$  para cierto poset  $X$ , adquiriendo así estos una propiedad 2-universal estricta —dada por isomorfismos de categorías—. En general, sea  $\mathfrak{C} = \star$  la categoría terminal, de modo que  $\star\text{-data} = \mathbf{pos}$ . Dado un morfismo de posets  $f: X \rightarrow Y$  y un abierto  $U \subseteq Y$ , definimos el  $\mathbf{pos}$ -codato  $D_{\geq}(f, U)$  con

$$|D_{\geq}(f, U)| = U, \quad D_{\geq}(f, U)(y) = f^{-1}(U_y);$$

con morfismos de restricción dados por las inclusiones naturales. De modo similar, dado un cerrado  $C \subseteq Y$ , se define  $D_{\leq}(f, C)$  con  $|D_{\leq}(f, C)| = C$  y  $D_{\leq}(f, C)(y) = f^{-1}(C_y)$ .

*Definición.* Dados  $f: X \rightarrow Y$  y  $U \subseteq Y$  abierto, definimos el *espacio diagonal superior asociado a  $(f, U)$*  como  $\text{Diag}_{\geq}(f, U) = \text{Cyl}(\text{D}_{\geq}(f, U))$ . Dado  $f$  y  $C \subseteq Y$  un cerrado, definimos el *espacio diagonal inferior asociado a  $(f, C)$*  como  $\text{Diag}_{\leq}(f, C) = \text{Cyl}(\text{D}_{\leq}(f, C))$ .

Explícitamente, es fácil ver que se tiene un homeomorfismo

$$\begin{aligned} \text{Diag}_{\geq}(f, U) &\xrightarrow{\sim} \{(x, y) : y \in U \text{ y } f(x) \geq y\} \subseteq f^{-1}(U) \times U \\ &x_y \mapsto (x_y, y); \end{aligned}$$

y en particular,  $\text{Diag}_{\geq}(\text{Id}, X) = \{(x', x) : x' \geq x\}$ , como afirmábamos. Para este último caso —por claridad—, la correspondencia de la propiedad universal del cilindro se traduce en que cada  $g: \{(x', x) : x' \geq x\} \rightarrow Z$  define para cada  $x \in X$  morfismos  $h_x^{\sharp}: U_x \rightarrow Z$  con  $h_x^{\sharp}(x') = g(x', x)$ ; donde, si  $y \leq x \leq x'$ , es  $h_y^{\sharp}(x') \leq h_x^{\sharp}(x')$  por la continuidad de  $g$ . Recíprocamente, cada  $h: \text{D}_{\geq}(\text{Id}, X) \rightarrow Z$  viene determinado por los  $h_x^{\sharp}$  y define una  $g: \{(x', x) : x' \geq x\} \rightarrow Z$  continua sin más que establecer  $g(x', x) = h_x^{\sharp}(x')$ . Por otra parte, en general, se tienen morfismos naturales de **pos**-codatos  $\widehat{i}_{\star}^2(f^{-1}(U)) \rightarrow \text{D}_{\geq}(f, U) \rightarrow U \equiv i_{\star}^2(U)$  induciendo, al tomar cilindros, una factorización de  $f^{-1}(U) \rightarrow U$  como  $f^{-1}(U) \hookrightarrow \text{Diag}_{\geq}(f, U) \rightarrow U$ .

## Parte II

# Elementos de espacios esquemáticos

¿Acaso todavía hay mentes lo bastante ingenuas para pensar que las teorías sirven para ser creídas? Las teorías sirven para irritar a los filisteos, para seducir a los estetas y para que los demás se rían.

*El sabotaje amoroso*, Amélie Nothomb  
trad. Sergi Pàmies



## Capítulo 3

# Posets anillados

Antes de introducir los principales objetos de estudio de esta memoria, los «espacios esquemáticos», podemos analizar algunas propiedades elementales de los puros posets anillados. Lo principal será recordar las descripciones de haces coherentes y cuasicoherentes sobre ellos y ver cómo sus respectivas categorías pueden obtenerse como secciones de **Cat**-datos —i.e como 2-límites—, tanto para módulos como para álgebras, si imponemos algunas restricciones sobre el haz de anillos estructural. Seguiremos esta discusión con la definición de un espacio localmente anillado asociado a cada poset anillado, que llamaremos «espectro», y que también puede describirse, bajo ciertas restricciones, en términos de haces de ideales cuasicoherentes del estructural. Los espacios que verifiquen estas condiciones serán los que llamaremos «pseudoesquemáticos»: una clase más amplia que la de los espacios esquemáticos para la cual ya se verifican un número de buenas propiedades.

### 3.1. Módulos y álgebras en posets anillados

Vamos a considerar posets anillados, es decir, **CRing**-datos, y haces de módulos y álgebras sobre ellos, haciendo énfasis en algunas diferencias técnicas entre ambas situaciones. Si  $X = (X, \mathcal{O}_X)$  es un poset espacio anillado, de la propia Proposición 1.4.1 se obtiene que un haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos viene dado por un  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo  $\mathcal{M}_x$  para cada  $x \in X$  y morfismos de restricción  $r_{xy}^{\mathcal{M}}: \mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{M}_y$  de  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos para todo  $x \leq y$ . De modo similar, un haz de  $\mathcal{O}_X$ -álgebras queda determinado por una  $\mathcal{O}_{X,x}$ -álgebra  $\mathcal{A}_x$  para ca-

da  $x \in X$  y morfismos de  $\mathcal{O}_{X,x}$ -álgebras  $r_{xy}^{\mathcal{A}}: \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{A}_y$ . Dar un morfismo  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  (resp.  $\mathcal{O}_{X,x}$ -álgebras) es dar una colección de morfismos de  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos  $f_x: \mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{N}_x$  (resp.  $\mathcal{O}_{X,x}$ -álgebras) compatibles con las restricciones.

En términos de  $\mathfrak{C}$ -datos: si  $\mathbf{Ab}$  es la categoría de grupos abelianos y  $\mathbf{Ring}$  la categoría de anillos,  $\mathcal{M}$  es un  $\mathbf{Ab}$ -dato en  $X$  equipado con un morfismo de  $\mathbf{Ring}$ -datos  $\mathcal{O}_X \rightarrow \underline{\mathbf{End}}(\mathcal{M})$  (Ejemplo 2.1.11); mientras que  $\mathcal{A}$  es un  $\mathbf{CRing}$ -dato en  $X$  equipado con un morfismo  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{A}$ .

Recordemos que un haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos  $\mathcal{M}$  en un espacio anillado  $X$  arbitrario se dice *cuasicoherente* si es localmente conúcleo de libres. Se dice *finito generado* (resp. de *presentación finita*) si es localmente cociente de un libre finito (resp. localmente conúcleo de libres finitos). Si  $X$  es un poset anillado, basta que estas condiciones se cumplan en los  $\mathcal{M}_x$ , es decir, *puntualmente*; sin embargo no es el caso de la siguiente:  $\mathcal{M}$  se dice *coherente* si es finito generado y, *para todo* abierto  $U \subseteq X$ , el núcleo de *cualquier* morfismo  $\mathcal{O}_{X|U}^{\oplus n} \rightarrow \mathcal{M}|_U$  con  $n \in \mathbb{N}$  es un  $\mathcal{O}_{X|U}$ -módulo finito generado.

Recordamos también que dado un anillo  $A$ , un  $A$ -módulo  $M$  es coherente si lo es como haz de módulos en  $(\star, A)$ . Un anillo se dice coherente si lo es como  $A$ -módulo, es decir, si el núcleo de todo morfismo  $A^{\oplus n} \rightarrow A$  es un  $A$ -módulo finito generado.

*Notación 3.1.1.* Dado un espacio anillado  $X$ , denotaremos por  $\mathbf{Mod}(X)$  y  $\mathbf{Alg}(X)$  a las categorías de haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos y  $\mathcal{O}_X$ -álgebras; y por  $\mathbf{Qcoh}(X)$  y  $\mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(X)$  (resp.  $\mathbf{Coh}(X)$  y  $\mathbf{Coh}^{\text{alg}}(X)$ ) a las de haces de  $\mathcal{O}_X$ -módulos y álgebras cuasicoherentes (resp. coherentes). Si  $X = (\star, A)$ , denotamos  $\mathbf{Mod}(A) \equiv \mathbf{Mod}((\star, A)) = \mathbf{Qcoh}((\star, A))$ ; y lo mismo en los demás casos. Nótese que la coherencia y cuasicoherencia son condiciones que conciernen puramente a la estructura de  $\mathcal{O}_X$ -módulos, pero también que las diferentes categorías de álgebras son subcategorías fieles (pero no plenas) de las de módulos respectivas.

El siguiente resultado proviene de [29, Theorem 2.5, 2.8, 2.10] para el caso finito. Es válido para posets anillados cualesquiera con la misma demostración.

**Proposición 3.1.2.** Sea  $X$  un poset anillado y  $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}(X)$ . Se verifica:

- $\mathcal{M}$  es cuasicoherente si y solo si  $r_{xy}^{\mathcal{M}} \otimes 1: \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{M}_y$  es un isomorfismo de  $\mathcal{O}_{X,y}$ -módulos para todo  $x \leq y$ .

- $\mathcal{M}$  es finito generado si y solo si  $\mathcal{M}_x$  es un  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo finito generado para todo  $x \in X$  y los morfismos  $\mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{M}_y$  son epiyectivos para todo  $x \leq y$ .
- $\mathcal{M}$  es coherente si y solo si  $\mathcal{M}_x$  es un  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo coherente para todo  $x \in X$ , los morfismos naturales  $\mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{M}_y$  son epiyectivos para todo  $x \leq y$ ; y para todo  $x \leq y$  y cada sub- $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo finito generado  $N \subseteq \mathcal{M}_x$ , el morfismo natural  $N \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{M}_y$  es inyectivo.

**Corolario 3.1.3.** Si  $X$  tiene morfismos de restricción  $r_{xy}: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,y}$  planos para todo  $x \leq y$ , entonces  $\mathcal{O}_X$  es coherente.

**Definición 3.1.4.** Un poset anillado  $X$  es un *Fr-espacio* («*finite restrictions*») si, para todo  $x \leq y$ , los morfismos de restricción  $r_{xy}: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,y}$  son planos.

**Definición 3.1.5.** Un poset anillado  $X$  es *puntualmente noetheriano* si  $\mathcal{O}_{X,x}$ -es noetheriano para todo  $x \in X$ .

**Corolario 3.1.6.** Si  $X$  es un Fr-espacio puntualmente noetheriano. Se verifica que un  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $\mathcal{M}$  es coherente si y solo si es cuasicoherente y los  $\mathcal{M}_x$  son finito generados para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Por las caracterizaciones de la proposición 3.1.2 es claro que todo módulo coherente es cuasicoherente y finito generado. Recíprocamente, si  $\mathcal{M}$  es finito generado y cuasicoherente, se tiene por una parte que  $\mathcal{M}_x$  es un  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo coherente para todo  $x \in X$  por estar en el caso noetheriano; y por otro lado que la condición de plitud nos garantiza que  $N \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y}$  es inyectivo para todo  $N \subseteq \mathcal{M}_x$  finito generado, lo que nos permite concluir por la cuasicoherencia de  $\mathcal{M}$ .  $\square$

*A partir de este punto, supondremos que todos los posets anillados que aparezcan son puntualmente noetherianos.*

El motivo de esta simplificación es desviar la atención de los detalles técnicos adicionales que entraña el caso no noetheriano, con el objeto de centrar nuestra atención en las diferencias entre posets anillados y espacios anillados generales. En principio, las técnicas de reducción noetheriana que

se aplican en teoría de esquemas se trasladarían a nuestro caso —y de un modo similar, se hablaría de módulos pseudocoherentes en vez de coherentes, la condición de módulo de presentación finita es más fuerte que la de finito generado, etc.— Sin embargo, trabajar en el caso no noetheriano tiene más sentido si se hace con posets infinitos, puesto que para tratar «modelos» de esquemas qc-qs, que son automáticamente noetherianos, siempre podemos suponer que los posets que aparecen son finitos; véase por tanto la discusión del Apéndice B.1 para más información.

**Teorema 3.1.7.** [31] Si  $(X, \mathcal{O}_X)$  es un Fr-espacio, entonces  $\mathbf{Coh}(X)$  y  $\mathbf{Qcoh}(X)$  son subcategorías abelianas de Grothendieck de  $\mathbf{Mod}(X)$ .

*Demostración.* Que  $\mathbf{Qcoh}(X)$  es subcategoría abeliana se reduce a que las operaciones categoriales de haces requeridas se computan en fibra y a que, gracias a la hipótesis de restricciones planas, el núcleo de un morfismo de haces cuasicoherentes es cuasicoherente. Para los coherentes, lo mismo se sigue de que el cambio de base plano conmuta con productos arbitrarios de módulos finito generados.  $\square$

Estas nociones pueden reinterpretarse en términos de  $\mathfrak{C}$ -datos como sigue. Consideremos el functor  $\mathbf{Mod}: \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{Cat}$  tal que  $A \mapsto \mathbf{Mod}(A)$  y  $A \rightarrow B$  induce  $M \mapsto M \otimes_A B$ . Ya vimos que teníamos un functor inducido  $\mathbf{Mod}_*: \mathbf{CRing}\text{-data} \rightarrow \mathbf{Cat}\text{-data}$ . Dado un poset anillado  $X$ , denotemos  $\mathbf{Mod}_X = \mathbf{Mod}_*(X)$ , es decir.

$$\begin{aligned} \mathbf{Mod}_X: X &\rightarrow \mathbf{Cat} \\ x &\mapsto \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathbf{Qcoh}((\star, \mathcal{O}_{X,x})), \end{aligned}$$

con morfismos de restricción  $r_{xy}^*$  dados por  $r_{xy}^*(M) = M \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y}$  para cada  $x \leq y$  y  $M \in \mathbf{Mod}_X(x)$ . Las restricciones a cada punto dan morfismos naturales de  $\mathbf{Cat}$ -datos

$$\mathbf{Mod}_X \rightarrow \mathbf{Mod}(X), \quad \mathbf{Mod}_X \rightarrow \mathbf{Qcoh}(X).$$

Tenemos ahora los funtores de secciones y secciones laxas:

**Proposición 3.1.8.** Sea  $X$  un poset anillado. Se tienen *isomorfismos* categoriales

$$\mathbf{Mod}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Lax}\Gamma(\mathbf{Mod}_X), \quad \mathbf{Qcoh}(X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbf{Mod}_X).$$

*Demostración.* Nótese que, al interpretar las categorías como **Cat**-datos triviales vía la inclusión, se tiene  $\Gamma(\mathbf{Qcoh}(X)) = \text{Lax}\Gamma(\mathbf{Qcoh}(X)) = \mathbf{Qcoh}(X)$ , ídem para  $\mathbf{Mod}(X)$ . Ya hemos dicho que cada  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $\mathcal{M}$  está determinado por un  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo  $\mathcal{M}_x$  para cada  $x \in X$  y, vía la propiedad universal del cambio de base, morfismos  $r_{xy}^{\mathcal{M}} \otimes 1: \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{M}_y$  para cada  $x \leq y$ ; de modo que si  $\mathcal{M}$  es cuasicoherente cuando los  $r_{xy}^{\mathcal{M}} \otimes 1$  son isomorfismos. Según la descripción explícita de los 2-límites del Apéndice A.1, un objeto  $\{(M_x, f_{xy})\} \in \text{Lax}\Gamma(\mathbf{Mod}_X)$  viene dado por una colección de  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos  $M_x$  y de  $\mathcal{O}_{X,y}$ -módulos  $f_{xy}: M_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow M_y$  satisfaciendo las condiciones de compatibilidad evidentes —vía los isomorfismos canónicos de los cambios de base—, que en particular producen morfismos de  $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos compatibles  $r_{xy}^M: M_x \rightarrow M_y$  de modo que  $f_{xy} = r_{xy}^M \otimes 1$  para cada  $x \leq y$ . Se comprueba que estas construcciones son inversas entre sí y que los morfismos son los adecuados.  $\square$

*Observación 3.1.9.* Es más, el enunciado de la Proposición 3.1.8 es functorial en  $X$  por construcción, es decir, la composición

$$\mathbf{CRing}\text{-data} \xrightarrow{\mathbf{Mod}^*} \mathbf{Cat}\text{-data} \xrightarrow{\Gamma \text{ (resp. Lax}\Gamma)} \mathbf{Cat}^{\text{op}}$$

es naturalmente isomorfa al functor  $X \mapsto \mathbf{Qcoh}(X)$  (resp.  $X \mapsto \mathbf{Mod}(X)$ ).

Debemos enfatizar que, en la demostración de la Proposición 3.1.8, para obtener la igualdad  $f_{xy} = r_{xy}^M \otimes 1$  y probar que las correspondencias son inversas, se ha hecho uso de la propiedad universal del cambio de base de módulos (un caso particular de la adjunción  $\otimes \dashv \text{Hom}$ ); a saber, que dado un morfismo de anillos  $A \rightarrow B$ , un  $A$ -módulo  $M$  y un  $B$ -módulo  $N$ , se tiene una biyección

$$\text{Hom}_A(M, N) = \text{Hom}_B(M \otimes_A B, N),$$

donde en la izquierda  $N$  se interpreta como  $A$ -módulo vía  $A \rightarrow B$ . El resultado análogo para  $A$ -álgebras es cierto si el cambio de base es vía un epimorfismo de anillos (Proposición B.2.8). Por ello, con idea de tener el resultado análogo para haces de álgebras, damos la siguiente definición:

**Definición 3.1.10.** Un poset anillado  $X$  es un *epic-espacio* («*epic*» de «epimorfismo») si, para todo  $x \leq y$ , los morfismos  $r_{xy}: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,y}$  son epimorfismos de anillos.

Como en el caso de módulos, fijado un poset anillado  $X$ , tenemos definido el **Cat**-dato  $\mathbf{Alg}_X \hookrightarrow \mathbf{Mod}_X$  con  $x \mapsto \mathbf{Alg}(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}((\star, \mathcal{O}_{X,x}))$ .

**Proposición 3.1.11.** Si  $X$  es un epic-espacio, se tienen isomorfismos categoriales —functoriales en  $X$  en el sentido de la Observación 3.1.9—

$$\mathbf{Alg}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Lax}\Gamma(\mathbf{Alg}_X), \quad \mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbf{Alg}_X).$$

Por último, para generalizar estas proposiciones al caso de haces coherentes necesitamos, en virtud del Corolario 3.1.6, suponer que nuestros espacios son Fr-espacios. Justificamos así la siguiente definición:

**Definición 3.1.12.** Un poset anillado  $X$  se dice *pseudoesquemático* si es un Fr-espacio y un epic-espacio, i.e. si sus morfismos de restricción son epimorfismos planos de anillos.

*Ejemplo 3.1.13.* Todo poset con un haz de anillos constante es pseudoesquemático.

Dado un poset anillado  $X$  se tienen **Cat**-datos  $\mathbf{Alg}_X^{\text{fg}}, \mathbf{Mod}_X^{\text{fg}}: X \rightarrow \mathbf{Cat}$  tales que  $x \mapsto \mathbf{Alg}^{\text{fg}}(\mathcal{O}_{X,x})$  y  $x \mapsto \mathbf{Mod}^{\text{fg}}(\mathcal{O}_{X,x})$  respectivamente.

**Proposición 3.1.14.** Sea  $X$  un poset espacio pseudoesquemático puntualmente noetheriano. Se tienen equivalencias —functoriales en  $X$  en el sentido de la Observación 3.1.9—

$$\mathbf{Coh}(X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbf{Mod}_X^{\text{fg}}), \quad \mathbf{Coh}^{\text{alg}}(X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbf{Alg}_X^{\text{fg}}).$$

*Demostración.* Estamos en las hipótesis del Corolario 3.1.6, luego el resultado se sigue de las Proposiciones 3.1.8 y 3.1.11.  $\square$

*Observación 3.1.15* (Secciones de objetos compactos vía  $\mathfrak{C}$ -datos). Recordemos que, en una categoría  $\mathfrak{C}$  localmente pequeña, un objeto  $c$  se dice *compacto* —o si no induce a confusión, de presentación finita— si el functor de puntos covariante  $c_\bullet = \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(c, -): \mathfrak{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva colímites filtrantes. Es bien conocido que los módulos finitos generados de un anillo  $A$  son los objetos compactos de su categoría de  $A$ -módulos. De modo similar, los módulos coherentes de un esquema noetheriano  $S$  son los objetos compactos de  $\mathbf{Qcoh}(S)$ . Nos limitamos a señalar que, asumiendo que en el ambiente en que trabajemos límites finitos conmutan con colímites filtrantes

—por ejemplo, en todo topos de Grothendieck y en toda categoría abeliana de Grothendieck—, si se tiene  $\mathcal{F}: X \rightarrow \mathfrak{C}$  un  $\mathfrak{C}$ -dato, entonces  $\mathcal{F}(x)$  es compacto para todo  $x \in X$  si y solo si  $\mathcal{F}$  es compacto como  $\mathfrak{C}$ -dato, como se puede comprobar a partir de propiedades formales. Esto es consistente con la Proposición 3.1.14. Nótese que en categorías aditivas sin colímites filtrantes en general, más notablemente en la categoría derivada, es común tomar una definición algo diferente: en ellas, se pide que  $\mathfrak{c}_\bullet$  conmute solo con coproductos; siendo el ejemplo estándar de objeto compacto los complejos perfectos en la categoría derivada.

### 3.1.1. Cohomología de haces en espacios finitos

En un espacio topológico de Alexandroff  $X$ , la existencia de abiertos mínimos hace que todo recubrimiento admita un refinamiento mínimo:  $\{U_x\}_{x \in X}$ . En particular, la resolución de Čech asociada a este recubrimiento y a un haz de grupos abelianos  $\mathcal{F}$  —**Ab**-dato— es una resolución por haces flascos que computa la cohomología del haz, véase [29]. Esta es la llamada *resolución estándar* de  $\mathcal{F}$ . Explícitamente, es  $\mathcal{F} \rightarrow C^\bullet(X, \mathcal{F})$  tal que

$$C^i(X, \mathcal{F}) = \prod_{x_0 < \dots < x_i} \mathcal{F}_{x_i}$$

y con diferenciales dadas por sumas alternadas como en la resolución de Čech ordinaria. En particular, para  $i > \dim X$ , se verifica que  $C^i(X, \mathcal{F}) = 0$  para cualquier haz  $\mathcal{F}$  —puesto que la dimensión topológica coincide con la dada por las longitudes de cadenas de puntos—, luego  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  para  $i > \dim X$ .

En esta memoria no realizaremos cálculos explícitos con cohomología en términos de esta resolución, pero muchas de las demostraciones que realizamos en términos de las fibras del haz estructural de un poset anillado  $(X, \mathcal{O}_X)$  pueden reinterpretarse a nivel cohomológico vía esta resolución. Esta es la técnica tras muchos de los resultados que citaremos de [32].

## 3.2. El espectro de un poset anillado

Todo poset anillado tiene asociado un espacio localmente anillado correspondiente al «*recollement*» de la información que contiene. Podemos

definirlo de modo *ad-hoc*: sea  $\text{Spec}: \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{LRS}^{\text{op}}$  el functor espectro a la categoría de espacios localmente anillados —ordinario, con las topologías de Zariski en cada espacio de la imagen—. Abusando de notación (véase la ecuación 2.3.3 y, en general, el Anexo A.2), definimos el functor

$$\text{Spec} \equiv \Gamma_{\text{Spec}} = \Gamma_{\mathbf{LRS}^{\text{op}}} \circ \text{Spec}_* : \mathbf{CRing}\text{-data} \rightarrow \mathbf{LRS}.$$

Como la categoría de espacios localmente anillados es cocompleta —y sus colímites coinciden con los de espacios anillados—, este functor existe y en objetos es

$$\text{Spec}(X) = \Gamma_{\mathbf{LRS}^{\text{op}}}(\text{Spec} \circ \mathcal{O}_X) = \text{colim}_{x \in X} \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x});$$

donde el colímite se toma en espacios localmente anillados. Si denotamos  $i_x: \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \text{Spec}(X)$  a los morfismos naturales, su haz estructural es

$$\mathcal{O}_{\text{Spec}(X)} = \lim_{x \in X} i_{x*} \widetilde{\mathcal{O}_{X,x}};$$

donde  $\widetilde{\mathcal{O}_{X,x}}$  denota el haz de localizaciones en  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ .

Nótese que si los morfismos  $r_{xy}: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,y}$  son epimorfismos planos de anillos *de presentación finita* para todo  $x \leq y$ , es decir, si los morfismos  $\text{Spec}(r_{xy})$  son inmersiones abiertas —Proposición B.2.22—,  $\text{Spec}(X)$  es un esquema por *recollement* de esquemas; *sin embargo esta condición no es necesaria para que se verifique dicho enunciado*. En general, si los morfismos  $r_{xy}$  viven en un sitio de Grothendieck,  $\text{Spec}(X)$  puede interpretarse como un espacio localmente afín en dicho sitio —si bien no en cualquiera de estos sitios el espacio resultante tendrá un «buen comportamiento»—.

**Definición 3.2.1.** Diremos que un espacio pseudoesquemático  $X$  *tiene restricciones abiertas* si  $r_{xy}: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,y}$  son epimorfismos planos de presentación finita para todo  $x \leq y$ . Es decir, si  $\text{Spec}(r_{xy})$  son inmersiones abiertas de esquemas afines.

*Observación 3.2.2.* Podríamos considerar las «secciones» en la categoría de esquemas como en la Definición 2.1.9. Denotando temporalmente por  $\text{Spec}': \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{Sch}^{\text{op}}$  al functor espectro de un anillo con valores en la categoría de esquemas y por  $Y: \mathbf{Sch}^{\text{op}} \rightarrow [\mathbf{Sch}, \mathbf{Set}]$  al correspondiente functor de Yoneda, podemos entender que  $\text{Spec}(X)$  es un esquema si

el problema de representabilidad de  $X^{\Gamma(\bullet)} := \Gamma_{Y \circ \text{Spec}'}(X)$  tiene respuesta positiva; esto es, si

$$\begin{aligned} X^{\Gamma(\bullet)}: \mathbf{Sch} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ S &\mapsto \lim_{x \in X} \text{Hom}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}), S). \end{aligned}$$

es representable. Es claro que, si extendemos  $X^{\Gamma(\bullet)}$  a **LRS**, es representable por  $\text{Spec}(X)$ .

También cabe destacar que, si  $X = U_x$  es un espacio con un mínimo  $x$ ,

$$\text{Spec}(X) \simeq \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \simeq \text{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$$

es un esquema afín. En general, dado que  $\text{Spec}$  conmuta claramente con co-productos en **LRS** (colímites conmutan con colímites) el morfismo natural  $\coprod_{x \in X} \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \text{Spec}(X)$  es precisamente el inducido por el «recubrimiento canónico» de  $X$ , es decir,

$$U = \coprod_{x \in X} U_x \rightarrow X.$$

**Lema 3.2.3.** Si  $X$  es un poset anillado y  $U = \coprod_{x \in X} U_x$ ,

$$U \times_X U \rightrightarrows U \rightarrow X$$

es un diagrama coequalizador de posets anillados. En particular,

$$\text{Spec}(U \times_X U) \rightrightarrows \text{Spec}(U) \rightarrow \text{Spec}(X)$$

es un diagrama coequalizador de espacios localmente anillados.

*Demostración.* La primera parte es rutinaria y válida para cualquier recubrimiento abierto de un espacio anillado; la segunda se sigue de que  $\text{Spec}$  conmuta con colímites.  $\square$

Una pregunta que surge en este punto de la discusión es si sería razonable imponer condiciones sobre  $X$  para forzar a que  $\text{Spec}(U \times_X U)$  sea un esquema —con  $U \times_X U = \coprod_{x,y \in X} U_x \cap U_y$ —, en cuyo caso tendríamos una situación donde  $\text{Spec}(X)$  aparece como un cociente de dos esquemas, como sucede en la teoría de espacios algebraicos. La respuesta es afirmativa y probará ser de utilidad en muchos contextos. Referimos a la Sección 7.1.

*Observación 3.2.4* (Topologías alternativas en el espectro). Consideremos los espacios localmente anillados de la forma  $\text{Spec}(X)$  para  $X$  pseudoesquemático, es decir, espacios localmente anillados que son «pegado» de esquemas afines por *monomorfismos planos de esquemas afines*. Los monomorfismos planos juegan ahora el papel de las «inmersiones abiertas»: digamos que son «inmersiones planas». Los colímites de estos espacios localmente anillados deberían en su subcategoría si los morfismos de transición son precisamente monomorfismos planos, al igual que sucede en el *recollement* de esquemas clásico.

En la Sección B.2 se comenta que la topología de monomorfismos planos en la categoría de esquemas afines tiene los mismos objetos que los abiertos básicos de la topología conjuntística generada por las imágenes de dichos morfismos. Por idénticas razones, lo mismo es cierto para la topología de los monomorfismos planos de un esquema  $S$ . Resulta, además, que como  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \rightarrow S$  es un monomorfismo plano para cualquier  $s \in S$ , esta base de abiertos genera la topología de las especializaciones en  $S$ , pero, como ya comentamos en dicha Sección, los recubrimientos son distintos en cada caso: en el de los monomorfismos planos exigimos que sean *fielmente planos cuasicompactos* (fpqc). La consecuencia es que, salvo que  $S$  verifique alguna muy fuerte condición de finitud —que tenga un número finito de puntos cerrados: que sea cuasicompacto para generalizaciones—, los topos de haces de conjuntos que generan respectivas topologías son muy distintos.

Dado  $S$  un espacio localmente anillado, digamos que su *topología pro-abierta* es aquella cuyos objetos son los abiertos por generalizaciones y cuyos recubrimientos son las familias epiyectivas cuasicompactas. *A priori*, la topología que hemos definido en la construcción  $\text{Spec}(X)$  es un cociente de topologías de Zariski y, como veremos en la Sección 4.3, esto no permite establecer una buena relación entre los haces en  $X$  y en  $\text{Spec}(X)$ . Sin embargo, por los motivos discutidos, podríamos considerar  $\text{Spec}(X)'$  definido como el cociente de los  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ , pero dotando a cada uno de estos afines de su topología pro-abierta. Por otra parte, podemos dotar a  $\text{Spec}(X)$  de su propia topología pro-abierta obtenida globalmente. Puede tener interés estudiar si estas dos topologías coinciden y relacionar sus haces con los de el poset anillado de partida bajo ciertas restricciones adicionales.

*Observación 3.2.5.* En [13] se define un functor «espectro» en toda la categoría de espacios anillados, denotado  $(-)^{\text{loc}}: \mathbf{RS} \rightarrow \mathbf{LRS}$  —a su vez es una

generalización de construcciones previas definidas incluso para cualquier topos anillado—, que es adjunto por la derecha del functor olvido —y por tanto conmuta con colímites—. Así, cada espacio anillado  $X$  viene equipado con un morfismo natural  $X^{\text{loc}} \rightarrow X$ . Esta construcción no coincide, en general, con el functor  $\text{Spec}$  que hemos definido. De hecho, si  $X$  es un poset anillado arbitrario, en general *no se tiene* un morfismo  $\text{Spec}(X) \rightarrow X$  que nos permita dar adjunción alguna.

### 3.2.1. Ideales cuasicoherentes

Recordemos que si  $S$  es un esquema, hay una correspondencia biyectiva

$$|S| \leftrightarrow \{\text{Haces de ideales primos cuasicoherentes } \mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_S\};$$

donde cada punto  $s \in S$  corresponde al ideal radical que define su cierre  $\bar{s}$ , que es primo por ser el cierre un espacio irreducible de punto genérico  $s$ . Recíprocamente, a cada haz de ideales primos se le asigna el único punto genérico del subesquema cerrado íntegro que le corresponde. Además, los cerrados de  $S$  están en correspondencia con haces de ideales cuasicoherentes radicales, es decir, que la topología de  $S$  no es más que la topología de Zariski de este conjunto de haces: los cerrados son

$$V(\mathcal{I}) = \{\mathfrak{p} : \mathcal{I} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

para  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_S$  cuasicoherente. Lo análogo es cierto para la topología de las especializaciones.

Vamos a ver que si  $X$  es pseudoesquemático, lo mismo es cierto para  $\text{Spec}(X)$ . Los haces de ideales primos se describen puntualmente —pues los abiertos mínimos  $U_x$  son acíclicos para cualquier haz, es decir, «afines»—. Podemos tomarlo como definición:

**Definición 3.2.6.** Sea  $X$  poset anillado. Un haz de ideales  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$  es primo si  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$  es primo para todo  $x \in X$ .

Observemos que, por la construcción de  $\text{Spec}(X)$ , un punto topológico  $\mathbf{x} \in \text{Spec}(X)$  es una clase de equivalencia  $[(x, \mathfrak{p}_x)]$  de parejas  $(x, \mathfrak{p}_x)$  con  $x \in X$  y  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ , donde la relación de equivalencia es la *generada* por

$$(x, \mathfrak{p}_x) \sim (y, \mathfrak{q}_y) \Leftrightarrow \exists z \geq x, y \text{ y } \alpha_z \subseteq \mathcal{O}_{X,z} \text{ primo} \quad (3.2.1)$$

tales que  $\mathfrak{p}_x = r_{xz}^{-1}(\alpha_z)$  y  $\mathfrak{q}_y = r_{yz}^{-1}(\alpha_z)$ .

Volveremos sobre esto en detalle en la Sección 4.3.

**Lema 3.2.7.** Si  $X$  es pseudoesquemático,  $\text{Spec}(X)$  es homeomorfo al conjunto de haces de ideales primos cuasicoherentes de  $\mathcal{O}_X$  dotado de la topología de Zariski, cuyos cerrados son  $V(\mathcal{I}) = \{\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X : \mathcal{I} \subseteq \mathfrak{p}\}$  para todo haz de ideales cuasicoherente  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ .

*Demostración.* Un haz cuasicoherente de ideales primos  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$  define  $[(x, \mathfrak{p}_x)] \in \text{Spec}(X)$  con  $x \in X$  cualquier punto en que  $\mathfrak{p}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}$ . Cualquiera de estos puntos define un haz cuasicoherente de ideales primos por la Proposición B.2.10. Para ver que la topología de  $\text{Spec}(X)$  coincide con la de Zariski basta probar que, dado un cerrado  $C \subseteq \text{Spec}(X)$ , existe un haz de ideales cuasicoherente  $\mathcal{I}$  tal que  $C = V(\mathcal{I})$ . En efecto,  $C$  produce cerrados de Zariski  $C_x \subseteq \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$  para todo  $x \in X$  de modo que  $C_x = \text{Spec}(r_{xy})^{-1}(C_y)$  para todo  $y \leq x$ . Ahora, el haz de ideales radicales  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I}_x = I(C_x)$  para cada  $x \in X$  es cuasicoherente por la Proposición B.2.21, de donde se concluye.  $\square$

**Corolario 3.2.8.** Si  $X$  es pseudoesquemático,  $\text{Spec}(X)$  es un espacio topológico sobrio —cada cerrado irreducible es el cierre de un punto— tal que la intersección de abiertos cuasicompactos es cuasicompacto —condición trivial en el caso noetheriano—. Si  $X$  es finito —o si, por ejemplo, admite un subposet finito final—,  $\text{Spec}(X)$  es cuasicompacto y, por tanto, un espacio espectral. Si además  $\mathcal{O}_X$  es noetheriano —por ejemplo, si  $X$  es finito y puntualmente noetheriano—,  $\text{Spec}(X)$  es un espacio topológico noetheriano.

*Demostración.* Solo quedaría observar que los abiertos cuasicompactos de  $\text{Spec}(X)$  son complementarios de ideales finitos generados; por tanto todos ellos lo son en el caso de  $\mathcal{O}_X$  noetheriano. Véase el Lemma B.4.3.  $\square$

## Capítulo 4

# La categoría de espacios esquemáticos finitos

En este capítulo describimos los principales objetos de estudio de la memoria: los «espacios esquemáticos». En un inicio fueron introducidos en [29] y estudiados en su variante afín en [28]. Las notas [32] contienen un resumen de buena parte de los resultados de estos dos artículos desde un punto de vista de ingeniería inversa: sus definiciones son las que antes habían sido caracterizaciones. Aquí seguiremos el enfoque original, dada su mayor versatilidad al plantear posibles generalizaciones y sus mejores propiedades formales.

Las Secciones 4.1 y 4.2 proceden en su mayoría de las citadas referencias, aunque tratamos de aportar algunas observaciones y resultados complementarios. La Sección 4.3 y el punto de vista que aporta es original, si bien esconde en sus tripas resultados técnicos previos. En la Sección 4.4 citamos un resultado esencial —Proposición 4.4.2— y probamos otro —Proposición 4.4.4—.

### 4.1. Espacios afines y esquemáticos

Comenzamos con la definición «espacios afines» en el espíritu del Anexo A.2, explicamos por qué es insuficiente y la enriquecemos a través de la noción de «espacio esquemático», cuya intersección con la anterior recuperará la noción correcta de espacio afín.

Como las definiciones que siguen vienen dadas en términos de categorías de haces cuasicoherentes, en vista del Teorema 3.1.7, *vamos a suponer que todos los posets anillados que aparezcan son Fr-espacios.*

**Definición 4.1.1.** [29, Definition 3.10][28, Definition 2.5] Se dice que un poset anillado  $X$  es **Mod-afín** si el morfismo  $\pi: X \rightarrow (\star, \mathcal{O}_X(X))$  induce una equivalencia adjunta de categorías abelianas

$$(\pi^* \dashv \pi_*): \mathbf{Qcoh}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X(X)).$$

*Observación 4.1.2.* Como estamos bajo la hipótesis de restricciones planas,  $\mathbf{Qcoh}(X)$  es abeliana y, por tanto, la equivalencia es exacta. En particular, todo módulo cuasicoherente —y por extensión el haz estructural— es acíclico.

*Ejemplo 4.1.3.* En el «caso topológico», es decir, para un poset anillado  $(X, \mathbb{Z})$  con  $\mathbb{Z}$  el haz constante,  $\mathbf{Qcoh}(X, \mathbb{Z})$  es la categoría de haces de grupos abelianos localmente constantes respecto a la topología de  $X$ , por lo que  $(X, \mathbb{Z})$  es **Mod-afín** si y solo si es simplemente conexo. Lo análogo es cierto para cualquier haz de anillos constante  $A$  —en cuyo caso estaríamos considerando la imagen de  $X$  por el adjunto a la derecha para el functor olvido de espacios anillados sobre  $(\star, A)$ ,  $\mathbf{RS}_{/(\star, A)} \hookrightarrow \mathbf{Top}$ —.

**Proposición 4.1.4.** Si  $X$  es un espacio **Mod-afín**, entonces se verifica

- a) El morfismo  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  es plano para todo  $x \in X$ .
- b) El morfismo  $\mathcal{O}_X(X) \hookrightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}$  es fielmente plano.
- c) El morfismo natural  $\mathrm{Spec}(X) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$  es epiyectivo.
- d) Todo Fr-espacio de la forma  $X = U_x$  es **Mod-afín**. En este caso, el morfismo del apartado c) es un isomorfismo.

*Demostración.* Para el apartado a) basta observar que la platitude equivale a la exactitud de  $\pi^*$ , que es automática por ser dicho functor una equivalencia entre categorías abelianas —nótese que requerimos la hipótesis implícita de que  $X$  sea Fr-espacio—. En el apartado b) probamos que  $\prod_{x \in X} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$  es epiyectivo —nótese que si  $|X|$  fuese un poset infinito, esta propiedad es más fuerte que la mera fielplatitude—;

en efecto, dado un primo  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X(X)$  con cuerpo residual  $\kappa(\mathfrak{p})$  (no nulo), por la equivalencia de categorías obtenemos  $\pi^*\kappa(\mathfrak{p}) \in \mathbf{Qcoh}(X)$  (no nulo). Por tanto, existe un  $x \in X$  tal que  $(\pi^*\kappa(\mathfrak{p}))_x \simeq \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \neq 0$ , es decir, tomando espectros, que hay algún  $x \in X$  tal que la fibra de  $\mathfrak{p}$  vía  $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$  es no vacía, lo cual prueba el resultado. El apartado c) se deduce de que  $\mathrm{Spec}(X)$  es un cociente de  $\coprod_{x \in X} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ .

El apartado d) se sigue de que el punto  $\{x\}$  es cofinal (resp. final) para 2-límites (resp. colímites) y de que  $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X,x}$ , luego es claro que  $\mathbf{Qcoh}(X) \simeq 2\text{-}\lim_{y \in X} \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{X,y}) \simeq \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{X,x})$  y, respectivamente, que  $\mathrm{Spec}(X) \simeq \mathrm{colim}_{y \in X} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,y}) \simeq \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ .  $\square$

Para que esta fuese una definición «buena» de espacio afín, nos gustaría que el morfismo del apartado c) *siempre* fuese un isomorfismo de espacios localmente anillados, al igual que sucede en la teoría ordinaria de esquemas. Además, esta definición también es insuficiente para tener una descripción de los haces cuasicoherentes que funcione como uno desearía: por ejemplo, el haz estructural soportado en un abierto no es cuasicoherente, como describimos a continuación:

*Ejemplo 4.1.5.* Sea un Fr-espacio  $X = \{a, b, c\}$  con  $a \leq b, c$  (i.e.  $X = U_a$ ) y denotemos  $A = \mathcal{O}_{X,a}$ ,  $B = \mathcal{O}_{X,b}$ ,  $C = \mathcal{O}_{X,c}$ . El haz estructural soportado en el abierto  $\{b\} \subseteq X$  es precisamente el haz  $\mathcal{B}$  tal que  $\mathcal{B}_a = B$ ,  $\mathcal{B}_b = B$  y  $\mathcal{B}_c = 0$ , luego, por la Proposición 3.1.2, será cuasicoherente si y solo si se verifican

$$B \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B, \quad B \otimes_A C \xrightarrow{\sim} 0.$$

La primera condición dice que  $A \rightarrow B$  debe ser un epimorfismo (plano) de anillos, luego, para que los haces estructurales soportados en  $b$  y  $c$  sean ambos cuasicoherentes, debe verificarse que  $X$  sea pseudoesquemático. La segunda nos está relacionando la «intersección algebraica» de los abiertos  $\{b\}$  y  $\{c\}$  con su intersección topológica.

La condición para solventar la patología expuesta en el Ejemplo 4.1.5 es de «cuasiseparabilidad», que es precisamente lo que impone la definición de *espacio esquemático* —nótese que al estar trabajando en el caso finito y noetheriano, la «cuasicompatibilidad algebraica», sea lo que sea esta, se verificará de modo automático—. Dado un poset anillado  $X$ , denotemos por  $\Delta: X \rightarrow X \times X$  a su morfismo diagonal. Sea además  $D_{\mathrm{qc}}(X)$  su categoría derivada de módulos con cohomología cuasicoherente.

**Definición 4.1.6.** [29, Definition 4.1][28, Definition 4.4] Se dice que  $X$  es *esquemático* si  $\mathbb{R}\Delta_*\mathcal{O}_X \in D_{\text{qc}}(X \times X)$ . Equivalentemente, vía la Proposición 3.1.2, si para todo  $x \in X$  e  $y \leq y' \in X$  y todo  $i \geq 0$  se verifica que el morfismo natural

$$H^i(U_x \cap U_y, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_{X,y}} \mathcal{O}_{X,y'} \xrightarrow{\sim} H^i(U_x \cap U_{y'}, \mathcal{O}_X)$$

es un isomorfismo. Se dice que  $X$  es *semiseparado* si, además  $R^i\Delta_*\mathcal{O}_X = 0$  para todo  $i > 0$ . Por último, diremos que  $X$  es *afín* si es **Mod**-afín y esquemático.

*Observación 4.1.7.* Todo espacio esquemático es pseudoesquemático: que los morfismos de restricción sean epimorfismos de anillos se obtiene de la condición de la definición para  $i = 0$  e  $y' = x$ . Cabe destacar que, en el «caso topológico», un poset anillado  $(X, A)$  con  $A$  un haz constante es esquemático si y solo si cada componente conexa de  $|X|$  es irreducible y, por tanto, será automáticamente afín —pues todo poset irreducible es contráctil a punto vía la inclusión y proyección en y desde el punto maximal, luego es homotópicamente trivial—. El caso diferenciable se estudia en [28].

A continuación listamos propiedades de espacios afines y esquemáticos. Todas las demostraciones no incluidas se encuentran en [29], [28] o [32].

Para empezar, los espacios esquemáticos y afines se pueden caracterizar en términos de morfismos de anillos en sus haces estructurales. Cabe destacar que en [32] se toman estas caracterizaciones como definiciones, siendo las nuestras teoremas en aquella presentación.

**Proposición 4.1.8.** [28, Theorem 4.12] [32, Section 2, Prop. 4; Section 8] Un Fr-espacio  $X$  es afín si y solo si verifica:

- 1) El morfismo  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}$  es fielmente plano.
- 2) Los morfismos naturales  $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(U_x \cap U_y)$  son isomorfismos  $\forall x, y \in X$ .
- 3) Los morfismos  $\mathcal{O}_X(U_x \cap U_y) \rightarrow \prod_{z \geq x,y} \mathcal{O}_{X,z}$  son fielmente planos  $\forall x, y \in X$ .

Además, las condiciones 2) y 3) pueden reemplazarse por:

- 4) Los morfismos  $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \prod_{z \geq x,y} \mathcal{O}_{X,z}$  son fielmente planos  $\forall x, y \in X$ .

En particular, un espacio  $U_x$  es afín si y solo si verifica 2) y 3); y un abierto  $U \subseteq X$  de un afín es afín si y solo si verifica 1). Además, se comprueba que si  $X$  es afín y  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ , las propiedades análogas son ciertas para las secciones y fibras del haz —*stalks*—  $\mathcal{M}$ ; y es más, siguen siendo ciertas si reemplazamos  $U_x$  por un afín  $U \subseteq X$  cualquiera y  $U_y$  por un abierto cualquiera —es decir, las secciones de módulos cuasicoherentes en afines se comportan como lo hacen en esquemas—.

**Corolario 4.1.9.** Si  $X$  es afín, los morfismos  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  son epimorfismos planos de anillos para todo  $x \in X$ .

De la Definición 4.1.6 se tiene que un poset anillado  $X$  es esquemático si y solo si todo abierto mínimo  $U_x \subseteq X$  es afín —es más, es esquemático si y solo si admite un recubrimiento abierto por afines—. En particular, la Proposición 4.1.8 caracteriza también los espacios esquemáticos:

**Proposición 4.1.10.** Un Fr-espacio anillado  $X$  es esquemático si y solo si verifica que para cualesquiera  $x, y \geq t$ , el morfismo

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,t}} \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \prod_{z \geq x,y} \mathcal{O}_{X,z}$$

es fielmente plano. Además, en este caso se tienen isomorfismos

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,t}} \mathcal{O}_{X,y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(U_x \cap U_y).$$

Se tienen caracterizaciones en términos de cuasicoherencia:

**Proposición 4.1.11.** [32, Section 3.2, Thm. 8, 9; Rem. 10] Sea  $X$  un Fr-espacio y  $\Delta$  su diagonal. Son equivalentes:

- a)  $X$  es esquemático.
- b) Para todo  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ , se tiene que  $\Delta_* \mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X \times X)$ .
- c) Para todo abierto  $i: U \hookrightarrow X$ , es  $\mathbb{R}i_* \mathcal{O}_{X|U} \in D_{\text{qc}}(X)$ .

- d) Se verifica el «Teorema de extensión de módulos cuasicoherentes» (C. f. [29, Theorem 4.4]): para todo abierto  $i: U \hookrightarrow X$  y  $\mathcal{N} \in \mathbf{Qcoh}(U)$ , es  $i_*\mathcal{N} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ .

**Proposición 4.1.12** (Criterio de Serre). [28, Theorem 5.11] Sea  $X$  un espacio esquemático. Se verifica que  $X$  es afín si y solo si todo módulo cuasicoherente en  $X$  es acíclico; y si y solo si  $H^1(X, \mathfrak{p}) = 0$  para todo haz de ideales primos cuasicoherente.

**Proposición 4.1.13.** [29, Proposition 6.5] Sea  $X$  espacio esquemático. Se verifica que  $X$  es afín si y solo si el morfismo  $\mathrm{Spec}(X) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$  es un isomorfismo (*a posteriori*,  $\mathrm{Spec}(X)$  es un esquema). Además, basta comprobar que es un homeomorfismo topológico.

*Demostración.* Que la afinidad implica que el morfismo pedido es isomorfismo se prueba en [29] por descenso fielmente plano: el morfismo fielmente plano  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}$  es un monomorfismo regular de anillos, luego tomando espectro produce un epimorfismo regular de esquemas afines que por el que  $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$  es, de hecho, el coequalizador de  $\prod_{x,y} \mathrm{Spec}(U_x) \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))} \mathrm{Spec}(U_y) \rightrightarrows \prod_{x \in X} \mathrm{Spec}(U_x)$  en la categoría de esquemas —y en **LRS**—, luego  $\mathrm{Spec}(X) \simeq \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ . Damos otra demostración más explícita: como  $X$  es pseudoesquemático, los puntos de  $\mathrm{Spec}(X)$  se corresponden con haces de ideales primos cuasicoherentes (Lema 3.2.7); y como  $X$  es **Mod**-afín, la categoría de haces de ideales primos cuasicoherentes de  $\mathcal{O}_X$  es equivalente a la categoría de ideales primos de  $\mathcal{O}_X(X)$  vía el functor de secciones, luego  $|\mathrm{Spec}(X)| \rightarrow |\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))|$  es un homeomorfismo (dos ideales isomorfos como subobjetos son iguales). En haces de anillos se tiene un isomorfismo porque, para uno de estos  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$ ,

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(X), \mathfrak{p}} = \lim_{x \in X} ((\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}_x}) \simeq \lim_{x \in X} (\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}} \simeq \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{p}};$$

donde  $(\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}}$  es la localización como  $\mathcal{O}_X(X)$ -módulo e invocamos que localizar conmuta con límites finitos. Recíprocamente, es claro que si el morfismo es un homeomorfismo, entonces es un isomorfismo, puesto que el argumento de haces de anillos que acabamos de exponer no depende de la afinidad; y esto implica que  $X$  es afín por la Proposición 4.1.12.  $\square$

Siguen resultados sobre haces coherentes en nuestro caso noetheriano:

**Lema 4.1.14.** [32, Sección 13, Proposición 17] Si  $X$  es afín y  $\mathcal{M}$  es cuasi-coherente,  $\mathcal{M}$  es coherente si y solo si  $\mathcal{M}(X)$  es un  $\mathcal{O}_X(X)$ -módulo finito generado. Es decir, se tiene una equivalencia  $\mathbf{Coh}(X) \simeq \mathbf{Mod}^{\text{fg}}(\mathcal{O}_X(X))$ .

Recordemos que, de la Proposición 3.1.14 y la Observación 3.1.15, se sigue que  $\mathbf{Coh}(X)$  es la subcategoría de objetos compactos de  $\mathbf{Qcoh}(X)$ . Se tiene el resultado esperado:

**Proposición 4.1.15.** [32, Sección 13, Proposición 18] Si  $X$  es esquemático,  $\mathbf{Qcoh}(X)$  es compactamente generada; es decir, todo módulo cuasicohérente es colímite filtrante de módulos coherentes.

## 4.2. La categoría esquemática

Resumimos ahora la versión «relativa» de la esquematicidad:

**Definición 4.2.1.** Sean  $X$  e  $Y$  Fr-espacios,  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo de espacios anillados  $\gamma_f: X \rightarrow X \times Y$  su gráfica. Se dice que  $f$  es *esquemático* si  $\mathbb{R}\gamma_{f*}\mathcal{O}_X \in D_{\text{qc}}(X \times Y)$ . Se dice que  $f$  es *localmente acíclico* si, además,  $R^i\gamma_{f*}\mathcal{O}_X = 0$  para todo  $i > 0$ .

*Observación 4.2.2.* Como en el caso de la Definición 4.1.6 de espacio esquemático, esta condición se reduce a que los cambios de base de la cohomología de  $\mathcal{O}_X$  en los abiertos  $U_x \cap f^{-1}(U_y)$  se comporten bien respecto a restricciones en  $X$  y en  $Y$ . Nótese además que un espacio  $X$  es esquemático si y solo si  $\text{Id}: X \rightarrow X$  es un morfismo esquemático; ídem para espacios semiseparados y morfismos localmente acíclicos.

Ser esquemático es claramente local tanto en el origen como en la llegada: si  $f: X \rightarrow Y$  es esquemático,  $f|_{U_x}: U_x \rightarrow Y$  es esquemático para todo  $x \in X$  y  $f|_{f^{-1}(U_y)}: f^{-1}(U_y) \rightarrow U_y$  es esquemático para todo  $y \in Y$ . En particular, como  $U_{f(x)} \subseteq f^{-1}(U_{f(x)})$ , se tiene que  $f_x: U_x \rightarrow U_{f(x)}$  es esquemático.

La propiedad más inmediata es que, si los espacios son esquemáticos, la esquematicidad queda caracterizada en términos de la propia  $f_*$ :

**Proposición 4.2.3.** [29, Theorems 5.5, 5.6] Si  $X$  es esquemático, un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es esquemático si y solo si «preserva cuasicohérence», es decir, si  $\mathbb{R}f_*\mathcal{M} \in D_{\text{qc}}(Y)$  para todo  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ .

*Observación 4.2.4.* Si  $X$  e  $Y$  son espacios esquemáticos, el producto  $X \times Y$  en la categoría de posets anillados también es esquemático. Lo análogo es cierto para la afinidad.

**Corolario 4.2.5.** [29, Corollary 5.7] Si  $X$  es esquemático, su diagonal  $\Delta: X \rightarrow X \times X$  es esquemática. Si  $f: X \rightarrow Y$  es esquemático entre espacios esquemáticos, la gráfica  $\gamma_f$  es esquemática.

**Proposición 4.2.6.** [29, Proposition 5.8] La composición de morfismos esquemáticos entre espacios esquemáticos es esquemática.

**Definición 4.2.7.** Diremos que un morfismo de posets anillados  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios esquemáticos es *afín* si  $f^{-1}(U_y)$  es afín para todo  $y \in Y$ .

En particular, es evidente que un espacio esquemático  $X$  es afín si y solo si el morfismo de proyección  $\pi: X \rightarrow (\star, \mathcal{O}_X(X))$  es afín —o si lo es su proyección a cualquier espacio esquemático puntual—. Esperaremos a disponer de más tecnología para probar propiedades de los morfismos afines de modo sistemático (Sección 7.4.1), así que baste por ahora observar que, como consecuencia de la Proposición 4.2.3:

**Lema 4.2.8.** Un morfismo afín  $f: X \rightarrow Y$  es esquemático si y solo si  $f_*\mathcal{M}$  es cuasicoherente para todo  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$  —esto es lo que en [32] se entiende por «morfismo afín»—. Un morfismo entre espacios afines es esquemático si y solo si es localmente acíclico.

**Corolario 4.2.9.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios esquemáticos es esquemático si y solo si  $f_x: U_x \rightarrow U_{f(x)}$  es localmente acíclico.

**Proposición 4.2.10.** [32, Section 5, Proposition 10] Todo morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios afines es afín.

Como en el caso de espacios, la esquematicidad de morfismos entre espacios esquemáticos puede caracterizarse explícitamente:

**Proposición 4.2.11.** [32, Section 5, Theorem 15] Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios esquemáticos es esquemático si y solo si para todo  $x \in X$  e  $y \geq f(x)$ , el morfismo inducido

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \prod_{z \in U_x \cap f^{-1}(U_y)} \mathcal{O}_{X,z}$$

induce un morfismo epiyectivo entre espectros. Esto es equivalente a que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

- 1) El abierto  $U_x \cap f^{-1}(U_y)$  es afín.
- 2) El morfismo  $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(U_x \cap f^{-1}(U_y))$  es isomorfismo.

Y la afinidad de morfismos esquemáticos entre espacios esquemáticos puede caracterizarse cohomológicamente:

**Proposición 4.2.12.** [29, Theorem 5.18] Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  esquemático entre espacios esquemáticos es afín si y solo si  $R^i f_* \mathcal{O}_X = 0$  para  $i > 0$  y  $f^* f_* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  es epiyectivo para todo  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ ; es decir, si todo módulo cuasicoherente está generado por sus secciones globales relativas. En este caso,  $R^i f_* \mathcal{M} = 0$  para  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$  e  $i > 0$ .

**Corolario 4.2.13.** [29, Propositions 5.22, 5.23] Un espacio esquemático  $X$  es semiseparado si y solo si su diagonal  $X \rightarrow X \times X$  es afín. Además, un morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  es localmente acíclico si y solo si su gráfica  $X \rightarrow X \times Y$  es afín.

Queda fijar una notación para la categoría esquemática:

**Definición 4.2.14.** Definimos la categoría esquemática (finita) como aquella cuyos objetos son los espacios esquemáticos finitos y cuyos morfismos son los morfismos esquemáticos. La denotamos **SchFin**.

*A partir de ahora y salvo que se indique explícitamente otra consideración, todos los posets anillados y morfismos que aparezcan serán esquemáticos.*

*Observación 4.2.15.* En términos del Capítulo 2, tenemos una inclusión fiel pero no plena  $\mathbf{SchFin} \subseteq \mathbf{CRing-data}$ . Cabe destacar que **SchFin** ya no es una categoría fibrada sobre **pos** —como sucede al considerar esquemas dentro de espacios anillados—, pero sí hereda la estructura 2-categorial que vimos en la Sección 2.2. En particular, estudiaremos la especialización de la construcción del cilindro al caso esquemático.

### 4.2.1. Modelos finitos de esquemas

Dado un esquema  $S$ , diremos que un recubrimiento abierto  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  de  $S$  es *localmente afín* si  $U^s = \bigcap_{s \in U_i} U_i$  son abiertos afines para todo  $s \in S$ .

**Proposición 4.2.16.** [30, Prop. 3.14] Un esquema  $S$  es *cuasicompacto* y *cuasiseparado* —«qc-qs»— si y solo si admite un recubrimiento finito localmente afín y si y solo si existe un morfismo continuo  $\pi: S \rightarrow X$  a un poset finito  $X$  tal que  $\pi^{-1}(U_x)$  es afín  $\forall x \in X$ .

*Demostración.* Observemos tan solo que si  $S$  es qc-qs, dado un recubrimiento finito afín  $\{U_i\}$  y un recubrimiento finito afín  $\{V_{ij}^k\}$  de cada intersección  $U_i \cap U_j$ , entonces obtenemos un recubrimiento localmente afín  $\{U_i, V_{ij}^k\}_{i,j,k}$ , como puede comprobarse fácilmente.

Dado un recubrimiento localmente afín, el modelo finito asociado que construíamos en la Sección 1.5 verifica las condiciones del enunciado:

$$\pi: S \rightarrow (X, \pi_* \mathcal{O}_S).$$

Por último, dada  $\pi$  como en el enunciado, obtenemos un recubrimiento finito localmente afín  $\{\pi^{-1}(U_x)\}_{x \in X}$ , lo que implica la cuasicompacidad y cuasiseparabilidad.  $\square$

En lo que resta de memoria, **Sch** denotará la categoría de esquemas qc-qs, en particular siempre noetherianos y tales que los morfismos entre ellos son cuasicompactos y cuasiseparados. La noetherianidad justifica que solo estemos considerando posets anillados puntualmente noetherianos, mientras que la cuasicompacidad justifica que solo consideremos posets finitos.

**Proposición 4.2.17.** Dado un esquema  $S$  un esquema qc-qs,  $\{U_i\}$  un recubrimiento localmente afín y  $\pi: S \rightarrow X$  el modelo finito asociado:

- $X$  es esquemático y  $(\pi^* \dashv \pi_*): \mathbf{Qcoh}(S) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Qcoh}(X)$  es una equivalencia. Además,  $X$  es semiseparado si y solo si  $S$  lo es, i.e. si la diagonal de  $S$  es afín.
- $X$  es afín si y solo si  $S$  es afín.
- Hay un isomorfismo natural  $\mathrm{Spec}(X) \simeq S$ .

*Demostración.* Obsérvese que  $\pi$  es epiyectiva. La primera parte se sigue de que  $\mathcal{O}_{X,\pi(s)} = \mathcal{O}_S(U^s)$  y  $\mathcal{O}_X(U_{\pi(s)} \cap U_{\pi(s')}) = \mathcal{O}_S(U^s \cap U^{s'})$  para  $s, s' \in S$  y de que los anillos de los abiertos afines de cualquier esquema cumplen las condiciones de compatibilidad de la esquematicidad. La equivalencia de categorías del enunciado se sigue de que los  $U^s$  son afines, luego  $\mathbf{Qcoh}(U^s) \simeq \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_S(U^s)) \simeq \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{X,x})$  y de descenso de la categoría de cuasicohérentes para la topología de Zariski —para una versión más directa, véase [30, Theorem 3.15]—. La segunda parte se sigue de que  $S$  es afín si y solo si  $\mathbf{Qcoh}(S) \simeq \mathbf{Qcoh}(\mathcal{O}_S(S))$  —o, si se quiere, de cualquiera de los criterios de afinidad ya introducidos—. La última parte es *recollement* de esquemas para la topología de Zariski; el isomorfismo viene inducido por las inclusiones  $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S(U^s)) \simeq U^s \hookrightarrow S$ .  $\square$

**Proposición 4.2.18.** Sea  $g: S \rightarrow T$  un morfismo de esquemas y denotemos  $f: X \rightarrow Y$  al morfismo entre modelos finitos asociado a ciertos recubrimientos localmente afines, se tiene:

- $f$  es esquemático; y localmente acíclico si y solo si  $R^i g_* \mathcal{O}_S = 0 \ \forall i > 0$ .
- $f$  es afín si y solo si  $g$  es afín.

A la hora de extender propiedades de esquemas y morfismos de esquemas al caso esquemático será importante determinar si las definiciones son compatibles con este «paso al modelo finito» cuando los espacios y morfismos provengan de esquemas.

### 4.3. Caracterizaciones espectrales

La condición de esquematicidad produce un comportamiento especialmente deseable del functor  $\mathrm{Spec}$  y, de hecho, es posible caracterizar los espacios pseudoesquemáticos que son esquemáticos en términos de su imagen vía este functor. Recordemos que (ecuación 3.2.1), dado un poset anillado  $X$ , los puntos del espacio topológico subyacente  $|\mathrm{Spec}(X)|$  son clases de parejas  $(x, \mathfrak{p}_x)$  respecto a la relación de equivalencia *generada* por

$$(x, \mathfrak{p}_x) \sim (y, \mathfrak{q}_y) \Leftrightarrow \exists z \geq x, y \text{ y } \alpha_z \subseteq \mathcal{O}_{X,z} \text{ primo} \\ \text{tales que } \mathfrak{p}_x = r_{xz}^{-1}(\alpha_z) \text{ y } \mathfrak{q}_y = r_{yz}^{-1}(\alpha_z).$$

Obsérvese que  $\sim$  es una relación binaria reflexiva y simétrica.

**Lema 4.3.1.** Si  $X$  es esquemático y se tienen parejas  $(x, \mathfrak{p}_x)$  y  $(y, \mathfrak{q}_y)$  tales que existe algún  $t \leq x, y$  con  $r_{tx}^{-1}(\mathfrak{p}_x) = r_{ty}^{-1}(\mathfrak{q}_y)$ , entonces  $(x, \mathfrak{p}_x) \sim (y, \mathfrak{q}_y)$ .

*Demostración.* Por hipótesis y la Proposición 4.1.10,  $\mathcal{O}_X(U_x \cap U_y) \neq 0$ , luego  $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ ; de la misma caracterización se tiene un morfismo fielmente plano

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,t}} \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \prod_{z \geq x,y} \mathcal{O}_{X,z},$$

luego existen  $z \geq x, y$  y  $\alpha_z \subseteq \mathcal{O}_{X,z}$  con  $r_{xz}^{-1}(\alpha_z) = \mathfrak{p}_x$  y  $r_{yz}^{-1}(\alpha_z) = \mathfrak{q}_y$ , lo que prueba el enunciado.  $\square$

**Lema 4.3.2.** Si  $X$  es pseudoesquemático y se tiene  $(x, \mathfrak{p}_x) \sim (x, \mathfrak{q}_x)$ , entonces  $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{q}_x$ .

*Demostración.* Se sigue del Lema B.2.14.  $\square$

**Proposición 4.3.3.** Si  $X$  es un espacio esquemático,  $\sim$  es una relación de equivalencia. En particular, todo punto  $[(x, \mathfrak{p}_x)] \in |\mathrm{Spec}(X)|$  tiene asociado un único  $(z, \alpha_z)$  con  $z$  maximal —respecto al orden de  $X$ — entre los posible representantes.

*Demostración.* La transitividad se sigue del Lema 4.3.1. La segunda parte de la finitud de  $|X|$  y de que, por la propia definición de esta relación de equivalencia, para cada dos representantes del punto de  $|\mathrm{Spec}(X)|$  podemos encontrar un tercero cuya componente topológica es mayor o igual que ambos. Nótese que el ideal primo correspondiente a dicho representante es único por el Lema 4.3.2.  $\square$

**Corolario 4.3.4.** Si  $X$  es esquemático, para todo haz de ideales primos cuasicohérente  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$ , el cociente  $\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}$  está soportado en un cerrado irreducible de  $|X|$ .

*Demostración.* Por la correspondencia entre puntos de  $|\mathrm{Spec}(X)|$  y haces de ideales primos cuasicohérentes de  $\mathcal{O}_X$  dada en el Lema 3.2.7, decir que  $[(x, \mathfrak{p}_x)]$  tiene un único representante maximal es equivalente a decir que el cerrado  $\{x \in X : \mathfrak{p}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$  es irreducible.  $\square$

**Definición 4.3.5.** Un punto  $\mathbf{x} = [(x, \mathfrak{p}_x)] \in |\mathrm{Spec}(X)|$  es un *punto esquemático* de  $X$ .

Y la Proposición 4.3.3 nos permite definir:

**Definición 4.3.6.** Dado  $X$  un espacio esquemático y  $\mathbf{x}$  un punto esquemático, se dice que  $\mathbf{x}$  *centra* en  $x$  (o que  $x$  es el *centro* de  $\mathbf{x}$ ) si  $(x, \mathfrak{p}_x)$  es la pareja representante maximal de  $\mathbf{x}$  para cierto  $\mathfrak{p}_x$ ; o equivalentemente, si para el haz  $\mathfrak{p}^{\mathbf{x}} \subseteq \mathcal{O}_X$  asociado a  $\mathbf{x}$ ,  $\mathrm{sop}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}^{\mathbf{x}}) = C_x$ .

**Corolario 4.3.7.** Sea  $X$  un espacio esquemático. Se tiene definida una aplicación *centro*

$$\pi_X : |\mathrm{Spec}(X)| \rightarrow |X|,$$

donde  $\pi_X(\mathbf{x})$  es el centro de  $\mathbf{x}$ . Además, si  $\pi : \coprod_{x \in X} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X$  tal que  $(x, \mathfrak{p}_x) \mapsto x$  es el morfismo natural, se tiene un diagrama (omitiendo ya  $|-|$  de la notación)

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in X} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) & \xrightarrow{\pi} & X \\ \rho \downarrow & \nearrow \pi_X & \\ \mathrm{Spec}(X) & & \end{array}$$

donde  $\rho$  es el paso al cociente y tal que  $\pi \leq \pi_X \circ \rho$ .

*Observación 4.3.8.* Dado  $X$  esquemático e  $i_x : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \mathrm{Spec}(X)$  la inclusión natural para cada  $x \in X$ , el subconjunto

$$i_x^{-1}(\pi_X^{-1}(x)) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) : (x, \mathfrak{p}) \text{ centra en } x\} \subseteq \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$$

es cerrado en la topología de las especializaciones, aunque  $\{x\} \subseteq X$  no sea cerrado.

En general, la aplicación  $\pi_X$  no es continua. Esto se debe a que, por defecto, hemos considerado las topologías de Zariski en cada  $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ . Remitimos a la Observación 3.2.4 para una discusión relacionada. Se tiene:

**Proposición 4.3.9.** Si  $X$  tiene morfismos de restricción de tipo finito, entonces  $\mathrm{Spec}(X)$  es un esquema qc-qs y la aplicación centro  $\pi_X$  es continua. En estas condiciones,  $\pi_X$  define un morfismo de espacios anillados

$\text{Spec}(X) \rightarrow X$  con  $\pi_X^{-1}(U_x)$  afín para todo  $x \in X$ . El recíproco es cierto si suponemos que  $\pi_X^{-1}(U_x) \neq \emptyset$  para todo  $x \in X$  —por ejemplo, si es epiyectiva—. De hecho, basta la hipótesis sobre las restricciones de  $X$  para que la imagen  $\text{Im}(\pi_X) \subseteq X$  sea el modelo finito de  $\text{Spec}(X)$  respecto a  $\{\pi_X^{-1}(U_x)\}_{x \in X}$ .

*Demostración.* Por la Proposición B.2.22,  $X$  tiene restricciones de tipo finito si y solo si los morfismos  $\text{Spec}(r_{xy}): \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,y}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$  son inmersiones abiertas para todo  $x \leq y$ ; luego en estas condiciones  $\text{Spec}(X)$  es un esquema por *recollement*, dotado además de un recubrimiento afín dado por los  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$  con  $\pi_X^{-1}(U_x) \simeq \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ .

Respecto a la continuidad de la proyección, basta ver que las antiimágenes  $\pi_X^{-1}(U_x)$  son abiertas, i.e. que para todo  $i_y: \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,y}) \rightarrow \text{Spec}(X)$  el subconjunto  $i_y^{-1}(\pi_X^{-1}(U_x))$  es abierto. En efecto,

$$i_y^{-1}(\pi_X^{-1}(U_x)) = \{\mathfrak{p}_y \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,y}) : [(y, \mathfrak{p}_y)] \text{ centra en } z \geq x\}.$$

Si  $y \geq x$ , es claro que  $i_y^{-1}(\pi_X^{-1}(U_x)) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,y})$ , luego hemos terminado. En general,

$$i_y^{-1}(\pi_X^{-1}(U_x)) = \cup_{z \geq x, y} \text{Spec}(r_{yz})(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,z})),$$

que es un abierto de Zariski de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,y})$  por hipótesis. Nótese que los subesquemas abiertos  $\pi_X^{-1}(U_x)$  son afines porque se identifican con la imagen de la inmersión abierta  $i_x: \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \text{Spec}(X)$  para  $x \in X$ . De hecho, el recubrimiento  $\{\pi_X^{-1}(U_x)\}$  es localmente afín con  $U^{\mathbf{x}} = \pi_X^{-1}(U_{\pi_X(\mathbf{x})})$  para cada  $\mathbf{x} \in \text{Spec}(X)$ . El morfismo de haces de anillos de  $\pi_X$  está definido en este recubrimiento afín por la identidad

$$(\pi_X)_{\#}(U_x): \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(X)}(i_x(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))) \simeq \mathcal{O}_{X,x}.$$

Si  $\pi_X^{-1}(U_x) \neq \emptyset$  se tiene el recíproco por corresponderse los morfismos de restricción con restricciones entre abiertos afines de  $\text{Spec}(X)$ . La última parte no es más que la Proposición 4.2.16.  $\square$

*Observación 4.3.10.* Nótese que existen espacios finitos  $X$  tales que  $\text{Spec}(X)$  es un esquema y  $\pi_X$  no es continuo. Como ejemplo genérico nos sirve cualquier espacio esquemático afín  $X$  con  $|X| = \{0 < 1\}$  y  $\mathcal{O}_{X,1}$  una localización en un primo de  $\mathcal{O}_{X,0}$ . Esto puede entenderse como que  $X$  es el «modelo finito» respecto a un recubrimiento que no es por abiertos de Zariski.

Sin embargo  $\pi_X$  sí es continua en la topología de las especializaciones.

**Proposición 4.3.11.** Si  $X$  es esquemático y  $\text{Spec}(X)_\leq$  denota a  $\text{Spec}(X)$  equipado con su topología de las especializaciones (Observación 1.1.9), se tiene que  $\pi_X: \text{Spec}(X)_\leq \rightarrow X$  es continua.

*Demostración.* Basta probar que es monótona. En términos de haces de ideales, dos puntos  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$  de  $\text{Spec}(X)$  verifican  $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q}$  si y solo si  $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ ; luego basta probar que si  $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ , entonces  $\text{sop}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}) \subseteq \text{sop}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{q})$ , lo cual es cierto en general.  $\square$

La aplicación centro es compatible con  $\text{Spec}$  —C. f. Apéndice B.4—:

**Proposición 4.3.12.** Si  $X$  es esquemático y  $U \subseteq X$  es un abierto, entonces la imagen de  $\text{Spec}(U) \rightarrow \text{Spec}(X)$  es un subespacio topológico de  $\text{Spec}(X)$  y  $\text{Spec}(U) \simeq \pi_X^{-1}(U)$  como espacios anillados, entendiendo el segundo con el haz estructural inducido.

*Demostración.* La primera parte es [32, Section 13, Proposition 15]: es consecuencia del Lema 3.2.7 y d) («Teorema de extensión») de la Proposición 4.1.11. Para la segunda parte: como conjuntos, es claro que los puntos  $\mathbf{x}$  que centran en algún punto de  $U$  son exactamente los puntos de  $\text{Spec}(U)$ ; y esto define un homeomorfismo por lo anterior. Queda comprobar que  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(U)} \simeq \mathcal{O}_{\text{Spec}(X)|_{\text{Spec}(U)}}$ , pero esto es [32, Section 13, Theorem 27].  $\square$

*Observación 4.3.13.* En vista de la Proposición 4.3.12, admitiendo secciones en subespacios no abiertos, el morfismo de haces  $(\pi_X)_\# : \mathcal{O}_X \rightarrow \pi_{X*} \mathcal{O}_{\text{Spec}(X)}$  define, en cada  $x \in X$ , el morfismo identidad

$$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(X)}(\pi_X^{-1}(U_x)) \simeq \widetilde{\mathcal{O}_{X,x}}(\pi_X^{-1}(U_x)) \simeq \mathcal{O}_{X,x}.$$

En lo relativo al haz estructural, podemos añadir:

**Lema 4.3.14.** Si  $X$  es pseudoesquemático, para todo  $y \leq x$  y  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$  se tiene entonces  $(\mathcal{O}_{X,y})_{r_{yx}^{-1}(\mathfrak{p}_x)} \simeq (\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}_x}$ .

*Demostración.* Es el Teorema B.2.19.  $\square$

**Lema 4.3.15.** Si  $X$  es esquemático y  $\mathbf{x}$  un punto esquemático centrado en  $x$ , se tiene que

$$\mathcal{O}_{\text{Spec}(X),\mathbf{x}} \simeq (\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}_x}.$$

*Demostración.* Como localizar conmuta con límites finitos, límites finitos conmutan con colímites filtrantes en categorías abelianas de Grothendieck, para cualquier  $y \in Y$  e  $i_y: \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,y}) \rightarrow \text{Spec}(X)$  es  $i_y^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_x$ , y la topología en  $\text{Spec}(X)$  es final para  $\coprod_y i_y$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{Spec}(X),\mathfrak{p}} &\simeq \text{colim}_{\mathfrak{p} \in U} (\lim_{y \in X} i_{y*} \widetilde{\mathcal{O}_{X,y}}(U)) \simeq \\ &\simeq \lim_{y \in X} \text{colim}_{\mathfrak{p} \in U} \widetilde{\mathcal{O}_{X,y}}(i_y^{-1}(U)) \simeq \lim_{y \in X} (\mathcal{O}_{X,y})_{\mathfrak{p}_y}. \end{aligned}$$

Pero por el Lema 4.3.14,  $(\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}_x} \simeq (\mathcal{O}_{X,y})_{\mathfrak{p}_y}$  para todo  $y \leq x$ , de donde se obtiene que  $\lim_{y \in X} (\mathcal{O}_{X,y})_{\mathfrak{p}_y} \simeq (\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}_x}$ .  $\square$

*Notación 4.3.16.* Dado un punto esquemático  $\mathbf{x} = [(x, \mathfrak{p}_x)]$ , denotamos la fibra esquemática de haz  $\mathcal{O}_X$  en  $\mathbf{x}$  como

$$\mathcal{O}_{X,\mathbf{x}} = \mathcal{O}_{\text{Spec}(X),\mathbf{x}} \simeq (\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}_x}.$$

Como ya vimos en el Lema 1.4.3, podemos equipar a  $\text{Spec}(X)_{\leq}$  con el haz estructural definido por imagen inversa vía  $\text{Spec}(X)_{\leq} \rightarrow \text{Spec}(X)$ . Como  $\text{Spec}(X)_{\leq}$  es un A-espacio, basta dar su valor en cada punto esquemático  $\mathbf{x}$  —y los morfismos de restricción obvios—. Por el Lema 4.3.15,

$$\mathcal{O}_{\text{Spec}(X)_{\leq},\mathbf{x}} = \mathcal{O}_{X,\mathbf{x}}.$$

**Corolario 4.3.17.** Si  $X$  es un espacio esquemático, se tiene un morfismo de espacios anillados  $\pi_X: \text{Spec}(X)_{\leq} \rightarrow X$ . Es más, si  $X$  tiene restricciones abiertas, este morfismo es la imagen del morfismo de la Proposición 4.3.9 por el functor del Lema 1.4.3.

*Demostración.* Por la Proposición 4.3.11,  $\pi_X: \text{Spec}(X)_{\leq} \rightarrow X$  es continuo. El morfismo de haces de anillos queda determinado por las localizaciones

$$(\pi_X^\sharp)_{\mathbf{x}}: \mathcal{O}_{X,\pi_X(\mathbf{x})} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\mathbf{x}}$$

para cada  $\mathbf{x} \in \text{Spec}(X)$ .  $\square$

*Observación 4.3.18.* A partir de ahora, siempre que consideremos morfismos de espacios anillados que involucren a  $\pi_X$  —como haremos en la Sección 5.3—, asumiremos tácitamente que lo hacemos respecto a esta topología de las especializaciones. Como tal, omitiremos el  $(-)_{\leq}$  de la notación.

### Caracterización espectral de los espacios esquemáticos

**Teorema 4.3.19.** Sea  $X$  un espacio pseudoesquemático. Se verifica que  $X$  es esquemático si y solo si para todo haz de ideales primos cuasicohérente  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$ , el cociente  $\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}$  está soportado en un cerrado irreducible. Diremos en este caso que «la aplicación centro  $\pi_X: \text{Spec}(X) \rightarrow X$  está definida».

*Demostración.* El directo es el Corolario 4.3.7. Por la Proposición 4.1.10, basta ver que, dados  $x, y \geq t$ , el morfismo

$$\coprod_{z \geq x, y} \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, y}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\mathcal{O}_{X, t}} \mathcal{O}_{X, y})$$

es epiyectivo. Pero en efecto, dado un primo  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\mathcal{O}_{X, t}} \mathcal{O}_{X, y}$  y denotando por  $\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y$  y  $\mathfrak{p}_t$  sus restricciones a  $\mathcal{O}_{X, x}, \mathcal{O}_{X, y}$  y algún  $\mathcal{O}_{X, t}$ , tenemos definido un punto  $[(x, \mathfrak{p}_x)] = [(y, \mathfrak{p}_y)]$  de  $\text{Spec}(X)$ . Por hipótesis, sabemos que existe un representante maximal  $(z, \mathfrak{p}_z)$  con  $z \geq x, y$  tal que, por construcción,  $(z, \mathfrak{p}_z)$  tiene imagen  $\mathfrak{p}$  vía el morfismo deseado.  $\square$

*Observación 4.3.20.* Nótese que este resultado extiende el caso topológico:  $(X, A)$  con  $A$  haz constante es esquemático si y solo si cada componente conexa de  $|X|$  es irreducible.

*Observación 4.3.21.* Volviendo a la Observación 3.2.5 sobre el functor  $(-)^{\text{loc}}$  definido en [13, Section 2.2], para todo  $X$  hay un morfismo  $X^{\text{loc}} \rightarrow \text{Spec}(X)$ . Es más, obsérvese que, aunque la aplicación centro  $\pi_X$  no es continua en general, siempre se tienen definidos morfismos en las fibras de los haces de anillos  $(\pi_X^{-1}\mathcal{O}_X)_{\mathbf{x}} = \mathcal{O}_{X, \pi_X(\mathbf{x})} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(X), \mathbf{x}}$  que son localizaciones en ideales primos, lo cual puede entenderse en el contexto de [13, Definition 1]. Puede plantearse caracterizar la esquematicidad en estos términos sin requerir *a priori* la condición de pseudoesquemático: ¿cuándo  $X^{\text{loc}} \rightarrow X$  factoriza por  $\text{Spec}(X)$ ?

### Caracterización espectral de los morfismos esquemáticos

*Notación 4.3.22.* Dado un morfismo de espacios anillados  $f: X \rightarrow Y$  entre dos espacios esquemáticos y  $\mathbf{x} = [(x, \mathfrak{p}_x)]$  un punto esquemático de  $X$ , denotamos a su imagen  $\text{Spec}(f)(\mathbf{x})$  por  $f(\mathbf{x})$ , que es el punto esquemático  $[(f(x), (f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{p}_x))]$ .

En general, la pareja imagen  $(f(x), (f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{p}_x))$  de un punto  $\mathbf{x} = [(x, \mathfrak{p}_x)]$  no está centrada en  $f(x)$ . Sino que se tiene:

**Lema 4.3.23.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo de espacios anillados entre espacios esquemáticos. Se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(X) & \xrightarrow{\mathrm{Spec}(f)} & \mathrm{Spec}(Y) \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

verificando que  $f \circ \pi_X \leq \pi_Y \circ \mathrm{Spec}(f)$  con el orden inducido por el de  $Y$ . Es más, para todo  $\mathbf{x} \in \mathrm{Spec}(X)$  centrado en  $x$  y siendo  $y \geq x$  centro de  $f(\mathbf{x})$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,y} & & \\ & \searrow \mathrm{Spec}(f)_{\mathbf{x}}^\# \circ \varphi & \\ & & \mathcal{O}_{X,\mathbf{x}} \\ & \nearrow r_{f(x)y} & \\ \mathcal{O}_{X,f(x)} & & \end{array}$$

(con  $\varphi: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,f(x)}$  y  $\psi: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\mathbf{x}}$  los morfismos de localización) es conmutativo.

*Demostración.* Consecuencia de la discusión hasta el momento. □

**Definición 4.3.24.** Un morfismo de espacios anillados  $f: X \rightarrow Y$  entre dos espacios esquemáticos se dice *central* si, para todo punto esquemático  $\mathbf{x}$  centrado en  $x \in X$ , su imagen  $f(\mathbf{x})$  está centrada en  $f(x) \in Y$ . En otras palabras,  $f$  es central si y solo si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(X) & \xrightarrow{\mathrm{Spec}(f)} & \mathrm{Spec}(Y) \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

es conmutativo.

*Ejemplo 4.3.25.* Sea  $g: S \rightarrow T$  un morfismo de esquemas y  $f: X \rightarrow Y$  el morfismo inducido entre dos modelos finitos (respecto a sendos recubrimientos adecuados), entonces es central y esquemático.

La noción de centralidad caracteriza «homotópicamente» la de esquematicidad.

**Teorema 4.3.26.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios esquemáticos. Un morfismo de espacios anillados  $f: X \rightarrow Y$  es esquemático si y solo si es central.

*Demostración.* Por la Proposición 4.2.11,  $f$  es esquemático si y solo si, para todos los  $x$  e  $y \geq f(x)$ , el morfismo

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \prod_{z \in U_x \cap f^{-1}(U_y)} \mathcal{O}_{X,z}$$

induce una epiyección entre espectros; probemos que esto es equivalente a la centralidad. En efecto, sea  $(x, \mathfrak{p})$  la pareja representante maximal de  $\mathfrak{x}$  y denotemos  $y = f(x)$  y  $\mathfrak{q} = (f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{p})$ . Observemos que los ideales primos de  $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{Y,y}$  son los del producto fibrado conjuntístico de espectros (Proposición B.2.12). Si  $f$  esquemático y  $f(\mathfrak{x})$  no estuviese centrado en  $y$ , entonces  $\mathfrak{x}$  no estaría centrado en  $x$ , puesto que existiría un primo en  $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{Y,y}$  que provendría de un primo de  $\mathcal{O}_{X,z}$  para algún punto  $x \in U_x \cap f^{-1}(U_y)$  por la hipótesis. Recíprocamente, si  $f$  es central, dado un primo  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_x, \mathfrak{q}_y) \subseteq \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{Y,y}$  (con  $\mathfrak{q}_y$  restringiendo a  $(f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{p}_x)$ ), por esquematicidad de  $Y$  sabemos que existe un  $y' \geq y$  maximal y un primo  $\mathfrak{q}_{y'} \subseteq \mathcal{O}_{Y,y'}$  y tal que  $[(y', \mathfrak{q}_{y'})] = [(y, \mathfrak{q}_y)] = f([(x, \mathfrak{p}_x)])$ ; lo que por la hipótesis de centralidad implica que  $\mathfrak{x} = [(x, \mathfrak{p}_x)]$  está centrado en algún  $z \geq x$  con  $f(z) = y' \geq y$ . Esto prueba la epiyectividad del morfismo entre espectros que deseamos.  $\square$

*Ejemplo 4.3.27.* Volviendo de nuevo al «caso topológico». Un morfismo  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  con  $A$  y  $B$  haces constantes y siendo ambos espacios esquemáticos, luego topológicamente irreducibles y afines —Observación 4.1.7—, es un morfismo esquemático si  $|f|$  envía el punto genérico de  $|X|$  al punto genérico de  $|Y|$ .

## 4.4. Propiedades categoriales

Por definición, **SchFin** es una subcategoría fiel pero no plena de la categoría de posets anillados **CRing-data**.

**Proposición 4.4.1.** La categoría **SchFin** tiene coproductos finitos y tanto la inclusión  $\mathbf{SchFin} \subseteq \mathbf{CRing-data}$  como el functor  $\text{Spec } \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{LRS}$  los preservan.

*Demostración.* Es cierto para **CRing-datos** y la esquematicidad se preserva trivialmente por coproductos.  $\square$

**Proposición 4.4.2.** [29, Theorem 5.27] La categoría **SchFin** tiene productos fibrados finitos y la inclusión natural  $\mathbf{SchFin} \subseteq \mathbf{CRing-data}$  los preserva. Además, si  $f: X \rightarrow Z$  y  $g: Y \rightarrow Z$  son afines,  $\pi_*: X \times_Z Y \rightarrow Z$  es afín y  $\pi_* \mathcal{O}_{X \times_Z Y} \simeq f_* \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} g_* \mathcal{O}_Y$ .

**Corolario 4.4.3.** [29, Corollary 5.28] Si  $f: X \rightarrow Y$  es afín e  $Y' \rightarrow Y$  es un morfismo cualquiera,  $f': Y' \times_Y X \rightarrow Y'$  es afín. Además, si  $\mathcal{O}_Y \simeq f_* \mathcal{O}_X$ , se tiene  $\mathcal{O}_{Y'} \simeq f'_* \mathcal{O}_{Y' \times_Y X}$ .

**Proposición 4.4.4.** El functor  $\text{Spec}: \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{LRS}$  preserva productos fibrados.

*Demostración.* Sean  $X, Y \rightarrow Z$  esquemáticos y  $X \times_Z Y \rightarrow Z$  su producto fibrado. Hay un morfismo natural de espacios localmente anillados

$$\psi: \text{Spec}(X \times_Z Y) \rightarrow \text{Spec}(X) \times_{\text{Spec}(Z)} \text{Spec}(Y)$$

sobre  $\text{Spec}(Z)$ . En primer lugar, si  $X, Y, Z$  son afines con secciones globales  $A, B$  y  $C$  respectivamente, su producto fibrado es afín con secciones globales  $A \otimes_C B$ , y por tanto

$$\text{Spec}(X \times_Z Y) \simeq \text{Spec}(A \otimes_C B) \simeq \text{Spec}(X) \times_{\text{Spec}(Z)} \text{Spec}(Y)$$

como queríamos.

En general, veamos que  $\psi$  es biyectivo. Según [14, I.3.4.7] —véase también la introducción de [13]—, un punto conjuntístico de  $\text{Spec}(X \times_Y Z)$  se identifica con una pareja  $((x, z, y), \alpha)$  con  $x, y \mapsto z$  definiendo un punto del producto fibrado topológico y  $\alpha \subseteq \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Z,z}} \mathcal{O}_{Y,y}$  un primo, que

viene determinado por una cuaterna  $(\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_y; \beta)$  con  $\mathfrak{p}_x \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ , lo análogo para  $\mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z$ ; y  $\beta \subseteq \kappa(\mathbf{x}) \otimes_{\kappa(\mathbf{z})} \kappa(\mathbf{y})$ , donde  $\mathbf{x} = [(x, \mathfrak{p}_x)]$  y lo análogo para  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ . El morfismo envía esta cuaterna al punto dado por  $((\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}), \beta) \in |\text{Spec}(X) \times_{\text{Spec}(Z)} \text{Spec}(Y)|$ .

Para la inyectividad: dados  $((x', z', y'), \alpha')$ ,  $((x'', z'', y''), \alpha'')$  con la misma imagen, se tiene que  $\alpha' = \alpha''$  porque

$$h: \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Z,z}} \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \kappa(\mathbf{x}) \otimes_{\kappa(\mathbf{z})} \kappa(\mathbf{y})$$

es un epimorfismo de anillos verificando  $\alpha' = h^{-1}(\beta') = h^{-1}(\beta'') = \alpha''$ . Además, como los puntos y respectivos ideales primos que componen  $\alpha$  (con las notaciones recién introducidas) determinan los mismos puntos esquemáticos, sabemos que existen  $x, y, z$  con  $x \geq x', x''$ , ídem para  $y, z$ ; y primos  $\mathfrak{p}_x$  con  $\mathfrak{p}_{x'} = r_{x'x}^{-1}(\mathfrak{p}_x)$  y  $\mathfrak{p}_{x''} = r_{x''x}^{-1}(\mathfrak{p}_x)$ , ídem para  $y, z$ . Para ver que estos determinan el mismo punto esquemático de  $\text{Spec}(X \times_Z Y)$  solo queda comprobar que  $(x, z, y) \in |X \times_Z Y|$ , i.e.  $x, y \mapsto z$  vía los morfismos; pero esto es consecuencia inmediata de la esquematicidad, pues  $[(x, \mathfrak{p}_x)], [(y, \mathfrak{p}_y)] \mapsto [(z, \mathfrak{p}_z)]$  por construcción y todo morfismo esquemático es central (Teorema 4.3.26).

Para la epiyectividad: sea  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \beta) \in |\text{Spec}(X) \times_{\text{Spec}(Z)} \text{Spec}(Y)|$ , donde  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  tienen imagen  $\mathbf{z}$  y donde  $\beta \subseteq \kappa(\mathbf{x}) \otimes_{\kappa(\mathbf{z})} \kappa(\mathbf{y})$  es un primo. El punto antiimagen correspondiente es  $(x, y, z, \alpha)$  con  $x, y, z$  los correspondientes puntos en que centran  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$ , y  $\beta = h^{-1}(\alpha)$ .

El isomorfismo de espacios (localmente) anillados se tiene porque disponemos de un recubrimiento afín  $U_{(x,y)} \xrightarrow{\sim} U_x \times_{U_z} U_y$  para  $(x, y) \in |X \times_Z Y|$  con  $\psi^{-1}(U_x \times_{U_z} U_y) = U_{(x,y)}$ ; y en este recubrimiento se inducen isomorfismos de anillos por el caso afín ya mencionado —Véase la Proposición 4.3.12—, lo que implica que en las fibras de los haces se tienen isomorfismos y prueba el resultado.  $\square$

*Observación 4.4.5.* Las Proposiciones 4.4.2 y 4.4.4 nos dicen que los productos fibrados en la categoría esquemática se computan como productos de espacios anillados: productos topológicos en los conjuntos subyacentes y tensoriales en los anillos; pero que vía el Spec obtenemos productos de espacios localmente anillados, lo cual relaciona ambas, *a priori* muy diferentes construcciones. En un espíritu similar, puede consultarse [13].

Otra observación interesante es que *la categoría esquemática es la mayor subcategoría de posets finitos anillados con «buen comportamiento» para los módulos cuasicoherentes:*

**Proposición 4.4.6.** [29, Theorem 5.30] Sea  $\mathfrak{C} \subseteq \mathbf{CRing}\text{-data}$  subcategoría fiel de modo que: 1) para todo morfismo  $f: X \rightarrow Y$  en  $\mathfrak{C}$ ,  $(\mathbb{R}f_*)|_{\mathbf{Qcoh}(X)}$  valora en  $D_{qc}(Y)$ ; 2)  $\mathfrak{C}$  es cerrada por productos fibrados y gráficas. Entonces  $\mathfrak{C} \subseteq \mathbf{SchFin}$ .

*Demostración.* Si  $f$  es un morfismo en  $\mathfrak{C}$ , su gráfica también por 2), luego  $f$  es esquemático. En particular, la identidad de cualquier  $X \in \mathfrak{C}$  es esquemática, luego  $X$  es esquemático.  $\square$

## Capítulo 5

# Inmersiones y localización

En este capítulo introducimos las herramientas esenciales para comenzar a trabajar con la categoría esquemática de modo geométrico. Determinamos cuándo un morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  induce un isomorfismo entre sus espectros, lo cual definirá una localización de la categoría esquemática —en el sentido de cocientes de Verdier— y permitirá considerar que nuestro verdadero objeto de estudio son los espectros, independientemente de la presentación particular determinada por el poset —este es, en realidad, un tema muy delicado cuyo tratamiento parcial relegamos al Apéndice B.4—. En el proceso de determinar estos morfismos, obtenemos también los análogos en el contexto esquemático para las nociones de inmersión abierta de esquemas y de morfismo fielmente plano, viendo cómo se relacionan entre ellas.

Haremos un paréntesis para ver cómo, para ciertos tipos de espacios esquemáticos, los morfismos en la localización que hemos definido están representados de modo único. Lo haremos en dos casos: para estudiar puntos y morfismos desde anillos de valoración discreta, pero el método puede ser más general.

A continuación, tomaremos la noción de inmersión abierta para el caso esquemático, la «inmersión plana», y veremos cómo la construcción del cilindro de un **SchFin**-codato con inmersiones planas por restricciones mantiene la esquematicidad bajo ciertas condiciones. Esta construcción siempre funcionará en el caso de recubrimientos y nos permitirá definir un análogo al «*recollement* de esquemas por inmersiones abiertas». Por último y

en relación con esto, estudiaremos algunas propiedades de la topología de Grothendieck que definen las inmersiones planas y de su topos correspondiente, así como algunas aplicaciones de este lenguaje a ciertos problemas de descenso que aparecerán más adelante.

La Sección 5.1 es, en inicio, debida a Fernando Sancho, quien nos comunicó la noción de inmersión plana en determinado momento del desarrollo de esta tesis; siendo nuestra principal contribución completar los últimos detalles de la caracterización del Teorema 5.1.9. La localización de la Sección 5.2 fue introducida en [29], pero el modo de trabajar con ella y los resultados u observaciones que probamos son nuevos. El resto del Capítulo —cilindros, aplicaciones a descenso y estudio de la topología de las inmersiones planas— es original.

## 5.1. Los tres protagonistas

Si pensamos en la categoría esquemática como una forma de codificar datos de construcción para ciertos espacios localmente anillados, uno de los problemas fundamentales que surgen es clasificar cuándo dos espacios esquemáticos «construyen» espacios isomorfos; en un caso más sencillo, cuándo dos modelos finitos provienen del «mismo» esquema. Es decir,

$$\text{Spec: SchFin} \rightarrow \text{LRS}$$

no es un functor fiel y queremos determinar su «núcleo» el siguiente sentido: encontrar el mayor sistema multiplicativo de morfismos esquemáticos cuyos espectros son isomorfismos; es decir, tal que Spec factoriza por el correspondiente cociente de Verdier. Esta será precisamente la clase de *qc-isomorfismos*. Damos, sin embargo, la siguiente definición *a priori*, inspirada en el hecho de que *un morfismo de esquemas es isomorfismo si y solo si es afín y un isomorfismo a nivel de haces de anillos*:

**Definición 5.1.1.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es un *qc-isomorfismo* —de *quasi-coherent*— si y solo si es afín y  $f_{\sharp}: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  es isomorfismo.

**Definición 5.1.2.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es *plano* si el functor

$$f^*: \mathbf{Qcoh}(Y) \rightarrow \mathbf{Qcoh}(X)$$

es exacto. Se dice que un morfismo plano es *fielmente plano* si  $f^*$  es fielmente exacto.

Con la definición del functor  $f^*$ , es un ejercicio probar que:

**Lema 5.1.3.** [32, Section 10, Proposition 5] Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es plano si y solo si  $f_x^\sharp: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  es plano para todo  $x \in X$ .

**Definición 5.1.4.** Un morfismo  $f: X \rightarrow X \times_Y X$  es una *inmersión plana* si es plano y su diagonal  $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$  es un qc-isomorfismo.

*Observación 5.1.5.* En [32] se emplea la terminología «*quasi-open immersion*». Nosotros preferimos la de «inmersión plana» para recalcar que estos morfismos jugarán en nuestra categoría el papel análogo al de los *monomorfismos planos* de espacios localmente anillados, que no son abiertos.

Conviene observar que de las definiciones se deduce inmediatamente:

**Lema 5.1.6.** Si  $f$  es una inmersión plana,  $f_\sharp: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  es un epimorfismo de haces de anillos y  $f_x^\sharp: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  es un epimorfismo plano de anillos para todo  $x \in X$ . Si  $f$  es un qc-isomorfismo,  $f_x^\sharp$  es un epimorfismo plano de anillos para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Para la primera parte, sea  $\Delta_f$  la diagonal; por hipótesis  $\mathcal{O}_{X \times_Y X} \simeq \Delta_{f*}\mathcal{O}_X$ , pero si  $\pi: X \times_Y X \rightarrow Y$  es la proyección natural, se tiene  $\pi_*\mathcal{O}_{X \times_Y X} \simeq f_*\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*\mathcal{O}_X \simeq \pi_*\Delta_{f*}\mathcal{O}_X \simeq f_*\mathcal{O}_X$  por la Proposición 4.4.2, como queríamos. Para la segunda, tomamos fibra en  $(x, x) \in X \times_Y X$  en el morfismo de haces de anillos de la diagonal. La última parte se seguirá de resultados posteriores, pero observemos que, como  $(f^{-1} \dashv f_*)$  se tiene un triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}f_*\mathcal{O}_X & \xleftarrow[\sim]{f^{-1}(f_\sharp)} & f^{-1}\mathcal{O}_Y \\
 & \searrow r & \nearrow f^\sharp \\
 & \mathcal{O}_X & 
 \end{array}$$

y que, al tomar fibra en  $x \in X$ ,  $(f^{-1}f_*\mathcal{O}_X)_x = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_{f(x)})) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  es el morfismo de restricción entre dos abiertos afines: un epimorfismo plano.  $\square$

*Observación 5.1.7.* Tanto en el caso de inmersiones planas como de qc-isomorfismos, si  $X$  tiene restricciones abiertas —Definición 3.2.1—, los  $f_x^\sharp$  son de tipo finito.

Además se verifica un «teorema de cambio de base plano»:

**Proposición 5.1.8.** [32, Section 10, Theorem 4] Si tenemos un diagrama cartesiano de espacios esquemáticos

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

con  $g$  plano, entonces  $g'$  es plano y, para todo  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$  e  $i \geq 0$ , el morfismo natural

$$g^* R^i f_* \mathcal{M} \rightarrow R^i f'_*(g'^* \mathcal{M})$$

es un isomorfismo.

Completamos ahora la caracterización de estos tipos de morfismos.

**Teorema 5.1.9.** [32, Section 10, Propositions 5, 6; Section 11, Proposition 10 y Theorem 11; Section 13, Proposition 12] Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo. Se verifica que:

- a) Son equivalentes:
  - a.1)  $(f^* \dashv f_*)$ :  $\mathbf{Qcoh}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Qcoh}(Y)$  es una equivalencia categorial.
  - a.2)  $\mathrm{Spec}(f): \mathrm{Spec}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(Y)$  es isomorfismo.
  - a.3)  $f$  es un qc-isomorfismo.
- b) Si  $f$  es plano, son equivalentes:
  - b.1)  $f$  es fielmente plano.
  - b.2)  $\mathrm{Spec}(f): \mathrm{Spec}(X) \rightarrow \mathrm{Spec}(Y)$  es epiyectivo.
  - b.3) Para todo  $y \in Y$ , el morfismo  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \prod_{x \in f^{-1}(U_y)} \mathcal{O}_{X,x}$  es fielmente plano.
- c) Si  $f$  es plano, son equivalentes:
  - c.1) La unidad de la adjunción,  $f^* \circ f_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$ , es un isomorfismo.

- c.2)  $\text{Spec}(f): \text{Spec}(X) \rightarrow \text{Spec}(Y)$  es un monomorfismo en **LRS**.
- c.3)  $f$  es una inmersión plana.
- d) Son equivalentes:
  - d.1)  $f$  es un qc-isomorfismo.
  - d.2)  $f$  es una inmersión plana y es fielmente plano.

En particular, las tres clases de morfismos en cuestión son estables por composición y cambio de base arbitrario.

*Demostración.* Las equivalencias a.1)  $\Leftrightarrow$  a.3), b.1)  $\Leftrightarrow$  b.3) y c.1)  $\Leftrightarrow$  c.3) se prueban en las referencias a [32], mientras que d.1)  $\Leftrightarrow$  d.2) se deduce de a.1), b.1) y c.1). Repasemos la equivalencia a.1)  $\Leftrightarrow$  a.3): si  $f$  es qc-isomorfismo,  $f_*$  es exacto por la afinidad, y se comprueba fácilmente que  $f^* \dashv f_*$  es una equivalencia; recíprocamente, por hipótesis de que  $\text{Id} \rightarrow f_* \circ f^*$  sea isomorfismo, se tiene que  $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} f_* \mathcal{O}_X$  es un isomorfismo de haces. La afinidad de  $f$  es consecuencia, por ejemplo, de la Proposición 4.1.12) y del «teorema de extensión» (c) de la Proposición 4.1.11). Por otra parte, b.1)  $\Leftrightarrow$  b.3) es un cómputo sencillo en la línea del Lema 5.1.3, mientras que c.1)  $\Rightarrow$  c.3) se deduce de aplicar las equivalencias de a) a la diagonal. Veamos ahora las equivalencias con los apartados «-.2)» de cada letra.

Si  $f$  es qc-isomorfismo,  $\text{Spec}(f)$  es un isomorfismo por [29, Proposition 6.6]; sin embargo, es de nuestro interés repasar la construcción: el morfismo inverso  $\text{Spec}(Y) \rightarrow \text{Spec}(X)$  se obtiene gracias a la Proposición 4.1.13. En efecto, para cada  $y \in Y$  tenemos isomorfismos de esquemas afines  $\text{Spec}(f_y): \text{Spec}(f^{-1}(U_y)) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(U_y)$  y, componiendo sus inversas con las inclusiones naturales  $\text{Spec}(f^{-1}(U_y)) \hookrightarrow \text{Spec}(X)$ , se obtiene una familia de morfismos

$$\text{Spec}(U_y) \rightarrow \text{Spec}(X)$$

compatibles con las restricciones en  $Y$ . Por la propiedad universal del colímite, estos inducen un morfismo  $\text{Spec}(Y) \rightarrow \text{Spec}(X)$  que, se comprueba, es inverso de  $\text{Spec}(f)$ .

Para el recíproco empleamos material del Apéndice B.4. En concreto, como  $\text{Spec}(f)$  es un isomorfismo, se tiene una equivalencia de categorías

$\mathbf{Mod}(\mathrm{Spec}(X)) \simeq \mathbf{Mod}(\mathrm{Spec}(Y))$ ; y como  $\mathrm{Spec}(f)$  preserva cuasicoherencia para «módulos cuasicoherentes descendidos» (Definición B.4.5), esta restringe a  $\mathbf{dQcoh}(X) \simeq \mathbf{dQcoh}(Y)$ ; luego por la Proposición B.4.7 se concluye que,  $\mathbf{Qcoh}(X) \simeq \mathbf{Qcoh}(Y)$  y acabamos por a.1)  $\Leftrightarrow$  a.3).

Veamos la equivalencia de b.3) con b.2). Si  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \prod_{f(x) \geq y} \mathcal{O}_{X,x}$  induce una epiyección entre espectros para todo  $y \in Y$ , entonces se tienen epiyecciones

$$\coprod_{\substack{f(x) \geq y \\ y \in Y}} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \coprod_{y \in Y} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \rightarrow \mathrm{Spec}(Y);$$

y como este morfismo factoriza por  $\mathrm{Spec}(f)$ , hemos acabado. Recíprocamente, dado un primo  $\mathfrak{q}_y \subseteq \mathcal{O}_{Y,y}$  para cierto  $y \in Y$ , podemos encontrar un punto esquemático tal que  $[(y', \mathfrak{q}_{y'})]$  con  $y' \geq y$  y  $r_{yy'}(\mathfrak{q}_{y'}) = \mathfrak{q}_y$ ; y por epiyectividad de  $\mathrm{Spec}(f)$  hay algún  $\mathfrak{x} = [(x', \mathfrak{p}_{x'})]$  con  $f(\mathfrak{x}) = [(y, \mathfrak{q}_y)]$ . Por construcción,  $\mathfrak{p}_{x'}$  prueba lo deseado.

La equivalencia entre c.2) y c.3) es un caso particular de la de a.2) y a.3) junto con el hecho de que  $\mathrm{Spec}$  preserva productos fibrados (Proposición 4.4.4):  $\mathrm{Spec}(f)$  es monomorfismo si y solo si la diagonal de espacios localmente anillados  $\mathrm{Spec}(X) \rightarrow \mathrm{Spec}(X \times_Y X) \simeq \mathrm{Spec}(X) \times_{\mathrm{Spec}(Y)} \mathrm{Spec}(X)$  es isomorfismo, es decir, si la diagonal de  $f$  es qc-isomorfismo.

La estabilidad por cambio de base de los qc-isomorfismos es el Corolario 4.4.3; la de las inmersiones planas es una aplicación de esta a la diagonal y la de los morfismos fielmente planos es automática. También pueden deducirse fácilmente de los criterios a.2), b.2) y c.2) junto con la Proposición 4.4.4, puesto que ser isomorfismo, monomorfismo y epiyectivo son propiedades estables por cambio de base arbitrario de espacios localmente anillados; así como lo es ser morfismo esquemático plano.  $\square$

*Observación 5.1.10.* Si  $f: X \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo, la equivalencia  $(f^* \dashv f_*)$  restringe a una entre las categorías de haces de ideales primos cuasicoherentes de  $\mathcal{O}_X$  y  $\mathcal{O}_Y$ . Es decir, en vista del Lema 3.2.7, automáticamente da que  $\mathrm{Spec}(f)$  es un homeomorfismo con las topologías de las especializaciones.

*Observación 5.1.11.* En el Apéndice B.4 veremos que, de hecho, *un monomorfismo plano y epiyectivo de proesquematas* es un isomorfismo.

**Corolario 5.1.12.** Si  $k$  es un cuerpo y  $f: U \rightarrow (\star, k)$  es una inmersión plana tal que  $\text{Spec}(U) \neq \emptyset$ , entonces  $\mathcal{O}_U$  es isomorfo al haz constante  $k$ .

*Demostración.* Como  $\text{Spec}(f)$  es un monomorfismo de espacios anillados,  $\text{Spec}(U)$  tiene, como mucho, un elemento. Esto significa que  $U = C_x$  para cierto  $x \in X$  y que  $\mathcal{O}_{U,x}$  es un cuerpo. Como además,  $k \hookrightarrow \mathcal{O}_{U,x}$  es un epimorfismo plano, es un isomorfismo; y por el mismo argumento todos los anillos de las fibras de  $U$  son cuerpos isomorfos a  $k$ .  $\square$

Por último, cerramos esta sección comprobando que los morfismos planos verifican la «propiedad del descenso para la topología de las especializaciones», lo cual será útil para probar en la Sección 6.2 que los morfismos fielmente planos son, en esencia, cocientes.

Nótese que la topología de las especializaciones en  $\text{Spec}(X)$  para un  $X$  esquemático se traduce en que, dados  $\mathbf{x} = (x, \mathfrak{p}_x)$  y  $\mathbf{x}' = (x', \mathfrak{q}_{x'})$  —siendo estas parejas sus representantes maximales—,  $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}'$  si y solo si  $x \leq x'$  y  $r_{xx'}^{-1}(\mathfrak{q}_{x'}) \subseteq \mathfrak{p}_x$ .

**Lema 5.1.13.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es plano,  $\text{Spec}(f)$  verifica la «propiedad del descenso»; es decir, dados  $\mathbf{x} \in \text{Spec}(X)$  e  $\mathbf{y} > f(\mathbf{x})$ , existe un  $\mathbf{x}' \in \text{Spec}(X)$  tal que  $\mathbf{x}' > \mathbf{x}$  y  $f(\mathbf{x}') = \mathbf{y}$ . En particular,  $\text{Spec}(f)_{\leq}$  es abierta.

*Demostración.* La cuestión se reduce a la propiedad homónima de morfismos planos de anillos: con las notaciones habituales para los representantes maximales, sea  $\mathbf{x} = (x, \mathfrak{p}_x)$ ,  $f(\mathbf{x}) = (f(x), (f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{p}_x))$  —centrado en  $f(x)$  por el Teorema 4.3.26—,  $\mathbf{y} = (y, \alpha_y)$  con  $y \geq f(x)$  y  $r_{yy'}^{-1}(\alpha_y) \subset (f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{p}_x)$ . Por la propiedad del descenso del morfismo plano de anillos  $f_x^\#$ , obtenemos un  $\beta_x \subset \mathfrak{p}_x$  tal que  $(f_x^\#)^{-1}(\beta_x) = r_{yy'}^{-1}(\alpha_y)$ . El punto esquemático representado por la clase  $[(x, \beta_x)]$  es un  $\mathbf{x}'$  en las condiciones del enunciado.  $\square$

## 5.2. Localización por qc-isomorfismos

Sea  $\text{QC}$  la clase de morfismos que forman los qc-isomorfismos en  $\text{SchFin}$ . Como consecuencia de la Proposición 4.4.2 y el Teorema 5.1.9, se tiene:

**Lema 5.2.1.** La clase  $\text{QC}$  define un sistema multiplicativo (a la izquierda) en  $\text{SchFin}$ . Además, es el mayor sistema multiplicativo por el cual el

functor  $\text{Spec}: \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{LRS}$  factoriza a través del cociente de Verdier (manteniendo la misma notación)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SchFin} & \xrightarrow{\text{Spec}} & \mathbf{LRS} \\ \downarrow & \nearrow \text{Spec} & \\ \mathbf{SchFin}_{\text{qc}} & & \end{array}$$

con  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}} := [\text{QC}^{-1}]\mathbf{SchFin}$ .

Recordamos que, como  $\mathbf{SchFin}$  tiene productos fibrados, la localización  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}$  admite una descripción con  $\text{Ob}(\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}) = \text{Ob}(\mathbf{SchFin})$  y cuyos morfismos son «tejados»

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}}(X, Y) = \\ = \{f/\phi: Y \leftarrow Z \rightarrow X \text{ con } \phi: Z \rightarrow Y \text{ qc-isomorfismo y } f: X \rightarrow Y\} / \sim; \end{aligned}$$

donde la composición está dada por el producto fibrado y dos son equivalentes si puede completarse un tejado sobre ambos, esto es,

$$(f/\phi: Y \leftarrow Z \rightarrow X) \sim (g/\psi: Y' \leftarrow Z' \rightarrow X')$$

si existe algún  $\alpha/\beta: Z \leftarrow W \rightarrow Z'$  con  $\alpha, \beta$  qc-isomorfismos y haciendo el diagrama correspondiente conmutativo.

Por construcción y la Proposición 4.4.4 se tiene:

**Proposición 5.2.2.** El functor  $\text{Spec}: \mathbf{SchFin}_{\text{qc}} \rightarrow \mathbf{LRS}$  es fiel y conmuta con productos fibrados, pero en general no es pleno.

*Demostración.* Se sigue de la construcción. Conviene destacar que el functor no es pleno, *en esencia*, porque los morfismos en la imagen de  $\text{Spec}$  preservan cuasicoherencia en un sentido apropiado (véase Apéndice B.4), mientras que no todo morfismo de espacios localmente anillados entre imágenes de espacios esquemáticos tiene por qué hacerlo *a priori*.  $\square$

Cuando los espacios esquemáticos tienen restricciones de tipo finito, esta construcción especializa a equivalencias:

**Proposición 5.2.3.** Si  $\mathbf{SchFin}^{\text{Open}}$  denota la subcategoría de espacios esquemáticos con restricciones abiertas y  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}^{\text{Open}}$  su correspondiente localización, se tiene una equivalencia categorial

$$\text{Spec}: \mathbf{SchFin}_{\text{qc}}^{\text{Open}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sch}.$$

En particular,  $\mathbf{Sch}$  es subcategoría plenamente fiel de  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}$ . Además, si  $\mathbf{AffFin}$  denota la subcategoría de espacios esquemáticos afines y  $\mathbf{AffFin}_{\text{qc}}$  su localización, se tiene una equivalencia con la categoría de esquemas afines

$$\text{Spec}: \mathbf{AffFin}_{\text{qc}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{CRing}^{\text{op}}.$$

*Demostración.* La primera parte es la Proposición 4.3.9 junto con la existencia de modelos finitos. La parte referente a afines deduce de que  $X$  es afín si y solo si  $X \rightarrow (\star, \mathcal{O}_X(X))$  es qc-isomorfismo.  $\square$

Nótese que la Proposición 5.2.3 no dice nada sobre espacios esquemáticos  $X$  que, sin tener restricciones de tipo finito, verifican que  $\text{Spec}(X)$  es un esquema. Precisamos más en la Proposición que sigue, que a nivel de haces cuasicoherentes nos permitirá suponer que  $X$  tiene, en efecto, restricciones abiertas. Su demostración depende de un Teorema importante probado en el Apéndice B.4, que es técnico y no será *directamente* relevante para los resultados presentados en esta memoria —aunque sí para la exposición particular que hemos elegido, puesto que aplicaremos la Proposición que sigue en el Teorema 7.4.16—.

**Proposición 5.2.4.** Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios esquemáticos tales que existe un isomorfismo  $\text{Spec}(Y) \simeq \text{Spec}(X)$  *de esquemas*, entonces hay un isomorfismo  $Y \simeq X$  en  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}$ ; es decir, existe un espacio esquemático  $Z$  y qc-isomorfismos

$$Y \leftarrow Z \rightarrow X.$$

En particular, si  $X$  es un espacio esquemático con  $\text{Spec}(X)$  un esquema, existe algún  $Y$  con restricciones de tipo finito y un isomorfismo  $Y \simeq X$  en  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}$  como arriba. Podemos escribir « $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}^{\text{Open}} \simeq (\text{Spec}^{-1}(\mathbf{Sch}))_{\text{qc}}$ ».

*Demostración.* Por el Teorema B.4.22, como cualquier isomorfismo de espacios localmente anillados  $\text{Spec}(Y) \simeq \text{Spec}(X)$  está en las hipótesis allí

describas, existe el isomorfismo del enunciado. Creemos que se puede tratar de dar una demostración más elemental para este caso, vía propiedades de los monomorfismos planos —aplicadas a  $\text{Spec}(U_x) \rightarrow \text{Spec}(X)$ — estudiadas en [25].  $\square$

**Corolario 5.2.5.** Si  $S = \text{Spec}(X)$  es un esquema qc-qs,  $\mathcal{U} = \{\pi_X^{-1}(U_x)\}$  es el recubrimiento estándar por imágenes de monomorfismos planos desde esquemas afines y localmente afín —en el sentido de productos fibrados— y  $\mathcal{V}$  es un recubrimiento abierto localmente afín de  $S$ , existe un recubrimiento con la mismas propiedades que hemos descrito para  $\mathcal{U}$  y refinando tanto a  $\mathcal{U}$  como a  $\mathcal{V}$ .

*Observación 5.2.6.* De hecho, la Proposición 5.2.4 es cierta bajo la hipótesis más débil de que  $X$  sea «algebraico», véase la Definición 7.1.1 y las hipótesis del Teorema B.4.22 que hemos invocado; y sospechamos que debería serlo en total generalidad.

*Observación 5.2.7.* Como vimos, la centralidad de morfismos caracteriza la esquematicidad (Teorema 4.3.26), lo que *a grosso modo* dice que podemos interpretar **SchFin** como una categoría cuyos objetos son morfismos  $\text{Spec}(X) \rightarrow X$  y sus morfismos son parejas de  $g: \text{Spec}(X) \rightarrow \text{Spec}(Y)$  y  $f: X \rightarrow Y$  haciendo conmutativo el diagrama (de conjuntos) correspondiente. En ese contexto, el functor de localización no es más que el functor olvido del espacio de llegada y el functor  $\text{Spec}$  la inclusión en la categoría de espacios localmente anillados. Esto es especialmente claro para esquemas.

Para concluir, el siguiente Lema es inmediato:

**Lema 5.2.8.** Si  $Y \rightarrow Y'$  es un qc-isomorfismo de espacios esquemáticos y **SchFin** $_{/Y}$ , **SchFin** $_{/Y'}$  denotan las respectivas categorías de espacios sobre  $Y$  e  $Y'$  —que podemos localizar por las clases de qc-isomorfismos *sobre*  $Y$  e  $Y'$  respectivamente—, se tiene una equivalencia

$$(\mathbf{SchFin}_{/Y})_{\text{qc}} \simeq (\mathbf{SchFin}_{/Y'})_{\text{qc}}.$$

*Demostración.* Los funtores están dados por composición y producto fibrado vía  $Y \rightarrow Y'$ . Como los qc-isomorfismos son isomorfismos en la localización, es claro que estos funtores inducen una equivalencia.  $\square$

### 5.3. Puntos con valores

En esta sección vamos a analizar morfismos esquemáticos que parten de espectros de anillos de valoración discreta y cuerpos. Consideramos que la discusión puede generalizarse ampliamente a espacios que sean simultáneamente esquemáticos y esquemas —para los cuales la topología de Zariski coincide con la de las especializaciones—, pero no vemos relevante tratar aquí el caso general.

Comenzamos observando que si  $A$  es un anillo de valoración discreta con cuerpo de fracciones  $\Sigma$ ,  $\text{Spec}(A)$  con la topología de Zariski es también un espacio esquemático (y afín) localmente anillado, es decir, las topologías de Zariski y de especializaciones coinciden en  $A$  (véase el Ejemplo 1.1.10). En efecto, su espectro de Zariski se identifica con el poset anillado tal que  $|\text{Spec}(A)| = \{0 < 1\}$ ,  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A),0} = A$  y  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A),1} = \Sigma$ , siendo  $r_{01}: A \rightarrow \Sigma$  el morfismo de localización. A su vez, es claro que el espectro de cualquier cuerpo es un espacio esquemático con un solo punto y el haz de anillos constante. La inclusión natural

$$\text{Spec}(\Sigma) \hookrightarrow \text{Spec}(A), \quad \star \mapsto 1$$

es claramente esquemática. Gracias a esta doble interpretación —que para cuerpos y anillos de valoración discreta, el functor «espectro de un anillo» valora en la categoría de espacios esquemáticos que son esquemas—, el siguiente Lema es un abuso de notación justificado:

**Lema 5.3.1.** Si  $A$  es cuerpo o anillo de valoración discreta, se tiene una identificación  $\text{Spec}(\text{Spec}(A)) = \text{Spec}(A)$ .

**Lema 5.3.2.** Si  $A$  es cuerpo (resp. anillo de valoración discreta de maximal  $\mathfrak{m}$ ) y  $X$  es esquemático, un morfismo de espacios anillados  $f: \text{Spec}(A) \rightarrow X$  es esquemático si y solo si el punto esquemático  $[(f(\star), \ker(f_\star^\sharp))]$  centra en  $f(\star)$  (resp.  $(f(0), (f_0^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}))$  y  $(f(1), \ker(f_1^\sharp))$  centran en  $f(0)$  y  $f(1)$ ).

*Demostración.* Reformulación del Teorema 4.3.26. □

**Proposición 5.3.3.** Si  $X$  es un espacio esquemático y  $A$  un cuerpo o anillo de valoración discreta, se verifica que

$$\text{Hom}_{\text{SchFin}_{\text{qc}}}(\text{Spec}(A), X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{SchFin}}(\text{Spec}(A), X).$$

*Demostración.* Todo qc-isomorfismo  $\phi: Z \rightarrow \text{Spec}(A)$  es un isomorfismo con inversa  $\pi_Z \circ \text{Spec}(\phi)^{-1}$ , donde  $\pi_Z: \text{Spec}(Z) \rightarrow Z$  el morfismo centro —véase la Observación 4.3.18 y el Lema 1.4.3—. Esta inversa es central por construcción, luego esquemática por el Teorema 4.3.26.  $\square$

**Corolario 5.3.4.** Sea  $\pi: S \rightarrow X$  modelo finito de un esquema y  $A$  cuerpo o anillo de valoración discreta. Se tiene una biyección natural

$$\text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\text{Spec}(A), S) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{SchFin}}(\text{Spec}(A), X).$$

*Demostración.* Dado  $g: \text{Spec}(A) \rightarrow S$ , se define  $\pi: \text{Spec}(A) \rightarrow X$ , que es central por construcción y, por tanto, esquemático. Recíprocamente, dado  $f: \text{Spec}(A) \rightarrow X$ , obtenemos  $\text{Spec}(f): \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(X) \simeq S$ .  $\square$

*Observación 5.3.5.* Para morfismos de esquemas  $T \rightarrow S$  y morfismos entre sus modelos finitos  $Y \rightarrow X$ , el análogo del Corolario 5.3.4 es —fuertemente— falso: es necesario considerar la localización de la categoría esquemática. Es por esto que el resultado positivo en el caso de la Proposición en cuestión es un resultado extremadamente útil, ya que nos permitirá tanto hablar de puntos geométricos de un espacio esquemático como dar «criterios valorativos» en términos de morfismos de **SchFin**.

**Proposición 5.3.6.** Si  $A$  es un cuerpo o anillo de valoración discreta y  $\phi: X \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo, se tiene una biyección

$$\text{Hom}_{\mathbf{SchFin}}(\text{Spec}(A), Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{SchFin}}(\text{Spec}(A), X).$$

*Demostración.* El inverso envía cada  $f: \text{Spec}(A) \rightarrow Y$  a la composición  $\pi_X \circ \text{Spec}(\phi)^{-1} \circ \text{Spec}(f)$ .  $\square$

## 5.4. El cilindro esquemático

En esta sección especializamos la construcción del cilindro de la Sección 2.3 al caso de espacios esquemáticos. Como  $\mathbf{SchFin} \subseteq \mathbf{CRing-data}$ , tenemos un functor inducido

$$\text{Cyl}: \mathbf{SchFin-codata} \rightarrow \mathbf{CRing-data}.$$

**Definición 5.4.1.** Diremos que un  $\mathcal{X} \in \mathbf{SchFin-codata}$  es *2-esquemático* si  $\text{Cyl}(\mathcal{X})$  es un espacio esquemático. Diremos que un morfismo  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  en  $\mathbf{SchFin-codata}$  es *2-esquemático* si  $\text{Cyl}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{Y})$  es esquemático.

**Lema 5.4.2.** Si  $\mathcal{X}$  es un  $\mathbf{SchFin-codata}$  tal que sus morfismos de restricción son inmersiones planas, i.e. para todo  $p \leq q \in |X|$ ,  $\mathcal{X}_{pq}: \mathcal{X}(q) \rightarrow \mathcal{X}(p)$  es una inmersión plana; entonces  $\text{Cyl}(\mathcal{X})$  es pseudoesquemático.

*Demostración.* Se sigue de que todo espacio esquemático es pseudoesquemático y de que, si  $f: X \rightarrow Y$  es una inmersión plana,  $f_x^\sharp: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  es un epimorfismo plano para todo  $x \in X$ .  $\square$

Conviene generalizar la definición de qc-isomorfismo a posets anillados:

**Definición 5.4.3.** Diremos que un morfismo de posets anillados  $f: X \rightarrow Y$  es un *qc-isomorfismo* si  $f^{-1}(U_y)$  es  $\mathbf{Mod}$ -afín para todo  $y \in Y$  y el morfismo de haces  $f_\sharp: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  es un isomorfismo.

*Observación 5.4.4.* Con esta definición, reinterpretando las condiciones de la Proposición 4.2.11, se tiene que  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios esquemáticos es esquemático si y solo si para todo  $x \in X$ , el morfismo inducido por  $\pi: U_x \rightarrow (\star, \mathcal{O}_{X,x})$  y  $f_x: U_x \rightarrow U_{f(x)}$  (que *a priori* no es esquemático),  $U_x \rightarrow (\star, \mathcal{O}_{X,x}) \times_{(\star, \mathcal{O}_{Y,f(x)})} U_{f(x)}$ , es un qc-isomorfismo de posets anillados—entre espacios esquemáticos—.

Nótese que, sin condiciones de esquematicidad, no podemos garantizar que los qc-isomorfismos de posets anillados sean estables siquiera por composición: esto se debe a que en espacios no esquemáticos, no es equivalente comprobar la condición de afinidad en los  $U_y \subseteq Y$  que en un recubrimiento por abiertos  $\mathbf{Mod}$ -afines. Esta definición debe tomarse, por tanto, como *un modo de codificar de modo resumido información sobre los haces de anillos* y su objetivo es establecer un paralelismo visual entre las condiciones de 2-esquematicidad y las de esquematicidad ordinaria.

**Lema 5.4.5.** Si  $f: X \rightarrow Y$  un qc-isomorfismo entre Fr-espacios y  $X$  es esquemático, entonces  $Y$  es esquemático y  $f$  es esquemático.

*Demostración.* Como  $Y$  es un Fr-espacio, comprobamos 1) de la Proposición 4.1.10. En efecto, sean  $y, y' \in Y$  con  $w \leq y, y'$ . Se tiene que el subespacio  $f^{-1}(U_y) \cap f^{-1}(U_{y'}) \subseteq X$  es afín por ser intersección de subespacios afines

del afín  $f^{-1}(U_w)$  —aquí se requiere esquematicidad de  $X$ , no basta con que las antiimágenes sean **Mod**-afines—. Hay, por tanto, un morfismo fielmente plano

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,w}} \mathcal{O}_{Y,y'} &\simeq \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_y)) \otimes_{\mathcal{O}_X(f^{-1}(U_w))} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_{y'})) \simeq \\ &\simeq \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_y) \cap f^{-1}(U_{y'})) \rightarrow \prod_{f(s) \geq y, y'} \mathcal{O}_{X,s}; \end{aligned}$$

que coincide con

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,w}} \mathcal{O}_{Y,y'} &\rightarrow \prod_{z \geq y, y'} \mathcal{O}_{Y,z} \simeq \\ &\simeq \prod_{z \geq y, y'} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_z)) \rightarrow \prod_{z \geq y, y'} \prod_{f(t) \geq z} \mathcal{O}_{X,t} \rightarrow \prod_{f(s) \geq y, y'} \mathcal{O}_{X,s} \end{aligned}$$

—donde el último morfismo es la proyección natural—; por lo que el primer morfismo de esta composición es fielmente plano, probando que  $Y$  es esquemático. La esquematicidad de  $f$  se prueba con la caracterización de la Proposición 4.2.11, pues como sabemos que  $X$  es esquemático y por la hipótesis en  $f$ , se tiene, para todo  $x$  e  $y \geq f(x)$ , que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{Y,y} &\simeq \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_X(f^{-1}(U_{f(x)}))} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_y)) \simeq \\ &\simeq \mathcal{O}_X(U_x \cap f^{-1}(U_y)) \rightarrow \prod_{z \in U_x \cap f^{-1}(U_y)} \mathcal{O}_{X,z} \end{aligned}$$

es fielmente plano. □

**Lema 5.4.6.** Si  $\mathcal{X}$  es un **SchFin**-codato tal que  $|\mathcal{X}|$  tiene un único punto cerrado  $p$ , entonces hay un qc-isomorfismo natural (de posets anillados)  $\pi_p: \text{Cyl}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}(p)$ . Además, si  $\mathcal{X}$  es 2-esquemático,  $\pi_p$  es esquemático.

*Demostración.* En efecto, el morfismo es el inducido vía la propiedad universal por los  $\mathcal{X}_{pq}: \mathcal{X}(q) \rightarrow \mathcal{X}(p)$ . Se verifica que, para todo  $x_q \in \mathcal{X}(p)$ ,  $\pi_p^{-1}(U_{x_p}) = U_{x_p}$ , luego  $\pi_p$  es **Mod**-afín; y que

$$\mathcal{O}_{\text{Cyl}(\mathcal{X})}(U_{x_p}) = \lim_{y_q \geq x_p} \mathcal{O}_{\mathcal{X}(q)(y_q)} \simeq \lim_{z_p \geq x_p} \mathcal{O}_{\mathcal{X}(p)(z_p)} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}(p)}(U_{x_p}),$$

puesto que  $\{x_p\} \subseteq U_{x_p} \subseteq \mathcal{X}(p)$  es final para el límite. La segunda parte es el Lema 5.4.5. □

Dado un **SchFin**-codato  $\mathcal{X}$ , mantengamos la notación  $U_p$  para el codato restringido al abierto mínimo  $U_p \subseteq |\mathcal{X}|$ . El Lema 5.4.6 nos da que, para todo  $p \in |\mathcal{X}|$ , tenemos qc-isomorfismos de espacios anillados

$$\pi_p: \text{Cyl}(U_p) \rightarrow \mathcal{X}(p).$$

En general, dado un abierto  $U \subseteq |\mathcal{X}|$  y denotando  $U$  al **SchFin**-codato inducido, se tiene un abierto

$$i_U: \text{Cyl}(U) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{X}).$$

Por tanto, para todo par de puntos  $p, q \in |\mathcal{X}|$  y cualquier  $t \leq p, q$ , denotando

$$i_{pq}^p: \text{Cyl}(U_p \cap U_q) \hookrightarrow \text{Cyl}(U_p), \quad i_{pq}^q: \text{Cyl}(U_p \cap U_q) \hookrightarrow \text{Cyl}(U_q)$$

a estas inclusiones naturales, las composiciones con  $\pi_p$  y  $\pi_q$  inducen un morfismo de posets anillados a un espacio esquemático

$$\pi_{pq}^t: \text{Cyl}(U_p \cap U_q) \rightarrow \mathcal{X}(p) \times_{\mathcal{X}(t)} \mathcal{X}(q).$$

*Observación 5.4.7.* La existencia de  $t \leq p, q$  es necesaria para tener un espacio esquemático en la parte de la derecha. No podemos tomar producto sobre  $\text{Cyl}(\mathcal{X})$  puesto que, de modo análogo a como sucede en la inclusión de un punto  $(\star, A) \rightarrow X$  en un esquemático, las inclusiones  $\mathcal{X}(p) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{X})$  no son esquemáticas en general.

Por último, nótese que, para todo  $(x_p, y_q) \in |\mathcal{X}(p) \times_{\mathcal{X}(t)} \mathcal{X}(q)|$ , se verifica

$$(\pi_{pq}^t)^{-1}(U_{(x_p, y_q)}) = U_{x_p} \cap U_{y_q} \subseteq |\text{Cyl}(U_p \cap U_q)| \subseteq |\text{Cyl}(\mathcal{X})|.$$

**Proposición 5.4.8.** Sea  $\mathcal{X}$  un **SchFin**-codato. Se verifica que  $\mathcal{X}$  es 2-esquemático si y solo si sus morfismos de restricción son inmersiones planas y, para todo  $p, q \geq t$  en  $|\mathcal{X}|$ , el morfismo natural

$$\pi_{pq}^t: \text{Cyl}(U_p \cap U_q) \rightarrow \mathcal{X}(p) \times_{\mathcal{X}(t)} \mathcal{X}(q)$$

es un qc-isomorfismo (*a priori* de espacios anillados, *a posteriori* de espacios esquemáticos).

*Demostración.* Para el «si», de la hipótesis en las restricciones tenemos que  $\text{Cyl}(\mathcal{X})$  es pseudoesquemático. Veamos el hecho de que  $\pi_{pq}^t$  sea un qc-isomorfismo implica que  $\text{Cyl}(\mathcal{X}) \equiv (\text{Cyl}(\mathcal{X}), \mathcal{O})$  verifica las condiciones de la Proposición 4.1.10. Basta comprobar que si  $x_p, y_q \in \text{Cyl}(\mathcal{X})$  son tales que existe algún  $z_t \leq x_p, y_q$ , se verifica que

$$\mathcal{O}(U_{x_p} \cap U_{y_q}) \rightarrow \prod_{t \geq x_p, y_q} \mathcal{O}_t$$

es fielmente plano; esto se sigue de la afinidad de  $\pi_{pq}^t$  y de la Proposición 4.1.8, gracias a que  $(\pi_{pq}^t)^{-1}(U_{(x_p, y_q)}) = U_{x_q} \cap U_{y_q}$ . Recíprocamente, si  $\text{Cyl}(\mathcal{X})$  es esquemático, se sigue que  $\pi_{pq}^t$  es un qc-isomorfismo aplicando la misma caracterización en la dirección opuesta. En particular, para  $\pi_{pp}^t$ , tenemos que  $\text{Cyl}(U_p) \rightarrow \mathcal{X}(p) \times_{\mathcal{X}(t)} \mathcal{X}(p)$  es un qc-isomorfismo de espacios esquemáticos, pero  $\text{Cyl}(U_p)$  es qc-isomorfo a  $\mathcal{X}(p)$ , de donde se concluye que  $\mathcal{X}$  tiene inmersiones planas como morfismos de restricción. Nótese que, en caso de verificarse la condición, el morfismo del enunciado es esquemático por el Lema 5.4.5.  $\square$

**Lema 5.4.9.** Sea  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morfismo de **SchFin**-codatos con inmersiones planas por morfismos de restricción, tal que  $|f|$  es la identidad y tal que  $f(p): \mathcal{X}(p) \rightarrow \mathcal{Y}(p)$  es un qc-isomorfismo para todo  $p \in |\mathcal{X}|$ . Si  $\mathcal{X}$  es 2-esquemático, entonces  $\mathcal{Y}$  es 2-esquemático. Además,  $\text{Cyl}(f)$  es un qc-isomorfismo de posets anillados.

*Demostración.* Basta observar que  $\text{Cyl}(f)$  es un qc-isomorfismo de espacios anillados, pues para todo  $y_p \in \text{Cyl}(\mathcal{Y})$  se tiene que  $\text{Cyl}(f)^{-1}(U_{y_p})$  es el abierto generado en  $\text{Cyl}(\mathcal{X})$  por  $f(p)^{-1}(U_{y_p})$ , que es qc-isomorfo al propio  $f(p)^{-1}(U_{y_p}) \subseteq \mathcal{X}(p)$  por el Lema 5.4.6. Ahora, si  $\mathcal{X}$  es 2-esquemático, se concluye por el Lema 5.4.5.  $\square$

Parece claro que el morfismo  $f$  de la Proposición 5.4.9 debe ser 2-esquemático. Para probar esto, damos una caracterización análoga a la de la Proposición 5.4.8.

**Definición 5.4.10.** Un morfismo de posets anillados  $f: X \rightarrow Y$  se dice *qc-epiyectivo* si para todo  $y \in Y$ , el morfismo  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \prod_{f(x) \geq y} \mathcal{O}_{X,x}$  induce una epiyección entre los espectros.

*Observación 5.4.11.* Todo qc-isomorfismo de posets anillados, esquemático o no, es qc-epiyectivo.

**Proposición 5.4.12.** Sea  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morfismo entre **SchFin**-codatos 2-esquemáticos. Se verifica que  $f$  es 2-esquemático si y solo si para todo  $p \in |\mathcal{X}|$  y  $q \geq f(p)$ , el morfismo

$$\rho_{pq}^f: \text{Cyl}(U_p \cap f^{-1}(U_q)) \rightarrow \mathcal{X}(p) \times_{\mathcal{Y}(f(p))} \mathcal{Y}(q)$$

es qc-epiyectivo.

*Demostración.* Es una reescritura de la caracterización de la Proposición 4.2.11: basta observar que la antiimagen de  $U_{(x_p, y_q)}$  por este morfismo es  $U_{x_p} \cap f^{-1}(U_{y_q})$ .  $\square$

**Corolario 5.4.13.** En la situación del Lema 5.4.9,  $\text{Cyl}(f)$  es esquemático.

*Demostración.* En dicha situación, dados  $p \geq q \in |\mathcal{X}|$ , el morfismo  $\rho_{pq}^f$  de la Proposición 5.4.12 es  $\text{Cyl}(U_q) \rightarrow \mathcal{X}(p) \times_{\mathcal{Y}(p)} \mathcal{Y}(q)$ ; pero como la proyección  $\mathcal{X}(p) \times_{\mathcal{Y}(p)} \mathcal{Y}(q) \rightarrow \mathcal{Y}(q)$  es un qc-isomorfismo por la hipótesis sobre los  $f(p)$ ,  $\rho_{pq}^f$  coincide con la proyección del Lema 5.4.6, que es un qc-isomorfismo, luego qc-epiyectiva.  $\square$

*Ejemplo 5.4.14.* Consideremos un poset anillado  $X$  como el **SchFin**-codato  $\underline{X}$  tal que  $|\underline{X}| = |X|$  y  $\underline{X}(x) = (\star, \mathcal{O}_{X,x})$  —Notación 2.3.7—. Para este espacio, el Lema 5.4.9 es trivial y las Proposiciones 5.4.8 y 5.4.12 especializan al caso de las caracterizaciones ya conocidas para espacios esquemáticos.

Vamos a describir el *ejemplo fundamental* de espacio 2-esquemático: sea  $X$  esquemático y  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  una colección finita de inmersiones planas. Definimos el codato:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}: \mathcal{P}^*(I) &\rightarrow \mathbf{SchFin}^{\text{op}} \\ \Delta &\mapsto \prod_{i \in \Delta}^X U_i, \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{U}_{\Delta \Delta'}: \mathcal{U}(\Delta') \rightarrow \mathcal{U}(\Delta)$  es la proyección natural inducida por  $\Delta \subseteq \Delta'$ . Las proyecciones a  $X$  hacen que venga equipado con un morfismo natural

$$\mathcal{U} \rightarrow X,$$

donde  $X$  se considera como el codato constante.

**Definición 5.4.15.** Sea  $X$  esquemático. Diremos que una familia *finita* de inmersiones planas  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  es un *recubrimiento* si el morfismo  $\coprod_i U_i \rightarrow X$  es fielmente plano.

**Teorema 5.4.16.** Para todo espacio esquemático  $X$  y colección finita de inmersiones planas  $\{U_i \rightarrow X\}$ , el codato  $\mathcal{U}$  es 2-esquemático y el morfismo  $\text{Cyl}(\mathcal{U}) \rightarrow X$  una inmersión plana esquemática. Además,  $\text{Cyl}(\mathcal{U}) \rightarrow X$  es un qc-isomorfismo si y solo si la colección es un recubrimiento.

*Demostración.* Observemos en primer lugar que  $\mathcal{P}^*(I)$  tiene una estructura de retículo distributivo, lo cual se refleja en que, para todo  $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{P}^*(I)$ ,

$$U_{\Delta_1} \cap U_{\Delta_2} = U_{\Delta_1 \cup \Delta_2}.$$

Ahora es claro que  $\mathcal{U}$  es 2-esquemático, puesto que se verifican las condiciones de la Proposición 5.4.8. En efecto, dados  $\Delta_1, \Delta_2$  con intersección no vacía, se tiene

$$\text{Cyl}(U_{\Delta_1} \cap U_{\Delta_2}) = \text{Cyl}(U_{\Delta_1 \cup \Delta_2}),$$

que es qc-isomorfo a  $\mathcal{U}(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \mathcal{U}(\Delta_1) \times_{\mathcal{U}(\Delta_1 \cap \Delta_2)} \mathcal{U}(\Delta_2)$  por el Lema 5.4.6. Nótese que el hecho de que las  $U_i \rightarrow X$  de partida sean inmersiones planas, es decir, que sus diagonales sean qc-isomorfismos, es necesario para tener esta última identificación.

Por la Proposición 5.4.12, para ver que  $\pi: \text{Cyl}(\mathcal{U}) \rightarrow X$  es esquemático, basta notar que  $\pi$  es el cilindro el morfismo de codatos  $\mathcal{U} \rightarrow X$  —donde  $X$  se piensa como el codato  $(\star, X)$ — y que, para todo  $\Delta$ , el morfismo natural,

$$\text{Cyl}(U_{\Delta}) \rightarrow U_{\Delta} \times_X X \simeq U_{\Delta}$$

es un qc-isomorfismo de espacios anillados, luego qc-epiyectivo. En general,  $\pi$  es una inmersión plana por construcción, pues es un morfismo plano y el morfismo (véase la Proposición 2.3.6)

$$\text{Cyl}(\mathcal{U}) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{U}) \times_X \text{Cyl}(\mathcal{U}) \simeq \text{Cyl}(\mathcal{U} \times_X \mathcal{U})$$

viene inducido por qc-isomorfismos en cada punto, luego por el Lema 5.4.9 es un qc-isomorfismo. Por último,  $\pi: \text{Cyl}(\mathcal{U}) \rightarrow X$  será un qc-isomorfismo si y solo si es fielmente plano, pero esta es exactamente la condición de que  $\{f_{\Delta}: \mathcal{U}(\Delta) \rightarrow X\}$  recubra  $X$ .  $\square$

*Observación 5.4.17.* La última parte del Teorema 5.4.16 puede enunciarse en términos análogos a la de la futura Definición 6.2.1. En efecto, sea el codato  $\mathcal{U}' : \mathcal{P}(I) \rightarrow \mathbf{SchFin}^{\text{op}}$  tal que  $\emptyset \mapsto X$  y  $\mathcal{U}'_{|\mathcal{P}^*(I)} = \mathcal{U}$ . En este caso,  $\mathcal{U}' \rightarrow X$  induce siempre un qc-isomorfismo, puesto que  $\text{Cyl}(\mathcal{U}') \rightarrow X$  viene dado por la proyección al punto minimal  $\mathcal{U}(\emptyset) = X$  (Lema 5.4.6). Que el morfismo  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ , que induce la inclusión abierta  $\text{Cyl}(\mathcal{U}) \hookrightarrow \text{Cyl}(\mathcal{U}')$ , induzca un qc-isomorfismo —en particular, que lo sea  $\mathcal{U} \rightarrow X$ — se corresponde con el hecho de que  $\coprod_{\Delta} \mathcal{U}(\Delta) \rightarrow X$  sea fielmente plano, es decir, que  $\emptyset \in \mathcal{P}^*(I)$  sea un punto «2-redundante».

*Observación 5.4.18.* Las inmersiones planas  $U_i = \mathcal{U}(\{i\}) \rightarrow X$  aparecen como abiertos afines *salvo qc-isomorfismo* de  $\text{Cyl}(\mathcal{U})$ . En efecto, si  $\Delta = \{i\}$ , se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Cyl}(U_{\{i\}}) & \xrightarrow{i} & \text{Cyl}(\mathcal{U}) \longrightarrow X \\ \phi \downarrow & & \nearrow \\ U_i & & \end{array}$$

con  $i$  un abierto y  $\phi$  un qc-isomorfismo por el Lema 5.4.6.

Como caso particular del Teorema 5.4.16, en vista de las Observaciones 5.4.17 y 5.4.18, se tiene el «cilindro de un morfismo» definido en [32]:

**Corolario 5.4.19.** Sea  $f : U \rightarrow X$  un morfismo y  $\mathcal{U}^f : \{0 < 1\} \rightarrow \mathbf{SchFin}^{\text{op}}$  tal que  $\mathcal{U}^f(0) = X$ ,  $\mathcal{U}^f(1) = U$  y  $\mathcal{U}_{01}^f = f$  —esto es el codato  $\mathcal{U}$  asociado a  $\{f : U \rightarrow X\}$ , pero incluyendo la parte vacía—. Se verifica que  $\text{Cyl}(\mathcal{U}^f)$  es esquemático si y solo si  $f$  es una inmersión plana. En particular toda inmersión plana  $U \rightarrow X$  factoriza como

$$U \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{U}^f) \rightarrow X$$

con  $U \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{U}^f)$  una inmersión plana que es un abierto (topológico) y  $\text{Cyl}(\mathcal{U}^f) \rightarrow X$  un qc-isomorfismo.

Y aplicando el caso anterior a la proyección de un espacio a un punto —junto con el Teorema 5.1.9—, se obtiene el cilindro de un espacio esquemático definido en [28]:

**Corolario 5.4.20.** Sea  $X$  esquemático y  $\pi : X \rightarrow (\star, \mathcal{O}_X(X))$  su proyección natural. Se verifica que  $X$  es afín si y solo si  $\text{Cyl}(\mathcal{U}^\pi)$  es esquemático.

*Observación 5.4.21.* Dada una categoría  $\mathfrak{C}$  con equivalencias débiles y co-productos, un *objeto cilindro* de  $X \in \mathfrak{C}$ , denotado « $\text{Cyl}(X)$ », es aquel que da una factorización

$$X \amalg X \rightarrow \text{Cyl}(X) \rightarrow X,$$

donde  $\text{Cyl}(X) \rightarrow X$  es una equivalencia débil y  $X \amalg X \rightarrow \text{Cyl}(X)$  verifica propiedades «buenas» según el contexto lo requiera —si  $\mathfrak{C}$  tiene una estructura de modelos de Quillen, esto es que sea cofibrante—. Si especializamos a  $\mathfrak{C} = \mathbf{SchFin}$ , es claro que  $\text{Cyl}(X) := \text{Cyl}(\mathcal{U}^{\text{Id}})$  es un objeto cilindro en este sentido. Queda abierta la cuestión de si es posible definir una estructura de modelos en  $\mathbf{SchFin} \subseteq \mathbf{CRing-data}$  que añada más significado a este paralelismo —esta última siempre tiene equivalencias débiles: ¡aquellos morfismos que inducen isomorfismos entre los espectros!—. En determinados casos, puede plantearse la definición del «cono de un morfismo» —necesariamente para inmersiones planas sobre una base— y si este tiene alguna interpretación geométrica interesante.

El cilindro también nos da un modo de alterar la configuración combinatoria de un espacio finito sin modificar su información algebraica, es decir, de definir el modelo finito de un espacio esquemático respecto a un recubrimiento por inmersiones planas.

**Construcción 5.4.22** (Modelo finito de un espacio esquemático). Consideremos un espacio esquemático  $X$  y sea un recubrimiento finito por inmersiones planas  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  con  $U_i$  afín para todo  $i$ . *Supongamos además que los productos fibrados finitos de las  $U_i$  siguen siendo afines* —lo cual sucede, por ejemplo, si  $X$  es semiseparado—. Sea  $\mathcal{U}$  el espacio 2-esquemático asociado (Teorema 5.4.16) y denotemos por  $A_\Delta$  a las secciones globales de  $\mathcal{U}(\Delta)$ . Consideremos el  $\mathbf{SchFin}$ -codato  $\mathcal{O}(\mathcal{U})$  tal que

$$\begin{aligned} |\mathcal{O}(\mathcal{U})| &= \mathcal{P}^*(I) = |\mathcal{U}| \\ \mathcal{O}(\mathcal{U})(\Delta) &= (\star, A_\Delta); \end{aligned}$$

que es 2-esquemático por el Lema 5.4.9, pues el morfismo natural  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{U})$  es la identidad a nivel de posets y un qc-isomorfismo en cada punto  $\Delta$ . En particular, tomando cilindros, obtenemos un qc-isomorfismo esquemático

$$\text{Cyl}(\mathcal{U}) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))$$

de modo que las fibras del estructural de  $\text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))$  son las secciones globales de la intersección indexada por  $\Delta$  de los afines  $\{U_i \rightarrow X\}$  de partida. Finalmente, obtenemos qc-isomorfismos

$$\text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{U})) \leftarrow \text{Cyl}(\mathcal{U}) \rightarrow X.$$

**Definición 5.4.23.** Dado  $X$  esquemático y  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  un recubrimiento finito por inmersiones planas tal que  $U_{i_1} \times_X \dots \times_X U_{i_n} \rightarrow X$  son afines para todo  $i_1, \dots, i_n$ , se dice que el espacio  $\text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))$  de la Construcción 5.4.22 es el *modelo finito de  $X$  respecto al recubrimiento  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$* .

*Observación 5.4.24.* Si  $X$  es semiseparado, podemos considerar el recubrimiento canónico por inmersiones planas  $\{U_x \rightarrow X\}_{x \in X}$  y obtener un espacio esquemático semiseparado qc-isomorfo a  $X$  y cuyo poset subyacente es  $\mathcal{P}^*(X)$ . De hecho, si repetimos esta construcción, no añadimos ninguna información local nueva —aparecen anillos «repetidos», luego la «geometrización» del espacio  $\mathcal{P}^*(X)$  —futura Sección 6.4— es una especie de «modelo desplegado de  $X$ » que hace explícita la información algebraica de sus intersecciones. Se esboza una posible aplicación de esta idea al final del Apéndice B.4.

## 5.5. Descenso por inmersiones planas

Una aplicación inmediata del cilindro esquemático es reducir problemas de descenso en la topología de las inmersiones planas a problemas de descenso en abiertos de espacios topológico: esto es lo que llamaremos *externalizar* un problema de *descenso interno*, por motivos que en seguida quedarán patentes. Esta cuestión admite una reinterpretación en términos de haces cuyo lenguaje puede resultar más familiar al lector, véase la Sección 5.6.1.

**Definición 5.5.1.** Sea  $\mathfrak{Dat}: \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathfrak{C}$  un functor con valores en una 1-categoría (resp. 2-categoría)  $\mathfrak{C}$ . Diremos que  $\mathfrak{Dat}$  es un *functor geométrico* si manda qc-isomorfismos a isomorfismos (resp. 2-isomorfismos); es decir, si factoriza por  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}$ .

*Ejemplos 5.5.2.* Los omnipresentes funtores  $\text{Spec}: \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{LRS}$ , a valores en una 1-categoría, y  $\mathbf{Qcoh}: \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{Cat}^{\text{op}} (X \mapsto \mathbf{Qcoh}(X))$ , a valores en una 2-categoría, son los ejemplos fundamentales —en el mundo esquemático— de funtores geométricos.

Sea  $X$  un espacio esquemático. Al tratar de trasladar la transformación natural «de comparación» que vimos en la ecuación 2.3.4 —definida en principio para **CRing-data**— al caso esquemático aparecen morfismos  $(\star, \mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X$ , que no son esquemáticos en general —salvo si  $x$  es maximal—. Sin embargo, sí que tenemos estos morfismos en la localización **SchFin**<sub>qc</sub>, concretamente  $(\star, \mathcal{O}_{X,x}) \leftarrow U_x \hookrightarrow X$ . Componiendo con el functor de localización —omitido de la notación—, tenemos así una transformación natural entre dos funtores en [**SchFin**, **SchFin**<sub>qc-codata</sub>]

$$\eta: \widehat{i}_{\mathbf{SchFin}}^2 \rightarrow i_{\mathbf{SchFin}}^2.$$

Dado functor geométrico  $\mathcal{D}\mathbf{at}: \mathbf{SchFin}_{\text{qc}} \rightarrow \mathfrak{C}$  y componiendo con el functor que induce entre datos, tenemos funtores **SchFin**  $\rightarrow$  **C-codata**

$$\underline{\mathcal{D}\mathbf{at}} := \mathcal{D}\mathbf{at}_* \circ \widehat{i}_{\mathbf{SchFin}}^2 \quad \mathcal{D}\mathbf{at} \equiv \mathcal{D}\mathbf{at}_* \circ i_{\mathbf{SchFin}}^2;$$

de modo  $\underline{\mathcal{D}\mathbf{at}}(X)$  es el **C-codato** con  $|\underline{\mathcal{D}\mathbf{at}}(X)| = |X|$  y functor estructural tal que  $\underline{\mathcal{D}\mathbf{at}}(X)(x) = \mathcal{D}\mathbf{at}(\star, \mathcal{O}_{X,x})$ . La transformación natural  $\eta_{\mathcal{D}\mathbf{at}} := \mathcal{D}\mathbf{at}_* \circ \eta$

$$\eta_{\mathcal{D}\mathbf{at}}: \underline{\mathcal{D}\mathbf{at}} \rightarrow \mathcal{D}\mathbf{at}$$

entre funtores **SchFin**  $\rightarrow$  **C-codata** es precisamente la inducida por la proyección a un punto a nivel topológico y por los morfismos en **C**

$$\mathcal{D}\mathbf{at}(\star, \mathcal{O}_{X,x}) \xleftarrow{\sim} \mathcal{D}\mathbf{at}(U_x) \rightarrow \mathcal{D}\mathbf{at}(X). \quad (5.5.1)$$

Para lo que resta de sección, supondremos por simplicidad que **C** siempre tiene suficientes límites (resp. 2-límites), de modo que los funtores de secciones que aparecen en la discusión están definidos. Aunque esta condición no es imprescindible, será el caso en todas las aplicaciones.

**Definición 5.5.3.** Diremos que un functor geométrico  $\mathcal{D}\mathbf{at}$  con valores en una 1-categoría (resp. 2-categoría) *satisface descenso interno* si las secciones de la transformación natural asociada en la ecuación 5.5.1,

$$\Gamma(\eta_{\mathcal{D}\mathbf{at}}): \Gamma_* \circ \underline{\mathcal{D}\mathbf{at}} \rightarrow \Gamma_* \circ \mathcal{D}\mathbf{at} \equiv \mathcal{D}\mathbf{at},$$

son un isomorfismo de funtores **SchFin**  $\rightarrow$  **C** (resp. 2-isomorfismo).

*Observación 5.5.4.* De modo similar, se puede hablar de que  $\mathfrak{Dat}$  satisfaga descenso interno *respecto a cierta subcategoría*  $\mathfrak{C} \subseteq \mathbf{SchFin}$ , o incluso para ciertos objetos especificados.

*Ejemplo 5.5.5.* El functor  $\mathbf{Spec}$  satisface descenso interno *por definición*.

*Ejemplo 5.5.6.* En la Sección 3.1 vimos que el functor *geométrico* de haces cuasicoherentes  $\mathbf{Qcoh}: \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{Cat}^{\text{op}}$  satisface descenso interno. En efecto, la transformación natural  $\eta_{\mathbf{Qcoh}}$  está dada, para cada  $X$ , por el morfismo de  $\mathbf{Cat}^{\text{op}}$ -codata =  $\mathbf{Cat}$ -data

$$\mathbf{Qcoh}_X \rightarrow \mathbf{Qcoh}(X),$$

donde  $\mathbf{Qcoh}_X = \mathbf{Mod}_X$ ; que induce una equivalencia al tomar secciones por la Proposición 3.1.8. Ídem para  $\mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}$ ,  $\mathbf{Coh}$  y  $\mathbf{Coh}^{\text{alg}}$ .

Y con esta terminología, el siguiente resultado es formal —la demostración puede escribirse de modo más intrínseco en términos de secciones y «datos de datos», pero optamos por una presentación más sencilla notacionalmente—.

**Teorema 5.5.7** (de descenso externo). Si  $X$  es un espacio esquemático,  $\{f_i: U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  es un recubrimiento por inmersiones planas, denotamos  $\mathcal{U}: \mathcal{P}^*(I) \rightarrow \mathbf{SchFin}^{\text{op}}$  al codato asociado y  $\mathfrak{Dat}$  es un functor geométrico satisfaciendo descenso interno, existe un isomorfismo natural

$$\lim_{\Delta} \mathfrak{Dat}(\mathcal{U}(\Delta)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Dat}(X)$$

(resp. para 2-lím y «equivalencia» si trabajamos en 2-categorías).

*Demostración.* Por el Teorema 5.4.16,  $\text{Cyl}(\mathcal{U}) \rightarrow X$  es un qc-isomorfismo. Como  $\mathfrak{Dat}$  es un functor geométrico tenemos que

$$\mathfrak{Dat}(\text{Cyl}(\mathcal{U})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Dat}(X)$$

es un isomorfismo. Por otra parte, como  $\mathfrak{Dat}$  satisface descenso interno por hipótesis,  $\mathfrak{Dat}(\text{Cyl}(\mathcal{U})) \simeq \lim_{x_{\Delta}} \mathfrak{Dat}((\star, \mathcal{O}_{\mathcal{U}(\Delta), x_{\Delta}}))$ ; y como *límites conmutan con límites*, aplicando descenso interno a los  $\mathcal{U}(\Delta)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x_{\Delta} \in \text{Cyl}(\mathcal{U})} \mathfrak{Dat}((\star, \mathcal{O}_{\mathcal{U}(\Delta), x_{\Delta}})) &\simeq \lim_{\Delta \in \mathcal{P}^*(I)} \lim_{x_{\Delta} \in \mathcal{U}(\Delta)} \mathfrak{Dat}((\star, \mathcal{O}_{\mathcal{U}(\Delta), x_{\Delta}})) \simeq \\ &\simeq \lim_{\Delta \in \mathcal{P}^*(I)} \mathfrak{Dat}(\mathcal{U}(\Delta)); \end{aligned}$$

de donde se concluye. □

**Corolario 5.5.8.** Si  $X$  es esquemático y  $\{f_i: U_i \rightarrow X\}$  un recubrimiento con codato asociado  $\mathcal{U}$ , se tiene un isomorfismo natural

$$\mathbf{Qcoh}(X) \xrightarrow{\sim} 2\text{-lím}_\Delta \mathbf{Qcoh}(\mathcal{U}(\Delta));$$

ídem para  $\mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}$ ,  $\mathbf{Coh}$  y  $\mathbf{Coh}^{\text{alg}}$ .

**Corolario 5.5.9.** Sea  $X$  un esquemático y  $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}(X)$  un  $\mathcal{O}_X$ -módulo. Si existe un recubrimiento  $\{f_i: U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  por inmersiones planas tal que  $f_i^* \mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(U_i)$ , entonces  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ . Lo análogo es cierto para haces coherentes y haces de álgebras.

*Demostración.* Basta observar que las imágenes inversas de  $\mathcal{M}$  a cada  $\mathcal{U}(\Delta)$  del codato definido por el recubrimiento son compatibles por provenir de un dato global, luego  $\mathcal{M}$  define un elemento de  $2\text{-lím}_\Delta \mathbf{Qcoh}(\mathcal{U}(\Delta))$  y se concluye por el Corolario 5.5.8.  $\square$

*Observación 5.5.10.* En realidad, a nivel de cálculos de descenso, basta considerar  $\mathcal{P}^*(I)$  truncado hasta los puntos  $\Delta$  con  $\dim(C_\Delta) \leq 2$  —es decir, bastan las primeras intersecciones del recubrimiento—. Sin embargo, procediendo de ese modo, el espacio cilindro que aparece no es esquemático —por motivos análogos a los del Ejemplo 4.1.5—, así que para los argumentos que empleamos, que involucran qc-isomorfismos, hemos de considerar el cilindro completo.

## 5.6. La topología de las inmersiones planas

Como puede ser evidente de que los morfismos de restricción de un espacio esquemático  $X$  induzcan inmersiones planas  $(\star, \mathcal{O}_{X,y}) \rightarrow (\star, \mathcal{O}_{X,x})$  para  $x \leq y$ , así como por el rol de estas en la esquematicidad de los cilindros, las inmersiones planas definen la topología natural en la categoría esquemática —en sentido de «análoga a la topología de Zariski»: todo espacio esquemático es «localmente» afín respecto a las inmersiones planas—.

*Observación 5.6.1.* Como todas las categorías a las que vamos a dotar de estructura de sitio tienen productos fibrados, vamos a definir estas estructuras en términos de *pretopologías de Grothendieck*, es decir, definiendo familias de recubrimientos para cada objeto; puesto que en este caso es equivalente a la definición general vía «cribas recubridoras».

**Definición 5.6.2.** Dado un espacio esquemático  $X$ , se define el *sitio pequeño de las inmersiones planas en  $X$*  o *sitio pequeño débil de Zariski en  $X$*  como el sitio  $X_{\text{wZar}}$  tal que  $\text{Ob}(X_{\text{wZar}})$  son inmersiones planas  $U \rightarrow X$  y cuyos recubrimientos  $\mathbf{Cov}(U \rightarrow X)$  son familias finitas de inmersiones planas  $\{U_i \rightarrow U\}$  con  $\coprod_i U_i \rightarrow U$  fielmente plano.

*Observación 5.6.3.* Como las inmersiones planas definen subconjuntos del espectro, la localización por qc-isomorfismos de  $(X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}$  es claramente una categoría pequeña, de donde tomamos el nombre, aunque la categoría sin localizar no necesariamente lo sea. Al final, el topos correspondiente viene controlado por esta localización —Proposición 5.6.6—, así que no tendremos problemas de tamaño.

*Observación 5.6.4.* De modo análogo se define el sitio —muy— grande correspondiente.

*Notación 5.6.5.* A lo largo de esta memoria, cada vez que hablemos de *morfismos de sitios* nos estaremos refiriendo a la terminología del Apéndice B.3: un morfismo de sitios viene dado por un functor *continuo* en sentido opuesto. La ventaja de esto es notacional a la hora de definir los funtores imágenes directa e inversa inducidos, de modo que sean análogos al caso topológico: una aplicación continua  $f: S \rightarrow T$  puede entenderse como un morfismo de sitios cuyo functor subyacente sobre la categoría de abiertos está dado por  $U \mapsto f^{-1}(U)$ . Tendremos cuidado de mencionar explícitamente si nos referimos a estos morfismos o a sus funtores subyacentes.

Denotemos  $\mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}})$  al topos de haces correspondiente a  $X_{\text{wZar}}$ , que es de modo natural un topos anillado con haz estructural  $\mathcal{O}_{X_{\text{wZar}}}$  tal que

$$\mathcal{O}_{X_{\text{wZar}}}(U \rightarrow X) = \mathcal{O}_U(U);$$

y sean por  $\mathbf{Mod}(X_{\text{wZar}})$ ,  $\mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}})$ , etc., sus correspondientes categorías de haces de módulos, cuasicoherentes, etc., sobre dicho topos.

**Proposición 5.6.6.** Si  $X$  es esquemático y  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}})$ , entonces  $\mathcal{F}$  manda qc-isomorfismos a isomorfismos. Es decir, el functor de localización  $X_{\text{wZar}} \rightarrow (X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}$  induce una equivalencia de topos

$$\mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}}) \simeq \mathbf{Sh}((X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}).$$

*Demostración.* Es claro que  $(X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}$  hereda de modo natural una estructura de sitio, con los mismos objetos y recubrimientos que  $X_{\text{wZar}}$  salvo qc-isomorfismo. Sea  $U \rightarrow V$  un qc-isomorfismo entre inmersiones planas sobre  $X$ . Como es un recubrimiento, la condición de haz da una inyección  $\mathcal{F}(V \rightarrow X) \hookrightarrow \mathcal{F}(U \rightarrow X)$ . Para ver que es un isomorfismo, basta verlo tras un cambio de base: fibrando  $U \rightarrow V$  por sí mismo, obtenemos un qc-isomorfismo  $U \times_V U \rightarrow U$ , que admite la sección diagonal  $U \rightarrow U \times_V U$  —que también es un qc-isomorfismo—; lo cual nos da inyecciones  $\mathcal{F}(U \rightarrow X) \hookrightarrow \mathcal{F}(U \times_V U \rightarrow X) \hookrightarrow \mathcal{F}(U \rightarrow X)$  que, a la postre, son isomorfismos.  $\square$

*Observación 5.6.7.* El argumento de la Proposición 5.6.6 es válido en cualquier topología tal que los qc-isomorfismos sean recubrimientos.

*Observación 5.6.8.* El sitio  $X_{\text{wZar}}$  *no es subcanónico*: los funtores de puntos determinan completamente la parte topológica del espacio, luego no pueden enviar qc-isomorfismos a isomorfismos. Sin embargo, los funtores de puntos en la localización por qc-isomorfismos sí son haces, luego  $(X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}$  sí es subcanónico.

Sea  $\mathbf{PSh}(X_{\text{wZar}})$  la categoría de prehaces de conjuntos en  $X_{\text{wZar}}$ . Dado un prehaz  $\mathcal{F}$ , denotaremos por  $\mathcal{F}^\sharp$ , *si existe*, a la *hacificación de  $\mathcal{F}$* ; esto es, al único haz  $\mathcal{F}^\sharp \in \mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}})$  dotado de un morfismo  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\sharp$  verificando que, para todo haz  $\mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}})$ , el morfismo inducido

$$\text{Hom}_{\mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}})}(\mathcal{F}^\sharp, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{PSh}(X_{\text{wZar}})}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

es biyectivo.

**Proposición 5.6.9.** Si  $X_{\text{wZar}}$  es como hasta ahora e  $Y \rightarrow X$  es una inmersión plana, la hacificación del «prehaz de puntos» de  $Y$ , que llamaremos *haz de puntos de  $Y$* , es su functor de puntos en la categoría localizada, es decir,

$$\text{Hom}_{X_{\text{wZar}}}(-, Y)^\sharp \simeq \text{Hom}_{(X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}}(-, Y).$$

*Demostración.* En efecto, comprobemos que se verifica la propiedad universal: dado un haz  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}})$ , se tiene, aplicando Yoneda en  $X_{\text{wZar}}$  y  $(X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}$  respectivamente y teniendo en cuenta que todo haz factoriza por

la localización por qc-isomorfismos por la Proposición 5.6.6,

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X_{\mathrm{wZar}})}(\mathrm{Hom}_{(X_{\mathrm{wZar}})_{\mathrm{qc}}}(-, Y), \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(Y) \simeq \\ & \simeq \mathrm{Hom}_{[(X_{\mathrm{wZar}})_{\mathrm{qc}}, \mathbf{Set}]}(\mathrm{Hom}_{(X_{\mathrm{wZar}})_{\mathrm{qc}}}(-, Y), \mathcal{F}) = \\ & = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}((X_{\mathrm{wZar}})_{\mathrm{qc}})}(\mathrm{Hom}_{(X_{\mathrm{wZar}})_{\mathrm{qc}}}(-, Y), \mathcal{F}) = \\ & = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X_{\mathrm{wZar}})}(\mathrm{Hom}_{(X_{\mathrm{wZar}})_{\mathrm{qc}}}(-, Y), \mathcal{F}); \end{aligned}$$

de donde se concluye.  $\square$

**Proposición 5.6.10.** Si  $\phi: X \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo, se induce una equivalencia de topos  $(\phi^{-1} \dashv \phi_*): \mathbf{Sh}(X_{\mathrm{wZar}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sh}(Y_{\mathrm{wZar}})$ .

*Demostración.* Probemos que, de hecho, se tiene una equivalencia de sitios  $(X_{\mathrm{wZar}})_{\mathrm{qc}} \simeq (Y_{\mathrm{wZar}})_{\mathrm{qc}}$ , con lo que concluiríamos por la Proposición 5.6.6. Dada una inmersión plana  $V \rightarrow Y$ , el cambio de base  $X \times_Y V \rightarrow V \rightarrow Y$  es qc-isomorfo ella —por ser los qc-isomorfismos estables por cambio de base—; mientras que dada una inmersión plana  $U \rightarrow X$ , el morfismo natural  $U \rightarrow U \times_Y X$  es un qc-isomorfismo por idénticos motivos. Es fácil comprobar que esto extiende a recubrimientos.  $\square$

**Definición 5.6.11.** Dado un esquema  $S$ , definimos el *sitio pequeño de los monomorfismos planos en  $S$*  o *sitio pequeño débil de Zariski en  $S$*  como el sitio  $S_{\mathrm{wZar}}$  cuyos objetos son inmersiones planas  $T \rightarrow S$  y equipado con recubrimientos fpqc.

Con las notaciones habituales para los sitios pequeños étale, fppf, pro-étale y fpqc sobre un esquema  $S$ , se tienen funtores de inclusión naturales —y de hecho, morfismos de sitios en dirección opuesta—

$$\begin{array}{ccccc} S_{\mathrm{Zar}} & \longrightarrow & S_{\mathrm{ét}} & \longrightarrow & S_{\mathrm{fppf}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_{\mathrm{wZar}} & \longrightarrow & S_{\mathrm{pro-ét}} & \longrightarrow & S_{\mathrm{fpqc}}. \end{array}$$

En este sentido,  $S_{\mathrm{wZar}}$  es, hasta donde sabemos, el único de estos sitios «elementales» que no estudiado sistemáticamente en la literatura. Véase el apartado *Comparación con morfismos ind-Zariski* del Apéndice B.2 para una discusión en mayor profundidad..

*Observación 5.6.12* (Recubrimientos fpqc de esquemas). Recordemos que dado un esquema  $S$ , una familia  $\{f_i: V_i \rightarrow S\}_{i \in I}$  es un *recubrimiento fpqc* si 1) cada  $f_i$  es plano; 2)  $\coprod_i f_i$  es epiyectivo; y 3) para cada afín  $U \subseteq S$  existe un conjunto finito  $K_U$ , una aplicación  $i_U: K_U \rightarrow I$  y abiertos afines  $W_{i_U(k)} \subseteq V_{i_U(k)}$  cuyas imágenes recubren  $U$ .

Si  $S$  es un esquema afín, por definición —para  $U = S$ — se tiene que todo recubrimiento fpqc  $\{V_i \rightarrow S\}$  se refina por un recubrimiento *finito*  $\{U_j \rightarrow S\}$  tal que, además, los  $U_j \rightarrow S$  son composición de algún  $V_i \rightarrow S$  con una inmersión abierta.

Más en general, restringiéndonos al caso cuasicompacto —por ejemplo,  $S$  noetheriano— y el conjunto  $I$  es finito, toda familia verificando 1) y 2) es un recubrimiento fpqc: para cada  $U$  y cada  $i$  encontramos un recubrimiento abierto finito de cada  $f_i^{-1}(U)$ , lo cual se ve fácilmente que implica la tercera condición. Recíprocamente, todo recubrimiento fpqc de un esquema cuasicompacto puede refinarse por un subrecubrimiento fpqc finito por esquemas afines. En efecto, si  $\{U_k \subseteq S\}_{k \in L}$  es un recubrimiento finito y afín por abiertos de  $S$  y  $\{V_i \rightarrow S\}$  un recubrimiento fpqc, los recubrimientos  $\{U_k \times_S V_i \rightarrow U_k\}$  son fpqc de afines, luego refinables por recubrimientos finitos  $\{W_j \rightarrow U_k\}_{j \in J_k}$ ; y ahora podemos considerar  $\{W_j \rightarrow U_k \rightarrow S\}_{j,k}$  para concluir.

En virtud de la Observación 5.6.12 y de que todo esquema es localmente afín, el subsitio  $S_{\text{wZar}}^{\text{Aff}}$  de los monomorfismos planos a  $S$  desde un esquema afín *y recubrimientos finitos* genera el mismo topos  $\mathbf{Sh}(S_{\text{wZar}}^{\text{Aff}}) \simeq \mathbf{Sh}(S_{\text{wZar}})$ . Esta reducción nos permite probar:

**Proposición 5.6.13.** Sea  $X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}}$  el subsitio de  $X_{\text{wZar}}$  cuyos objetos son inmersiones planas con espacio de salida afín. Se verifica que la inclusión natural  $X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}} \subseteq X_{\text{wZar}}$  es un functor continuo y cocontinuo con morfismo de sitios asociado  $f: X_{\text{wZar}} \rightarrow X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}}$  induciendo una equivalencia

$$(f_* \dashv f^!): \mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}}).$$

*Demostración.* La inclusión de sitios siempre es continua y es cococontinua porque todo espacio esquemático admite un recubrimiento finito por inmersiones planas desde afines: el de los abiertos mínimos. Por idéntico motivo, es evidente que se verifican las condiciones del Lema B.3.5, luego  $(f_* \dashv f^!)$  es una equivalencia de topos.  $\square$

**Proposición 5.6.14.** Si  $X$  es esquemático y  $S = \text{Spec}(X)$  es un esquema, se tiene una equivalencia de topos  $\mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}}) \simeq \mathbf{Sh}(S_{\text{wZar}})$ .

*Demostración.* Por la Proposición 5.6.13 y su análogo para el sitio de los monomorfismos planos de esquemas, basta probarlo para las categorías de haces en los sitios cuyos objetos son espacios (resp. esquemas) afines. A ese nivel, se tiene una clara equivalencia de sitios  $(X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}})_{\text{qc}} \simeq S_{\text{wZar}}^{\text{Aff}}$ , que induce la equivalencia deseada.  $\square$

*Observación 5.6.15.* Sin pasar por este subsitio de espacios afines, *a priori* no se tiene una equivalencia  $(X_{\text{wZar}})_{\text{qc}} \simeq S_{\text{wZar}}$ , puesto que dada una inmersión plana  $U \rightarrow X$  podría suceder que  $\text{Spec}(U)$  no fuese un esquema. La posible respuesta afirmativa a este problema es una cuestión abierta relacionada con la discusión de la Conjetura B.4.34.

*Observación 5.6.16* (Functor de hacificación). En general no está claro si tenemos un functor de hacificación

$$(-)^{\#}: \mathbf{PSh}(X_{\text{wZar}}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}})$$

adjunto por la izquierda de la inclusión natural; ídem para prehaces de módulos, anillos, etc. Por ejemplo, en la topología fpqc de esquemas, este functor no existe por cuestiones de tamaño: la clase de recubrimientos fpqc de un esquema afín no es un conjunto, aunque sí lo hace si consideramos recubrimientos afines por anillos de cardinalidad acotada. En nuestro caso, como la colección de todos los conjuntos finitos no es un conjunto y siempre podemos construir infinitos espacios esquemáticos qc-isomorfos sin más que añadir puntos maximales y extender por cero el haz de anillos estructural, *a priori*, la colección de recubrimientos de un espacio esquemático afín no es un conjunto y caemos en el mismo problema.

Ante esto, la opción directa sería tratar de acotar la cardinalidad de los recubrimientos considerados en algún sentido y, en relación con esto, tratar de evitar este proceso de «añadir puntos» a nuestros espacios mediante reducciones que realizaremos más adelante —Sección 6.4—; viendo si en ese caso se pueden acotar adecuadamente los recubrimientos. Sin embargo, no necesitamos ninguna de estas cuestiones: como *todas las situaciones en que vamos a necesitar hacificar* provienen de construcciones sobre haces, por ejemplo, imágenes inversas, colímites, cocientes, etc.; y estos pueden

considerarse como funtores  $(X_{\text{wZar}})_{\text{qc}} \rightarrow \mathbf{Set}$ , nos basta hacificar prehaces así definidos. Pero como las clases de qc-isomorfismo de inmersiones planas se identifican con subconjuntos de  $\text{Spec}(X)$ , las clases de qc-isomorfismo de recubrimientos sí forman conjunto y sí que tenemos functor de hacificación

$$(-)^{\sharp}: \mathbf{PSh}((X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}}),$$

que será más que suficiente para todas las construcciones que realizaremos.

### 5.6.1. Haces versus descenso

Argumentamos por simplicidad para haces de conjuntos, pero lo que sigue generaliza a cualquier categoría (resp. 2-categoría)  $\mathfrak{C}$  «razonable». Vamos a considerar los sitios «grandes» de las inmersiones planas y topológico de espacios esquemáticos sobre  $(\star, \mathbb{Z})$ , definidos del modo evidente y que denotamos  $\mathbf{SchFin}_{\text{wZar}}$  y  $\mathbf{SchFin}_{\tau}$  respectivamente. Para cada  $X$  esquemático tenemos funtores de inclusión  $r_X^w: X_{\text{wZar}} \rightarrow \mathbf{SchFin}_{\text{wZar}}$  y  $r_X^{\tau}: X_{\tau} \rightarrow \mathbf{SchFin}_{\tau}$  definiendo morfismos de sitios en sentido opuesto. Puede traducirse el lenguaje de la Sección 5.5 del siguiente modo:

- Todo haz en cualquiera de los sitios presentados envía qc-isomorfismos a isomorfismos, luego factoriza por qc-isomorfismos. Es decir, el opuesto de todo haz es un functor geométrico —Definición 5.5.3—.
- Dado un prehaz  $\mathcal{F}: \mathbf{SchFin}_{\tau}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{C}$  se verifica que es un haz si y solo si  $\mathcal{F}^{\text{op}}$  es geométrico y verifica descenso interno; pudiendo además sustituirse la segunda condición por que la restricción  $(r_X^{\tau})_*(\mathcal{F})^{\text{op}}$  sea un haz para todo  $X$ .
- Se tiene un morfismo de sitios  $\text{Id}_{\tau, \text{wZar}}: \mathbf{SchFin}_{\text{wZar}} \rightarrow \mathbf{SchFin}_{\tau}$  inducido por el functor identidad. Es estándar que el functor imagen directa asociado no requiere hacificar, pero por el Teorema 5.5.7,

$$(\text{Id}_{\tau, \text{wZar}})^{-1}: \mathbf{Sh}(\mathbf{SchFin}_{\tau}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{SchFin}_{\text{wZar}})$$

tampoco lo requiere en este caso. En particular, como la categoría subyacente es la misma en ambos casos, se concluye que este functor define una equivalencia de topos.

**Teorema 5.6.17** (de descenso externo). La inclusión de sitios natural  $\mathbf{SchFin}_\tau \subseteq \mathbf{SchFin}_{\mathbf{wZar}}$  induce una equivalencia de topos

$$\mathbf{Sh}(\mathbf{SchFin}_\tau) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sh}(\mathbf{SchFin}_{\mathbf{wZar}}).$$

*Demostración.* Se sigue de la discusión previa.  $\square$

Esto es análogo a lo que sucede en esquemas con el sitio topológico y el sitio de Zariski, pero en nuestro caso no podemos enunciarlo a nivel de sitios pequeños de modo tan directo. Es decir, la equivalencia no restringe en general a sitios pequeños sobre un  $X$ , puesto que el paso por el functor cilindro, que necesitamos para dar dicha equivalencia, modifica el espacio de llegada por una inmersión plana; no por un abierto topológico.

### 5.6.2. Comparación con el sitio anillado topológico

Dado  $X$  esquemático, todo morfismo  $U_x \rightarrow X$  es una inmersión plana, luego si  $X_\tau$  es el sitio definido por la topología del poset subyacente  $|X|$ , se tiene un morfismo  $i: X_{\mathbf{wZar}} \rightarrow X_\tau$  definido por el functor continuo de inclusión  $X_\tau \hookrightarrow X_{\mathbf{wZar}}$ .

*Observación 5.6.18.* Una vez más, lo que sigue no será necesario para nuestra exposición, pues nos restringiremos a módulos cuasicoherentes, donde todo estará bien definido; pero observemos que, de existir hacificación, el functor imagen inversa  $i^{-1}: \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X_{\mathbf{wZar}})$  enviaría cada haz  $\mathcal{F}$  al hacificado del prehaz  $i_p^{-1}(\mathcal{F})$  tal que

$$i_p^{-1}(\mathcal{F})(f: U \rightarrow X) = \mathcal{F}(U_{f(U)}),$$

donde  $U_{f(U)}$  denota el menor abierto que contiene a  $f(U)$ . Como veremos en la Sección 6.2, si nos restringimos a la subcategoría de «espacios concisos» —cosa que podremos hacer sin pérdida de generalidad por el Teorema 6.2.6 y la Proposición 5.6.10—, los qc-isomorfismos son epiyectivos —Proposición 6.2.12—, y con esta condición adicional es claro que el functor  $i_p^{-1}(\mathcal{F})$  envía qc-isomorfismos —sobre  $X$ — a isomorfismos. Es más, dadas inmersiones planas  $f: U \rightarrow X$  y  $g: V \rightarrow X$  con producto fibrado  $h: U \times_X V \rightarrow X$ , se verifica que

$$U_{h(U \times_X V)} = U_{f(U)} \cap U_{g(U)}.$$

Por ello, si  $U \amalg V \rightarrow X$  es epiyectivo, es fácil comprobar que  $i_p^{-1}(\mathcal{F})$  verifica la condición de haz para este recubrimiento, i.e.  $i^{-1} \simeq i_p^{-1}$ .

Dotando ahora a  $X_{\text{wZar}}$  de estructura de sitio anillado de haz estructural

$$\mathcal{O}_{X_{\text{wZar}}}(f: U \rightarrow X) = \mathcal{O}_U(U)$$

—que *no* es la imagen inversa del estructural  $\mathcal{O}_X$ , pero coincide con este cuando  $U$  es un abierto de  $X$ —, se tiene un morfismo de sitios anillados  $i: (X_{\text{wZar}}, \mathcal{O}_{X_{\text{wZar}}}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  con  $i^\sharp$  definida, en cada inmersión plana  $f: U \rightarrow X$ , por  $f_\sharp$ . Se induce así una pareja de adjuntas

$$(i^* \dashv i_*): \mathbf{Mod}(X_{\text{wZar}}) \rightarrow \mathbf{Mod}(X),$$

a la que nos referiremos por «morfismo geométrico» —tomando prestada la terminología de topos—. Sea, por otro lado, el functor  $(-)^a$  que envía un módulo  $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}(X)$  a

$$\mathcal{M}^a(f: U \rightarrow X) := (f^*\mathcal{M})(U). \quad (5.6.1)$$

Aquí,  $f^*$  no es más que la imagen inversa de haces de módulos en espacios topológicos.

El objetivo ahora sería probar que el functor  $i^*$  coincide —vía isomorfismo natural— con la «hacificación» de  $(-)^a$ . Como no podemos garantizar la existencia de un functor de hacificación, comenzaremos probando que, para todo  $\mathcal{O}_X$ -módulo cuasicoherente  $\mathcal{M}^a$  es un haz —y de hecho, cuasicoherente—. Así, probaremos que  $i^* \simeq (-)^a$  cuando nos restringimos a módulos cuasicoherentes, hecho más que suficiente para esta memoria pues, como ya mencionamos, son los módulos cuasicoherentes quienes nos conciernen en el estudio de los espacios esquemáticos. Los siguientes Lemas son leves modificaciones de [10, 03DR].

**Lema 5.6.19.** Si  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ , se verifica que  $\mathcal{M}^a$  verifica es un haz en  $X_{\text{wZar}}$  y, de hecho, un  $\mathcal{O}_{X_{\text{wZar}}}$ -módulo cuasicoherente.

*Demostración.* Nótese que  $i^*$  se expresa en términos de funtores imagen inversa  $f^*$  de espacios anillados, que preservan cuasicoherencia. Cada sección global de un  $\mathcal{M}$  está dada por  $s: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{M}$ , y por tanto una sección de  $f^*\mathcal{M}$  es  $s: \mathcal{O}_U \rightarrow f^*\mathcal{M}$ ; luego verificar la condición de haz en un recubrimiento  $\{U_i \rightarrow U\}$  de un  $\{f: U \rightarrow X\}$  basta aplicar descenso para haces

cuasicoherentes respecto a inmersiones planas del Corolario 5.5.8 a nivel de morfismos. La segunda parte se sigue del Corolario 5.5.9 por motivos similares.  $\square$

Lo que sigue hasta el Lema 5.6.20 es una adaptación de [10, Lemma 070S] a espacios esquemáticos y sitios «pequeños». Observemos que el functor  $(-)^a$  tiene sentido no solo a valores en haces en  $X_{\text{wZar}}$ , sino a valores en cualquier sitio «grande» de espacios esquemáticos sobre  $X$ , i.e. cuyos objetos son espacios esquemáticos sobre  $X$  cualesquiera. Nosotros vamos a considerar el sitio grande topológico  $(\mathbf{SchFin}/X)_\tau$  y el sitio grande de las inmersiones planas  $(\mathbf{SchFin}/X)_{\text{wZar}}$ , como sitios anillados con sus haces estructurales obvios. El functor identidad da un morfismo de sitios  $\text{Id}_{\tau, \text{wZar}}: (\mathbf{SchFin}/X)_{\text{wZar}} \rightarrow (\mathbf{SchFin}/X)_\tau$  tal que functor imagen inversa

$$\text{Id}_{\tau, \text{wZar}}^*: \mathbf{Mod}((\mathbf{SchFin}/X)_\tau) \rightarrow \mathbf{Mod}((\mathbf{SchFin}/X)_{\text{wZar}})$$

sería, *a priori*, la hacificación en la topología de las inmersiones planas —aplicaría de nuevo la Observación 5.6.16—, pues el haz de anillos en  $(\mathbf{SchFin}/X)_\tau$  es  $\mathcal{O}_\tau(V \rightarrow X) = \mathcal{O}_V(V)$  y su imagen inversa es exactamente el estructural del sitio de salida; i.e.  $\text{Id}_{\tau, \text{wZar}}^* \simeq \text{Id}_{\tau, \text{wZar}}^{-1}$ . Pero además, por el Teorema 5.6.17,  $\text{Id}_{\tau, \text{wZar}}$  es una *equivalencia*.

Vamos a considerar los morfismos de sitios  $j: (\mathbf{SchFin}/X)_\tau \rightarrow X_\tau$  y  $h: (\mathbf{SchFin}/X)_{\text{wZar}} \rightarrow X_{\text{wZar}}$  dados por los funtores de inclusión natural y los morfismos de topos que inducen, que verifican  $j_* \circ j^* \simeq \text{Id}$ , ídem para  $h$ . Es claro también que  $i \circ h = j \circ \text{Id}_{\tau, \text{wZar}}$ , luego  $h^* \circ i^* = \text{Id}_{\tau, \text{wZar}}^* \circ j^*$  y, finalmente,  $i^* = h_* \circ \text{Id}_{\tau, \text{wZar}}^* \circ j^*$ , donde  $h_*$  es el functor de restricción.

**Lema 5.6.20.** El functor  $(-)^a: \mathbf{Qcoh}(X) \rightarrow \mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}})$  es naturalmente isomorfo a  $i^*$ .

*Demostración.* El functor está bien definido por el Lema 5.6.19 previo. Así, toda inmersión plana  $f: U \rightarrow X$ , que interpretamos como morfismo de sitios  $U_\tau \rightarrow X_\tau$ , induce un functor continuo  $U_\tau \rightarrow (\mathbf{SchFin}/X)_\tau$  y, por tanto, un morfismo de topos  $\varphi_f: \mathbf{Sh}(U) \rightarrow \mathbf{Sh}((\mathbf{SchFin}/X)_\tau)$  tal que  $(\varphi_f^{-1}\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(V \subseteq U \rightarrow X)$  —véase párrafo previo a la Proposición B.3.4— y de modo que, pasando ahora a haces de módulos, se verifica  $(j^*, j_*) \circ \varphi_f = (f^*, f_*)$ , luego a nivel de imágenes inversas es  $f^* \simeq \varphi_f^* \circ j^*$ . Nótese que  $\varphi_f^* \simeq \varphi_f^{-1}$  con las elecciones naturales.

Sea, por otro lado, el morfismo de sitios pequeños  $f_{\text{wZar}}: U_{\text{wZar}} \rightarrow X_{\text{wZar}}$  inducido por el cambio de base y sea  $i_U: U_{\text{wZar}} \rightarrow U_\tau$  el morfismo de sitios análogo de  $i$  para los sitios pequeños sobre  $U$ . Se verifica  $f \circ i_U = i \circ f_{\text{wZar}}$ . Denotemos por  $\varphi_f^{\text{wZar}}$  al análogo de  $\varphi_f$  para la topología de las inmersiones planas —que se comprueba viene inducido por un functor cocontinuo en la localización—. Como el argumento previo es también válido en la topología de las inmersiones planas, se tiene un diagrama conmutativo de «morfismos geométricos»

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{Mod}(U) & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Mod}(X) \\
 \uparrow i_U & \searrow \varphi_f & & \nearrow j & \uparrow i \\
 & & \mathbf{Mod}((\mathbf{SchFin}/X)_\tau) & & \\
 & & \uparrow \text{Id}_{\tau, \text{wZar}} \sim & & \\
 & & \mathbf{Mod}((\mathbf{SchFin}/X)_{\text{wZar}}) & & \\
 \nearrow \varphi_f^{\text{wZar}} & & & \searrow h & \\
 \mathbf{Mod}(U_{\text{wZar}}) & \xrightarrow{f_{\text{wZar}}} & & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Mod}(X_{\text{wZar}});
 \end{array}$$

donde solo queda observar que, como esto vale para cualquier  $f: U \rightarrow X$ , para todo  $\mathcal{M}$  es

$$\begin{aligned}
 (i_U^* \circ \varphi_f^* \circ j^* \mathcal{M})(U \rightarrow U) &\simeq (\varphi_f^{\text{wZar}*} \circ \text{Id}_{\tau, \text{wZar}}^* \circ j^*)(U \rightarrow X) \simeq \\
 &\simeq (f_{\text{wZar}}^* \circ i^*)(\mathcal{M})(U) \simeq i^* \mathcal{M}(U \rightarrow X);
 \end{aligned}$$

donde el haz  $U \mapsto (i_U^* \circ \varphi_f^* \circ j^* \mathcal{M})(U \rightarrow U)$  es, por construcción, la hacificación en inmersiones planas del prehaz  $(f: U \rightarrow X) \mapsto (f^* \mathcal{M})(U)$ , como queríamos ver.  $\square$

*Observación 5.6.21.* El Lema 5.6.20 es generalizable a otras topologías « $\alpha$ » definiendo un sitio grande —anillado—  $(\mathbf{SchFin}/X)_\alpha$ , para las cuales el functor análogo entre los sitios grandes  $\text{Id}_{\tau, \alpha}^{-1}$  no es una equivalencia, sino solo el functor de hacificación. En ese caso  $i^*: \mathbf{Qcoh}(X) \rightarrow \mathbf{Mod}((\mathbf{SchFin}/X)_\alpha)$  es isomorfo a la composición de  $(-)^a: \mathbf{Qcoh}(X) \rightarrow \mathbf{PSh}((\mathbf{SchFin}/X)_\alpha)_{\text{qc}}$  —con valores en prehaces de módulos— con el functor de hacificación en la topología  $\alpha$ , i.e.  $(-)^{\sharp} \circ (-)^a \simeq i^*$ . Con esencialmente la misma demostración

que la ya expuesta, se prueba que este resultado será cierto para todas las topologías construidas en la Sección 7.7.2, siempre y cuando hacificar sea functorial para ellas a nivel de la localización por qc-isomorfismos —lo cual excluye variantes de la fpqc—. Además, podremos restringirlo a nivel de sitios pequeños cuando tengamos definido el correspondiente morfismo geométrico « $\varphi_f^\alpha$ »; es decir, si el correspondiente functor que lo induce es cocontinuo.

Nos restringimos a la situación cuasicoherente, donde gracias a los Lemas 5.6.19 y 5.6.20 tenemos una descripción explícita. Así, es claro que  $\text{Id} \simeq i_*i^*$ , pues dado  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$

$$(i_*i^*\mathcal{M})_x = (i^*\mathcal{M})(U_x \xrightarrow{j_x} X) = (j_x^*\mathcal{M})(U_x) = \mathcal{M}_x$$

para todo  $x \in X$  —en particular,  $i_*$  es esencialmente epiyectivo—. Si está claro por el contexto, denotaremos  $\mathcal{M} \equiv i^*\mathcal{M}$ .

**Lema 5.6.22.** El functor  $i^*: \mathbf{Qcoh}(X) \rightarrow \mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}})$  es plenamente fiel.

*Demostración.* Dados  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ , por la adjunción y la discusión previa, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{Qcoh}(X)}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{Qcoh}(X)}(\mathcal{M}, i_*i^*\mathcal{N}) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}})}(i^*\mathcal{M}, i^*\mathcal{N}), \end{aligned}$$

por lo que concluimos. Nótese que  $i^*$  preserva cuasicoherencia por el Lema 5.6.19.  $\square$

**Definición 5.6.23.** Un  $\mathcal{O}_{X_{\text{wZar}}}$ -módulo  $\mathcal{M}$  es *clásico* si está en la imagen esencial de  $i^*$ .

**Lema 5.6.24.** El functor imagen directa  $i_*$  preserva cuasicoherencia, es decir, restringe a  $i_*: \mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}}) \rightarrow \mathbf{Qcoh}(X)$ .

*Demostración.* Hay que ver que, para  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}})$ ,  $i_*\mathcal{M}$  es cuasicoherente. Sean  $x \leq y$  en  $X$ , es decir tales que se tiene una inclusión —y por tanto inmersión plana—  $U_y \subseteq U_x$ . Por la hipótesis, existe un recubrimiento

$\{f_i: U_i \rightarrow U_x\}$ , en el que podemos suponer que los  $U_i$  son afines, tal que, denotando por  $f_i$  a la composición  $U_i \rightarrow X$ , se tiene una sucesión exacta

$$\mathcal{O}_{U_i}^{\oplus J} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus I} \rightarrow f_i^* \mathcal{M} \rightarrow 0,$$

que mantiene la exactitud al tomar secciones globales por la afinidad. Sea el recubrimiento cambiado de base  $\{g_i: V_i = U_y \times_{U_x} U_i \rightarrow U_y\}$ . Por ser todos los espacios afines, se verifica que  $\mathcal{O}_{V_i}(V_i) \simeq \mathcal{O}_{U_i}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y}$ . Cambiando de base a  $V_i$  la sucesión exacta previa, tomando secciones globales y por el «lema de los cinco», se concluye que

$$\mathcal{M}(U_i \rightarrow X) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(V_i \rightarrow X)$$

es un isomorfismo para todo  $i$ . Como  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,y}$  es plano, cambiando de base la condición de haz para  $U_x \rightarrow X$  y el recubrimiento dado, se obtiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{M}(U_x \rightarrow X) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \prod_i \mathcal{M}(V_i \rightarrow X) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{M}(V_i \times_X V_j \rightarrow X);$$

luego  $\mathcal{M}(U_x \rightarrow X) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \simeq \mathcal{M}(U_y \rightarrow X)$  por la condición de haz.  $\square$

**Lema 5.6.25.** Si  $X$  es afín con secciones globales  $A = \mathcal{O}_X(X)$ , el functor  $i^*$  induce una equivalencia  $\mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}}) \simeq \mathbf{Mod}(A)$ .

*Demostración.* Como caso particular de la Proposición 5.6.13, basta verlo en  $\mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}})$ , donde, de hecho, podemos suponer que todos los objetos son espacios puntuales. Denotamos a las secciones en términos del anillo de secciones globales por simplicidad. Dado un módulo  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}})$ , por la cuasicoherencia, existe un recubrimiento  $\{(\star, A_j) \rightarrow (\star, A)\}$  por inmersiones planas de modo que  $\mathcal{M}(A_j)$  es conúcleo de  $A_j$ -módulos libres. Cambiando de base este recubrimiento, se tiene que  $\{(\star, B \otimes_A A_j) \rightarrow (\star, B)\}$  expresa a  $\mathcal{M}(B \otimes_A A_j)$  como un conúcleo de  $(B \otimes_A A_j)$ -módulos libres. Del lema de los cinco se deduce que  $\mathcal{M}(B \otimes_A A_j) \simeq B \otimes_A \mathcal{M}(A_j)$ ; de la condición de haz, se concluye que  $\mathcal{M}(B) \simeq B \otimes_A \mathcal{M}(A)$ , lo que implica el resultado.  $\square$

**Proposición 5.6.26.** Todo módulo cuasicohrente en  $X_{\text{wZar}}$  es clásico. Es decir, la pareja de adjuntas  $(i^* \dashv i_*)$  induce una equivalencia

$$(i^* \dashv i_*): \mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Qcoh}(X).$$

*Demostración.* Solo queda ver que  $i^*i_* \simeq \text{Id}$  para los cuasicoherentes. Sean  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}})$  y  $f: U \rightarrow X$  una inmersión plana; y demostremos que  $(f^*i_*\mathcal{M})(U) \simeq \mathcal{M}(U \rightarrow X)$ . Por la condición de haz, nos podemos recudir a un recubrimiento afín y, por tanto, suponer que  $X$  es afín. Ahora el resultado se sigue del Lema 5.6.25.

Una demostración alternativa discurriría la que sigue: por el Corolario 5.4.19, la inmersión plana  $f$  factoriza como  $U \hookrightarrow X' \rightarrow X$  con  $\varphi: X' \rightarrow X$  un qc-isomorfismo y  $U \subseteq X'$  un abierto. Si denotamos por  $i': X'_{\text{wZar}} \rightarrow X'$  al morfismo de sitios correspondiente y por  $\varphi_{\text{wZar}}^*$  al functor inducido en el sitio de las inmersiones planas, se debería poder demostrar —una vez más, reduciéndose la cuestión al caso afín— un «teorema de cambio de base plano» para las secciones globales de estos sitios anillados, que afirmaría que  $\varphi^*i_* \simeq i'_*\varphi_{\text{wZar}}^*$ ; lo que unido a la Proposición 5.6.13 y al Teorema 5.1.9 nos permitiría suponer que  $U$  es un abierto de  $X$ . Ahora el resultado sería también inmediato.  $\square$

### 5.6.3. Puntos y funtores fibra I

Comenzamos observando que, como en un espacio esquemático  $X$  los epimorfismos planos de anillos son isomorfismos locales, se tiene una noción bien definida de «fibra de un haz de  $\mathcal{O}_X$ -módulos en un punto esquemático».

**Lema 5.6.27.** Sea  $X$  pseudoesquemático,  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$  y sean  $(x, \mathfrak{p}_x)$ ,  $(y, \mathfrak{p}_y)$  dos parejas representantes del mismo punto esquemático de  $\text{Spec}(X)$ , se tiene un isomorfismo

$$(\mathcal{M}_x)_{\mathfrak{p}_x} \simeq (\mathcal{M}_y)_{\mathfrak{p}_y}.$$

*Demostración.* Basta verlo para el caso en que  $x \leq y$  y  $\mathfrak{p}_x = r_{xy}^{-1}(\mathfrak{p}_y)$ , donde se tiene que, por cuasicoherencia  $\mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \simeq \mathcal{M}_y$ . Como localizar conmuta con productos tensoriales, se concluye por el Teorema B.2.19.  $\square$

Generalizando la Notación 4.3.16, podemos ahora definir:

**Definición 5.6.28.** Si  $X$  es pseudoesquemático,  $\mathbf{x} = [(x, \mathfrak{p}_x)] \in \text{Spec}(X)$  un punto esquemático y  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ , se definen

- La *fibra —stalk*, lit. «tallo»— de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbf{x}$  como  $\mathcal{M}_{\mathbf{x}} = (\mathcal{M}_x)_{\mathfrak{p}_x}$ .
- La *fibra geométrica* de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbf{x}$  como  $(\mathcal{M}_x)_{\mathfrak{p}_x} / \mathfrak{p}_x(\mathcal{M}_x)_{\mathfrak{p}_x}$ .

En particular, para  $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ , se define el *cuerpo residual en  $X$* ,  $\kappa(\mathbf{x})$ , como la fibra geométrica  $\mathcal{O}_X$  en  $\mathbf{x}$ :

$$\kappa(\mathbf{x}) = (\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}_x} / \mathfrak{p}_x(\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}_x}.$$

*Observación 5.6.29.* Ya probamos en Lema 4.3.15 que esta noción de fibra coincide con las fibras del estructural de  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(X)}$ , es decir,

$$\mathcal{O}_{\text{Spec}(X),\mathbf{x}} \simeq \mathcal{O}_{X,\mathbf{x}}.$$

Probemos que esta noción de fibra coincide con la de teoría de topos.

**Lema 5.6.30.** Dado  $X$  esquemático y  $\mathbf{x}$  un punto esquemático centrado en  $x \in X$ , el morfismo  $\text{Spec}(\kappa(\mathbf{x})) \rightarrow X$  con  $\star \mapsto x$  es esquemático. Más en general, para todo cuerpo  $\Omega$ , hay una correspondencia biyectiva entre morfismos esquemáticos y parejas de punto esquemático y extensiones del cuerpo residual:

$$\text{Hom}_{\text{SchFin}}(\text{Spec}(\Omega), X) \xleftrightarrow{1:1} \{\text{Parejas } (\mathbf{x}, \kappa(\mathbf{x}) \hookrightarrow \Omega).\}$$

*Demostración.* La primera parte se sigue de que  $\text{Spec}(\kappa(\mathbf{x})) \rightarrow X$  así definido es central por construcción, luego esquemático por el Teorema 4.3.26. La segunda parte se obtiene componiendo con la extensión de cuerpos.  $\square$

En general, dado  $X$  y un punto esquemático  $\mathbf{x}$ , dar un entorno de este punto en la topología de las inmersiones planas consistiría en dar una pareja  $(f: U \rightarrow X, \mathbf{u})$  con  $\mathbf{u} \in \text{Spec}(U)$  de modo que conmute el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & X \\ \mathbf{u} \uparrow & & \uparrow \mathbf{x} \\ \text{Spec}(\kappa(\mathbf{u})) & \xrightarrow{f'} & \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x})); \end{array}$$

pero como  $f$  es inmersión plana,  $f'$  es un isomorfismo —Lema 5.1.6 y Teorema B.2.19—, de modo que la definición queda simplificada a la siguiente:

**Definición 5.6.31.** Dado  $X$  y un punto esquemático  $\mathbf{x}$ , un *entorno plano* de  $\mathbf{x}$  es una pareja  $(f: U \rightarrow X, \mathbf{u})$  con  $\mathbf{u}$  punto esquemático de  $U$  y  $f$  inmersión plana tal que  $f(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ . Usaremos la notación  $f: (U, \mathbf{u}) \rightarrow (X, \mathbf{x})$  —i.e. es un morfismo de espacios punteados—.

Es decir, un entorno plano de  $\mathbf{x}$  se reduce a dar una factorización

$$\mathrm{Spec}(\kappa(\mathbf{x})) \rightarrow U \rightarrow X.$$

*Notación 5.6.32.* Dado  $X$  y  $\mathbf{x} = (x, \mathfrak{p}_x)$  centrado en  $x$ , denotaremos

$$j_{\mathbf{x}}: U_{\mathbf{x}} \hookrightarrow X,$$

a la inclusión del espacio esquemático tal que  $|U_{\mathbf{x}}| = U_x$ ,  $\mathcal{O}_{U_{\mathbf{x}},x} = \mathcal{O}_{X,\mathbf{x}}$  y  $\mathcal{O}_{U_{\mathbf{x}},y} = \mathcal{O}_{X,y}$  para  $y > x$ ; es decir,  $U_{\mathbf{x}}$  es la localización de  $U_x$  en el haz de ideales cuasicohérentes definido por  $\mathbf{x}$ . —Este espacio juega el rol de los  $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \rightarrow S$  de un esquema.— Es claro que  $j_{\mathbf{x}}$  es una inmersión plana esquemática y que, por tanto, podemos identificar los puntos esquemáticos de  $U_{\mathbf{x}}$  con puntos esquemáticos de  $X$ .

**Proposición 5.6.33.** Dado  $X$  esquemático e  $i_x: \mathrm{Spec}(\kappa(\mathbf{x})) \rightarrow X$  un punto esquemático centrado en  $x$  y de haz de ideales  $\mathfrak{p}$ ,  $j_{\mathbf{x}}: (U_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \rightarrow (X, \mathbf{x})$  es, salvo qc-isomorfismos, el entorno plano mínimo de  $\mathbf{x}$ . En particular, si  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X_{\mathrm{wZar}})$ , se verifica que la fibra de  $\mathcal{F}$  en  $\mathbf{x}$  —en sentido de haces en sitios— es

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}} \equiv i_x^{-1}\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}(U_{\mathbf{x}} \rightarrow X).$$

Además, si  $\mathcal{M}$  es un haz de módulos clásico, se tiene

$$\mathcal{M}_{\mathbf{x}} = i_x^{-1}\mathcal{M} = (\mathcal{M}_x)_{\mathfrak{p}_x}, \quad i_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_{\mathbf{x}}/\mathfrak{p}_x\mathcal{M}_{\mathbf{x}}.$$

*Demostración.* Sea  $U_{\mathbf{x}} \rightarrow U_x$  el morfismo esquemático afín asociado. Es claro que  $\mathbf{x}$  es el punto esquemático mínimo de  $U_{\mathbf{x}}$  para el orden de especializaciones y que se tiene  $\mathrm{Spec}(\kappa(\mathbf{x})) \rightarrow (U_{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$  sobre  $X$ , es decir, que  $U_{\mathbf{x}} \rightarrow X$  es un entorno plano.

Sea ahora  $f: (U, \mathbf{u}) \rightarrow X$  un entorno plano de  $\mathbf{x}$ . El punto  $\mathbf{u}$ , de modo análogo, admite un entorno plano  $U_{\mathbf{u}} \rightarrow U$  cuya imagen topológica está contenida en  $U_x$  por estar  $\mathbf{x}$  centrado en  $x$ , luego por restricción se induce

$$f|_{U_{\mathbf{u}}}: U_{\mathbf{u}} \rightarrow U_x$$

Como se tiene un isomorfismo  $\mathcal{O}_{U,\mathbf{u}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,\mathbf{x}}$  en el punto mínimo —pues  $\mathcal{O}_{U,u} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  es un epimorfismo plano por ser  $U \rightarrow X$  inmersión plana—,

se concluye que este morfismo factoriza por un qc-isomorfismo  $\varphi: U_{\mathbf{u}} \rightarrow U_{\mathbf{x}}$  —es un morfismo entre espacios afines que da un isomorfismo en secciones globales—. En resumen, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}(\kappa(\mathbf{x})) & \longrightarrow & U & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \uparrow & & \uparrow \\ & & U_{\mathbf{u}} & \xrightarrow{\varphi} & U_{\mathbf{x}} \end{array}$$

con  $\varphi$  un qc-isomorfismo, lo que prueba el resultado. El cálculo de la fibra  $\mathcal{F}_x$  se tiene de que, por el enunciado que acabamos de demostrar,  $U_{\mathbf{x}}$  es cofinal salvo qc-isomorfismo entre los entornos planos de  $\mathbf{x}$  y de la Proposición 5.6.6. Por último, si  $\mathcal{M}$  es clásico, se  $\mathcal{M}(j_{\mathbf{x}}: U_{\mathbf{x}} \rightarrow X) = \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,\mathbf{x}}$ , de donde obtenemos la última parte.  $\square$

Con esta construcción podemos definir directamente el «punto del topos»  $\mathbf{Sh}(X_{\mathrm{wZar}})$  asociado a  $\mathbf{x}$  como el dado por  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\mathbf{x}}$ ; pero con vistas a introducir la perspectiva de funtores fibra —i.e. puntos del sitio  $X_{\mathrm{wZar}}$ —, continuaremos con esta discusión en la Sección 6.4.1, tras la introducción del functor **Geo** en la Sección 6.4.

## Capítulo 6

# Retractos de la categoría esquemática

En este corto capítulo vamos a considerar subcategorías de la esquemática admitiendo adjunta para la inclusión y de modo que todo espacio esquemático es qc-isomorfo a uno en la subcategoría. Para ello introducimos primero un lenguaje general relativo a *qué es geométrico* y *qué es recudir la categoría esquemática*, que será relevante más adelante. Concluimos aplicando la noción de «espacio esquemático geométrico» para estudiar algunos puntos del sitio de las inmersiones planas previamente introducido. Todos los contenidos aquí expuestos son originales.

### 6.1. Propiedades geométricas y reducciones

A la hora de definir propiedades de espacios y morfismos esquemáticos, la filosofía general será que estas deben ser, como mínimo, estables por qc-isomorfismos; esto es, «geométricas» en el sentido que sigue:<sup>1</sup>

**Definición 6.1.1.** Sea  $\mathbf{P}$  una propiedad de morfismos esquemáticos. Diremos que  $\mathbf{P}$  es *geométrica* si verifica las propiedades siguientes:

- a) Estabilidad por composición con qc-isomorfismos: para cualesquiera qc-isomorfismos  $\phi$  y  $\phi'$ ,  $\mathbf{P}(f: X \rightarrow Y) \Rightarrow \mathbf{P}(\phi \circ f) \wedge \mathbf{P}(f \circ \phi')$ .

---

<sup>1</sup>Empleamos la notación  $\mathbf{P}(-)$  para indicar que el objeto o morfismo  $(-)$  verifica una propiedad  $\mathbf{P}$  prefijada, además de otros símbolos lógicos habituales.

- b) Estabilidad por cambio de base por qc-isomorfismos: para cualquier qc-isomorfismo  $Z \rightarrow Y$ ,  $\mathbf{P}(f: X \rightarrow Y) \Rightarrow \mathbf{P}(Z \times_Y X \rightarrow Z)$ .
- c) «Propiedad 2 de 3 respecto a qc-isomorfismos»: si  $\phi: X \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo, entonces  $\mathbf{P}(f: Y \rightarrow Z) \Leftrightarrow \mathbf{P}(f \circ \phi: X \rightarrow Z)$ .
- d) Las identidades verifican  $\mathbf{P}$ . En consecuencia, si  $\phi$  es un qc-isomorfismo,  $\mathbf{P}(\phi)$ .

Se dice que una propiedad  $\mathbf{Q}$  de espacios esquemáticos es *geométrica* si para todo qc-isomorfismo  $\phi: X \rightarrow Y$ , se tiene que  $\mathbf{Q}(X) \Leftrightarrow \mathbf{Q}(Y)$ .

*Observación 6.1.2.* Nótese que de a), c) y d) se deduce el recíproco de b): si  $Z \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo  $\mathbf{P}(f: X \rightarrow Y) \Leftrightarrow \mathbf{P}(Z \times_Y X \rightarrow Z)$ . De hecho, puede reemplazarse b) por la condición:

b') Para  $\phi: Y \rightarrow Z$  qc-isomorfismo,  $\mathbf{P}(f: X \rightarrow Y) \Leftrightarrow \mathbf{P}(\phi \circ f: X \rightarrow Z)$ .

El motivo de haber optado por b) en la Definición 6.1.1 es el rol privilegiado que la «estabilidad por cambio de base» tiene a nivel conceptual. Por otra parte, c) tiene más sabor «geométrico» que b'), pues hace referencia a que en un triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & Z & \end{array}$$

las dos flechas que llegan a  $Z$  compartan la misma propiedad, lo cual es importante al localizar categorías de espacios sobre uno dado, por ejemplo, de revestimientos.

*Observación 6.1.3.* En la Sección 7.3.1 caracterizaremos las propiedades geométricas de morfismos en términos análogos a la definición de propiedad geométrica de espacios. Respecto a estas últimas, nótese que toda propiedad geométrica de espacios debe restringir a una de anillos, como se ve sin más que ponernos en el caso afín.

Para inmersiones planas y morfismos fielmente planos, como están caracterizados en términos del espectro y de sus categorías de cuasicoherentes, se sigue del Teorema 5.1.9:

**Proposición 6.1.4.** *Ser inmersión plana, ser fielmente plano y ser qc-isomorfismo son propiedades geométricas.*

El estudio de muchas de estas propiedades que hemos llamado geométricas será llevado a cabo en el Capítulo 7, pero nuestra predilección por ellas no es, sin embargo, excluyente. También es de sumo interés encontrar modos en que la *geometría* se refleje en la topología de los posets subyacentes a nuestros espacios esquemáticos. La posible existencia de estas propiedades se debe a la ligadura que da la propia condición de esquematicidad —Lema 3.2.7—. El objetivo de la presente sección es ver en qué medida podemos fortalecer dichas interacciones, es decir, en qué medida podemos restringir el functor  $\text{Spec: SchFin} \rightarrow \text{LRS}$  (sin localizar) para que *refleje* determinadas propiedades. Cuando esta «restricción» pueda darse, hablaremos informalmente de que *rigidifica* la propiedad en cuestión.

Podemos presentar sistemáticamente la idea general:

**Definición 6.1.5.** Sea  $\mathfrak{S} \subseteq \text{SchFin}$  una subcategoría plenamente fiel y QC la clase de qc-isomorfismos. Se dice que  $\mathfrak{S}$  es una *reducción* de  $\text{SchFin}$  si el functor inducido

$$[\text{QC}^{-1}]\mathfrak{S} \rightarrow \text{SchFin}_{\text{qc}}$$

es una equivalencia de categorías. Se dice que una reducción  $\mathfrak{S}$  es un *retracto a derecha* si la inclusión admite una adjunta a la derecha  $i \dashv \mathcal{R}$  tal que  $\mathcal{R} \circ i = \text{Id}_{\mathfrak{S}}$  y la counidad  $i \circ \mathcal{R} \rightarrow \text{Id}_{\text{SchFin}}$  verifica que  $\mathcal{R}(X) \rightarrow X$  es un qc-isomorfismo para todo  $X \in \text{SchFin}$ . Un retracto a la derecha se dice *por subobjetos* si  $\mathcal{R}(X) \rightarrow X$  es un monomorfismo en  $\text{SchFin}$  para todo  $X$ ; se dice *por proyecciones* si  $\mathcal{R}(X) \rightarrow X$  es un epimorfismo en  $\text{SchFin}$  para todo  $X$ . De modo dual se definen retracts a la izquierda como aquellos que admiten una adjunta a la izquierda  $\mathcal{L}$  cuya unidad induce qc-isomorfismos para todo espacio.

*Observación 6.1.6.* El lector notará que en la definición hemos hablado de monomorfismos y epimorfismos en la categoría esquemática, que aún no hemos tratado. Para la discusión que sigue, basta observar que, por la caracterización habitual de los monomorfismos en términos de la diagonal y la Proposición 4.4.2, *los monomorfismos en la categoría esquemática son exactamente los monomorfismos de posets anillados*, es decir, inyecciones a

nivel topológico equipadas con un epimorfismo de haces de anillos. Cabe destacar que estas propiedades *no son geométricas* en el sentido de la Definición 6.1.1: por ejemplo, dado un espacio afín  $X$  con  $\mathcal{O}_X(X) \equiv A$ , para todo haz de ideales cuasicoherente  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$  con  $\mathcal{I}(X) \equiv I$ , se tiene que  $(\star, A/I) \rightarrow (\star, A)$  es un monomorfismo, pero  $(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \rightarrow (\star, A)$  no lo es por no ser inyectivo en general. Véase la Sección 7.3.2. Nótese que si un qc-isomorfismo  $U \rightarrow X$  es un monomorfismo —como requerimos en la definición—, entonces necesariamente  $U$  —su imagen— es un subespacio de  $X$  y  $\mathcal{O}_U \simeq \mathcal{O}_{X|U}$ .

*Ejemplo 6.1.7.* De modo análogo, dada una subcategoría  $\mathfrak{C} \subseteq \mathbf{SchFin}$ , puede hablarse de reducciones  $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{C}$ . Por ejemplo, si  $\mathfrak{C}$  es la subcategoría plenamente fiel *de espacios esquemáticos cuyo espectro es un esquema*, hemos visto en las Proposiciones 5.2.3 y 5.2.4 que  $\mathbf{SchFin}^{\text{Open}} \subset \mathfrak{C}$  es una reducción que, sin embargo, no es un retractor. En cambio, si consideramos  $\mathfrak{C} = \mathbf{AffSch}$  la categoría de espacios —esquemáticos— afines, la subcategoría  $\mathfrak{S} \subseteq \mathbf{AffSch}$  de *espacios anillados puntuales* sí es un retractor *a la izquierda por proyecciones* con adjunta  $\mathcal{L}$  dada por  $\mathcal{L}(X) = (\star, \mathcal{O}_X(X))$  y  $X \rightarrow \mathcal{L}(X)$  el qc-isomorfismo natural.

**Proposición 6.1.8.** Si  $\mathfrak{S} \subseteq \mathbf{SchFin}$  es un retractor a la derecha con adjunta  $\mathcal{R}$  y tenemos un functor  $F: \mathbf{SchFin}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  representable por una pareja universal  $(X, \xi)$ , entonces su restricción  $F \circ i$  es representable por  $(\mathcal{R}(X), \mathcal{R}(\xi))$ . En particular,  $\mathfrak{S}$  tiene productos fibrados finitos, obtenidos aplicando la adjunta a la derecha  $\mathcal{R}$  al producto fibrado en  $\mathbf{SchFin}$ . Lo análogo es cierto para retracts a la izquierda y funtores  $\mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

*Demostración.* Inmediato. La segunda parte se sigue de la existencia de productos fibrados finitos en  $\mathbf{SchFin}$ .  $\square$

## 6.2. Espacios concisos

En un espacio esquemático  $X$  pueden aparecer puntos que no aportan información algebraica alguna, ni siquiera de carácter local, y por tanto pueden ser retirados tomando un subespacio adecuado. El contenido de esta sección se introdujo en un caso particular en [28] y se encuentra en su versión más general en [32]. Aquí lo presentamos sistemáticamente, probamos su comportamiento functorial y lo interpretamos «espectralmente».

**Definición 6.2.1.** Sea  $X$  un espacio esquemático. Un punto  $x \in X$  es *redundante* si no existe ningún punto esquemático  $\mathbf{x}$  centrado en  $x$ .

Es decir, los puntos redundantes son exactamente los del complementario de la imagen de la aplicación centro  $\pi_X: \text{Spec}(X) \rightarrow X$ . Algebraicamente, esto quiere decir:

**Lema 6.2.2.** Sea  $X$  un espacio esquemático y  $x \in X$  un punto de su poset subyacente. Son equivalentes:

- 1) El punto  $x \in X$  es redundante.
- 2) El morfismo natural  $r^x: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \prod_{y>x} \mathcal{O}_{X,y}$  es fielmente plano.
- 3) El subespacio  $U_x^* = U_x - \{x\}$  es afín y la restricción  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_X(U_x^*)$  es isomorfismo.
- 4) La inclusión natural  $X - \{x\} \hookrightarrow X$  es un qc-isomorfismo de espacios anillados —y también lo será de esquemáticos, pero dejamos la demostración para el Teorema 6.2.6 en su caso general—.

*Demostración.* La equivalencia [1)  $\Leftrightarrow$  2)] es exactamente la definición de centro: ningún punto  $\mathbf{x}$  centra en  $x$  si y solo si todo primo  $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$  proviene de algún  $\mathcal{O}_{X,y}$ , es decir, si  $\text{Spec}(r^x)$  es epiyectivo. [2)  $\Rightarrow$  3)] es [32, Section 6, Proposition 1]: como  $r^x$  es fielmente plano, es un monomorfismo regular en la categoría de anillos, luego hay un diagrama ecualizador

$$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \prod_{y>x} \mathcal{O}_{X,y} \rightrightarrows \prod_{y,y'>x} \mathcal{O}_{X,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y'};$$

pero por la esquematicidad se tiene que  $\mathcal{O}_{X,y} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y'} \simeq \mathcal{O}_X(U_y \cap U_{y'})$ , así que por la condición de haz es  $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{O}_X(U_x^*)$ . Es claro que  $U_x^*$  es afín por la Proposición 4.1.8: la primera condición de dicho resultado se verifica por hipótesis y la cuarta por lo que acabamos de demostrar. El recíproco se sigue del mismo resultado. [3)  $\Leftrightarrow$  4)] es inmediato.  $\square$

*Ejemplo 6.2.3.* Todo punto  $x \in X$  con  $\mathcal{O}_{X,x} = 0$  es redundante. En particular el morfismo canónico  $\emptyset \rightarrow (\star, 0)$  es un qc-isomorfismo.

*Ejemplo 6.2.4.* Si  $X$  es un espacio esquemático equipado con un haz de anillos constante  $\mathcal{O}_X \equiv A$ , su poset subyacente es irreducible —Observación 4.1.7—,  $X = C_x$ . Se tiene entonces que todo  $x' \neq x$  es redundante y que la inclusión natural  $\{x\} \hookrightarrow C_x$  es un qc-isomorfismo esquemático —que además admite la proyección al punto como retracts—.

**Definición 6.2.5.** Un espacio esquemático  $X$  se dice *conciso* si no tiene puntos redundantes. Sea  $\mathbf{SchFin}^{\text{con}} \subseteq \mathbf{SchFin}$  la subcategoría plenamente fiel de espacios esquemáticos concisos.

Es decir, un espacio  $X$  es conciso si y solo si  $\pi_X: \text{Spec}(X) \rightarrow X$  es epiyectiva. Vamos a probar ahora que la inclusión  $\mathbf{SchFin}^{\text{con}} \subset \mathbf{SchFin}$  es, de hecho, un retracts a la derecha por subobjetos de la categoría esquemática.

**Teorema 6.2.6.** La inclusión  $i: \mathbf{SchFin}^{\text{con}} \subseteq \mathbf{SchFin}$  es un retracts a la derecha por subobjetos. Es decir, tiene un functor adjunto a la derecha  $\mathbf{Con}: \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{SchFin}^{\text{con}}$  tal que  $\mathbf{Con}(X) \hookrightarrow X$  es un qc-isomorfismo inyectivo para todo  $X$ .

Para la demostración, probamos primero los siguientes Lemas:

**Lema 6.2.7.** Si  $X$  es esquemático e  $U = (U, \mathcal{O}_{X|U}) \subseteq X$  es un subespacio con  $X - U$  un subconjunto de puntos redundantes,  $\text{Spec}(U) \simeq \text{Spec}(X)$ .

*Demostración.* Basta probarlo para  $U = X - \{x\}$  con  $x$  redundante, pero por 2) del Lema 6.2.2 es claro que este subposet es cofinal para el colímite que define  $\text{Spec}(X)$  —con más detalle:  $\text{Spec}(i): \text{Spec}(U) \rightarrow \text{Spec}(X)$  es epiyectivo porque ningún punto esquemático de  $X$  está centrado en  $x$  por definición, es inyectivo porque los espacios son pseudoesquemáticos y el morfismo en haces de anillos es isomorfismo en fibra por ser un homeomorfismo y los Lemas 4.3.14, 4.3.15 y el hecho de que ningún punto esquemático centre en  $x$ —.

**Lema 6.2.8.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo esquemático. Si  $x \in X$  verifica que  $y = f(x)$  es redundante, entonces  $x$  es redundante. En particular, si  $X$  es conciso, la imagen de  $|f|$  no contiene puntos redundantes. Si  $X$  es conciso y  $|f|$  epiyectivo, entonces  $Y$  es conciso.

*Demostración.* Por el Teorema 4.3.26 se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(X) & \xrightarrow{\mathrm{Spec}(f)} & \mathrm{Spec}(Y) \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Si  $x$  no fuese redundante, existiría algún  $\mathbf{x} \in \mathrm{Spec}(X)$  con  $\pi_X(\mathbf{x}) = x$  y, por la conmutatividad,  $y = f(x) = \pi_Y(\mathrm{Spec}(f)(\mathbf{x}))$ , luego  $y$  estaría en la imagen de  $\pi_Y$  y no sería redundante.  $\square$

*Demostración del Teorema 6.2.6.* Dado un espacio esquemático  $X$  con centro  $\pi_X: \mathrm{Spec}(X) \rightarrow X$ , definimos  $\mathbf{Con}(X) = (\mathrm{Im}(\pi_X), \mathcal{O}_{X|\mathrm{Im}(\pi_X)}) \hookrightarrow X$ . Como  $\mathbf{Con}(X)$  es pseudoesquemático, es esquemático si su aplicación centro está definida, pero esto se tiene por construcción y el Lema 6.2.7. El morfismo  $\mathbf{Con}(X) \rightarrow X$  es esquemático por el Teorema 4.3.26 y la construcción, y es claramente un qc-isomorfismo.

Es fácil ver que la construcción es functorial por el Lema 6.2.8: un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  define  $\mathbf{Con}(f) \equiv f|_{\mathbf{Con}(X)}: \mathbf{Con}(X) \rightarrow \mathbf{Con}(Y)$ . Por último, como para todo  $X$  conciso es  $\mathbf{Con}(X) = X$ , todo morfismo  $f: X \rightarrow Y$  desde uno de estos espacios factoriza por  $X \rightarrow \mathbf{Con}(Y)$  por dicha functorialidad, lo que prueba la adjunción deseada.  $\square$

**Corolario 6.2.9.** La subcategoría  $\mathbf{SchFin}^{\mathrm{con}}$  tiene productos fibrados finitos, que denotamos  $(-) \times_{(-)}^{\mathrm{con}} (-)$  y que se computan como

$$X \times_Z^{\mathrm{con}} Y \simeq \mathbf{Con}(X \times_Z Y).$$

*Demostración.* Es la Proposición 6.1.8.  $\square$

**Corolario 6.2.10.** Si  $X$  tiene restricciones abiertas, su morfismo centro  $\pi_X$  induce una equivalencia  $(\pi_X^* \dashv \pi_{X*}): \mathbf{Qcoh}(\mathrm{Spec}(X)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Qcoh}(X)$ .

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 4.3.9 y el Teorema 6.2.6.  $\square$

**Proposición 6.2.11.** [28, Proposition 5.12] Si  $X$  es esquemático con  $\mathcal{O}_X(X)$  anillo local, entonces  $X$  es afín si y solo si  $X = U_x$  para algún  $x \in X$ .

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{m}$  el maximal de  $\mathcal{O}_X(X)$ . Si  $X = U_x$ , es afín, luego basta ver el recíproco. Por afinidad,  $\text{Spec}(X) \simeq \text{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ . Sea  $x$  la imagen de  $\mathfrak{m}$  por la aplicación centro. Como  $\pi_X$  es continua para la topología de las especializaciones (Proposición 4.3.11), cualquier punto fuera de  $U_x \subseteq X$  no está en la imagen de  $\pi_X$  y, por tanto, es redundante; pero como  $X$  es conciso, concluimos.  $\square$

Por último, observamos que la principal propiedad «rigidificada» por esta construcción es la epiyectividad:

**Proposición 6.2.12.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo fielmente plano con  $Y$  conciso, entonces  $f$  es epiyectivo. Si además  $X$  es conciso,  $f: X \rightarrow Y$  es fielmente plano si y solo es plano y epiyectivo.

*Demostración.* Se sigue de la epiyectividad de  $\pi_Y$  y los Teoremas 4.3.26 y 5.1.9.  $\square$

Es más, la Proposición 6.2.12 es cierta para morfismos  $f: X \rightarrow Y$  tales que  $\text{Spec}(f)$  es epiyectivo. Si los llamamos «morfismos qc-epiyectivos», se caracterizan como aquellos tales que  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \prod_{x \in f^{-1}(U_y)} \mathcal{O}_{X,x}$  induce una epiyección entre espectros para todo  $y \in Y$  (que es lo que demostramos en el Teorema 5.1.9). Es decir, en la subcategoría de espacios concisos, la noción geométrica de «morfismo qc-epiyectivo» coincide con la noción de morfismo epiyectivo en sentido ordinario. En otras palabras:

**Corolario 6.2.13.** En la categoría  $\mathbf{SchFin}^{\text{Con}}$ , ser epiyectivo es una propiedad geométrica.

*Demostración.* Basta observar que, como los qc-isomorfismos son fielmente planos y, por tanto, epiyectivos por la Proposición 6.2.12, se verifican trivialmente las condiciones de la Definición 6.1.1.  $\square$

**Corolario 6.2.14.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo inyectivo e  $Y$  es conciso, entonces  $f$  es un isomorfismo.

*Observación 6.2.15.* Consideremos el qc-isomorfismo  $U \rightarrow (\star, A)$  con  $U$  afín y  $A = \mathcal{O}_U(U)$ , y asumamos además que  $U$  es conciso. La diagonal  $U \rightarrow U \times_{(\star, A)} U$  es un qc-isomorfismo inyectivo y, sin embargo, no es un isomorfismo, pues en ese caso  $U \rightarrow (\star, A)$  sería un monomorfismo en la

categoría esquemática, lo que en particular implicaría que sería inyectivo —puesto que  $(\star, 0) \in \mathbf{SchFin}$ , espacio conformado por dos objetos finales en sus respectivas categorías que, aun siendo qc-isomorfo a  $\emptyset$ , juega el rol de  $\star \in \mathbf{Set}$  a estos efectos—. Esto no contradice la Proposición 6.2.14, pues lo que sucede es que  $U \times_{(\star, A)} U$  tiene puntos redundantes, más concretamente todos los puntos que no están en su imagen. Lo que sí se verifica es que  $U \rightarrow \mathbf{Con}(U \times_{(\star, A)} U) = U \times_{(\star, A)}^{\text{con}} U$  es un isomorfismo, luego  $U \rightarrow (\star, A)$  es un monomorfismo en  $\mathbf{SchFin}^{\text{con}}$ , aun sin ser inyectiva.

En lo relativo a los morfismo fielmente planos, se tiene aún más:

**Lema 6.2.16.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es fielmente plano e  $Y$  es conciso, entonces  $|f|$  es un epimorfismo efectivo en la categoría de posets.

*Demostración.* Por la Proposición 1.2.4, esto es equivalente a ver que  $|f|$  es de fibras coherentes. Sean  $x_1, x_2 \in X$  con  $f(x_1) = y_1 \leq y_2 = f(x_2)$ . Como  $Y$  es conciso, existe algún  $\beta_{y_1} \subseteq \mathcal{O}_{Y, y_1}$  tal que  $\mathbf{y}_1 = (y_1, \beta_{y_1})$  centra en  $y_1$ . Como  $f$  es fielmente plano,  $\text{Spec}(f)$  es epiyectivo, luego existe un  $\mathbf{x} = (x, \mathfrak{p}_x)$  tal que  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_1$  con  $f(x) = y_1$  por el Teorema 4.3.26. Por otra parte y también por ser  $Y$  conciso, existe un  $\alpha_{y_2} \subseteq \mathcal{O}_{Y, y_2}$  tal que  $\mathbf{y}_2 = (y_2, \alpha_{y_2})$  centra en  $y_2$  y con  $\mathbf{y}_2 > \mathbf{y}_1$ . Por el Lema 5.1.13 existe un  $\mathbf{x}' = (x', \mathfrak{q}_{x'})$  tal que  $\mathbf{x}' > \mathbf{x}$  y  $f(\mathbf{x}') = \mathbf{y}_2$  —nótese que  $x' > x$  porque  $y_1 \neq y_2$ —. Se tiene ahora la cadena

$$x_1 = x_1 x x' x_2 = x_2$$

con  $f(x_1) = x$ ,  $x < x'$  y  $f(x') = x_2$ ; es decir,  $x_1 \leq_f x_2$ , por lo que  $|f|$  es de fibras coherentes y por tanto un epimorfismo efectivo.  $\square$

**Proposición 6.2.17.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es fielmente plano e  $Y$  es conciso, entonces  $f$  es un epimorfismo efectivo en la categoría de posets anillados y, por tanto, en la categoría esquemática. Además, para *cualquier* morfismo fielmente plano  $f: X \rightarrow Y$ , el morfismo inducido  $\text{Spec}(f)$  es un epimorfismo efectivo en la categoría de espacios localmente anillados.

*Demostración.* Los coequalizadores y productos fibrados en posets anillados están descritos en la Proposición 2.1.15: su parte topológica es independiente de la algebraica. Como  $|f|$  es un epimorfismo efectivo por el Lema 6.2.16 y  $f_x^\sharp$  es un monomorfismo efectivo para todo  $x \in X$  por fielplitud, se

deduce la primera afirmación. La segunda se sigue de que  $\text{Spec}(f)$  conmuta con colímites —por estar definido como un colímite— y productos fibrados —Proposición 4.4.4—. Nótese que, por el propio Teorema 6.2.6, para este último caso no hace falta suponer que  $Y$  sea conciso.  $\square$

**Corolario 6.2.18.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es fielmente plano, admite una factorización del tipo  $X \rightarrow Y' \rightarrow Y$  con  $X \rightarrow Y'$  un epimorfismo efectivo tal que  $Y' \simeq \mathbf{Con}(Y)$  e  $Y' \rightarrow Y$  un qc-isomorfismo inyectivo.

*Observación 6.2.19.* Si  $f: X \rightarrow Y$  es fielmente plano y afín, por ejemplo si es un qc-isomorfismo, puede comprobarse que  $\mathbf{Con}(Y)$  es, de hecho, el modelo finito del *espacio anillado*  $X$  respecto al recubrimiento  $\{f^{-1}(U_y)\}_{y \in Y}$ .

La Proposición 6.2.14 también tiene como consecuencia que la categoría de espacios concisos es «minimal» en el sentido siguiente.

**Teorema 6.2.20.** La subcategoría  $\mathbf{SchFin}^{\text{con}} \subseteq \mathbf{SchFin}$  es el menor retracto a la derecha por subobjetos admitido por la categoría esquemática. Es decir, si  $\mathfrak{S} \subseteq \mathbf{SchFin}^{\text{con}} \subseteq \mathbf{SchFin}$  es tal que  $\mathfrak{S}$  es un retracto a la derecha por subobjetos, se tiene una equivalencia  $\mathfrak{S} \simeq \mathbf{SchFin}^{\text{con}}$ .

*Demostración.* Sea  $i: \mathbf{SchFin}^{\text{con}} \subseteq \mathbf{SchFin}$ . Se sigue de la definición que  $j: \mathfrak{S} \subseteq \mathbf{SchFin}^{\text{con}}$  tiene como adjunta a la derecha  $\mathcal{R} \circ i$ , con  $\mathcal{R}$  la adjunta de  $i \circ j$  que aparece en la definición de retracto a la derecha. Se verifica que  $\mathcal{R} \circ i$  es, de hecho, inversa de  $j$ . En efecto, por hipótesis, se tiene que, para todo  $X$  conciso,  $(\mathcal{R} \circ i)(X) \rightarrow i(X)$  es un monomorfismo en  $\mathbf{SchFin}$ , luego inyectivo (pues  $(\star, 0) \in \mathbf{SchFin}$ ), además de un qc-isomorfismo por la definición de retracto a la derecha, luego es un isomorfismo por la Proposición 6.2.14 y, por tanto, un isomorfismo en  $\mathbf{SchFin}^{\text{con}}$ . Para concluir basta observar que  $(\mathcal{R} \circ i) \circ j = \mathcal{R} \circ (i \circ j) = \text{Id}_{\mathfrak{S}}$ .  $\square$

### 6.3. Espacios puntualmente conexos

Si en la Sección 6.2 hemos comenzado dando una definición y acabado indicando como la reducción que produce «rigidifica» una propiedad geométrica, ahora vamos a plantear la conclusión como punto de partida.

Si se trata de dar una noción de conexión para espacios esquemáticos, debemos observar que la conexión del poset subyacente no es una propiedad

geométrica. Por ejemplo, dado un espacio puntual  $(\star, A \times B)$  con  $A$  y  $B$  anillos no nulos, se tiene un qc-isomorfismo  $(\star, A) \amalg (\star, B) \rightarrow (\star, A \times B)$ , donde el primer espacio tiene poset subyacente desconexo y el segundo lo tiene conexo. Vamos a construir un retracto a la derecha por proyecciones de **SchFin** que rigidifica esta propiedad.

**Definición 6.3.1.** Sea  $X$  un espacio esquemático.

- Se dice que  $X$  es *conexo* si  $\text{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$  es conexo.
- Se dice que  $X$  es *top-conexo* si  $|X|$  es conexo.
- Se dice que  $X$  es *pw-conexo* —«point-wise»— si  $U_x \subseteq X$  es conexo para todo  $x \in X$ .

Es claro que  $X$  es conexo si y solo si  $\text{Spec}(X)$  es conexo —puesto que ambos espacios tienen las mismas secciones globales— y, por tanto, la conexión es una propiedad geométrica. Nótese que la pw-conexión hace referencia a que  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$  sea conexo para todo  $x \in X$ , lo cual, en el caso de modelos finitos de espacios, quiere decir que los estamos tomando respecto a recubrimientos conexos; o dicho de otro modo, que la aplicación centro tiene las antiimágenes de los  $U_x$  conexas. Convengamos que  $\emptyset$  *no es conexo*.

**Lema 6.3.2.** Dado un espacio pw-conexo  $X$ , se verifica que es conexo si y solo si es top-conexo.

*Demostración.* El directo se sigue de que todo espacio conexo es top-conexo —o sus secciones globales descompondrían como producto directo de anillos no nulos—. El recíproco se sigue del hecho bien conocido de que un colímite conexo de espacios topológicos conexos es conexo.  $\square$

**Definición 6.3.3.** Denotamos por  $\mathbf{SchFin}^{\text{pw}} \subseteq \mathbf{SchFin}$  a la subcategoría de espacios esquemáticos pw-conexos.

Por el Lema 6.3.2, en la categoría de espacios pw-conexos, la conexión topológica coincide con la conexión «geométrica», es decir:

**Corolario 6.3.4.** En la categoría  $\mathbf{SchFin}^{\text{pw}}$ , *ser top-conexo* es una propiedad geométrica.

Dado un espacio esquemático  $X$ , vamos a construir un poset anillado pw-conexo  $\mathbf{pw}(X)$  que sigue —finito porque, recordemos, estamos trabajando en el caso noetheriano—:

**Construcción 6.3.5.** Sea  $\pi_0: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de componentes conexas. Dado un anillo  $A$ , denotamos  $\mathbf{pw}(A)$  al espacio esquemático tal que  $|\mathbf{pw}(A)| = \pi_0(\mathrm{Spec}(A))$  y  $\mathcal{O}_{\mathbf{pw}(A),i} = A_i$ , donde  $A_i$  es la componente de  $A \simeq A_0 \times \dots \times A_n$  correspondiente a la componente conexa indexada por  $i$ . Esta construcción es functorial, puesto que «los morfismos desde un espacio conexo a uno arbitrario factorizan exactamente por una componente conexa»; luego se tiene un functor  $\mathbf{pw}: \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{SchFin}^{\mathrm{op}}$  que, de hecho, valora en  $\mathbf{SchFin}^{\mathrm{pw}}$ . Si  $\mathbf{pw}_*: \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{SchFin}^{\mathrm{pw}}$ -codata denota el functor inducido, definimos

$$\mathbf{pw}: \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{CRing}\text{-data}, \quad X \mapsto \mathrm{Cyl}(\mathbf{pw}_*(X)). \quad (6.3.1)$$

*Observación 6.3.6.* De modo más explícito, para un espacio esquemático  $X$ ,  $\mathbf{pw}(X)$  se obtiene reemplazando cada punto  $x \in X$  por tantos puntos como componentes conexas tenga  $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$  —es decir, como conjunto,  $\mathbf{pw}(X) = \coprod_{x \in X} \pi_0(|\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})|)$ — y dotando a cada punto del subanillo de  $\mathcal{O}_{X,x}$  correspondiente a la componente conexa que lo define. Esto es functorial, tanto en los morfismos de restricción como al cambiar de espacio  $X$ , por factorizar los morfismos desde un espacio conexo por una única componente conexa de la imagen, dado que la imagen de un conexo, es conexa. Además, si  $X$  es pw-conexo  $X = \mathbf{pw}(X) \rightarrow X$  es la identidad.

**Lema 6.3.7.** Para todo  $X$  esquemático, el morfismo  $\pi: \mathbf{pw}(X) \rightarrow X$  es un qc-isomorfismo de espacios anillados que verifica  $\pi^{-1}(U_x) = \coprod_{\pi(x_i)=x} U_{x_i}$  para todo  $x \in X$ . Además, si  $X$  es conciso,  $\pi$  es epiyectivo.

*Demostración.* Comencemos calculando las fibras. Observemos en primer lugar que si  $\pi^{-1}(x) = \emptyset$  para algún  $x \in X$ , se tiene  $\pi^{-1}(U_x) = \emptyset$ , pues esto solo sucede cuando  $\mathcal{O}_{X,x} = 0$  y, como dado un epimorfismo de anillos  $0 \rightarrow A$  la única posibilidad es que  $A \simeq 0$ , se tiene que  $U_x$  tiene el haz constante 0. En otro caso, como  $X$  es finito, podemos tomar un  $x \in X$  tal que la fibra del estructural en cualquier punto por encima suyo tiene espectro conexo, es decir, tal que  $\pi|_{\pi^{-1}(U_x^*)}: \pi^{-1}(U_x^*) \rightarrow U_x^*$  es un isomorfismo (con  $U_x^* = U_x - \{x\}$ ). Si  $x_i, x_j \mapsto x$ , es claro que para cualquier  $y > x$ ,  $\pi^{-1}(y)$

solo puede ser mayor que  $x_i$  o  $x_j$ , pues la imagen continua de un conexo es conexo. En particular se obtiene que  $\pi^{-1}(U_x) = \coprod_i U_{x_i}$  con  $\{x_i\}_i = \pi^{-1}(x)$ . En general, para  $x \in X$  arbitrario, observemos que si  $x \leq y$  e  $y$  es el punto de un anillo con espectro disconexo, entonces cada punto de  $\pi^{-1}(y)$  solo puede estar sobre uno de los puntos de  $\pi^{-1}(x)$  —por el mismo argumento de conexión—, de donde se deduce que  $\pi^{-1}(U_x) = \coprod_i U_{x_i}$ . Ahora es claro que  $\pi$  es **Mod**-afín y que  $\mathcal{O}_X \simeq \pi_* \mathcal{O}_{\mathbf{pw}(X)}$ .  $\square$

*Observación 6.3.8.* De hecho, si consideramos el codato  $\mathbf{pw}_*(X)$ , para todo abierto  $U \subseteq X$  es  $\text{Cyl}(U) = \pi^{-1}(U)$ . En particular también se tiene que, para toda terna  $x, y \geq z \in X$ ,

$$\text{Cyl}(U_x \cap U_y) = \pi^{-1}(U_x \cap U_y) = \coprod_{\pi(x_i)=x, \pi(y_j)=y} U_{x_i} \cap U_{y_j};$$

donde  $U_{x_i} \cap U_{y_j} \neq \emptyset$  si y solo si  $x_i, y_j \geq z_k$  para algún  $z_k \in \pi^{-1}(z)$ .

**Teorema 6.3.9.** La inclusión  $i: \mathbf{SchFin}^{\mathbf{pw}} \subseteq \mathbf{SchFin}$  es un retracto a la derecha por proyecciones, i.e. tiene un functor adjunto a la derecha  $\mathbf{pw}: \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{SchFin}^{\mathbf{pw}}$  tal que  $\mathbf{pw}(X) \rightarrow X$  es un qc-isomorfismo epifectivo para todo  $X$ .

*Demostración.* La esquematicidad de  $\mathbf{pw}(X)$  y de  $\pi$  se obtiene vía las caracterizaciones de las Proposiciones 4.1.10 y 4.2.11 respectivamente, dado que los morfismos de anillos involucrados descomponen en varias componentes «disjuntas» y cada una de ellas verifica las condiciones requeridas. Es decir, si  $x, y \geq z$  son puntos en  $X$ , se tiene

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,z}} \mathcal{O}_{X,y} \simeq \coprod_{\substack{x', y' \geq z' \\ \pi(x')=x, \pi(y')=y, \pi(z')=z}} (\mathcal{O}_{\mathbf{pw}(X), x'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{pw}(X), z'}} \mathcal{O}_{\mathbf{pw}(X), y'})$$

(nótese que las combinaciones que no verifican  $x', y' \geq z'$  dan productos tensoriales nulos); y de modo similar, si  $x' \in \mathbf{pw}(X)$  e  $y \geq x = \pi(x')$ , es

$$\mathcal{O}_{\mathbf{pw}(X), x'} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \simeq \coprod_{\substack{y' \geq x' \\ \pi(y')=y}} \mathcal{O}_{\mathbf{pw}(X), y'}.$$

Por argumentos análogos a los de este último isomorfismo también se tiene que, si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo esquemático,  $\mathbf{pw}(f)$  es esquemático. Como en el teorema análogo para espacios concisos, la adjunción se deduce de que  $\mathbf{pw} \circ i = \text{Id}$  y de que  $\mathbf{pw}$  es un functor —por serlo el  $\mathbf{pw}$  con que iniciamos su construcción—.  $\square$

*Observación 6.3.10.* Se puede dar una demostración más intrínseca del Teorema 6.3.9. El morfismo  $\pi: \mathbf{pw}(X) \rightarrow X$  viene inducido por un morfismo de codatos  $\mathbf{pw}_*(X) \rightarrow \underline{X}$ , donde  $\underline{X}$  al **SchFin**-codato definido como  $|\underline{X}| = |X|$  y  $\underline{X}(x) = (\star, \mathcal{O}_{X,x})$  (Notación 2.3.7). Es posible axiomatizar las condiciones del Lema 6.3.7 junto con alguna adicional para forzar que los morfismos de anillos que aparecen sean «disjuntos»— y dar un recíproco parcial del Lema 5.4.5 para estos morfismos, lo que aplicado al recíproco de la Proposición 5.4.9 probaría nuestro resultado.

**Corolario 6.3.11.** La subcategoría  $\mathbf{SchFin}^{\mathbf{pw}}$  tiene productos fibrados finitos, que denotamos  $(-) \times_{(-)}^{\mathbf{pw}} (-)$  y que se computan como

$$X \times_Z^{\mathbf{pw}} Y \simeq \mathbf{pw}(X \times_Z Y).$$

*Demostración.* Es la Proposición 6.1.8.  $\square$

*Observación 6.3.12.* En general, en una categoría *finitamente extensiva*  $\mathfrak{C}$ , como resulta ser el caso de la esquemática o de  $\mathbf{CRing}^{\text{op}}$ , se dice que un objeto  $c \in \mathfrak{C}$  es *conexo* si su functor de puntos covariante  $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(c, -)$  conmuta con coproductos finitos. Si  $\mathfrak{C} = \mathbf{SchFin}^{\mathbf{pw}}$  es fácil comprobar que  $X$  es un espacio top-conexo —y, por tanto, conexo en sentido geométrico—, si y solo si es conexo en este sentido categorial. No es cierto, sin embargo, que los espacios conexos sean *todos* los objetos conexos de la categoría esquemática total.

Dado un espacio esquemático  $X$ , podemos considerar la descomposición en componentes conexas de  $\mathbf{pw}(X)$ , obteniendo un qc-isomorfismo

$$\pi: X_1 \amalg \dots \amalg X_n \simeq \mathbf{pw}(X) \rightarrow X.$$

Componiendo con las inclusiones naturales, se tienen morfismos inducidos  $\pi_i: X_i \rightarrow X$  para cada  $i$ . Por la construcción de  $\mathbf{pw}(X)$ , los  $\pi_i$  son inyectivos

y además se verifica

$$\prod_i \pi_{i*} \mathcal{O}_{X_i} \simeq \pi_* \mathcal{O}_{\mathbf{pw}(X)} \simeq \mathcal{O}_X;$$

luego podemos entender  $\mathcal{O}_X^i := \pi_{i*} \mathcal{O}_{X_i}$  como las *componentes conexas del haz estructural*  $\mathcal{O}_X$ . Es claro además que  $\pi_i: X_i \rightarrow X$  es afín para todo  $i$ , luego se tienen qc-isomorfismos  $X_i \rightarrow (X, \pi_{i*} \mathcal{O}_{X_i})$  induciendo qc-isomorfismos  $\mathbf{pw}(X) \rightarrow \coprod_i (X, \pi_{i*} \mathcal{O}_{X_i}) \rightarrow X$ .

**Definición 6.3.13.** Definimos el functor de *componentes pw-conexas* como

$$\pi_0^{\mathbf{pw}}: \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{Set} \quad X \mapsto \pi_0^{\mathbf{pw}}(X) := \pi_0(|\mathbf{pw}(X)|).$$

Por el Corolario 6.3.4 y la construcción de  $\mathbf{pw}$ , se tiene que este es un functor geométrico, es decir, que factoriza por  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}$ .

Un caso particular de las construcciones mencionadas es que, dado un punto esquemático  $\mathbf{x}$  de un  $X$ , como  $\text{Spec}(\kappa(\mathbf{x}))$  es pw-conexo, se tiene un morfismo inducido

$$\text{Spec}(\kappa(\mathbf{x})) \rightarrow \mathbf{pw}(X) \rightarrow X;$$

y, de nuevo por conexión,  $\mathbf{x}$  induce  $\mathbf{x}: \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x})) \rightarrow X' \subseteq \mathbf{pw}(X)$  con  $X'$  una componente top-conexa. Diremos que  $X'$  es la *componente conexa de  $X$  que contiene a  $\mathbf{x}$* . Por supuesto, esto generaliza para cualquier  $U \rightarrow X$  con  $U$  conexo y pw-conexo.

Obsérvese además que, dado un haz de  $\mathcal{O}_X$ -álgebras cuasicoherentes  $\mathcal{A}$ , podemos aplicar el mismo razonamiento a  $(X, \mathcal{A})$  y obtener las *componentes conexas de  $\mathcal{A}$* : descomposición  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}^1 \times \dots \times \mathcal{A}^m$  donde cada  $(\mathcal{A}^i)_x$  tiene espectro conexo para todo  $i$  y  $x \in X$ .

Por último, como en el caso de esquemas, definimos:

**Definición 6.3.14.** Un espacio  $X$  sobre un cuerpo  $k$  es *geoméricamente conexo* si para toda extensión de cuerpos  $k \rightarrow k'$ , el cambio de base  $\text{Spec}(k') \times_{\text{Spec}(k)} X$  es conexo. Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  tiene *fibras geoméricamente conexas* si para todo  $\mathbf{y} \in \text{Spec}(Y)$  y extensión de cuerpos  $\kappa(\mathbf{y}) \rightarrow K$ , la fibra  $\text{Spec}(K) \times_Y X$  es conexas.

*Observación 6.3.15.* Si  $\text{Spec}(X)$  es un esquema, por la Proposición 4.4.4 y el caso clásico,  $X$  es geoméricamente conexo si y solo si lo es al cambiar de base al cierre algebraico; o si o es al cambiar de base por cualquier extensión finita separable de  $k$ ; véase [10, Lemma 0387, Lemma 0389]. Es posible que esto sea cierto para un  $X$  arbitrario, pero no será necesario probarlo para nuestros propósitos. La misma observación aplica a morfismos esquemáticos  $f: X \rightarrow Y$  con fibras geoméricamente conexas que tengan esquemas por espectros, como sucederá en el caso de morfismos algebraicos —Definición 7.1.1— y pro-localmente de tipo finito —Definición 7.5.13—.

## 6.4. Espacios geométricos

Observemos que, dado un espacio esquemático conciso  $X$ , el correspondiente espacio  $\mathbf{pw}(X)$  puede tener puntos redundantes; sin embargo, si  $X$  es pw-conexo,  $\mathbf{Con}(X)$  sigue siendo pw-conexo. Es por esto que, si se desean combinar ambos funtores —a lo que no daremos nombre para evitar sobrecargar la notación—, debe hacerse en el orden

$$\mathbf{Geo} := \mathbf{Con} \circ \mathbf{pw}.$$

**Definición 6.4.1.** Diremos que un espacio esquemático  $X$  es *geométrico* si es pw-conexo y conciso. Denotemos por  $\mathbf{SchFin}^{\text{geo}}$  a subcategoría de espacios esquemáticos concisos y pw-conexos.

**Teorema 6.4.2.** La subcategoría de espacios geométricos  $\mathbf{SchFin}^{\text{geo}}$  es el menor retracto a la derecha por subobjetos admitido por la subcategoría de espacios pw-conexos y, en general, es un retracto a la derecha de  $\mathbf{SchFin}$ , donde el adjunto por la derecha es el functor  $\mathbf{Geo} = \mathbf{Con} \circ \mathbf{pw}$ . Además, la subcategoría  $\mathbf{SchFin}^{\text{Geo}}$  tiene productos fibrados, que se computan como

$$X \times_Z^{\text{geo}} Y = \mathbf{Geo}(X \times_Z Y).$$

*Demostración.* Se sigue de los Teoremas 6.2.6, 6.2.20 y 6.3.9 y Corolarios 6.2.9 y 6.3.11.  $\square$

*Observación 6.4.3.* Si  $X$  no tiene componentes top-conexas qc-isomorfas al vacío (con haz estructural nulo), es claro que  $\pi_0(|X|) = \pi_0(|\mathbf{Con}(X)|)$ . En particular, como  $\mathbf{pw}$  elimina los puntos cuyo anillo es cero, se tiene que

$$\pi_0^{\text{pw}}(X) = \pi_0(|\mathbf{pw}(X)|) = \pi_0(|\mathbf{Geo}(X)|).$$

### 6.4.1. Puntos y funtores fibra II

Podemos completar ahora la discusión de la Sección 5.6.3. Sea  $\mathbf{x}$  un punto esquemático de un espacio esquemático  $X$ . Se tiene un functor «fibra»

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathbf{x}}: X_{\text{wZar}} &\rightarrow \mathbf{Set} & (6.4.1) \\ (U \rightarrow X) &\mapsto |\text{Spec}(U \times_X \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x})))| \simeq |U \times_X^{\text{geo}} \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x}))|; \end{aligned}$$

donde  $|-|$  denota, como siempre el conjunto subyacente. En efecto, dado  $f: U \rightarrow X$  y  $\mathbf{x} = (x, \mathfrak{p}_x)$ , se tiene que  $|U \times_X \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x}))| = |f^{-1}(x)|$  y, como  $f$  es inmersión plana, la fibra del estructural de  $U \times_X \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x}))$  en cada punto es, o bien isomorfa a  $\kappa(\mathbf{x})$  (cuando  $\mathfrak{p}_x$  proviene de un  $\mathfrak{q}_u \subseteq \mathcal{O}_{U,u}$  con  $f(u) = x$  vía  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{U,u}$ ), o bien nula (en el caso contrario). Ahora bien, observemos que si  $C \subseteq f^{-1}(\mathbf{x}) := U \times_X \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x}))$  es una componente conexa y existe un  $u \in C$  tal que  $\mathcal{O}_{C,u} \simeq \kappa(\mathbf{x}) \neq 0$ , se verifica que

$$\mathbf{Geo}(C) = (\star, \kappa(\mathbf{x}))$$

por el Ejemplo 6.2.4 y la definición de **Geo**. Esta componente se corresponde con el único punto esquemático de  $U \times_X \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x}))$  asociado al punto genérico de dicho cerrado irreducible.

Es decir, se concluye que **Geo** «elimina» las componentes conexas de  $f^{-1}(x)$  cuyo haz estructural es idénticamente cero y reduce el resto de componentes a espacios puntuales que están en correspondencia biunívoca con los puntos esquemáticos de la fibra. Se tiene por tanto una biyección

$$|U \times_X^{\text{geo}} \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x}))| \simeq |\text{Spec}(U \times_X \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x})))|,$$

como queríamos.

**Lema 6.4.4.** El functor  $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$  es geométrico: envía qc-isomorfismos a isomorfismos. Además, si  $\text{Spec}(X) = S$  es un esquema y  $s = \mathbf{x} \in S$ , la localización de  $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$  extiende de modo natural —vía la inclusión  $S_{\text{wZar}} \subseteq (X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}$ — el functor fibra  $S_{\text{wZar}}$  definido por  $s$ .

*Demostración.* Se sigue de la discusión previa. □

*Observación 6.4.5.* Si  $U \rightarrow X$  es un morfismo esquemático cualquiera, la biyección de la ecuación 6.4.1 que acabamos de discutir se sigue manteniendo. La única diferencia es dada una componente irreducible topológica

$C \subseteq f^{-1}(x) \equiv U \times_X \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x}))$ , se verifica que  $\mathbf{Geo}(C)$  tiene tantas componentes conexas, que son espacios puntuales, como puntos esquemáticos corresponden a la parte algebraica de la fibra. Además, tiene sentido definir el functor fibra, no solo de  $\mathbf{x}$ , sino de cualquier punto « $\Omega$ -geométrico»  $\text{Spec}(\Omega) \rightarrow X$  —con  $\Omega$  cuerpo—, como  $U \times_X^{\text{geo}} \text{Spec}(\Omega)$ . El análogo del Lema 6.4.4 es también válido.

El functor «fibra de un haz» asociado a  $\mathbf{x}$  (o  $F_{\mathbf{x}}$ ) es, por las Proposiciones 5.6.33 y 5.6.6,

$$\begin{aligned} (-)_{\mathbf{x}}: \mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}}) &\rightarrow \mathbf{Set} \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{F}_{\mathbf{x}} \simeq \mathcal{F}(U_{\mathbf{x}} \rightarrow X). \end{aligned}$$

Dado un recubrimiento  $\{U_i \rightarrow U\}$  por inmersiones planas, la aplicación

$$\coprod F_{\mathbf{x}}(U_i \rightarrow X) \rightarrow F_{\mathbf{x}}(U \rightarrow X)$$

es epiyectiva —en caso contrario  $\text{Spec}(\kappa(\mathbf{x})) \rightarrow X$  no centraría en  $x$ ; podemos suponer incluso que  $X$  es conciso—. Además,  $F_{\mathbf{x}}(U \rightarrow X)$  es exactamente el conjunto de puntos esquemáticos de  $X$  con imagen en  $U$ , i.e.

$$F_{\mathbf{x}}(U \xrightarrow{f} X) \simeq \{\text{Factorizaciones } \text{Spec}(\kappa(\mathbf{x})) \xrightarrow{\mathbf{u}} U \xrightarrow{f} X \text{ con } f \circ \mathbf{u} = \mathbf{x}\};$$

de donde es ahora claro que  $F_{\mathbf{x}}$  conmuta con productos fibrados y que la fibra de la identidad es  $F_{\mathbf{x}}(X \rightarrow X) = \{\star\}$ . Todo esto prueba lo siguiente:

**Proposición 6.4.6.** Sea  $X$  espacio esquemático. Todo punto esquemático  $\mathbf{x}$  define un *punto del sitio*  $X_{\text{wZar}}$  —Definición B.3.6—, que es dado por el functor  $F_{\mathbf{x}}$ . El correspondiente punto del topos  $\mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}})$  es  $(-)_{\mathbf{x}}$ .

**Teorema 6.4.7.** El topos  $\mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}})$  es localmente coherente —Definición B.3.8— y, en particular, tiene suficientes puntos —Definición B.3.7—.

*Demostración.* Se sigue de la definición, pues nuestras familias recubridoras son finitas. La segunda parte es el Teorema de Deligne B.3.11.  $\square$

**Teorema 6.4.8.** El sitio  $(X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}}, \mathcal{O}_{X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}}})$  es localmente anillado.

*Demostración.* Se verifica claramente la Definición B.3.12 por habernos restringido al caso afin. De hecho, el recubrimiento que allí aparece se puede tomar por abiertos a nivel de espectros.  $\square$

Esto dice que para todo punto  $p: \mathbf{Set} \rightarrow X_{\text{wZar}}$  —que se corresponde con un punto de  $X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}}$  porque ambos sitios inducen el mismo topos—, la fibra del haz  $\mathcal{O}_{X_{\text{wZar}}}$  en  $p$  es un anillo local, cosa que ya sabíamos si  $p$  viene inducido por  $F_{\mathbf{x}}$  para cierto  $\mathbf{x} \in \text{Spec}(X)$ .

### Cuestiones abiertas

En lo relativo a la caracterización de todos los puntos de  $(X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}$ , no tenemos claro si son siempre de la forma  $F_{\mathbf{x}}$  para cierto  $\mathbf{x}$  o si, como en el caso de la topología pro-étale, no lo son. Probar la primera afirmación parece plausible —motivada en parte por el Teorema 6.4.8 y la Proposición B.3.13— si se verifican las siguientes conjeturas:

*Conjetura 6.4.9.* Fijado  $X$  esquemático y si admitimos espacios esquemáticos infinitos —véase la discusión del Apéndice B.1—, el sitio  $(X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}$  tiene colímites arbitrarios representados por el cilindro esquemático.

*Idea para la demostración.* Está claro que tiene colímites finitos, donde la unión de una familia finita  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  está representada por el cilindro definido por ella, véase 5.4.16. Si  $I$  es arbitrario, la idea es que el espacio resultante debería seguir siendo el cilindro de una familia infinita, que daría un espacio esquemático infinito. En este caso, consideramos que todos los resultados relativos al cilindro deberían seguir siendo válidos —aunque hay algunos detalles relativos a la acotación superior del poset  $|\text{Cyl}(\mathcal{U})|$  con los que se debe tener cuidado—.

*Observación 6.4.10.* En realidad hace falta algo más débil: que el sitio  $\text{Spec}(X)_{\text{wZar}}$  admita colímites arbitrarios de proesquemas. La versión que conjeturamos arriba se refiere a una presentación concreta de estos colímites.

*Conjetura 6.4.11.* Todo punto de  $(X_{\text{wZar}})_{\text{qc}}$  es equivalente a  $F_{\mathbf{x}}$  para algún  $\mathbf{x} \in \text{Spec}(X)$ .

*Idea para la demostración.* Seguimos [10, Example 04EJ]. Sea  $p$  un punto inducido por un functor  $u: (X_{\text{wZar}})_{\text{qc}} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Como  $u$  conmuta con productos fibrados y para todo monomorfismo plano  $U \rightarrow X$ , la diagonal es un qc-isomorfismo,  $u(U) = u(U) \times u(U)$ , por lo que  $u(U) = \emptyset$  o  $u(U) = \{\star\}$ . Es más, dado un recubrimiento  $\{U_i \rightarrow U\}$ ,  $u(U) = \emptyset$  si y solo si  $u(U_i) = \emptyset$  para todo  $i$ .

Consideramos ahora el cilindro  $W \rightarrow X$  de todos los  $U \rightarrow X$  tales que  $u(U) = \emptyset$ . Nótese que, en realidad, basta considerar un representante por cada clase de qc-isomorfismo. Esencialmente como en la referencia, se prueba que el complementario de la imagen de  $\text{Spec}(W) \rightarrow \text{Spec}(X)$  es un cerrado irreducible en la topología de las especializaciones —lo cual requiere, de nuevo, resultados relativos a la estabilidad de los proesquemas al restringir a imágenes de monomorfismos planos—. Como la topología del orden es sobria, este cerrado irreducible corresponde a un único punto de  $\text{Spec}(X)$ , exactamente el buscado.

## Capítulo 7

# Clases geométricas de espacios y morfismos esquemáticos

Dedicamos este largo capítulo a estudiar muy diversas propiedades de los espacios y morfismos esquemáticos, genéricamente en analogía con las versiones homónimas para esquemas. Para poder comparar nuestras definiciones con las clásicas, introducimos la noción de «morfismo algebraico», que busca ser análoga a la de morfismo de funtores representable —y, de paso, la noción de «espacio esquemático algebraico»—, pero en lo posible intentaremos evitar su uso para extender definiciones, dado que no da por sí misma criterios para determinar cuando un morfismo verifica cierta propiedad sin antes pasar por el functor  $\text{Spec}$  —derrotando el propósito conceptual de trabajar con modelos finitos—. También caracterizamos los morfismos esquemáticos que inducen *morfismos isomorfos* entre espectros, que llamaremos «qc-equivalentes», y relacionamos este concepto la terminología de *propiedades geométricas* de la Definición 6.1.1.

A partir de este punto, definimos y caracterizamos sistemáticamente diversos tipos de morfismos, teniendo en mente que nuestro objetivo último es dar una generalización operativa de la noción de morfismo propio. Una vez llegamos a ella, probamos el análogo esquemático de los Teoremas fundamentales para este tipo de morfismos: finitud de la cohomología relativa, teorema de las funciones formales y factorización de Stein.

En general, todos los contenidos de la sección son originales, con excepción de los resultados más básicos sobre morfismos afines de la Sección

7.4.1. Algunas nociones fueron sugeridas por F. Sancho, concretamente las de «inmersión cerrada» o «morfismo finito»; siendo además útiles varias de nuestras conversaciones, en particular su insistencia en la idea de definir morfismos propios «localmente» para tratar de reducir la demostración del «teorema de finitud» al conocido para esquemas, en vez de seguir el tortuoso camino de los lemas de Chow y Dévissage. Esto último fue posible gracias a la definición de «modelos finitos» a partir del cilindro que hicimos en la Construcción 5.4.22. Curiosamente, la definición resultante de morfismo «pro-localmente propio» parece generalizar la de morfismos propio para esquemas bajo ciertas hipótesis de separabilidad; estando relacionado con varios interrogantes sobre los monomorfismos planos de esquemas determinar si es o no equivalente *a posteriori*.

## 7.1. Espacios esquemáticos algebraicos

Comenzamos introduciendo una subclase nueva de espacios esquemáticos, que incluye a todos los espacios semiseparados y a todos los modelos finitos de esquemas, y que presenta mejores propiedades que la categoría esquemática completa. La definición está inspirada en la clásica de «espacio algebraico» dentro de la categoría de haces étale en esquemas —y también por la de «*stack* algebraico» dentro de la de 2-haces en esquemas u espacios algebraicos—, de ahí la terminología. En la medida de lo posible, evitaremos imponer estas condiciones adicionales sobre nuestros espacios esquemáticos, pero consideramos que la exposición quedaría demasiado incompleta sin un estudio elemental.

**Definición 7.1.1.** Un morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  se dice *algebraico* si, para todo  $Z \rightarrow Y$  tal que  $\text{Spec}(Z)$  es un esquema,  $\text{Spec}(Z \times_Y X)$  es un esquema. Un espacio esquemático  $X$  se dice *algebraico* si la diagonal  $\Delta: X \rightarrow X \times X$  es algebraica.

*Observación 7.1.2.* Es crucial que la condición en la Definición 7.1.1 sea que  $\text{Spec}(Z)$  sea un esquema, no la hipótesis más fuerte de que  $Z$  tenga restricciones abiertas. El propósito de esto es incluir a todos los abiertos afines de un  $X$  en principio arbitrario, en particular a sus mínimos; y es lo que hace que tengamos trivialidades más adelante.

*Ejemplo 7.1.3.* Si  $X$  es tal que  $\text{Spec}(X)$  es un esquema, entonces es algebraico. Esto se sigue de la Proposición 4.4.4. Por idénticos motivos, todo  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $\text{Spec}(f)$  es un morfismo de esquemas es algebraico.

**Definición 7.1.4.** Sea  $\mathbf{P}$  una propiedad de morfismos de *esquemas* tal que

- 1) Es estable por cambio de base arbitrario.
- 2) Es local en la base en la topología fpqc: dado  $S \rightarrow T$  y dado  $T' \rightarrow T$  fielmente plano y quasicompacto,  $\mathbf{P}(T' \times_T S \rightarrow T') \Rightarrow \mathbf{P}(S \rightarrow T)$ .

Diremos que un morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  es *algebraicamente*  $\mathbf{P}$  si es algebraico y para todo espacio esquemático  $Z$  con  $\text{Spec}(Z)$  esquema,  $\mathbf{P}(\text{Spec}(Z \times_Y X) \rightarrow \text{Spec}(Z))$ .

*Observación 7.1.5.* Todas las propiedades de morfismos de esquemas relevantes para esta memoria verifican las propiedades 1) y 2) de la Definición 7.1.4. La quasicompacidad es redundante en nuestra situación qc-qs.

El siguiente lema es trivial y fundamental: en particular nos dice que, si  $X \rightarrow Y$  es modelo finito de un morfismo de esquemas  $S \rightarrow T$ , entonces  $X \rightarrow Y$  es algebraicamente  $\mathbf{P}$  si y solo si el morfismo de esquemas es  $\mathbf{P}$ . Una constante a lo largo de todo el capítulo será ver que, definida una propiedad de morfismos esquemáticos y restringida esta al caso algebraico, se corresponde con una propiedad conocida de morfismos de esquemas. Esto significa que la nueva propiedad generaliza la clásica y que podemos emplearla para estudiar esquemas a través de sus modelos finitos.

**Lema 7.1.6.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es tal que  $\text{Spec}(f)$  es un morfismo de esquemas y  $\mathbf{P}$  es una propiedad de morfismos de esquemas en las condiciones de la Definición 7.1.4,  $f$  es algebraicamente  $\mathbf{P}$  si y solo si  $\mathbf{P}(\text{Spec}(f))$ .

Ahora nos disponemos a probar que *ser algebraicamente*  $\mathbf{P}$  es una propiedad geométrica según la Definición 6.1.1.

**Proposición 7.1.7.** *Ser algebraicamente*  $\mathbf{P}$  es estable por cambio de base y composición.

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 4.4.4. □

**Proposición 7.1.8.** Un morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  es algebraicamente un isomorfismo si y solo si es un qc-isomorfismo.

*Demostración.* Si  $f$  es un qc-isomorfismo, para todo  $Z \rightarrow Y$  se tiene que  $\text{Spec}(Z \times_Y X) \simeq \text{Spec}(Z)$  por la Proposición 4.4.4 y el Teorema 5.1.9. Recíprocamente, si  $f$  es algebraico, en particular  $f|_{f^{-1}(U_y)}: f^{-1}(U_y) \rightarrow U_y$  induce isomorfismos  $\text{Spec}(f^{-1}(U_y)) \simeq \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$  para  $y \in Y$ ; lo que nos da isomorfismos  $\mathcal{O}_{Y,y} \simeq \mathcal{O}_{\text{Spec}(f^{-1}(U_y))}(\text{Spec}(f^{-1}(U_y))) \simeq \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_y))$  y que las antiimágenes de los  $U_y$  son afines, es decir, que  $f$  es un qc-isomorfismo —en terminología del Apéndice A.2, que  $f$  es una Spec-equivalencia—.  $\square$

**Proposición 7.1.9.** La propiedad de que un morfismo o espacio esquemático sea algebraico es geométrica. Más en general, para cualquier propiedad  $\mathbf{P}$  en las condiciones de la Definición 7.1.4, *ser algebraicamente*  $\mathbf{P}$  es una propiedad geométrica.

*Demostración.* Para morfismos: es fácil ver que verifican las cuatro propiedades de la Definición 6.1.1 como consecuencia de las Proposiciones 7.1.7 y 7.1.8. Para espacios, basta aplicar lo anterior a las diagonales.  $\square$

Siguen un par de lemas que relacionan morfismos y espacios algebraicos:

**Lema 7.1.10.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es algebraico y  $\text{Spec}(Y)$  es un esquema, entonces  $\text{Spec}(X)$  es un esquema. Si  $Y$  es algebraico, entonces  $X$  es algebraico.

*Demostración.* Teniendo presente la Proposición 4.4.4: la primera parte se obtiene fibrando por la identidad  $Y \rightarrow Y$ ; la segunda se deduce de que  $(f, f): X \times X \rightarrow Y \times Y$  también es algebraico y de que, para todo  $Z \in X \times X$ ,

$$Z \times_{X \times X} X \simeq Z \times_{Y \times Y} Y \times_Y X,$$

de donde se concluye.  $\square$

*Ser algebraicamente*  $\mathbf{P}$  es local en la «topología *algebraicamente* fielmente plana»:

**Proposición 7.1.11.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo algebraico y  $Z \rightarrow Y$  un morfismo algebraicamente fielmente plano, entonces  $f$  es algebraicamente  $\mathbf{P}$  si y solo si  $Z \times_Y X \rightarrow Z$  es algebraicamente  $\mathbf{P}$ .

*Demostración.* El «solo si» se sigue de la estabilidad por cambio de base. Recíprocamente, sea  $W \rightarrow Y$  con  $\text{Spec}(W)$  esquema y consideremos el cambio de base  $W \times_Y Z \rightarrow W$ , que es algebraicamente fielmente plano por serlo

$Z \rightarrow Y$ , lo que en particular implica que  $\text{Spec}(W \times_Y Z) \rightarrow \text{Spec}(W)$  es un morfismo fielmente plano de esquemas —Lemas 7.1.10 y 7.1.6—. Como  $\mathbf{P}$  era un propiedad de morfismos de esquemas estable por cambio de base y local en la topología fpqc, se tiene  $\mathbf{P}(\text{Spec}(W \times_Y Z \times_Y X) \rightarrow \text{Spec}(W \times_Y Z))$  y, por tanto  $\mathbf{P}(\text{Spec}(W \times_Y X) \rightarrow \text{Spec}(W))$  para cualquier  $W$  como antes; es decir, que  $f$  es algebraicamente  $\mathbf{P}$ .  $\square$

La motivación para introducir la noción de morfismo algebraico fue buscar un contexto general para extender de modo natural propiedades de morfismos de esquemas al caso esquemático, en el sentido del Lema 7.1.6. La definición de espacio esquemático algebraico responde, sin embargo, a la búsqueda de «criterios efectivos de descenso» para  $\text{Spec}$ .

**Lema 7.1.12.** Si  $f: U \rightarrow X$  es un morfismo con  $X$  algebraico y  $\text{Spec}(U)$  un esquema, entonces  $f$  es morfismo algebraico. En particular, si  $X$  es algebraico, los morfismos naturales  $i_x: U_x \rightarrow X$  son algebraicos, así como  $\coprod_{x \in X} U_x \rightarrow X$ .

*Demostración.* Se sigue de que para todo  $Z$  con  $\text{Spec}(Z)$  un esquema,  $\text{Spec}(Z \times U)$  es un esquema y  $Z \times_X U \simeq (Z \times U) \times_{X \times X} X$ .  $\square$

**Lema 7.1.13.** Si  $X$  es un espacio esquemático algebraico y  $U = \coprod_{x \in X} U_x$ , se verifica que  $\text{Spec}(U) \times_{\text{Spec}(X)} \text{Spec}(U)$  es un esquema y  $\text{Spec}(X)$  se obtiene como coequalizador en espacios localmente anillados del diagrama

$$\text{Spec}(U) \times_{\text{Spec}(X)} \text{Spec}(U) \rightrightarrows \text{Spec}(U).$$

*Demostración.* Se sigue de que  $\text{Spec}(U \times_X U)$  es un esquema por la definición, de que  $\text{Spec}$  conmuta con productos fibrados por la Proposición 4.4.4 y del Lema 3.2.3.  $\square$

*Observación 7.1.14.* Pongamos ahora que tenemos un espacio esquemático base  $Y$  tal que  $\text{Spec}(Y) = S$  es un esquema y  $X \rightarrow Y$  es un espacio sobre  $Y$ . Sea  $R = \text{Spec}(U \times_X U)$ . Si  $X$  es algebraico, es fácil comprobar que  $R \rightrightarrows \text{Spec}(U)$  es una relación de equivalencia en la categoría de esquemas. Consideremos el pre haz cociente  $U/R$  —abusando de notación—

$$U^\bullet/R^\bullet: \mathbf{Sch}_{/S}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad T \mapsto U^\bullet(T)/R^\bullet(T);$$

donde  $(-)^{\bullet}$  denota la imagen de  $(-)$  por la inmersión de Yoneda (contra-variante). Sea  $U/R$  la hacificación de este prehaz en la topología de los *monomorfismos planos* de esquemas y recubrimientos fpqc. Es decir, como todo este proceso es functorial, si  $S_{\text{wZar}}$  denota el sitio de los monomorfismos planos sobre  $S$  y  $\mathbf{AlgSch}/_Y$  a la categoría de morfismos algebraicos a  $Y$  —que, en particular, parten de espacios esquemáticos algebraicos—, se tiene un functor

$$\mathbf{AlgSch}/_Y \mapsto \mathbf{Sh}(S_{\text{wZar}}).$$

Surge ahora la cuestión de probar si este functor es plenamente fiel y de caracterizar su imagen esencial, estableciendo una equivalencia análoga a la que existe entre espacios algebraicos y relaciones de equivalencia étale en la categoría de esquemas. Sugerimos exactamente la misma caracterización: la imagen serán haces  $\mathcal{F}: S_{\text{wZar}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  con diagonal representable y dotados de un esquema (qc-qs)  $U$  equipado con un morfismo  $U^{\bullet} \rightarrow \mathcal{F}$  epiyectivo y que es un monomorfismo plano al restringir a cada componente conexa. Respondemos parcialmente y detallamos parte de esta problemática en el Apéndice B.4.

Por último, destacamos una propiedad de los morfismos algebraicamente fielmente planos que da algo más de luz sobre la construcción del functor  $\mathbf{pw}$  de la Sección 6.3.

**Proposición 7.1.15.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es algebraicamente fielmente plano y  $U_y$  es conexo para cierto  $y$ , entonces  $f^{-1}(U_y)$  es conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $f^{-1}(U_y) = Z^1 \amalg Z^2$  para algún  $y$  —con  $Z^1$  y  $Z^2$  no siendo qc-isomorfos al vacío por la hipótesis sobre  $X$ —, cuyo espectro es un esquema por la hipótesis de que  $f$  sea algebraico; y denotemos por  $f_i: Z_i \rightarrow U_y$  a los morfismos naturales ( $i = 1, 2$ ). Como  $f$  es fielmente plano, se tiene un morfismo fielmente plano *de esquemas*

$$\text{Spec}(f^{-1}(U_y)) = \text{Spec}(Z^1) \amalg \text{Spec}(Z^2) \rightarrow \text{Spec}(U_y),$$

tal que, como  $\text{Spec}(f^{-1}(U_y)) \simeq \text{Spec}(U_y) \times_{\text{Spec}(Y)} \text{Spec}(X)$  —por ejemplo, por las Proposiciones 4.4.4 y 4.3.12—,  $\text{Spec}(Z^1) \times_{\text{Spec}(U_y)} \text{Spec}(Z^2) \simeq \emptyset$ . Como los morfismos fielmente planos de esquemas son cocientes topológicos, esto implica que  $\text{Spec}(U_y)$  es desconexo, contradiciendo la pw-conexión en  $Y$  y concluyendo la demostración.  $\square$

*Observación 7.1.16.* Aplicado al caso particular del qc-isomorfismo —luego algebraicamente fielmente plano—  $\pi: \mathbf{pw}(X) \rightarrow X$  para cierto  $X$  y, teniendo en cuenta que la conexión coincide con top-conexión en  $\mathbf{pw}(X)$ , la Proposición 7.1.15 es coherente con que los puntos  $x \in X$  tales que  $\pi^{-1}(U_x)$  es top-conexo sean justo aquellos para los que  $U_x$  es conexo. Puede adaptarse el argumento para ver que las componentes top-conexas de dicha antiimagen están en correspondencia biunívoca con las componentes conexas de  $U_x$ .

### Cuestiones abiertas

Si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo algebraico, es claro que  $\mathrm{Spec}(f^{-1}(U_y))$  es un esquema para todo  $y \in Y$ , al igual que lo son las fibras de los puntos esquemáticos. Nos preguntamos por el recíproco:

*Conjetura 7.1.17.* Si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo esquemático verificando que  $\mathrm{Spec}(f^{-1}(U_y))$  es un esquema para todo  $y \in Y$ , entonces  $f$  es algebraico.

*Idea para la demostración.* Si  $Z \rightarrow Y$  es un morfismo con  $\mathrm{Spec}(Z)$  un esquema. Obsérvese que, si pudiésemos suponer que  $Z$  tiene restricciones abiertas, acabaríamos: como los  $\mathrm{Spec}(U_z) \rightarrow \mathrm{Spec}(Z)$  son ahora inmersiones abiertas y estas son estables por cambio de base arbitrario —Sección 7.7—, si tuviésemos que  $\mathrm{Spec}(U_z \times_Y X)$  es un esquema para todo  $Z$ , se obtendría un recubrimiento abierto por esquemas de  $\mathrm{Spec}(Z \times_Y X)$ , llegándose la conclusión deseada. Podríamos suponer, por tanto, que  $Z = U_z$  para algún  $z$ . En ese caso,  $g: U_z \rightarrow Y$  factorizaría por  $U_{g(z)} \rightarrow Y$  y se concluiría que  $\mathrm{Spec}(U_z \times_Y X) \simeq \mathrm{Spec}(U_z \times_{U_{g(z)}} f^{-1}(U_{g(z)}))$  es un esquema.

El problema de esta línea de argumentación es que, al contrario que para el Lema 7.4.15, no tenemos un modo claro de utilizar la Proposición 5.2.4 para restringirnos al caso de restricciones abiertas. Una posible solución es redefinir la noción de *morfismo algebraico* a nivel de la localización  $\mathbf{SchFin}_{\mathrm{qc}}$ , —lo cual permitiría una mejor Definición B.4.14 para proesquemas—, pero esto lleva a problemas técnicos de similar índole, además de que parece extraño definir una propiedad en espacios esquemáticos en términos de morfismos en la localización. De todos modos, la alternativa que preferimos pasaría por hilar más fino y probar alguna variante para espacios esquemáticos de [10, Lemma 0B80]: si para todo punto  $\mathbf{x} \in \mathrm{Spec}(X)$  se verifica que  $\mathrm{Spec}(U_{f(\mathbf{x})} \times_Y X)$  es un esquema —con  $U_{f(\mathbf{x})}$  el entorno *local*—, ¿es  $\mathrm{Spec}(X)$  un esquema? En el caso de espacios algebraicos, la idea de la demostración

es expresar el entorno del punto imagen como un límite cofiltrante de abiertos —lo cual también podemos hacer, al menos a nivel de  $U_{f(\mathbf{x})} \rightarrow U_{f(x)}$ — y emplear la condición de presentación finita del morfismo étale estructural de los espacios algebraicos para encontrar entornos abiertos adecuados de cada punto de la fibra. Por supuesto, en nuestra ausencia de finitud, este argumento no generaliza. Habría que considerar también dar una demostración tan solo en el caso de que  $X$  sea esquemático algebraico.

Si el resultado que sugerimos al final del argumento anterior es cierto, se tiene la herramienta principal para probar un análogo del resultado de Rydh [10, Lemma 0B8A] para espacios esquemáticos algebraicos. De ser cierto, mejoraría la descripción del sitio pequeño de inmersiones planas en algunos casos.

*Conjetura 7.1.18.* Si  $X$  es algebraico, toda inmersión plana  $U \rightarrow X$  es algebraica.

*Idea de la demostración.* Si nos podemos reducir al caso de  $X = U_x$  con  $\mathcal{O}_{X,x}$  local, se sigue de un argumento sencillo de descenso fielmente plano.

## 7.2. Reducibilidad, irreducibilidad e integridad

La única noción relevante para lo que resta de memoria es la de espacio esquemático reducido. Por completitud, trataremos también brevemente la irreducibilidad e integridad.

Recordemos que un anillo conmutativo  $A$  se dice *reducido* si su nilradical es cero:  $\text{Rad}(A) = \sqrt{(0)} = (0)$ . Por otra parte, se dice *irreducible* si su nilradical es primo. En particular,  $A$  es reducido e irreducible si y solo si  $(0) \subseteq A$  es un ideal primo, es decir, si es un anillo íntegro.

**Lema 7.2.1.** Sea  $X$  pseudoesquemático e  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$  un haz de ideales cuasicoherente. El haz de ideales  $\sqrt{\mathcal{I}}$  tal que  $\sqrt{\mathcal{I}}_x := \sqrt{\mathcal{I}_x}$  para cada  $x \in X$  es cuasicoherente.

*Demostración.* Consecuencia del Lema B.2.20. □

Como en el caso de anillos, denotamos  $\text{Rad}(\mathcal{O}_X) = \sqrt{(0)}$ .

### Espacios reducidos

**Definición 7.2.2.** Un  $X$  esquemático es *reducido* si  $\text{Rad}(\mathcal{O}_X) = (0)$ .

Es claro que  $X$  es reducido si y solo si  $\mathcal{O}_{X,x}$  es reducido para todo  $x \in X$ . Por el Lema B.2.20, basta comprobar la condición para los anillos de los puntos minimales de  $X$ . Como en el caso de esquemas, todo espacio esquemático  $X$  tiene asociado de modo functorial un espacio esquemático reducido y afín sobre  $X$ ,

$$X_{\text{red}} := (X, \mathcal{O}_X / \text{Rad}(\mathcal{O}_X)) \rightarrow X$$

verificando la propiedad universal evidente: el functor  $X \mapsto X_{\text{red}}$  es adjunto por la derecha de la inclusión de «espacios esquemáticos reducidos» en la categoría esquemática. Además, en virtud del Lema 3.2.7 y de que todo primo es radical, es claro que

$$\text{Spec}(X_{\text{red}}) \rightarrow \text{Spec}(X)$$

es un homeomorfismo.

**Lema 7.2.3.** Dado  $X$  y un punto redundante  $x \in X$ , si  $U_x^* = U_x - \{x\}$  es reducido, entonces  $U_x$  es reducido. En particular,  $X$  es reducido si y solo si  $\text{Con}(X)$  es reducido.

*Demostración.* Si  $x$  es redundante,  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \prod_{y>x} \mathcal{O}_{X,y}$  es fielmente plano, luego inyectivo. Si se verifica la hipótesis, este producto es reducido por ser un producto finito de anillos reducidos, luego  $\mathcal{O}_{X,x}$  es reducido.  $\square$

**Lema 7.2.4.** Ser *reducido* es una propiedad geométrica.

*Demostración.* Sea  $\phi: X \rightarrow Y$  un qc-isomorfismo. Como, para todo  $x \in X$ ,  $f_x^\sharp: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  es epimorfismo plano de anillos, si  $Y$  es reducido,  $X$  es reducido por el Lema B.2.20. Si  $X$  es reducido,  $Y$  lo es por el mismo argumento, el Lema 7.2.3 y la Proposición 6.2.12.  $\square$

**Corolario 7.2.5.** Si  $X$  es afín, es reducido si y solo si  $\mathcal{O}_X(X)$  es un anillo reducido.

**Lema 7.2.6.** Un espacio esquemático  $X$  es reducido si y solo si  $\mathcal{O}_X(U)$  es reducido para todo abierto  $U$ ; si y solo si para toda inmersión plana  $U \rightarrow X$ ,  $\mathcal{O}_U(U)$  es reducido. De hecho,  $X$  es reducido si y solo si admite un recubrimiento  $\{U_i \rightarrow X\}$  por inmersiones planas con los  $U_i$  reducidos.

*Demostración.* Las partes «si» son evidentes. Supongamos que  $X$  es reducido, es decir, que todo  $\mathcal{O}_{X,x}$  lo es. Si  $U \subseteq X$  es un abierto, observamos de nuevo que se tiene una inyección natural  $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$ , donde el segundo anillo es reducido por ser producto de reducidos; luego  $\mathcal{O}_X(U)$  es reducido. En general, si  $U \rightarrow X$  es una inmersión plana,  $\mathcal{O}_{X,i(u)} \rightarrow \mathcal{O}_{U,u}$  es un epimorfismo plano para todo  $u$ , luego  $U$  es reducido por el Lema B.2.20. La última parte se deduce del Lema 7.2.3, o también razonarse con el cilindro asociado al recubrimiento y aplicar el Lema 7.2.4 para reducir la cuestión al primer caso del Lema que nos ocupa.  $\square$

### Espacios irreducibles

La discusión que sigue es paralela a la de la Sección 6.3.

**Definición 7.2.7.** Un espacio esquemático  $X$  se dice *irreducible* si  $|\mathrm{Spec}(X)|$  es un espacio topológico irreducible; se dice *pw-irreducible* si  $U_x$  es irreducible para todo  $x \in X$ ; y se dice *top-irreducible* si  $|X|$  es un espacio topológico irreducible, i.e. si es el cierre de un único punto maximal.

Es claro que *ser irreducible* es una propiedad geométrica por definición, mientras que las otras dos no lo son. Gracias a la descripción de la topología de  $\mathrm{Spec}(X)$  en términos de ideales —Lema 7.7.13—, es fácil ver:

**Lema 7.2.8.** Un espacio esquemático  $X$  es irreducible si y solo si para cualesquiera haces de ideales radicales cuasicoherentes  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_X$  verificando  $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{O}_X)$ , o bien  $\mathcal{I} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{O}_X)$  o  $\mathcal{J} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{O}_X)$ .

**Lema 7.2.9.** Un espacio esquemático  $X$  es irreducible si y solo si para todo abierto *afín*  $U \subseteq X$ , el anillo  $\mathcal{O}_X(U)$  es irreducible.

*Demostración.* Se sigue del Lema 7.2.8, la expresión de la irreducibilidad de  $\mathcal{O}_X(U)$  en términos de ideales y el Teorema «de extensión» 4.1.11.  $\square$

**Corolario 7.2.10.** Si  $X$  es irreducible, es pw-irreducible y  $\mathbf{Geo}(X)$  es top-irreducible.

*Demostración.* Podemos suponer que  $X$  es conciso, pues la noción de irreducibilidad es geométrica. Por el Lema 7.2.9 aplicado a los  $U_x$ , se tiene que  $X$  es pw-irreducible. Por el mismo Lema también vemos que la intersección de dos abiertos afines  $U_x, U_{x'} \subseteq X$  debe ser no vacía, pues en caso contrario las secciones globales del abierto afín  $U_x \amalg U_{x'}$  globales serían un producto de anillos no nulos, que no es irreducible; de donde se deduce que  $X = C_{x''}$  para cierto  $x''$  maximal.  $\square$

*Observación 7.2.11.* Obsérvese que  $\mathbf{Con}(X)$  es top-irreducible si y solo si el soporte del haz estructural es un espacio topológico irreducible, puesto que un punto maximal es redundante si y solo si su anillo es cero.

**Corolario 7.2.12.** Si  $X$  es irreducible, entonces es pw-conexo y  $\mathbf{Geo}(X)$  es top-conexo —y, por supuesto,  $X$  es conexo—.

**Proposición 7.2.13.** Un espacio esquemático conciso  $X$  es irreducible si y solo si es pw-irreducible y top-irreducible.

*Demostración.* El directo es el Corolario 7.2.10. Para el recíproco, como la cuestión es topológica en  $\mathrm{Spec}(X)$ , podemos suponer que  $X$  es reducido y ver que cualesquiera dos ideales cuasicoherentes  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_X$  no nulos tienen intersección no nula. Para concluir, como  $X$  es pw-irreducible, basta encontrar un  $x \in X$  tal que  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  sean simultáneamente no nulos. Debemos probar, por tanto, que si no existiese algún punto  $x \in X$  tal que  $\mathcal{I}_x \neq 0$  y  $\mathcal{J}_x \neq 0$ , entonces  $X$  no sería top-irreducible. En efecto, en dichas condiciones, tendríamos cerrados  $C_{\mathcal{I}} = \mathbf{pw}(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{I})$  y  $C_{\mathcal{J}} = \mathbf{pw}(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$  no vacíos, distintos y verificando que  $C_{\mathcal{I}} \cup C_{\mathcal{J}} = X$ , lo que contradeciría la top-irreducibilidad.  $\square$

## Espacios íntegros

**Definición 7.2.14.** Un espacio esquemático se dice *íntegro* si es reducido e irreducible. Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  se dice *de fibras geoméricamente íntegras* si para todo  $\mathbf{y} \in \mathrm{Spec}(Y)$  y extensión de cuerpos  $\kappa(\mathbf{y}) \rightarrow K$ , la fibra  $\mathrm{Spec}(K) \times_Y^{\mathrm{geo}} X$  es un espacio íntegro.

De las caracterizaciones de espacios reducidos e irreducibles, se tiene:

**Proposición 7.2.15.** Un espacio conciso  $X$  es íntegro si y solo si  $|X| = C_x$  y  $\mathcal{O}_{X,x}$  es un anillo íntegro para todo  $x \in X$  —a posteriori,  $X$  es geométrico—; además, para todo abierto afín  $U \subseteq X$ ,  $\mathcal{O}_X(U)$  es íntegro.

## 7.3. Propiedades dadas «categorialmente»

### 7.3.1. Qc-equivalencias de morfismos

Como la categoría esquemática tiene productos fibrados y estos coinciden con los de espacios anillados, sus monomorfismos deben ser inyectivos y, como los qc-isomorfismos no lo son en general, se concluye que *ser monomorfismo* no es una propiedad geométrica, como ejemplificamos en la Observación 6.2.15. Para tratar esta patología y también potenciales análogos para epimorfismos, conviene tener una noción de «equivalencia de morfismos».

**Definición 7.3.1.** Sean  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: X' \rightarrow Y'$  morfismos. Diremos que  $f$  y  $g$  son *qc-equivalentes*, denotado  $f \stackrel{\text{qc}}{\cong} g$ , si coinciden en  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}$ ; es decir, si existen isomorfismos  $h_X/\phi_X: X \xrightarrow{\sim} X'$  y  $h_Y/\phi_Y: Y \xrightarrow{\sim} Y'$  en la localización tales que  $g \circ (h_X/\phi_X) = (h_Y/\phi_Y) \circ f$ .

Por definición de la localización, « $\stackrel{\text{qc}}{\cong}$ » es una relación de equivalencia.

*Observación 7.3.2.* Es claro que dados  $f, g: X \rightarrow Y$  entre los mismos espacios, se tiene  $f \stackrel{\text{qc}}{\cong} g$  si y solo si  $\text{Spec}(f) = \text{Spec}(g)$  —entendiéndose esta igualdad *salvo automorfismos* en  $\text{Spec}(X)$  y  $\text{Spec}(Y)$ —. En la situación general de la Definición 7.3.1, esto es cierto si suponemos que  $X$  es algebraico por el Teorema B.4.22:  $f \stackrel{\text{eq}}{\cong} g$  si y solo si existen  $\varphi_X: \text{Spec}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(X')$  y  $\varphi_Y: \text{Spec}(Y) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(Y')$  tales que  $g \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ f$ . Sospechamos que debería ser cierto sin esta hipótesis.

*Ejemplo 7.3.3.* Comentando por última vez una trivialidad del «caso topológico», nótese que de la functorialidad del Teorema 6.2.6, la Observación 4.1.7 y el Ejemplo 6.2.4, se obtiene que un morfismo esquemático entre espacios esquemáticos  $f: (X, A) \rightarrow (X, B)$  con  $A, B$  haces constantes es siempre qc-equivalente a un morfismo  $(\star, A) \rightarrow (\star, B)$ ; es decir, viene determinado por el morfismo de anillos  $B \rightarrow A$ . En particular, poniendo  $A = B = \mathbb{Z}$ , queda de manifiesto que la categoría esquemática no es el contexto adecuado para tratar este caso. Esto lo esperado en vista de que todas las definiciones

relativas a la esquematicidad vienen dadas por el functor  $\text{Spec}$ , que aplicado a espacios topológicos —anillados con un haz constante— es un functor constante.

Los siguientes resultados justifican la definición de «propiedad geométrica».

**Lema 7.3.4.** . La relación « $\stackrel{\text{qc}}{=}$ » verifica las siguientes propiedades:

- a)  $g \circ f \stackrel{\text{qc}}{=} f$  si y solo si  $g$  es qc-isomorfismo.
- b)  $g \circ f \stackrel{\text{qc}}{=} g$  si y solo si  $f$  es qc-isomorfismo.
- c)  $g \stackrel{\text{qc}}{=} \text{Id}_X$  para cierto  $X$  si y solo si  $g$  es qc-isomorfismo.
- d)  $X$  e  $Y$  son qc-isomorfos si y solo si  $\text{Id}_X \stackrel{\text{qc}}{=} \text{Id}_Y$ .
- e) Para todo  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Z \rightarrow Y$  y  $f': Z \times_Y X \rightarrow Z$  el cambio de base,  $f \stackrel{\text{qc}}{=} f'$  si y solo si  $g$  es qc-isomorfismo.

*Demostración.* Las partes «si» son evidentes; las «solo si» se siguen aplicando que *ser qc-isomorfismo* es una propiedad geométrica de morfismos a la definición de « $\stackrel{\text{qc}}{=}$ ».  $\square$

Compárese con la definición de propiedad geométrica de *espacios*:

**Proposición 7.3.5.** Sea  $\mathbf{P}$  una propiedad de morfismos tal que  $\mathbf{P}(\text{Id}_X)$  para la identidad de cualquier  $X$ . Entonces  $\mathbf{P}$  es una propiedad geométrica —Definición 6.1.1— si y solo si, para cualesquiera  $f \stackrel{\text{qc}}{=} g$ ,  $\mathbf{P}(f) \Leftrightarrow \mathbf{P}(g)$ .

*Demostración.* El directo se sigue de las condiciones 1), 2), 3) y 4) de la Definición 6.1.1, pues en la Definición 7.3.1 solo aparecen composiciones con qc-isomorfismos, cambios de base por qc-isomorfismos y la propiedad «2 de 3». El recíproco se sigue de las partes «si» de a), b), c) y d) del Lema 7.3.4.  $\square$

El objetivo ahora es reducir la cuestión de cuándo dos morfismos son qc-equivalentes a una en **SchFin**, al menos en casos sencillos. Nuestra herramienta para comparar morfismos será el *ecualizador*. Podemos definirlo del modo siguiente:

**Definición 7.3.6.** Dados  $f, g: X \rightarrow Y$  morfismos esquemáticos sobre un tercer espacio  $Z$ , se define el *ecualizador de  $f$  y  $g$* , denotado  $\text{eq}(f, g)$ , como el espacio esquemático

$$\text{eq}(f, g) = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \subseteq X, \quad \mathcal{O}_{\text{eq}(f, g), x} = \text{coeq}(f_x^\#, g_x^\#),$$

donde la fibra en el punto  $x$  (con  $y = f(x) = g(x)$  e imagen  $z \in Z$ ) es el coecualizador de los morfismos de  $\mathcal{O}_{Z, z}$ -álgebras  $f_x^\#, g_x^\#: \mathcal{O}_{Y, y} \rightrightarrows \mathcal{O}_{X, x}$ .

*Observación 7.3.7.* Como la categoría esquemática tiene productos fibrados, es fácil ver que  $\text{eq}(f, g)$  está dado, *salvo isomorfismo natural*, por el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} \text{eq}(f, g) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \square & \downarrow (f, g) \\ Y & \xrightarrow{(\text{Id}, \text{Id})} & Y \times_Z Y. \end{array}$$

**Lema 7.3.8.** Dos morfismos  $f, g: X \rightarrow Y$  verifican que  $f \stackrel{\text{eq}}{=} g$  si y solo si el ecualizador  $\text{eq}(f, g) \hookrightarrow X$  es un qc-isomorfismo.

*Demostración.* Dos morfismos de espacios localmente anillados coinciden si y solo si su ecualizador es un isomorfismo. El resultado es obvio puesto que

$$\text{Spec}(\text{eq}(f, g)) \simeq \text{eq}(\text{Spec}(f), \text{Spec}(g))$$

por el Lema 4.4.4. □

*Observación 7.3.9.* La situación general de la Definición 7.3.1 también puede tratarse mediante ecualizadores, pero la terminología es muy engorrosa y no será necesario para esta memoria. Por ejemplo, para el caso simplificado en que tengamos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h_X \uparrow & & \uparrow h_Y \\ X' & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

con  $h_X, h_Y$ , qc-isomorfismos, definimos  $f': X' \rightarrow Y'$  como la composición del cambio de base  $(1 \times f): Y' \times_Y X \rightarrow Y'$  con el morfismo natural inducido  $(g \times h_X): X' \rightarrow Y' \times_Y X$ . Se verifica que  $f \stackrel{\text{qc}}{=} g$  si y solo si  $\text{eq}(f', g) \hookrightarrow X'$  es un qc-isomorfismo.

La observación esencial es la siguiente Proposición:

**Proposición 7.3.10.** Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  con  $X$  conciso. Entonces  $f \stackrel{\text{qc}}{=} g$  si y solo si  $f = g$ .

*Demostración.* Se sigue de que el morfismo  $\text{eq}(f, g) \hookrightarrow X$  es siempre inyectivo y de que, por la Proposición 6.2.14 y la hipótesis sobre  $X$ , será un qc-isomorfismo si y solo si es un isomorfismo de espacios anillados.  $\square$

Por último, destacar que los morfismos esquemáticos son los *maximales* entre los morfismos de posets anillados induciendo el «mismo» morfismo entre espectros:

**Corolario 7.3.11.** Si  $X$  es conciso y  $f, g: X \rightarrow Y$  verifican  $|f| \leq |g|$ , entonces  $f = g$  si y solo si  $f \stackrel{\text{qc}}{=} g$ .

*Demostración.* Se sigue de que todo morfismo esquemático es central.  $\square$

**Corolario 7.3.12.** Si  $X$  es conciso y  $\phi, \varphi: X \rightarrow Y$  son qc-isomorfismos con  $|\phi| \leq |\varphi|$ , entonces  $\phi = \varphi$ . Es decir, en la subcategoría de espacios concisos, los qc-isomorfismos no admiten 2-endomorfismos no triviales.

*Demostración.* Se sigue del Corolario 7.3.11, pues  $\phi \stackrel{\text{qc}}{=} \text{Id}_X \stackrel{\text{qc}}{=} \varphi$ .  $\square$

Planteamos una cuestión: ¿es «compatible» la estructura 2-categorial homotópica de  $\mathbf{SchFin}^{\text{geo}}$  —heredada de la Definición 2.1.17— con la localización por qc-isomorfismos? En virtud del Corolario 7.3.12, consideramos que la respuesta sería afirmativa y que debería ser posible definir una estructura de 2-categoría correspondiente a ella en  $(\mathbf{SchFin}^{\text{geo}})_{\text{qc}}$ .

### 7.3.2. Qc-monomorfismos y qc-epimorfismos

**Definición 7.3.13.** Diremos que  $f: X \rightarrow Y$  es un *qc-monomorfismo* (resp. *qc-epimorfismo*) en  $\mathbf{SchFin}$  si es un monomorfismo (resp. epimorfismo) en  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}$ .

En particular, todo qc-isomorfismo es un qc-monomorfismo y un qc-epimorfismo. Por la propia definición se tiene:

**Lema 7.3.14.** *Ser qc-monomorfismo y ser qc-epimorfismo* son propiedades geométricas.

En vista de la Sección 7.3.1, se tiene inmediatamente el siguiente lema:

**Lema 7.3.15.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es un qc-monomorfismo si y solo si para todo par de morfismos  $\alpha, \beta: Z \rightarrow X$  tal que  $f \circ \alpha \stackrel{\text{qc}}{=} f \circ \beta$ , es  $\alpha \stackrel{\text{qc}}{=} \beta$ . Análogo para qc-epimorfismos.

**Proposición 7.3.16.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  esquemático. Son equivalentes:

- 1)  $f$  es un qc-monomorfismo.
- 2) La diagonal  $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$  es un qc-isomorfismo.
- 3)  $\mathbf{Con}(f)$  es un monomorfismo en  $\mathbf{SchFin}^{\text{Con}}$ .
- 4) La diagonal  $\mathbf{Con}(\Delta_f) = \Delta_{\mathbf{Con}(f)}$  —donde la segunda es la diagonal en  $\mathbf{SchFin}^{\text{Con}}$ — es isomorfismo.

*Demostración.* Teniendo en cuenta que un morfismo es un qc-isomorfismo si y solo si es un isomorfismo en la localización, 1)  $\Leftrightarrow$  2) y 3)  $\Leftrightarrow$  4) son generales en cualquier categoría con productos fibrados. Si se verifica 2), se tiene un qc-isomorfismo  $\mathbf{Con}(X) \rightarrow \mathbf{Con}(X \times_Y X) = \mathbf{Con}(X) \times_{\mathbf{Con}(Y)}^{\text{Con}} \mathbf{Con}(X)$ , que además es inyectivo por ser el primer término de una composición de inyecciones, luego es un isomorfismo por la Proposición 6.2.14. Recíprocamente, si es un isomorfismo, es claro que la diagonal es un qc-isomorfismo.  $\square$

*Observación 7.3.17.* Insistimos en que es *falso* que los monomorfismos en  $\mathbf{SchFin}^{\text{Con}}$  sean inyectivos: la inclusión  $\mathbf{SchFin}^{\text{Con}} \subseteq \mathbf{SchFin}$  no preserva productos fibrados.

**Corolario 7.3.18.** Toda inmersión plana es un qc-monomorfismo. Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo si y solo si es un qc-monomorfismo fielmente plano.

**Proposición 7.3.19.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  con  $X$  conciso. Entonces  $f$  es un qc-epimorfismo si y solo si es un epimorfismo en  $\mathbf{SchFin}$ .

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 7.3.10.  $\square$

*Observación 7.3.20.* Como consecuencia, cabe destacar que los epimorfismos en  $\mathbf{SchFin}$  no son epiyectivos, como es el caso de  $\mathbf{Con}(X) \hookrightarrow X$  para  $X$  con algún punto redundante.

## 7.4. Propiedades dadas por haces cuasicoherentes

### 7.4.1. Más sobre morfismos afines

Ya habíamos definido morfismo afín para introducir los qc-isomorfismos. Profundizamos ahora en su estudio y probaremos que *ser afín* es equivalente a *ser algebraicamente afín* —de lo que se sigue que esta es una propiedad geométrica de morfismos—, además de algunas propiedades de descenso respecto a inmersiones planas. El fondo de la historia es que, como en el caso de esquemas, los morfismos afines —módulo qc-isomorfismos— son equivalentes a las álgebras cuasicoherentes sobre el espacio base, luego extender nociones de teoría de esquemas a este caso será tarea sencilla.

**Lema 7.4.1.** [29, Theorem 5.18] Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es afín si y solo si, para todo  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ ,  $R^i f_* \mathcal{M} = 0$  para todo  $i > 0$  y  $f^* f_* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  es epiyectivo.

**Lema 7.4.2.** [29, Theorem 5.24] Si  $f: X \rightarrow Y$  es afín, entonces el functor  $f_*: \mathbf{Qcoh}(X) \rightarrow \mathbf{Qcoh}(Y)$  es conservativo —i.e. refleja isomorfismos—.

*Demostración.* Si  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathbf{Qcoh}(X)$  y  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es un morfismo tal que  $f_* \mathcal{M} \rightarrow f_* \mathcal{N}$  es isomorfismo, se tiene que  $\mathcal{M}(f^{-1}(U_y)) \rightarrow \mathcal{N}(f^{-1}(U_y))$  es isomorfismo para todo  $y \in Y$ , pero como los  $f^{-1}(U_y)$  son afines esto equivale a que  $\mathcal{M}|_{f^{-1}(U_y)} \rightarrow \mathcal{N}|_{f^{-1}(U_y)}$  sea isomorfismo para todo  $y \in Y$ , es decir, a que  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  lo sea.  $\square$

*Observación 7.4.3.* Si  $f: X \rightarrow Y$  es afín y  $f_U: f^{-1}(U) \rightarrow U$  es el morfismo inducido para cierto abierto  $U$ ,  $f_U$  es afín, luego  $f_{U*}$  es conservativo.

**Lema 7.4.4.** La composición de morfismos afines es afín. Además, si tenemos  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  con  $g$  y  $g \circ f$  afines, entonces  $f$  es afín.

*Demostración.* La estabilidad por composición se deduce del Lema 7.4.1. Recíprocamente: sea  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ . Por hipótesis,

$$(g \circ f)^*(g \circ f)_* \mathcal{M} \simeq f^* g^* g_* f_* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

es epiyectivo, lo que por adjunción da un morfismo  $g^* g_*(f_* \mathcal{M}) \rightarrow f_* \mathcal{M}$  (que también es epiyectivo por hipótesis). Vía el functor  $f^*$  obtenemos morfismos

$$f^* g^* g_* f_* \mathcal{M} \rightarrow f^* f_* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

cuya composición es epiyectiva, luego el segundo es epiyectivo. Por otra parte, como  $\mathbb{R}(g \circ f)_* \mathcal{M} \simeq (g \circ f)_* \mathcal{M}$  en  $D_{\text{qc}}(Z)$  por hipótesis sobre  $g \circ f$  y además, por la hipótesis sobre  $g$ , es  $\mathbb{R}(g \circ f)_* \mathcal{M} \simeq \mathbb{R}g_* \mathbb{R}f_* \mathcal{M} \simeq g_* \mathbb{R}f_* \mathcal{M}$ , concluimos que  $(g \circ f)_* \mathcal{M} \simeq g_* \mathbb{R}f_* \mathcal{M}$ . Esto implica que  $f_* \mathcal{M} \simeq \mathbb{R}f_* \mathcal{M}$  por el Lema 7.4.2. Se acaba por el Lema 7.4.1.  $\square$

**Lema 7.4.5.** [29, Proposition 5.20] Si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo esquemático con  $X$  e  $Y$  afines,  $f$  es afín. Por otra parte, si  $Y$  y  $f$  son afines, entonces  $X$  es afín.

*Demostración.* Por la hipótesis de afinidad en  $X$ , la composición de  $f$  con el qc-isomorfismo  $Y \rightarrow (\star, \mathcal{O}_Y(Y))$  es afín y, por el Lema 7.4.4,  $f$  también es afín. La segunda parte se sigue de un razonamiento análogo.  $\square$

**Lema 7.4.6.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Z \rightarrow Y$  con  $g$  un qc-isomorfismo. Entonces  $f$  es afín si y solo si  $1 \times f: Z \times_Y X \rightarrow Z$  es afín.

*Demostración.* Por la Proposición 4.4.2 se tiene que  $Z \times_Y X \rightarrow Y$  es afín, luego  $1 \times f$  es afín por el Lema 7.4.4. Recíprocamente,  $1 \times g: Z \times_Y X \rightarrow X$  es afín por la implicación directa, luego tres de los morfismos del diagrama cartesiano son afines. Concluye el Lema 7.4.4.  $\square$

**Lema 7.4.7.** Sea  $f: X \rightarrow Y$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1)  $f$  es afín.
- 2) Existe un recubrimiento afín  $\{U_i\}$  de  $Y$  tal que  $f^{-1}(U_i)$  es afín  $\forall i$ .
- 3) Para todo  $U \subseteq Y$  afín,  $f^{-1}(U)$  es afín.

*Demostración.* Claramente 3)  $\Rightarrow$  2) y 2)  $\Rightarrow$  1) por el Lema 7.4.5. También es claro que 1)  $\Rightarrow$  2), luego solo queda 1)  $\Rightarrow$  3), que se sigue de la segunda parte del Lema 7.4.5.  $\square$

**Proposición 7.4.8.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es afín si y solo si existe un recubrimiento finito  $\{U_i \rightarrow Y\}$  por inmersiones planas tal que  $U_i \times_Y X$  es afín para todo  $i$ .

*Demostración.* Ser afín es estable por cambio de base arbitrario, luego una dirección es evidente. Recíprocamente, si  $\mathcal{U}$  y  $f^*\mathcal{U}$  denotan los respectivos espacios 2-esquemáticos asociados y  $g: \text{Cyl}(f^*\mathcal{U}) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{U})$  el morfismo inducido, es claro que  $g^{-1}(U_{\{i\}}) \rightarrow U_i \times_Y X$  es un qc-isomorfismo, luego hay un recubrimiento abierto de  $\text{Cyl}(\mathcal{U})$  cuyas antiimágenes vía  $g$  son afines, luego concluimos por los Lemas 7.4.7 y 7.4.6.  $\square$

**Lema 7.4.9.** Si  $X \rightarrow Y$  es un morfismo esquemático y  $\{U_i \rightarrow Y\}$  un recubrimiento finito por inmersiones planas tal que  $U_i \times_Y X \rightarrow Y$  es qc-isomorfismo para todo  $i$ , entonces  $X \rightarrow Y$  es qc-isomorfismo.

*Demostración.* Sea  $f: X \rightarrow Y$  como en el enunciado y  $f_i$  cada cambio de base. Por la Proposición 7.4.8,  $f$  es afín, luego basta que  $f_{\sharp}: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  sea un isomorfismo, lo que se sigue de un sencillo cómputo con el cilindro asociado al recubrimiento.  $\square$

De hecho se tiene más: ser afín y ser qc-isomorfismo son propiedades locales para la «topología fielmente plana». Nótese que más adelante demostraremos que los morfismos afines son los algebraicamente afines —Teorema 7.4.16—, pero este resultado sigue siendo más débil que la Proposición 7.1.11 que sigue, pues solo implicará la naturaleza local de la afinidad para la «topología *algebraicamente* fielmente plana» —Proposición 7.1.11—.

**Proposición 7.4.10.** [32, Section 10, Proposition 8] Sea  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Z \rightarrow Y$  fielmente plano. Se verifica que  $f$  es afín (resp. qc-isomorfismo) si y solo si  $f': Z \times_Y X \rightarrow Z$  es afín (resp. qc-isomorfismo).

*Demostración.* Se deduce de que  $g$  y  $g': Z \times_Y X \rightarrow Z$  sean fielmente planos, luego de que  $g^*$  y  $(g')^*$  sean fielmente exactos; y de la Proposición 5.1.8, junto con las caracterizaciones cohomológicas de morfismos afines —Proposición 7.4.1— y de qc-isomorfismos —Teorema 5.1.9—.  $\square$

**Proposición 7.4.11** (Factorización de Stein de morfismos afines). [29, Theorem 5.26] Todo morfismo afín  $f: X \rightarrow Y$  admite una factorización  $X \rightarrow (Y, \mathcal{A}) \rightarrow Y$  para  $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X \in \mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)$ , donde  $X \rightarrow (Y, \mathcal{A})$  es un qc-isomorfismo y  $(Y, \mathcal{A}) \rightarrow Y$  es la identidad entre posets. En particular, si

$\mathbf{AffFin}_Y$  denota la categoría de espacios esquemáticos *afines sobre*  $Y$ , se tiene una equivalencia de categorías

$$\begin{aligned} (\mathbf{AffFin}_Y)_{\text{qc}} &\xrightarrow{\sim} \mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)^{\text{op}} \\ (f: X \rightarrow Y) &\rightarrow f_*\mathcal{O}_X. \end{aligned}$$

El functor inverso de la Proposición 7.4.11 está representado por

$$\mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{AffFin}_Y \quad \mathcal{A} \mapsto ((Y, \mathcal{A}) \rightarrow Y),$$

es el functor «espectro relativo» en el contexto esquemático, pero evitaremos introducir la notación sugerida por ese nombre dada la abundancia de funtores llamados «Spec» que han aparecido hasta el momento en la memoria. Además veremos en la Sección 7.4.1 cómo puede tomarse un representante más apropiado para que presente una propiedad universal análoga a la del «espacio localmente anillado afinizado».

*Observación 7.4.12.* Como todo morfismo esquemático es central, es fácil ver que si  $y \in Y$  es redundante, para toda  $\mathcal{O}_Y$ -álgebra  $\mathcal{A} \in \mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)$ , el punto  $y \in |(Y, \mathcal{A})|$  es redundante. En particular, si  $(Y, \mathcal{A})$  es conciso,  $Y$  también lo es.

**Corolario 7.4.13.** Un morfismo afín  $f: X \rightarrow Y$  es un qc-monomorfismo si y solo si el morfismo  $f_{\sharp}: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  es un epimorfismo de haces de álgebras cuasicoherentes; si y solo si  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_Y)_y$  es un epimorfismo de anillos para todo  $y \in Y$ .

*Demostración.* Por la Proposición 7.4.11, basta ver cuándo  $(Y, \mathcal{A}) \rightarrow Y$  es un qc-monomorfismo con  $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$ , pero como la diagonal relativa es un homeomorfismo, esto sucederá cuando  $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  sea isomorfismo, i.e. cuando lo sea en fibra.  $\square$

**Corolario 7.4.14.** Un morfismo afín  $f: X \rightarrow Y$  es un qc-epimorfismo si y solo si el morfismo  $f_{\sharp}: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  es un monomorfismo de haces de álgebras cuasicoherentes; si y solo si  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_Y)_y$  es un monomorfismo de anillos —i.e. un morfismo inyectivo— para todo  $y \in Y$ .

*Demostración.* De nuevo, basta ver que  $(Y, f_*\mathcal{O}_X) \rightarrow Y$  es qc-epimorfismo, lo cual se reduce a comprobar que  $f_{\sharp}$  es un monomorfismo de haces de anillos. Esta condición puede comprobarse en fibra por ser equivalente a que

$\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y \times_{f_*\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$  sea un isomorfismo —donde el producto fibrado de cuasicoherentes es cuasicoherente y coincide con el de haces de anillos, pues es el núcleo de  $\mathcal{O}_Y \times \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  y se cumple el Teorema 3.1.7—.  $\square$

**Lema 7.4.15.** Sea  $Y$  esquemático con  $S = \text{Spec}(Y)$  un esquema y sea  $\mathcal{A} \in \mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)$ . Se tiene un isomorfismo de espacios sobre  $S$

$$\text{Spec}(Y, \mathcal{A}) \simeq \text{Spec}_S(\tilde{\mathcal{A}});$$

donde  $\text{Spec}_{(-)}$  es el functor «espectro relativo sobre  $(-)$ » de teoría de esquemas y  $\tilde{\mathcal{A}} = \lim_{y \in Y} i_{y*} \tilde{\mathcal{A}}_y$  con  $i_y: \text{Spec}(\mathcal{A}_y) \rightarrow \text{Spec}(Y, \mathcal{A})$  y  $\tilde{\mathcal{A}}_y$  los correspondientes haces de localizaciones —i.e.  $\tilde{\mathcal{A}}$  es el haz cuasicoherente descendido asociado a  $\mathcal{A}$  descrito en el Apéndice B.4—.

*Demostración.* Supongamos primero que  $Y$  tiene restricciones abiertas. En ese caso, la proyección natural  $\pi_Y: S \rightarrow Y$  es continua y  $\tilde{\mathcal{A}} = \pi_Y^* \mathcal{A}$  por el Corolario 6.2.10, de donde es claro que  $\text{Spec}_S(\tilde{\mathcal{A}})$  es exactamente  $\text{Spec}(Y, \mathcal{A})$  —el conjunto de puntos no redundantes de  $Y$  es cofinal para el colímite. Si se prefiere, se puede tomar  $\mathbf{Con}(Y)$ ; o dicho de otro modo, si  $y \in Y$  es redundante, entonces  $y \in (Y, \mathcal{A})$  es redundante—.

Para el caso general usamos la Proposición 5.2.4: por hipótesis existe  $Y'$  con restricciones abiertas y qc-isomorfismos  $Y' \xleftarrow{\psi} Z \xrightarrow{\phi} Y$ . Consideremos  $\mathcal{A}' = \psi_* \phi^* \in \mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y')$ . Como estos qc-isomorfismos inducen equivalencias de categorías de cuasicoherentes y  $S \simeq \text{Spec}(Y')$ , es claro que  $\text{Spec}_S(\tilde{\mathcal{A}}) \simeq \text{Spec}_S(\tilde{\mathcal{A}}') \simeq \text{Spec}(Y', \mathcal{A}')$  por el caso previo, luego basta ver que  $\text{Spec}(Y, \mathcal{A}) \simeq \text{Spec}(Y', \mathcal{A}')$ . En efecto, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} (Y', \mathcal{A}') & \xleftarrow{\psi'} & (Z, \phi^* \mathcal{A}) & \xrightarrow{\phi'} & (Y, \mathcal{A}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \xleftarrow{\psi} & Z & \xrightarrow{\phi} & Y; \end{array}$$

donde  $\phi'$  es qc-isomorfismo por ser el cuadrado derecho cartesiano y  $\psi'$  lo es por coincidir con la factorización de Stein de la Proposición 7.4.11.  $\square$

**Teorema 7.4.16.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es afín si y solo si es algebraicamente afín.

*Demostración.* El directo es el Lema 7.4.15; el recíproco, la definición para  $U_y \rightarrow Y$ .  $\square$

**Corolario 7.4.17.** Un espacio esquemático semiseparado es algebraico. Un morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  localmente acíclico y con  $\text{Spec}(X)$  esquema es algebraico.

*Demostración.* La primera parte es aplicar el Teorema 7.4.16 a la diagonal —que es afín por el Corolario 4.2.13—. La segunda, aplicar el mismo Teorema y Corolario, teniendo en cuenta que, dado  $f: X \rightarrow Y$ , se tiene  $Z \times_Y X \simeq (X \times Z) \times_{X \times Y} X$ .  $\square$

**Corolario 7.4.18.** La propiedad de *ser morfismo afín* es geométrica. La propiedad de *ser semiseparado* es geométrica —Definición 6.1.1—.

### Morfismos estándar afines

Una consecuencia de la Proposición 7.4.11 tiene que ver con la existencia de un functor de «afinización» con la propiedad universal deseada. Tomemos como punto de partida el «espectro relativo»  $\mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y) \rightarrow \mathbf{AffFin}_Y$  con  $\mathcal{A} \mapsto ((Y, \mathcal{A}) \rightarrow Y)$ . Este permite interpretar  $\mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)$  como un retracto  $\mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)^{\text{op}} \subseteq \mathbf{AffFin}_Y$ .

*Observación 7.4.19.* Para todo  $g: Z \rightarrow Y$  y  $h: X \rightarrow Y$  con  $h$  afín, se tienen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{(\mathbf{SchFin}_Y)_{\text{qc}}}(Z, X) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{SchFin}_Y}(Z, (Y, h_*\mathcal{O}_X)) \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)}(h_*\mathcal{O}_X, g_*\mathcal{O}_Z); \end{aligned}$$

donde la primera aplicación envía  $f/\phi: Z \leftarrow W \rightarrow Y$  a  $f': Z \rightarrow (Y, h_*\mathcal{O}_X)$  tal que  $|f'| = |g|$  y  $f'_\# : h_*\mathcal{O}_X \rightarrow g_*\mathcal{O}_Z$  con  $f'_\# = h_*(f'_\#)$  —pues  $h \circ f = g \circ \phi$ —.

Para mejorar las aplicaciones entre  $\text{Hom}$  de la Observación 7.4.19 y obtener la adjunción análoga a la del «esquema afinizado» de la teoría de esquemas sin necesidad de localizar por qc-isomorfismos podemos asignar a cada clase de qc-isomorfismo de un morfismo afín un representante privilegiado en el sentido siguiente:

**Definición 7.4.20.** Sea  $Y$  geométrico. Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  se dice *estándar afín* si es isomorfo a  $\mathbf{Geo}(Y, f_*\mathcal{O}_X) \rightarrow Y$ . Sea  $\mathbf{AffFin}_{/Y}^{\text{st}}$  la subcategoría de espacios estándar afines sobre  $Y$ .

**Lema 7.4.21.** Todo qc-isomorfismo entre espacios estándar afines es un isomorfismo. En particular, se tiene una equivalencia de categorías

$$\mathbf{AffFin}_{/Y}^{\text{st}} \simeq \mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)^{\text{op}}.$$

*Demostración.* Inmediato por la Proposición 7.4.11.  $\square$

Se tiene un functor de *afinización estándar*

$$\mathbf{St}: \mathbf{SchFin}_{/Y}^{\text{geo}} \rightarrow \mathbf{AffFin}_{/Y}^{\text{st}} \quad (f: X \rightarrow Y) \mapsto (\mathbf{Geo}(Y, f_*\mathcal{O}_X) \rightarrow Y)$$

de modo que, para cada  $f: X \rightarrow Y$ , por ser  $X$  es geométrico y el Teorema 6.4.2, nos permite obtener un morfismo unidad natural  $X \mapsto \mathbf{St}(X)$  sobre  $Y$ . Nótese que  $X \rightarrow Y$  es estándar afín si y solo si  $\mathbf{St}(X \rightarrow Y) = (X \rightarrow Y)$ .

**Lema 7.4.22.** El functor  $\mathbf{St}$  es adjunto a la izquierda de la inclusión  $\mathbf{AffFin}_{/Y}^{\text{st}} \subseteq \mathbf{SchFin}_{/Y}^{\text{geo}}$ .

*Demostración.* En efecto, dado  $U$  estándar afín y  $X$  geométrico, ambos sobre  $Y$ , un morfismo  $X \rightarrow U$  induce morfismos  $(\star, \mathcal{O}_X(X)) \rightarrow (\star, \mathcal{O}_U(U))$  y  $\mathbf{Geo}(\star, \mathcal{O}_X(X)) \rightarrow \mathbf{Geo}(\star, \mathcal{O}_U(U)) = U$ . Recíprocamente,  $\mathbf{St}(X) \rightarrow U$  da  $X \rightarrow U$  por composición con el morfismo  $X \rightarrow \mathbf{St}(X)$ .  $\square$

Aunque  $\mathbf{St}$  sea una adjunta a la izquierda, gracias al Lema 7.4.21:

**Corolario 7.4.23.** La categoría  $\mathbf{AffFin}_{/Y}^{\text{st}}$  tiene productos fibrados finitos:

$$X \times_W^{\text{st}} Z := \mathbf{St}(X \times_W Z).$$

*Observación 7.4.24.* Dado  $Z \rightarrow Y$  cualquiera con  $Z$  geométrico, se tiene

$$\mathbf{AffFin}_{/Y}^{\text{st}} \rightarrow \mathbf{AffFin}_{/Z}^{\text{st}} \quad (X \rightarrow Y) \mapsto (\mathbf{St}(Z \times_Y X) \rightarrow Z).$$

Abusaremos de notación y escribiremos  $Z \times_Y^{\text{st}} X := \mathbf{St}(Z \times_Y X)$ .

**Corolario 7.4.25.** Sea  $Y$  geométrico y  $g: Z \rightarrow Y, h: X \rightarrow Y$  son espacios sobre  $Y$  con  $Z$  geométrico y  $X$  estándar afín, se tienen biyecciones

$$\text{Hom}_{(\mathbf{SchFin}_{/Y}^{\text{geo}})_{\text{qc}}}(Z, X) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{SchFin}_{/Y}^{\text{geo}}}(Z, X) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{AffFin}_{/Y}^{\text{st}}}(\mathbf{St}(Z), X).$$

*Demostración.* Solo queda probar la primera biyección. En efecto, procediendo como en la Observación 7.4.19, dado  $f/\phi: Z \leftarrow W \rightarrow X$  sobre  $Y$  se define  $f': Z \rightarrow (Y, f_*\mathcal{O}_X)$  como  $|f'| = |g|$  y  $f'_\# : h_*\mathcal{O}_X \rightarrow g_*\mathcal{O}_Z$  con  $f'_\# = h_*(f_\#)$  —pues  $h \circ f = g \circ \phi$ —. Ahora obtenemos  $\mathbf{Geo}(f'): Z \rightarrow X$ . Se verifica  $\mathbf{Geo}(f') \stackrel{\text{qc}}{=} f$  por construcción.  $\square$

Caracterizamos los morfismos estándar afines entre los afines:

**Proposición 7.4.26.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo afín con  $Y$  geométrico. Se verifica que  $f$  es estándar afín si y solo si es isomorfo a  $Y_1 \amalg \dots \amalg Y_n \rightarrow Y$  —afín— con  $Y_i$  geométricos, conexos y tales que los morfismos inducidos en cada componente identifican  $|Y_i| \subseteq |Y|$  como subespacios topológicos.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$  y  $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$  la descomposición del haz en componentes conexas —discusión que sigue a la Definición 6.3.13—. Por la Observación 6.3.15 podemos suponer que  $Y$  es conexo. Por construcción de  $\mathbf{pw}$ , se tiene

$$\mathbf{pw}(Y, \mathcal{A}) = \amalg_i(\text{sop}(Y, \mathcal{A}_i), \mathcal{A}_i),$$

luego cada componente top-conexa de este espacio se identifica con un cerrado de  $|Y|$ . Así, cada componente conexa de  $|\mathbf{Geo}(Y, \mathcal{A})| = |\mathbf{St}(X)|$  se identifica con un subespacio de  $|Y|$  y es geométrica por construcción. Es claro, por tanto, que  $f$  es estándar afín, es decir,  $\mathbf{St}(X) \simeq X$ , si y solo si se verifica la conclusión del enunciado.  $\square$

**Corolario 7.4.27.** Sea  $Y$  geométrico y  $f: X \rightarrow Y$  estándar afín. Si  $f$  es un qc-isomorfismo, entonces es un isomorfismo.

*Demostración.* Podemos suponer que  $Y$  es conexo, razonándose el caso general en cada componente conexa. Como la conexión es una propiedad geométrica y  $f$  es un qc-isomorfismo,  $X$  también es conexo. Ahora se concluye fácilmente por la caracterización de la Proposición 7.4.26:  $f$  es isomorfo a un qc-isomorfismo  $Y' \hookrightarrow Y$  inyectivo con  $Y$  geométrico, luego epiyectivo; por tanto  $f$  es un homeomorfismo y, *a posteriori*, un isomorfismo.  $\square$

La Proposición que resta prueba que el Lema 7.4.21 no es sino un caso particular del Corolario 7.4.27.

**Proposición 7.4.28.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$ . Si  $f$  y  $g$  son estándar afines, entonces  $g \circ f$  es estándar afín. Si  $g \circ f$  y  $g$  son estándar afines, entonces  $f$  es estándar afín.

*Demostración.* Empleamos la Proposición 7.4.26. Para el primer caso, como la composición de afines es afín, solo queda ver que se preserva la propiedad de ser estándar afín, para lo cual basta comprobar la parte topológica del problema, pues la condición de ser geométrico no depende de estas composiciones. En efecto, si es  $f: \coprod_i Y_i \rightarrow Y$  con  $Y_i$  geométricos e  $|Y_i|$  subespacios topológicos de  $|Y|$  y  $g: Y \simeq \coprod_j Z_j \rightarrow Z$  para ciertos  $Z_j$  verificando lo análogo, se tiene que cada  $|Y_i| \subseteq |Z_{j_i}|$  es subespacio topológico para cierto  $j_i$  —Observación 6.3.15—, y por tanto  $|Y_i| \subseteq |Z|$  son subespacios.

Para la segunda cuestión,  $f$  es afín por el Lema 7.4.7. Ahora tenemos  $X \simeq \coprod_k Z_k$  e  $Y \simeq \coprod_j Z'_j$ . De nuevo por la Observación 6.3.15, el morfismo  $\coprod_k Z_k \rightarrow \coprod_j Z'_j$  queda determinado por  $Z_k \rightarrow Z'_{j_k}$  para todo  $k$  y ciertos  $j_k$ . Como estos morfismos hacen el triángulo conmutativo y los  $Z_k$  son subespacios de  $Z$ , también son subespacios de  $Z'_{j_k}$ , y por tanto de  $Y$ . Fijado ahora  $j$ , sea  $K_j = \{k : j_k = j\}$ . Se tiene que el morfismo original es isomorfo a  $\coprod_j \coprod_{k \in K_j} Z_k \rightarrow \coprod_j Z'_j \simeq Y$ , con  $|Z_k| \subseteq |Y|$  subespacios y cada  $Z_k$  geométrico.  $\square$

### 7.4.2. Morfismos finitos

**Definición 7.4.29.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  se dice *finito* si es afín y  $(f_* \mathcal{O}_X)_y$  es un  $\mathcal{O}_{Y,y}$ -módulo finito para todo  $y \in Y$ .

En el caso noetheriano en que nos encontrarnos, por la Proposición 7.4.11, se tiene una equivalencia de categorías

$$[\mathbf{QC}^{-1}]\{\text{Espacios } X \text{ con morfismo finito } X \rightarrow Y\} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Coh}^{\text{alg}}(Y).$$

Se sigue del Teorema 7.4.16 que:

**Proposición 7.4.30.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es finito si y solo si es algebraicamente finito. En particular, *ser finito* es una propiedad geométrica.

*Demostración.* La parte de la afinidad es el Lema 7.4.15. Como el producto tensorial de módulos es exacto por la derecha, todo cambio de base de  $f$  es finito; luego quedaría ver que si  $\text{Spec}(Y)$  es un esquema y  $\mathcal{A} \in \mathbf{Coh}^{\text{alg}}(Y)$ ,

el haz  $\widetilde{\mathcal{A}}$  inducido según el Lema 7.4.15 es un  $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(Y)}$ -módulo coherente. Esto es un caso particular del Teorema B.4.11; sin embargo, en este caso no es necesario recurrir a tal generalidad: basta observar que la propiedad de coherencia es local en la topología fpqc para esquemas y que, para cada  $y \in Y$  e identificando  $\mathrm{Spec}(U_y)$  con el subespacio anillado que define en  $\mathrm{Spec}(Y)$ ,  $\widetilde{\mathcal{A}}(\mathrm{Spec}(U_y)) \simeq \widetilde{\mathcal{A}}_y$  es un  $\widetilde{\mathcal{O}_{Y,y}}$ -módulo coherente.  $\square$

**Corolario 7.4.31.** Todo morfismo finito tiene fibras geométricas finitas.

*Demostración.* Bastan la Proposición 7.4.30 y el resultado en esquemas.  $\square$

### 7.4.3. Inmersiones

Ya tenemos un sustituto para la noción de «inmersión abierta de esquemas» en la categoría esquemática: la inmersión plana. Las inmersiones cerradas pueden definirse en el caso afín, lo que las hace más dóciles.

**Definición 7.4.32.** Diremos que  $f: X \rightarrow Y$  es una *inmersión cerrada* si es un morfismo afín y  $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  es *epiyectivo* —en cada fibra—.

Es decir, por la Proposición 7.4.11, la categoría de inmersiones cerradas a  $Y$  localizada por qc-isomorfismos es equivalente a la de haces de ideales cuasicohérentes de  $\mathcal{O}_Y$  —y, *de facto*, coherentes, pues estamos en el caso noetheriano—. Es claro que toda inmersión cerrada es un morfismo finito. Recordemos que si  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_Y$  es el ideal asociado a una de estas, el subespacio

$$|\mathrm{Con}(Y, \mathcal{O}_Y/\mathcal{I})| \subseteq |Y|$$

es cerrado.

**Lema 7.4.33.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es inmersión cerrada si y solo si es algebraicamente inmersión cerrada. En particular, *ser inmersión cerrada* es una propiedad geométrica.

*Demostración.* La parte de la afinidad es el Lema 7.4.15. Como tomar imagen inversa preserva epiyecciones, solo queda probar que si  $\mathrm{Spec}(Y)$  es un esquema y  $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{A}$  es una epiyección de  $\mathcal{O}_Y$ -álgebras cuasicohérentes, el morfismo inducido  $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(Y)} \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}$  también lo es, pero esto se sigue de que, haciendo imagen inversa a cada  $\mathrm{Spec}(U_y)$ , este morfismo es  $\widetilde{\mathcal{O}_{Y,y}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_y$ , que

es epiyectivo por hipótesis; y de que *ser epiyectivo* es local en la base en la topología fpqc para esquemas  $\coprod_y \text{Spec}(U_y) \rightarrow \text{Spec}(Y)$  es un recubrimiento fpqc—.  $\square$

**Lema 7.4.34.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es inmersión cerrada si y solo si es algebraicamente inmersión cerrada. En particular, ser inmersión cerrada es estable por cambio de base y composición arbitrarias.

*Demostración.* Se sigue del Lema 7.4.15.  $\square$

**Lema 7.4.35.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es inmersión cerrada si y solo si existe un recubrimiento finito  $\{U_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$  por inmersiones planas tal que los morfismos  $U_i \times_Y X \rightarrow U_i$  son inmersiones cerradas.

*Demostración.* Está claro que  $f$  es afín por la Proposición 7.4.8. Denotemos  $g: \text{Cyl}(f^*\mathcal{U}) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{U})$  al morfismo inducido por el recubrimiento de la hipótesis. Para cada  $\Delta \in \mathcal{P}^*(I)$ , cada inmersión cerrada  $(f^*\mathcal{U})(\Delta) \rightarrow \mathcal{U}(\Delta)$  está definida por un haz de ideales  $\mathcal{I}^\Delta$ . El morfismo  $f$  es la inmersión asociada al ideal que definen estos vía el Corolario 5.5.8.  $\square$

**Lema 7.4.36.** Las inmersiones cerradas son los qc-morfismos finitos.

*Demostración.* Se sigue de que un morfismo de anillos es epiyectivo si y solo si es un epimorfismo finito y del Corolario 7.4.13.  $\square$

Que los morfismos esquemáticos sean los «cuasicompactos y cuasiseparados» permite que la «imagen esquemática» funcione sin patologías.

**Definición 7.4.37.** Dado un morfismo  $f: X \rightarrow Y$ , definimos la *imagen esquemática de  $f$* , denotada  $\mathbf{Im}(f)$ , como la inmersión cerrada asociada al ideal  $\ker(\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X)$ .

Para todo morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  se tiene una factorización

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \searrow \phi & \nearrow i \\
 & \mathbf{Im}(f) & 
 \end{array}
 \tag{7.4.1}$$

tal que  $\phi: X \rightarrow \mathbf{Im}(f) = (Y, \mathcal{O}_Y/\ker(f_{\sharp}))$ . Es claro que  $f$  es una inmersión cerrada si y solo si  $\phi$  es un qc-isomorfismo, en cuyo caso el diagrama coincide exactamente con la factorización de Stein para morfismos afines de la Proposición 7.4.11.

**Definición 7.4.38.** Diremos que  $f: X \rightarrow Y$  es una *inmersión* —«*inmersión localmente cerrada*» o «*pro-localmente cerrada*»— si existe una inmersión plana  $j: U \rightarrow Y$  de modo que, en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ j' \uparrow & & \uparrow j \\ U \times_Y X & \xrightarrow{f'} & U, \end{array}$$

$f'$  es una inmersión cerrada y  $j'$  un qc-isomorfismo.

**Proposición 7.4.39.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es una inmersión, factoriza como una inmersión plana  $\phi$  seguida de una inmersión cerrada  $i$ , i.e.  $f = i \circ \phi$ .

*Demostración.* Consideremos la factorización de la ecuación 7.4.1 y probemos que  $\phi$  es una inmersión plana. Sea  $j: U \rightarrow Y$  la inmersión plana de la definición de inmersión. Se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{f} & & Y \\ & \searrow \phi & & \nearrow i & \\ & & \mathbf{Im}(f) & & \\ j' \uparrow & & & & \uparrow j \\ U \times_Y X & & \xrightarrow{f'} & & U \\ & \searrow \phi' & & \nearrow i' & \\ & & U \times_Y \mathbf{Im}(f) & & \end{array},$$

con  $i'$  la inmersión cerrada correspondiente al haz de ideales  $j^*\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_U$ , donde  $\mathcal{I} = \ker(f_{\sharp})$ ; pero  $f'$  es una inmersión cerrada definida por el mismo haz de ideales, pues  $j_*\mathcal{O}_{U \times_Y X} \simeq \mathcal{O}_X$  —por hipótesis—,  $j^*\mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{O}_U$ ,  $j^*$

es un functor exacto y  $j^*f_*\mathcal{O}_X \simeq f'_*j'^*\mathcal{O}_X$  —por cambio de base plano, Proposición 5.1.8—, luego la sucesión exacta

$$0 \rightarrow j^*\mathcal{I} \rightarrow j^*\mathcal{O}_Y \rightarrow j^*f_*\mathcal{O}_X$$

es isomorfa a  $0 \rightarrow \ker(f'_\#) \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow f'_*\mathcal{O}_{U \times_Y X}$  —dicho de otro modo, se tiene  $U \times_Y \mathbf{Im}(f) \simeq \mathbf{Im}(f')$ —. Se concluye que  $\phi'$  es un qc-isomorfismo y, por tanto,  $j' \stackrel{\text{qc}}{=} \phi'$ , luego  $\phi \stackrel{\text{qc}}{=} (\mathbf{Im}(f') \rightarrow \mathbf{Im}(f))$ ; y como esta última es una inmersión plana por ser cambio de base de una inmersión plana,  $\phi$  es inmersión plana —Proposición 7.3.5—.  $\square$

#### 7.4.4. Morfismos cerrados

Estudiamos ahora el análogo de los morfismos «topológicamente cerrados». Esta es una tarea más difícil, puesto que no estamos en la situación afín y, como de costumbre, la topología combinatoria de los espacios esquemáticos no es de particular utilidad. Sin embargo, como la idea es capturar en términos de  $f: X \rightarrow Y$  cuándo el morfismo  $\text{Spec}(f)$  es cerrado, disponemos de la descripción de la topología de este en términos de haces de ideales radicales cuasicoherentes. Uno de los objetivos será probar que una inmersión «con imagen cerrada» es una inmersión cerrada.

**Definición 7.4.40.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo esquemático e  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$  un haz de ideales cuasicoherente. Se define la *imagen de  $\mathcal{I}$  por  $f$* ,  $f(\mathcal{I})$ , como el haz de ideales cuasicoherente

$$f(\mathcal{I}) = \ker(\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X/f_*\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{O}_Y.$$

*Observación 7.4.41.* En términos de productos fibrados de haces de anillos, la imagen de  $\mathcal{I}$  por  $f$  es  $f_*\mathcal{I} \times_{f_*\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \subseteq \mathcal{O}_Y$ .

**Proposición 7.4.42.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es esquemático y  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$  es un haz de ideales primos correspondiente a un punto esquemático  $\mathbf{x} = (x, \mathfrak{p}_x)$ , el haz imagen  $f(\mathfrak{p})$  es el haz de ideales primos correspondiente al punto imagen  $f(\mathbf{x}) = (f(x), (f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{p}_x))$ .

*Demostración.* Como el morfismo es esquemático, sabemos que  $f(\mathbf{x})$  centra en  $f(x)$  (Teorema 4.3.26). Calculemos  $\mathcal{O}_Y/f(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}_Y/(f_*\mathfrak{p} \times_{f_*\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y)$ .

Comencemos viendo que  $f(x)$  pertenece a su soporte y que algún  $y \notin C_{f(x)}$  no lo hace. Dado  $y \in Y$  es

$$f(\mathfrak{p})_y = \mathfrak{p}(f^{-1}(U_y)) \times_{\mathcal{O}_X(f^{-1}(U_y))} \mathcal{O}_{Y,y} = (f_{\sharp,y}^{-1})^{-1}(\mathfrak{p}(f^{-1}(U_y)));$$

pero por hipótesis sabemos que  $\mathfrak{p}_z = \mathcal{O}_{X,z}$  para cualquier  $z \notin C_x$ ; y como  $y \notin C_{f(x)}$ , todo  $z \in f^{-1}(U_y)$  verifica  $z \notin C_x$  (o sería  $f(x) \in U_y$  y llegaríamos a contradicción), luego  $\mathfrak{p}(f^{-1}(U_y)) = \lim_{z \in f^{-1}(U_y)} \mathfrak{p}_z = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_y))$  y, por tanto,  $f(\mathfrak{p})_y = \mathcal{O}_{Y,y}$  para todo  $y \notin C_{f(x)}$ . Esto prueba que el soporte de  $\mathcal{O}_Y/f(\mathfrak{p})$  está contenido en  $C_{f(x)}$ . Para ver la igualdad y acabar la demostración, computamos directamente que  $f(\mathfrak{p})_{f(x)} = (f_x^\sharp)^{-1}(\mathfrak{p}_x)$ . En efecto, gracias al triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y,f(x)} & \xrightarrow{f_{\sharp,y}} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_{f(x)})) \\ & \searrow f_x^\sharp & \downarrow r \\ & & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

basta ver que  $r^{-1}(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}(f^{-1}(U_{f(x)})) = \lim_{f(z) \geq f(x)} \mathfrak{p}_z$ . Nótese que, en este límite, los únicos  $z$  tales que  $\mathfrak{p}_z \neq \mathcal{O}_{X,z}$  son los de  $f^{-1}(f(x)) \cap C_x$  por lo ya demostrado. El resultado se sigue de que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \lim_{f(z) \geq f(x)} \mathfrak{p}_z & \longrightarrow & \lim_{f(z) \geq f(x)} \mathcal{O}_{X,z} \\ \downarrow & & \downarrow r \\ \mathfrak{p}_x & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

es cartesiano, pues  $\mathfrak{p}$  es cuasicoherente y límites conmutan con productos fibrados.  $\square$

*Notación 7.4.43.* La imagen de haz (0) es la *imagen de  $f$*  y la denotaremos  $f(X) := f((0))$ . Nótese que este es precisamente el ideal de definición de la imagen esquemática  $\mathbf{Im}(f)$ . Si  $(0) \subseteq \mathcal{O}_X$  es primo, es decir,  $X$  es íntegro, corresponde al punto  $\mathbf{x} = (x, (0))$  con  $X = C_x$ . En ese caso  $\mathcal{O}_Y/f(X)$  es un haz cuasicoherente soportado en  $C_{f(x)}$ .

**Definición 7.4.44.** Se dice que un morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  tiene *imagen cerrada* si para todo haz de ideales primos cuasicoherente  $\mathfrak{q} \subseteq \mathcal{O}_Y$

con  $f(X) \subseteq \mathfrak{q}$ , se verifica que  $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p})$  para algún haz de ideales primos cuasicoherente  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$ .

Se dice que  $f: X \rightarrow Y$  es *cerrado* si para todo haz de ideales cuasicoherente (que puede suponerse radical)  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ , el morfismo inducido  $(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \rightarrow X \rightarrow Y$  tiene imagen cerrada; es decir, si para todo  $\mathfrak{q} \subseteq \mathcal{O}_Y$  con  $f(\mathcal{I}) \subseteq \mathfrak{q}$ , se verifica que  $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p})$  para algún  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$  con  $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{p}$ . Se dice que es *universalmente cerrado* si cualquier cambio de base suyo es cerrado.

Por la caracterización del Lema 3.2.7, esta definición se corresponde con la topológica a nivel de los espacios localmente anillados asociados:

**Lema 7.4.45.** Un morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  tiene imagen cerrada si y solo si  $\text{Spec}(f)$  tiene imagen cerrada en sentido topológico. En concreto,  $\text{Spec}(\mathcal{O}_Y/f(X))$  es homeomorfo a la imagen de  $\text{Spec}(f)$ . De modo similar  $f$  es (universalmente) cerrado si y solo si  $\text{Spec}(f)$  es (universalmente) cerrado en sentido topológico.

**Lema 7.4.46.** *Tener imagen cerrada y ser (universalmente) cerrado son propiedades geométricas de morfismos.*

*Demostración.* La cuestión solo depende de los haces de ideales cuasicoherentes y, como los qc-isomorfismos inducen equivalencias categoriales entre ellos por el Teorema 5.1.9, se concluye por el Lema 7.4.45.  $\square$

**Lema 7.4.47.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es una inmersión cerrada, entonces es cerrado.

*Demostración.* Por el Lema 7.4.46 y la Proposición 7.4.11, podemos suponer que  $f$  es del tipo  $f: (Y, \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}) \rightarrow Y$  para  $\mathcal{I} = f(X)$ , que es cerrado.  $\square$

**Lema 7.4.48.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es una inmersión cerrada con  $X$  e  $Y$  reducidos y  $\text{Spec}(f)$  es un homeomorfismo si y solo si  $f$  es un qc-isomorfismo.

*Demostración.* El «si» es evidente. Para el recíproco la Proposición 7.4.11 nos permite asumir que es  $f: X = (Y, \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}) \rightarrow Y$  para cierto ideal cuasicoherente  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_Y$  y limitarnos a probar que  $\mathcal{I} = 0$ . Denotando  $f_y: (U_y, \mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{I}_y) \rightarrow U_y$ , cada uno de estos morfismos es una inmersión cerrada y además  $\text{Spec}(f_y)$  es un homeomorfismo entre esquemas reducidos por ser la restricción de un homeomorfismo —como siempre,  $\text{Spec}$  conmuta con productos fibrados y, como los  $U_y$  son inmersiones planas,

$\text{Spec}((U_y, \mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{I}_y))$  es la antiimagen topológica de  $\text{Spec}(U_y)$ . Por el caso clásico de esquemas,  $\mathcal{I}_y = 0$  para todo  $y \in Y$ , luego  $\mathcal{I} = 0$ .  $\square$

**Lema 7.4.49.** Un morfismo esquemático  $f$  tiene imagen cerrada (resp. es cerrado) si y solo si  $f_{\text{red}}$  tiene imagen cerrada (resp. es cerrado).

*Demostración.* Se sigue de que estas son propiedades topológicas de  $\text{Spec}(f)$  y de que este morfismo coincide con  $\text{Spec}(f_{\text{red}})$  a nivel topológico.  $\square$

Ya hemos visto que todo  $f: X \rightarrow Y$  admite una factorización

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \phi & \nearrow i \\ & \mathbf{Im}(f) & \end{array}$$

Los Lemas 7.4.48 y 7.4.49 justifican esta definición:

**Definición 7.4.50.** Diremos que un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  tiene *imagen densa* si  $\mathbf{Im}(f)_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$  es un qc-isomorfismo; diremos que tiene *imagen esquemáticamente densa* si  $\mathbf{Im}(f) \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo.

Y el siguiente Lema es inmediato a partir de las definiciones de morfismo con imagen cerrada, imagen esquemática y el Lema 7.4.45:

**Lema 7.4.51.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  tiene imagen cerrada si y solo si  $X \rightarrow \mathbf{Im}(f)$  es qc-epiyectivo, si y solo si  $X_{\text{red}} \rightarrow \mathbf{Im}(f)_{\text{red}}$  es qc-epiyectivo.

**Teorema 7.4.52.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es una inmersión con imagen cerrada, entonces es una inmersión cerrada.

*Demostración.* Por la Proposición 7.4.39, sabemos que  $f$  admite una factorización  $X \rightarrow \mathbf{Im}(f) \rightarrow Y$ , con el primero una inmersión plana y el segundo una inmersión cerrada. Por el Lema 7.4.51 la inmersión plana es qc-epiyectiva, luego fielmente plana y, por tanto, un qc-isomorfismo —Teorema 5.1.9—. Se concluye que  $f$  es qc-equivalente a una inmersión cerrada, luego es una inmersión cerrada por ser esta propiedad geométrica.  $\square$

*Ser universalmente cerrado* es compatible con serlo «algebraicamente»:

**Proposición 7.4.53.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo algebraico. Se verifica que  $f: X \rightarrow Y$  es universalmente cerrado si y solo si es algebraicamente universalmente cerrado.

*Demostración.* El directo se sigue de la universalidad de la definición y de que ser cerrado es una propiedad de los espectros. Para el recíproco, basta ver que  $f$  es universalmente cerrado si y solo si  $f|_{f^{-1}(U_y)}: f^{-1}(U_y) \rightarrow U_y$  lo es para todo  $y \in Y$ . En efecto, si  $f^*\mathcal{U}$  y  $\mathcal{U}$  son los codatos 2-esquemáticos asociados a estos recubrimientos y  $\text{Cyl}(f^*\mathcal{U}) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{U})$  el morfismo inducido, basta ver que este es universalmente cerrado —pues esta es una propiedad geométrica—. Pero, en efecto, como cada  $f|_{f^{-1}(U_y)}$  era *universalmente* cerrado,  $(f^*\mathcal{U})(\Delta) \rightarrow \mathcal{U}(\Delta)$  lo es para todo  $\Delta \in \mathcal{P}^*(Y)$ . Se concluye por el Corolario 5.5.8.  $\square$

### Morfismos cerrados para especializaciones

**Definición 7.4.54.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  levanta especializaciones si para todo punto esquemático  $\mathbf{x}$  de  $X$  e  $\mathbf{y} \leq f(\mathbf{x})$ , existe un  $\mathbf{x}' \leq \mathbf{x}$  tal que  $f(\mathbf{x}') = \mathbf{y}$ . Se dice que levanta especializaciones universalmente si cualquier cambio de base suyo lo hace.

Es decir, en términos de haces de ideales primos:  $f$  levanta especializaciones si y solo si  $\text{Spec}(f)$  es cerrado en la topología de las especializaciones.

**Lema 7.4.55.** Levantar especializaciones (universalmente) es una propiedad geométrica.

**Lema 7.4.56.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  entre dos espacios afines levanta especializaciones si y solo si es cerrado.

*Demostración.* Sean  $A = \mathcal{O}_Y(Y)$  y  $B = \mathcal{O}_X(X)$ . Como ambas son propiedades geométricas, basta probarlo para  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ , donde es un resultado de álgebra conmutativa bien conocido [10, Lemma 00HY].  $\square$

**Proposición 7.4.57.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es (universalmente) cerrado si y solo si levanta especializaciones (universalmente).

*Demostración.* El directo se sigue de la definición de morfismo cerrado; veamos que si  $f$  levanta especializaciones, es cerrado. Para ello, basta ver que

$f$  tiene imagen cerrada, puesto que si  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$  un haz de ideales radicales,  $X' = (X, \mathcal{I}) \rightarrow X \rightarrow Y$  levanta especializaciones —por ser  $X' \rightarrow X$  inmersión cerrada y por la implicación directa—.

En efecto, sea  $\mathfrak{q} \subseteq \mathcal{O}_Y$  con  $f(X) \subseteq \mathfrak{q}$ . Tenemos que ver que  $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p})$  para algún  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$ . Como  $f$  levanta especializaciones universalmente, también lo hacen los morfismos  $f^y: f^{-1}(U_y) \rightarrow U_y$  para todo  $y \in Y$ , que son cerrados por el Lema 7.4.56. Obsérvese que  $f(X)_y = f^y(f^{-1}(U_y)) \subseteq \mathcal{O}_{Y,y}$ , luego existen  $\mathfrak{p}^y \subseteq \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_y))$  tales que  $f^y(\mathfrak{p}^y) = \mathfrak{q}_y$  para todo  $y \in Y$ . Además, como  $Y$  es esquemático,  $\mathfrak{q}$  está centrado en un punto  $y_0 \in Y$ . Sea  $i^{y_0}: f^{-1}(U_{y_0}) \rightarrow X$  y  $\mathfrak{p} = i_*^{y_0}(\mathfrak{p}^{y_0}) \subseteq \mathcal{O}_X$  el ideal cuasicoherente imagen —Proposición 4.1.11—. Hemos construido un  $\mathfrak{p}$  que verifica las condiciones buscadas: si  $i_y: U_y \rightarrow Y$ , es  $f_*\mathfrak{p} \simeq i_{y*}f_*^y(\mathfrak{p}^y) = i_{y*}\mathfrak{q}_y = i_{y*}i_y^{-1}\mathfrak{q} \simeq \mathfrak{q}$ , luego

$$f(\mathfrak{p}) = \ker(\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X/f_*\mathfrak{p}) = \ker(\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X/\mathfrak{q}) = \mathfrak{q};$$

donde la igualdad final se sigue de la hipótesis  $f(X) \subseteq \mathfrak{q}$ . □

### 7.4.5. Morfismos separados

La definición de morfismo separado se da como en el caso de esquemas:

**Lema 7.4.58.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo esquemático entre espacios afines, su diagonal  $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$  es un inmersión cerrada.

*Demostración.* Como  $X, Y$  y su producto  $X \times_Y X$  son afines de secciones globales  $B, A$  y  $B \otimes_A B$  respectivamente, la diagonal es qc-equivalente a  $(\star, B) \rightarrow (\star, B \otimes_A B)$ . Se concluye porque el morfismo de multiplicación  $B \otimes_A B \rightarrow B$  es siempre epiyectivo y porque *ser inmersión cerrada* es una propiedad geométrica. □

**Lema 7.4.59.** La diagonal  $\Delta_f$  de cualquier  $f: X \rightarrow Y$  es una inmersión.

*Demostración.* Para todo  $x \in X$  tenemos los morfismos  $f_x: U_x \rightarrow U_{f(x)}$  cuyas diagonales  $\Delta_{f_x}$  son inmersiones cerradas por el Lema 7.4.58. Considerando el recubrimiento  $\{U_x \rightarrow X\}_{x \in X}$ , la familia  $\{U_x \times_{U_{f(x)}} U_x \rightarrow X \times_Y X\}$  (que no recubre), los respectivos espacios 2-esquemáticos generados  $\mathcal{U}_X$  y

$\mathcal{U}_\Delta$ , y el morfismo inducido  $f_\Delta: \mathcal{U}_X \rightarrow \mathcal{U}_\Delta$ ; tomando cilindros, obtenemos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta_f} & X \times_Y X \\ \phi \uparrow & & \uparrow j \\ \text{Cyl}(\mathcal{U}_X) & \xrightarrow{\text{Cyl}(f_\Delta)} & \text{Cyl}(\mathcal{U}_\Delta) \end{array}$$

conmutativo, con  $j$  una inmersión plana y  $\phi$  un qc-isomorfismo. Se concluye si vemos que  $g = \text{Cyl}(f_\Delta)$  es una inmersión cerrada. En efecto, por la Observación 5.4.18, podemos recubrir  $g$  localmente por los abiertos mínimos de los cilindros correspondientes a los conjuntos  $\{x\} \in \mathcal{P}^*(X)$ , es decir,  $U_{\{x\}}^X = U_{\{x\}}^\Delta \times_{X \times_Y X} X \rightarrow U_{\{x\}}^\Delta$  (con el superíndice indicando la procedencia). Por el Lema 5.4.6, estos morfismos son qc-isomorfos a las diagonales  $f_x: U_x \rightarrow U_x \times_{U_{f(x)}} U_x$ , que son inmersiones cerradas por el Lema 7.4.58; concluimos por la Proposición 7.4.35.  $\square$

**Definición 7.4.60.** Diremos que un morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  es *separado* si su diagonal  $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$  es una inmersión cerrada. Se dice que un espacio  $X$  es *separado* si  $X \rightarrow (\star, \mathbb{Z})$  es separado, es decir, si la diagonal  $\Delta: X \rightarrow X \times X$  es una inmersión cerrada.

*Observación 7.4.61.* En espacios separados, las intersecciones —productos fibrados— de afines son afines con secciones globales un cociente del producto tensorial de las secciones de cada componente. Si  $S \rightarrow X$  es un modelo finito, el esquema  $S$  es separado si y solo si  $X$  es separado. Por otra parte, todo espacio  $X$  separado es semiseparado, luego algebraico.

### 7.4.6. Un criterio de descenso efectivo

**Proposición 7.4.62** (Criterio de descenso). Sea  $f: X \rightarrow Y$  separado con  $Y$  afín y tal que  $X$  admite un recubrimiento  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  por inmersiones planas con  $U_i$  afines y verificando que  $\mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}(U_i)$  son de tipo finito, entonces  $\text{Spec}(X)$  es un esquema de separado y de tipo finito sobre  $\text{Spec}(Y)$ .

*Demostración.* Sea  $\text{Cyl}(\mathcal{O}(U)) \rightarrow Y \rightarrow (\star, \mathcal{O}_Y(Y))$  el modelo finito de  $X$  respecto al recubrimiento  $\{U_i \rightarrow X\}$  compuesto con la proyección al punto —Definición 5.4.23, con las notaciones allí empleadas—. Como  $f$  es separado y los morfismos de anillos de tipo finito son estables por cambio

de base, se tiene que, para todo  $\Delta \in \mathcal{P}^*(I) = |\text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))|$ , el morfismo  $\mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}(\Delta)}(\mathcal{U}(\Delta)) = \mathcal{O}_{\text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))}(\Delta)$  es la composición de un morfismo de tipo finito seguido de un cociente, luego es un morfismo de tipo finito. Así, los morfismos de restricción de  $\text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))$  son de tipo finito, luego  $\text{Spec}(\text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))) \simeq \text{Spec}(X)$  es un esquema y los propios abiertos mínimos de  $\text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))$  dan un recubrimiento abierto de este por espectros de  $\mathcal{O}_Y(Y)$ -álgebras de tipo finito; es decir,  $\text{Spec}(X)$  es un esquema de tipo finito sobre  $\text{Spec}(Y) = \text{Spec}(\mathcal{O}_Y(Y))$ .  $\square$

### 7.4.7. Criterios valorativos

El buen comportamiento del análogo de los criterios valorativos de esquemas en el mundo esquemático se debe a las Proposiciones 5.3.3, 5.3.6 y al Corolario 5.3.4. Una vez más, tenemos el siguiente lema bien conocido de álgebra conmutativa, cuya generalización tanto al caso de esquemas como al esquemático nos dirá que el «criterio valorativo» controla cuándo un morfismo levanta especializaciones, puesto que alcanzamos todos los puntos de un espacio dado como imágenes desde anillos de valoración discreta.

**Lema 7.4.63.** [10, Lemma 01J8] Dado anillo conmutativo y con unidad  $B$ , dos primos  $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p} \subseteq B$  y una extensión de cuerpos  $\kappa(\mathfrak{p}') \rightarrow K$ , existe un anillo de valoración  $A$  con maximal  $\mathfrak{m}$  cuerpo de fracciones  $\Sigma$  y un morfismo  $\varphi: B \rightarrow A$  de modo que:  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{p}$ ,  $\varphi^{-1}((0)) = \mathfrak{p}'$  y la extensión  $\kappa(\mathfrak{p}') \rightarrow \Sigma$  inducida por  $\varphi$  es isomorfa a la dada. Si  $B$  es noetheriano,  $A$  puede tomarse de valoración discreta ([10, 0CM1]).

**Definición 7.4.64.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo esquemático. Diremos que  $f$  es *v-cerrado* (resp. *v-separado*) si para todo anillo de valoración discreta  $A$  con cuerpo de fracciones  $\Sigma$  y morfismo  $\text{Spec}(A) \rightarrow Y$ , la aplicación inducida

$$\text{Hom}_Y(\text{Spec}(A), X) \rightarrow \text{Hom}_Y(\text{Spec}(A), Y)$$

es epiyectiva (resp. inyectiva). Es decir, si para todo cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\Sigma) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \text{Spec}(A) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe una (resp. como mucho una) flecha punteada cerrando ambos triángulos conmutativos.

**Proposición 7.4.65.** *Ser  $v$ -cerrado y ser  $v$ -separado son propiedades estables por composición y cambio de base arbitrario.*

*Demostración.* Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  esquemáticos y  $v$ -cerrados. Dado un morfismo  $h: \text{Spec}(A) \rightarrow Z$  con  $A$  de valoración discreta de cuerpo de fracciones  $\Sigma$ , para cada diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\Sigma) & \xrightarrow{p} & X \\ \downarrow \pi & & \downarrow f \\ & & Y \\ & & \downarrow g \\ \text{Spec}(A) & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

se tiene, como  $g$  es  $v$ -cerrado, un morfismo  $\alpha: \text{Spec}(A) \rightarrow Y$  tal que  $g \circ \alpha = h$  y  $f \circ p \circ \pi = \alpha$ . Como  $f$  es  $v$ -cerrado, obtenemos ahora  $\beta: \text{Spec}(A) \rightarrow X$  tal que  $f \circ \beta = \alpha$  y  $p \circ \pi = \beta$ . El morfismo  $\beta$  hace conmutar ambos triángulos del cuadrado exterior, pues  $g \circ f \circ \beta = g \circ \alpha = h$ . Si ahora  $f$  y  $g$  son  $v$ -separados y hay dos morfismos diagonales  $\beta_1, \beta_2: \text{Spec}(A) \rightarrow X$ , en particular tenemos que  $f \circ \beta_1 = f \circ \beta_2$  por  $v$ -separabilidad de  $g$ , y ahora  $\beta_1 = \beta_2$  por  $v$ -separabilidad de  $f$ .

Respecto a los cambios de base: sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo esquemático  $v$ -cerrado y  $Z \rightarrow Y$  un morfismo esquemático cualquiera. Dado un morfismo  $h: \text{Spec}(A) \rightarrow Z$  con  $A$  como antes, para cada diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(\Sigma) & \longrightarrow & Z \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec}(A) & \xrightarrow{h} & Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

se obtiene un morfismo  $\text{Spec}(A) \rightarrow X$  sobre  $Y$  haciendo el diagrama exterior conmutativo. Por la propiedad universal del producto fibrado, levanta a un morfismo  $\text{Spec}(A) \rightarrow Z \times_Y X$  sobre  $Z$ , luego  $Z \times_Y X \rightarrow Z$  es  $v$ -cerrado. Si  $f$  es  $v$ -separado se procede de modo análogo: dados  $\alpha, \beta: \text{Spec}(A) \rightarrow Z \times_Y X$ ,

por la propiedad universal se tiene que son  $\alpha = (\alpha_X, h)$  y  $\beta = (\beta_X, h)$ , donde  $\alpha_X, \beta_X: \text{Spec}(A) \rightarrow X$  cierran el diagrama exterior. Como  $f$  es  $v$ -separado,  $\alpha_X = \beta_X$ , luego  $\alpha = \beta$ .  $\square$

**Proposición 7.4.66.** Tanto ser *ser  $v$ -cerrado* como *ser  $v$ -separado* son propiedades geométricas.

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 7.4.65 para el caso particular de qc-isomorfismos y de la Proposición 5.3.6.  $\square$

En morfismos algebraicos, estas definiciones extienden las de esquemas.

**Proposición 7.4.67.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es algebraico, entonces es  $v$ -cerrado (resp.  $v$ -separado) si y solo si *algebraicamente verifica la parte de existencia* (resp. *unicidad*) *del criterio valorativo*. En particular, si  $\text{Spec}(f)$  es un morfismo de esquemas (qc-qs),  $f$  es  $v$ -cerrado (resp.  $v$ -separado) si y solo si  $\text{Spec}(f)$  es universalmente cerrado (resp. separado).

*Demostración.* El directo se sigue de la Proposición 7.4.65 y del Corolario 5.3.4: primero podemos suponer que tenemos un  $Z \rightarrow Y$  con  $\text{Spec}(Z)$  con restricciones abiertas, en cuyo caso aplica dicho Corolario; en el caso general, empleamos las Proposiciones 5.2.4 y 5.3.6. Para el recíproco, basta ver que si  $f|_{f^{-1}(U_y)}: f^{-1}(U_y) \rightarrow U_y$  verifica la hipótesis para todo  $y$ , entonces  $y$  lo hace  $f$ ; pero esto se sigue de que todo morfismo  $h: \text{Spec}(A) \rightarrow Y$  con  $A$  anillo de valoración discreta —en general, anillo local— y  $|\text{Spec}(A)| = \{0 \leq 1\}$  factoriza por  $\text{Spec}(A) \rightarrow U_y \rightarrow Y$  con  $y = h(0)$ .

La última parte se sigue del Lema 7.1.6 y de los criterios valorativos correspondientes para morfismos de esquemas noetherianos, véase [10, 01KA, 01KY, 0CM1].  $\square$

Como es esperable, incluso en el caso de morfismos no algebraicos, la separabilidad y el levantamiento de especializaciones están controladas por el «criterio valorativo». Observamos que el Lema 7.4.63 generaliza a la situación esquemática:

**Lema 7.4.68.** Dado  $X$  esquemático, puntos esquemáticos  $\mathbf{x}' \leq \mathbf{x}$  y una extensión de cuerpos  $\kappa(\mathbf{x}) \hookrightarrow K$ , existe un anillo de valoración discreta  $A$  con maximal  $\mathfrak{m}$  y cuerpo de fracciones  $\Sigma$  y un morfismo esquemático  $h: \text{Spec}(A) \rightarrow X$  de modo que  $h(0, \mathfrak{m}) = \mathbf{x}'$ ,  $h(1, (0)) = \mathbf{x}$  y la extensión dada es isomorfa a  $\kappa(\mathbf{x}') \rightarrow \Sigma$  inducida por  $h$ .

*Demostración.* Por el Lema 7.4.63 encontramos un anillo de valoración discreta  $A$  de cuerpo de fracciones  $\Sigma$  y morfismo  $\varphi: \mathcal{O}_{X,x'} \rightarrow A$  tal que  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{q}_{x'}$ ,  $\varphi^{-1}((0)) = r_{x'x}^{-1}(\mathfrak{p}_x)$  y de modo que  $\kappa(r_{x'x}^{-1}(\mathfrak{p}_x)) \simeq \kappa(\mathfrak{x}) \rightarrow \Sigma$  es isomorfa a la extensión dada. Obtenemos un morfismo  $h': \text{Spec}(A) \rightarrow X$  de espacios anillados como la composición

$$\text{Spec}(A) \rightarrow (\star, A) \rightarrow (\star, \mathcal{O}_{X,x'}) \rightarrow X$$

—pues la última inclusión no es esquemática salvo si  $x'$  es maximal—. Para convertirlo en un  $h: \text{Spec}(A) \rightarrow X$  esquemático, consideramos la composición  $h = \pi_X \circ \text{Spec}(h')$  —con  $\pi_X: \text{Spec}(X) \rightarrow X$ , véanse de nuevo la Observación 4.3.18 y el Lema 1.4.3—; que es esquemática por construcción y el Teorema 4.3.26, y que verifica lo pedido.  $\square$

**Proposición 7.4.69.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo esquemático.

- a)  $f$  es  $v$ -cerrado si y solo si es universalmente cerrado.
- b)  $f$  es  $v$ -separado si y solo si es separado.

*Demostración.* El argumento que sigue es análogo al de la demostración para esquemas, véase [10, Lemma 01KE] y [10, Lemma 01L0]. Comencemos por a): supongamos que  $f$  es  $v$ -cerrado y veamos que levanta especializaciones —en ese caso, lo hará universalmente por la Proposición 7.4.65 y, por tanto, será universalmente cerrado por la Proposición 7.4.57—. Sean puntos esquemáticos  $\mathfrak{x} \in \text{Spec}(X)$  e  $\mathfrak{y} \leq f(\mathfrak{x})$ . Por el Lema 7.4.68 existe un anillo de valoración discreta  $A$  con maximal  $\mathfrak{m}$ ,  $|\text{Spec}(A)| = \{0 < 1\}$  y cuerpo de fracciones  $\Sigma$  y un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\Sigma) & \xrightarrow{p} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec}(A) & \xrightarrow{h} & Y \end{array} \tag{7.4.2}$$

con  $p(\star, (0)) = \mathfrak{x}$ ,  $h(0, \mathfrak{m}) = \mathfrak{y}$ ,  $h(1, (0)) = f(\mathfrak{x})$ . Como  $f$  es  $v$ -cerrado, existe un morfismo  $\text{Spec}(A) \rightarrow X$  sobre  $Y$  cerrando el diagrama, luego hay un  $\mathfrak{x}' \leq \mathfrak{x}$  con  $f(\mathfrak{x}') = \mathfrak{y}$ .

Recíprocamente: si  $f$  es universalmente cerrado, levanta especializaciones universalmente por la Proposición 7.4.57. Dado un diagrama conmutativo como el de la ecuación 7.4.3, para encontrar un morfismo  $\text{Spec}(A) \rightarrow X$  basta encontrar una sección de  $1 \times f$  en

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(\Sigma) & \xrightarrow{p} & \text{Spec}(A) \times_Y X \\
 & \searrow & \downarrow 1 \times f \\
 & & \text{Spec}(A).
 \end{array} \tag{7.4.3}$$

Denotemos  $X' = \text{Spec}(A) \times_Y X$  y  $g = 1 \times f$ . Sea  $\mathbf{x}$  punto esquemático imagen de  $p$  en  $X'$ , que induce  $\kappa(\mathbf{x}) \hookrightarrow \Sigma$ . Por hipótesis, existe  $\mathbf{x}' \leq \mathbf{x}$  con  $g(\mathbf{x}') = (0, \mathfrak{m})$  y un morfismo  $A \rightarrow \mathcal{O}_{X', \mathbf{x}'} \rightarrow \kappa(\mathbf{x}) \rightarrow \Sigma$  que coincide con la localización  $A \rightarrow A_{(0)} = \Sigma$ . Como  $A \rightarrow \mathcal{O}_{X', \mathbf{x}'}$  es de anillos locales, la imagen de  $\mathcal{O}_{X', \mathbf{x}'} \rightarrow \Sigma$  domina a  $A$  y, por tanto, es igual a  $A$  —por ser los anillos de valoraciones maximales respecto a la relación de dominación de anillos locales—. Es decir, se obtiene un morfismo  $\mathcal{O}_{X', \mathbf{x}'} \rightarrow A$ , induciendo un morfismo esquemático  $\text{Spec}(A) \rightarrow X'$  como en la demostración del Lema 7.4.68 y que es sección de  $g$  por construcción.

Para la parte b) basta aplicar a) a la diagonal —vía la propiedad universal de esta— para obtener que  $f$  es v-separado cuando  $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$  es cerrada. Entonces, como  $\Delta_f$  es una inmersión por la Proposición 7.4.59, se concluye por el Teorema 7.4.52.  $\square$

**Proposición 7.4.70.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  morfismos. Si  $g \circ f$  es separado, entonces  $f$  es separado. Si  $g \circ f$  es universalmente cerrado y  $g$  es separado, entonces  $f$  es universalmente cerrado.

*Demostración.* Por la Proposición 7.4.69, basta probar el resultado análogo para morfismos v-separados y v-cerrados. Si  $A$  es un anillo de valoración

discreta con cuerpo de fracciones  $\Sigma$ , consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Spec}(\Sigma) & \xrightarrow{p} & X \\
 \downarrow i & & \downarrow f \\
 \mathrm{Spec}(A) & \xrightarrow{h} & Y \\
 & \searrow g \circ h & \downarrow g \\
 & & Z.
 \end{array}$$

Si  $g \circ f$  es  $v$ -separado,  $f$  lo es, pues si existiesen  $\alpha, \beta: \mathrm{Spec}(A) \rightarrow X$  cerrando el cuadrado conmutativo superior, también cerrarían el diagrama exterior, y por  $v$ -separabilidad de  $g \circ f$  sería  $\alpha = \beta$ . Por otra parte, si partimos de  $g \circ f$   $v$ -cerrado, existe  $\alpha: \mathrm{Spec}(A) \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \circ \alpha = g \circ h$  y  $\alpha \circ i = p$ , luego acabamos si vemos que  $f \circ \alpha = h$  cuando  $g$  es  $v$ -separado. En efecto, por la unicidad que nos da esta hipótesis, basta ver que  $f \circ \alpha$  cierra el diagrama para  $g$ , es decir, que  $g \circ f \circ \alpha = g \circ h$  e  $f \circ i \circ \alpha = f \circ p$ , lo cual es cierto por construcción.  $\square$

**Corolario 7.4.71.** Un espacio  $X$  es separado si y solo si  $X \rightarrow (\star, \mathcal{O}_X(X))$  es separado; si y solo si  $X \rightarrow U$  es separado para cualquier morfismo con  $U$  afin.

## 7.5. Propiedades dadas por morfismos de anillos

En teoría de esquemas, es habitual definir propiedades de morfismos de esquemas a partir de propiedades de morfismos de anillos siempre y cuando estas últimas sean «locales en la topología de Zariski». Esto tiene que ver con que sean compatibles con inmersiones abiertas de esquemas afines, es decir, con los «morfismos de restricción» del esquema —los morfismos de restricción de un espacio esquemático con restricciones abiertas que sea modelo finito suyo—. En la categoría esquemática completa, esto presenta problemas, incluso en el caso en que el morfismo esté dado entre espacios con restricciones abiertas.

Por ejemplo, tratemos de definir *morfismo de tipo finito* entre espacios esquemáticos en términos de morfismos de anillos. Dado  $f: X \rightarrow Y$ , podríamos decir que « $f$  es de tipo finito» en alguno de los siguientes casos:

- $f_x^\sharp: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  es de tipo finito para todo  $x \in X$ .
- Para cualesquiera  $x$  e  $y \leq f(x)$ , el morfismo  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  es de tipo finito.

Es fácil comprobar que si los morfismos de restricción de  $X$  e  $Y$  no son de tipo finito, es decir, si no tienen restricciones abiertas, estas definiciones no son equivalentes, mientras que las análogas para esquemas sí lo serían. Además, aunque  $X$  e  $Y$  tengan restricciones abiertas, si trabajamos en **SchFin** en vez de en **SchFin**<sup>Open</sup>, como los qc-isomorfismos solo inducen epimorfismos planos de anillos en las fibras —Lema 5.1.6—, el problema que surge es que ninguna de estas nociones será geométrica.

Uno estaría en lo cierto al pensar que este tipo de problemática podría solucionarse si diésemos nuestras definiciones, no en un recubrimiento por inmersiones planas como  $\{U_y \rightarrow Y\}$ , sino en un recubrimiento por una noción verdadera de «inmersión abierta». El problema es que la propia definición de este tipo de morfismos es problemática, puesto que, *a priori*, querríamos decir que «una inmersión abierta es una inmersión plana de tipo finito», lo que ya hemos visto que, en principio, no es tan sencillo. En la Sección 7.7 caracterizaremos las  $f: X \rightarrow Y$  tales que  $\text{Spec}(f)$  es una inmersión abierta de espacios localmente anillados, es decir, tal que  $\text{Spec}(f)(\text{Spec}(X))$  es un abierto de la imagen y  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(X)} = \text{Spec}(f)^{-1}\mathcal{O}_{\text{Spec}(Y)}$ , como los morfismos que son *algebraicamente* inmersiones abiertas, lo que nos permitirá resolver esta cuestión. En cualquier caso, esta no es la noción natural de inmersión abierta que aparece al trabajar con espacios esquemáticos.

### 7.5.1. Propiedades pro-locales

La siguiente definición sustituye la de «propiedad local para la topología de Zariski» por la análoga para la topología definida por los epimorfismos planos en la categoría de anillos. La denominación «pro-local» hace referencia a que esta es, esencialmente, la de los límites proyectivos de inmersiones abiertas —véase la discusión sobre morfismos ind-Zariski del Apéndice B.2—.

**Definición 7.5.1.** Sea **P** una propiedad de morfismos de anillos *estable por composición y cambio de base arbitrario* y tal que cualquier isomorfismo verifica **P**. Diremos que **P** es *pro-local* si verifica:

- a) Para cualesquiera anillos  $B$  y  $C$  y epimorfismos planos  $f: A \rightarrow B$  y  $h: C \rightarrow D$  se verifica  $\mathbf{P}(g: B \rightarrow C) \Rightarrow \mathbf{P}(h \circ g \circ f: A \rightarrow D)$ .
- b) Para cualquier  $f: A \rightarrow B$  y *cualquier* familia de epimorfismos planos  $\{B \rightarrow B_i\}_i$  tal que  $B \rightarrow \prod_i B_i$  es fielmente plano, se verifica  $\forall i, \mathbf{P}(A \rightarrow B_i) \Rightarrow \mathbf{P}(A \rightarrow B)$ .

**Lema 7.5.2.** Si  $\mathbf{P}$  es pro-local, los epimorfismos planos verifican  $\mathbf{P}$ .

**Definición 7.5.3.** Sea  $\mathbf{P}$  es una propiedad de morfismos de anillos. Diremos que  $f: X \rightarrow Y$  es *pro-localmente*  $\mathbf{P}$  si existen recubrimientos  $\{U_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$  y  $\{V_j^i \rightarrow U_i \times_Y X\}_{j \in J_i}$  por inmersiones planas con  $U_i$  y  $V_j^i$  afines tales que  $\forall i, j, \mathbf{P}(\mathcal{O}_{U_i}(U_i) \rightarrow \mathcal{O}_{V_j^i}(V_j^i))$ .

**Lema 7.5.4.** Si  $\mathbf{P}$  es una propiedad pro-local de morfismos de anillos y  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo entre espacios *afines*,  $f$  es pro-localmente  $\mathbf{P}$  si y solo si  $\mathbf{P}(\mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X))$ .

*Demostración.* Claramente, el «si» se verifica considerando los recubrimientos dados por la identidad. Recíprocamente, un morfismo plano entre afines es fielmente plano si y solo si induce un morfismo fielmente plano en secciones globales y, además, toda inmersión plana entre afines induce un epimorfismo plano en secciones globales —véase, por ejemplo, el Teorema 5.1.9 junto a la Proposición 4.1.13—. Tenemos así,  $\forall i, j$ , epimorfismos planos  $\mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}(U_i)$  —con  $\mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \prod_i \mathcal{O}_{U_i}(U_i)$  fielmente plano— y  $\mathcal{O}_{U_i \times_Y X}(U_i \times_Y X) \rightarrow \mathcal{O}_{V_j^i}(V_j^i)$  —con  $\mathcal{O}_{U_i \times_Y X}(U_i \times_Y X) \rightarrow \prod_j \mathcal{O}_{V_j^i}(V_j^i)$  fielmente plano para todo  $i$ —; y como todo es afín, se tienen isomorfismos  $\mathcal{O}_{U_i \times_Y X}(U_i \times_Y X) \simeq \mathcal{O}_{U_i}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(X)$  por la Proposición 4.4.2. Se concluye por la estabilidad por cambio de base y pro-localidad de  $\mathbf{P}$ : por b) de la definición  $\forall i, \mathbf{P}(\mathcal{O}_{U_i}(U_i) \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(X))$ , por la estabilidad por composición y Lema 7.5.2 es  $\forall i, \mathbf{P}(\mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(X))$ , y se concluye aplicando de nuevo b).  $\square$

En virtud del Lema 7.5.4, obtenemos la siguiente caracterización:

**Proposición 7.5.5.** Si  $\mathbf{P}$  es una propiedad pro-local de morfismos de anillos y  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo esquemático, son equivalentes:

- 1)  $f$  es pro-localmente  $\mathbf{P}$ .

- 2) Existen recubrimientos  $\{U_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$  y  $\{V_j^i \rightarrow U_i \times_Y X\}_{j \in J_i}$  por inmersiones planas —con  $U_i, V_j^i$  no necesariamente afines— tal que, para todo  $i, j$ , los morfismos  $V_j^i \rightarrow U_i$  son pro-localmente  $\mathbf{P}$ .
- 3) Para todo  $x \in X$ , los morfismos  $f_x: U_x \rightarrow U_{f(x)}$  son pro-localmente  $\mathbf{P}$  —es decir,  $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x})$ —.
- 4) Para todo  $x \in X$  e  $y \geq f(x)$ , los morfismos inducidos  $U_x \rightarrow U_y$  son pro-localmente  $\mathbf{P}$  —es decir,  $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{Y, y} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x})$ —.
- 5) Para cualesquiera inmersiones planas  $\phi: U \rightarrow X$  y  $\psi: V \rightarrow Y$  con  $U, V$  afines y  $g: U \rightarrow V$  con  $\psi \circ g = f \circ \phi$ ,  $g$  es pro-localmente  $\mathbf{P}$  —i.e.  $\mathbf{P}(\mathcal{O}_V(V) \rightarrow \mathcal{O}_U(U))$ —.

*Demostración.* Observemos que 1) y 2) son propiedades locales en el espacio de llegada, mientras que 3), 4) y 5) lo son en el de salida. Claramente 1)  $\Rightarrow$  2); el recíproco se obtiene considerando recubrimientos afines adecuados para cada  $i, j$  y la unión de todos ellos. Es claro que 3)  $\Rightarrow$  4) por la estabilidad por composición y el Lema 7.5.2; por otra parte, es claro que 5)  $\Rightarrow$  3) y 5)  $\Rightarrow$  1). Además, 4)  $\Rightarrow$  1) sin más que tomar los recubrimientos  $\{U_y \rightarrow Y\}$  y  $\{U_x \rightarrow f^{-1}(U_y)\}$ . Solo queda ver la equivalencia con 5): supongamos que se verifican 1)-4) y sean  $\phi, g, \psi$  como en 5). Por la equivalencia 3)  $\Leftrightarrow$  1) aplicada a  $g$  y el Lema 7.5.4, basta ver que  $\forall u \in U, \mathbf{P}(\mathcal{O}_{V, g(u)} \rightarrow \mathcal{O}_{U, u})$ ; pero por hipótesis es  $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x})$  y este morfismo de anillos es localmente isomorfo al de partida por ser  $\phi, \psi$  inmersiones planas y los diagramas conmutativos. Se tiene por tanto que  $\mathbf{P}((\mathcal{O}_{V, g(u)})_\alpha \rightarrow (\mathcal{O}_{U, u})_\beta)$  para cualquier primo  $\beta \subseteq \mathcal{O}_{U, u}$  con antiimagen  $\alpha$ . Por a) de la Definición 7.5.1 es  $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{V, g(u)} \rightarrow (\mathcal{O}_{U, u})_\beta)$  y por b) se concluye  $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{V, g(u)} \rightarrow \mathcal{O}_{U, u})$ .  $\square$

*Observación 7.5.6.* Si se debilita b) de la Definición 7.5.1 para admitir solo familias finitas, se pierde la equivalencia con 5) de la Proposición 7.5.5, pero se mantienen de 1) a 4) y todos los resultados que siguen.

**Corolario 7.5.7.** Para cualquier propiedad pro-local de morfismos de anillos  $\mathbf{P}$ , inmersiones planas y qc-isomorfismos son pro-localmente  $\mathbf{P}$ .

*Ejemplo 7.5.8.* Un morfismo esquemático es plano en el sentido de la Definición 5.1.2 —y Lema 5.1.3— si y solo si es pro-localmente plano.

**Corolario 7.5.9.** Para cualquier propiedad pro-local de morfismos de anillos  $\mathbf{P}$ , la propiedad de *ser pro-localmente  $\mathbf{P}$*  es estable por composición y cambio de base arbitrario.

**Corolario 7.5.10.** Para cualquier propiedad pro-local de morfismos de anillos  $\mathbf{P}$ , la propiedad de *ser pro-localmente  $\mathbf{P}$*  es geométrica.

*Demostración.* Las propiedades se traducen a cuestiones en fibra en virtud de 4) de la Proposición 7.5.5, donde se verifican por inducir los qc-isomorfismos  $X \rightarrow Y$  epimorfismos planos  $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  para cualquier  $x \in X$  tales que  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \prod_{f(x) \geq y} \mathcal{O}_{X,x}$  es fielmente plano para cualquier  $y \in Y$  y por las propiedades de la Definición 7.5.1.  $\square$

Observemos que toda propiedad pro-local de morfismos de anillos  $\mathbf{P}$  es local en la topología de Zariski, luego define una propiedad de morfismos de esquemas en el sentido ordinario, que seguimos denotando  $\mathbf{P}$ ; por ejemplo, los morfismos planos de anillos definen morfismos pro-localmente planos de espacios esquemáticos y morfismos planos de esquemas. Se verifica:

**Corolario 7.5.11.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es algebraico y  $\mathbf{P}$  es una propiedad pro-local de morfismos de anillos, se verifica que  $f$  es algebraicamente  $\mathbf{P}$  si y solo si  $f$  es pro-localmente  $\mathbf{P}$ .

Ya vimos que los qc-isomorfismos son exactamente los morfismos que son algebraicamente isomorfismos —Proposición 7.1.8—. Si nos restringimos a morfismos algebraicos,

**Proposición 7.5.12.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo algebraico, es plano (resp. inmersión plana, fielmente plano) si y solo si es *algebraicamente* plano (resp. monomorfismo plano, fielmente plano).

*Demostración.* El «solo si» se obtiene por estabilidad por cambio de base y, por ejemplo, el Teorema 5.1.9. Recíprocamente, si  $f$  es algebraicamente plano, aplicando la definición a los  $f^{-1}(U_y) \rightarrow U_y$ , de 4) de la Proposición 7.5.5 y de que la propiedad de platitud de morfismos de esquemas se comprueba en fibra, se deduce que  $f$  es plano. Si  $f$  es algebraicamente inmersión plana, es plano por lo anterior y su diagonal es un qc-isomorfismo por la Proposición 7.1.8, luego es una inmersión plana. Si  $f$  es algebraicamente fielmente plano, es de nuevo plano y todos los  $\text{Spec}(f^{-1}(U_y)) \rightarrow U_y$

inducidos son epiyectivos, luego  $\text{Spec}(f)$  es epiyectivo por ser colímite de epiyecciones de espacios anillados y, por tanto,  $f$  es fielmente plano por el Teorema 5.1.9.  $\square$

### 7.5.2. Morfismos pro-localmente de tipo finito y propios

En general, *ser de tipo finito* (análogo para *ser de presentación finita*) no es una propiedad pro-local de morfismos de anillos anillos —Definición 7.5.1—, por ejemplo porque los epimorfismos planos no son de tipo finito en general. Sin embargo, si consideramos condiciones adicionales de separabilidad, podemos dar la noción de morfismo esquemático «pro-localmente de tipo finito» que, no solo se comporta dentro de parámetros razonables, sino que, *a priori*, generaliza la definición clásica de esquemas.

Las hipótesis de separabilidad en la definición que sigue están motivadas por el criterio de la Proposición 7.4.62 aplicada localmente a un morfismo, reescribiendo la Definición 7.5.3 en este caso particular:

**Definición 7.5.13.** Diremos que un morfismo *separado*  $f: X \rightarrow Y$  con  $Y$  *separado* es *pro-localmente de tipo finito* si existen recubrimientos por inmersiones planas  $\{U_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$  y  $\{V_j^i \rightarrow U_i \times_Y X\}_{j \in J_i}$  con  $U_i$  y  $V_j^i$  afines de modo que  $\mathcal{O}_{U_i}(U_i) \rightarrow \mathcal{O}_{V_j^i}(V_j^i)$  es de tipo finito para todo  $i, j$ .

El eslogan de la siguiente proposición es que un morfismo pro-localmente de tipo finito es, localmente en la topología de las inmersiones planas, un morfismo de esquemas de tipo finito. Esto dice que *la noción de morfismo separado de tipo finito relativiza a las «fibras» —módulo qc-isomorfismos— la noción de que un espacio esquemático tenga restricciones abiertas*. En particular, podremos extender resultados de teoría de esquemas a morfismos esquemáticos de tipo finito sin rehacer las demostraciones de estos.

**Lema 7.5.14.** Si se tiene un diagrama conmutativo de anillos

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

con  $f$  de tipo finito y  $B \rightarrow B'$  epiyectivo, entonces  $f'$  es de tipo finito.

*Demostración.* Como  $B \rightarrow B'$  es epiyectivo,  $A \rightarrow B'$  es de tipo finito. Se concluye  $f'$  es de tipo finito por ser el segundo morfismo de una composición que es de tipo finito.  $\square$

*Observación 7.5.15.* El análogo del Lema 7.5.14 para el caso de presentación finita —en una potencial situación no notheriana— requiere que  $A \rightarrow A'$  también sea epiyectivo, pero ese seguirá siendo el caso en las aplicaciones.

**Proposición 7.5.16.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es pro-localmente de tipo finito —en las hipótesis de la Definición 7.5.13—, existe un recubrimiento por inmersiones planas  $\{U_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$  con  $U_i$  afín y tal que  $\text{Spec}(U_i \times_Y X)$  es un esquema separado y de tipo finito sobre  $\text{Spec}(U_i)$  para todo  $i \in I$ . Es más, si  $\mathcal{U}$  es el **SchFin**-codato 2-esquemático asociado al recubrimiento, lo mismo sigue siendo cierto para  $\{\mathcal{U}(\Delta) \rightarrow X\}$  y  $\text{Spec}(\mathcal{U}(\Delta) \times_Y X)$  para todo  $\Delta \in \mathcal{P}^*(I)$ .

*Demostración.* La primera parte es una aplicación de la Proposición 7.4.62 en cada  $U_i$ . Para la segunda parte, como  $Y$  es separado,  $\mathcal{U}(\Delta)$  siguen siendo afines, luego por la misma Proposición 7.4.62 basta ver que  $\mathcal{U}(\Delta) \times_Y X$  admite un recubrimiento afín por inmersiones planas que sigue verificando la misma hipótesis de finitud. En efecto, pongamos por simplicidad que  $\Delta = \{1, 2\}$  y sean  $\{V_1^j \rightarrow U_1 \times_Y X\}$ ,  $\{V_2^k \rightarrow U_2 \times_Y X\}$  los recubrimientos correspondientes. Se tiene un recubrimiento

$$\{V_1^j \times_X V_2^k \rightarrow \mathcal{U}(\Delta) \times_Y X\}_{j,k}.$$

De nuevo,  $V_1^j \times_Y V_2^k$  es afín y su anillo de secciones globales es un cociente de  $\mathcal{O}_{V_1^j}(V_1^j) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_{V_2^k}(V_2^k)$  por ser  $Y$  separado, luego los  $V_1^j \times_X V_2^k$  son afines por ser  $f$  separado, con sus secciones globales siendo un cociente de las del primero. Más concretamente, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{U_1}(U_1) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_{U_2}(U_2) & \longrightarrow & \mathcal{O}(V_1^j) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}(V_2^k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathcal{O}_{V_1^j \times_Y V_2^k}(V_1^j \times_Y V_2^k) \\ & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{U_1 \times_Y U_2}(U_1 \times_Y U_2) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{V_1^j \times_X V_2^k}(V_1^j \times_X V_2^k). \end{array}$$

Como cada  $\mathcal{O}_{U_i}(U_i) \rightarrow \mathcal{O}_{V_i^s}(V_i^s)$  ( $i = 1, 2$  y todo  $s$ ) es de tipo finito el morfismo producto tensorial es isomorfismo y, como todas las flechas verticales del diagrama son cocientes, se concluye por el Lema 7.5.14.  $\square$

**Corolario 7.5.17.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es pro-localmente de tipo finito, entonces es qc-equivalente a un morfismo  $f': X' \rightarrow Y'$  tal que los morfismos  $\text{Spec}(f'^{-1}(U_{y'})) \rightarrow \text{Spec}(U_{y'})$  son de tipo finito de esquemas  $\forall y' \in Y$ .

*Demostración.* Basta considerar, si  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V} \rightarrow f^*\mathcal{U}$  con los recubrimientos de la condición de pro-localmente propio —con  $\mathcal{V}$  sobre cada  $\mathcal{U}(\Delta)$  como en la demostración de la Proposición 7.5.16— y siguiendo las notaciones de la Definición 5.4.23, el morfismo entre los modelos finitos correspondientes  $f': \text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{V})) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))$ . Obsérvese el detalle de que, para  $\Delta \in |\text{Cyl}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))|$ , lo que se tiene estrictamente es que  $\text{Spec}(f'^{-1}(y'))$ , es un esquema, pero este espacio es qc-isomorfo como espacio esquemático a  $\text{Spec}(f'^{-1}(U_{y'}))$  por la construcción del cilindro y el Lema 5.4.6.  $\square$

**Lema 7.5.18.** Ser pro-localmente de tipo finito es una propiedad geométrica.

*Demostración.* Recordemos que un morfismo entre espacios afines es un qc-isomorfismo si y solo si induce un isomorfismo de anillos entre las secciones globales. Con esto, comprobamos las condiciones de la Definición 6.1.1: 1) sea  $f: X \rightarrow Y$  pro-localmente de tipo finito y  $\{U_i \rightarrow Y\}$ ,  $\{V_j^i \rightarrow U_i \times_Y X\}$  los recubrimientos de la Definición 7.5.13. Si  $Y \rightarrow Z$  es un qc-isomorfismo, basta tomar el  $\{U_i \rightarrow Y \rightarrow Z\}$  y observar que  $U_i \times_Z X \rightarrow U_i \times_Y X$  es un qc-isomorfismo entre afines; si  $W \rightarrow X$  es qc-isomorfismo, observar que  $U_i \times_Y W \rightarrow U_i \times_Y X$  es un qc-isomorfismo entre afines y considerar  $\{V_j^i \times_X W \rightarrow U_i \times_Y W\}$ . De ambas cuestiones se concluye que ser pro-localmente de tipo finito es estable por composición con qc-isomorfismos. Para ver la estabilidad por cambio de base qc-isomorfismos de 2) basta cambiar de base los recubrimientos de la definición. Por último, para ver 3), consideramos un qc-isomorfismo  $\phi: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  de modo que  $g \circ \phi$  es pro-localmente de tipo finito. Si  $\{U_i \rightarrow Z\}$  y  $\{V_i^j \rightarrow U_i \times_Z X\}$  son los recubrimientos de la Definición 7.5.13, se toma  $\{V_i^j \rightarrow U_i \times_Z X \rightarrow U_i \times_Z Y\}$ , donde el primer morfismo es un qc-isomorfismo entre afines.  $\square$

**Corolario 7.5.19.** Un morfismo separado  $f: X \rightarrow Y$  con  $Y$  separado es pro-localmente de tipo finito si y solo si es qc-equivalente a  $f': X' \rightarrow Y'$  tal que  $\text{Spec}(f'^{-1}(U_{y'})) \rightarrow \text{Spec}(U_{y'})$  son morfismos de tipo finito de esquemas para todo  $y' \in Y'$ .

*Demostración.* Se sigue del Corolario 7.5.17 y Lema 7.5.18 □

**Lema 7.5.20.** Ser pro-localmente de tipo finito es estable por composición.

*Demostración.* Si  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  son morfismos pro-localmente de tipo finito y  $\{U_i \rightarrow Z\}, \{V_j^i \rightarrow U_i \times_Z Y\}, \{W_k \rightarrow Y\}, \{P_l^k \rightarrow W_k \times_Y X\}$  son recubrimientos en la hipótesis de la definición, basta considerar  $\{W_k \times_Y V_j^i \times_Y X \times_X P_l^k \rightarrow U_i \times_Z X\}$ . La condición de finitud se preserva porque todo es separado; detalles omitidos. □

**Lema 7.5.21.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es algebraicamente de tipo finito, separado e  $Y$  es separado,  $f$  es pro-localmente de tipo finito.

*Demostración.* Por la hipótesis,  $\text{Spec}(f^{-1}(U_y))$  es un esquema de tipo finito sobre  $\text{Spec}(U_y)$  para todo  $y \in Y$ , luego basta considerar este recubrimiento y  $\{U_x \rightarrow f^{-1}(U_y)\}_{f(x) \geq y}$ . □

*Ejemplo 7.5.22.* En principio, ser pro-localmente de tipo finito, aun en el caso algebraico, es una condición más débil que ser algebraicamente de tipo finito. En efecto, si consideramos  $(\star, A) \rightarrow (\star, k)$  con  $k$  un cuerpo, este morfismo será pro-localmente de tipo finito si existe un recubrimiento finito por monomorfismos planos  $\text{Spec}(A_i) \rightarrow \text{Spec}(A)$  de esquemas afines con  $A_i$  una  $k$ -álgebra de tipo finito para todo  $i$ . Esto no implica, a priori, que  $A$  sea una  $k$ -álgebra de tipo finito. Nótese que, en el caso de morfismos de esquemas, ser de tipo finito es local en la topología fpqc en el esquema de llegada, pero no es local en el de salida.

**Proposición 7.5.23.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  con  $Y, Z$  separados. Si  $g \circ f$  es pro-localmente de tipo finito y  $g$  es separado, entonces  $f$  es pro-localmente de tipo finito.

*Demostración.* Nótese que  $f$  es automáticamente separado por serlo  $g \circ f$  al estar restringida la definición de los morfismos pro-localmente de tipo finito al caso separado y por la Proposición 7.4.70. Si  $\{U_i \rightarrow Z\}$  y  $\{V_j^i \rightarrow U_i \times_Z X\}$

son los recubrimientos de la definición de *pro-localmente de tipo finito* para  $g \circ f$ , los recubrimientos que verifican la definición para  $f$  son  $\{U_i \times_Z Y \rightarrow Y\}$  y  $\{V_j^i \times_Y X \rightarrow (U_i \times_Z Y) \times_Y X \simeq U_i \times_Z X\}$ . En efecto, como una vez más estamos en condiciones de separabilidad, se concluye por la estabilidad por cambio de base de los morfismos de anillos de tipo finito y el Lema 7.5.14.  $\square$

**Proposición 7.5.24.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es pro-localmente de tipo finito y  $g: Z \rightarrow Y$  es algebraico con  $Z$  separado, entonces  $f': Z \times_Y X \rightarrow Z$  es pro-localmente de tipo finito.

*Demostración.* Empleamos la caracterización de la Proposición 7.5.19. Para el cambiado de base  $f'$ , dado que los morfismos de tipo finito de esquemas son estables por cambio de base arbitrario, gracias a la hipótesis de algebraicidad,  $\text{Spec}(X \times_Y g^{-1}(U_y)) \rightarrow \text{Spec}(g^{-1}(U_y))$  son morfismos de tipo finito entre esquemas. Recubriendo cada  $g^{-1}(U_y)$  por sus abiertos mínimos, encontramos un recubrimiento  $\{U_z \subseteq g^{-1}(U_y) \rightarrow Z\}_{g(z) \geq y}$  cuyas fibras vía  $f'$  inducen morfismos de esquemas de tipo finito al tomar espectros, de donde se concluye.  $\square$

**Definición 7.5.25.** Diremos que un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  con  $Y$  separado es *pro-localmente propio* si es universalmente cerrado, separado y pro-localmente de tipo finito.

**Proposición 7.5.26.** Ser *pro-localmente propio* es propiedad geométrica.

*Demostración.* Proposiciones 7.4.66, 7.4.69 y Lema 7.5.18.  $\square$

**Proposición 7.5.27.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  con  $Y$  separado es pro-localmente propio si y solo si es qc-equivalente a  $f': X' \rightarrow Y'$  tal que  $\text{Spec}(f'^{-1}(U_{y'})) \rightarrow \text{Spec}(U_{y'})$  son morfismos propios de esquemas  $\forall y' \in Y'$ .

*Demostración.* Proposiciones 7.4.65, 7.4.69; Corolario 7.5.19 y Proposición 7.5.26.  $\square$

**Corolario 7.5.28.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es algebraicamente propio —Definición 7.1.4— e  $Y$  es separado,  $f$  es pro-localmente propio.

**Proposición 7.5.29.** Ser *pro-localmente propio* es estable por composición.

*Demostración.* Lema 7.5.20 y Proposiciones 7.4.65, 7.4.69.  $\square$

**Proposición 7.5.30.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  con  $Y, Z$  separados. Si  $g \circ f$  es pro-localmente propio y  $g$  es separado,  $f$  es pro-localmente propio.

*Demostración.* Se concluye por las Proposiciones 7.4.70 y 7.5.23.  $\square$

**Proposición 7.5.31.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es pro-localmente propio y  $g: Z \rightarrow Y$  es algebraico con  $Z$  separado,  $f': Z \times_Y X \rightarrow Z$  es pro-localmente propio.

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 7.5.24.  $\square$

En lo que sigue, los resultados que planteamos serán ciertos tanto para morfismos pro-localmente propios —bajo sus hipótesis adecuadas— como para morfismos algebraicamente propios, con demostraciones análogas en ambos casos por estar estas basadas en que las antiimágenes de los abiertos mínimos sean esquemas a nivel de espectros. Sospechamos que las dos nociones podrían ser equivalentes, hecho que confirmaríamos si se verificase la Conjetura 7.1.17. Así, nos podríamos restringir a la definición general de morfismos algebraicamente propios pero manteniendo la descripción «local» más operativa de los morfismos pro-localmente propios en el caso separado.

## 7.6. Teoremas fundamentales

En esta sección probamos tres teoremas fundamentales para morfismos pro-localmente propios que extienden a sus análogos de esquemas: el teorema de finitud de la cohomología, el teorema de las funciones formales y el teorema de factorización de Stein para morfismos propios —cuya parte no trivial es el teorema de conexión de Zariski—. Nos gustaría enfatizar que es posible dar una demostración de estos resultados sin suponer sus análogos de esquemas: para el teorema de finitud, se necesita el lema de Chow esquemático, cuya demostración es en esencia análoga a la que se realiza para esquemas, posible partiendo del estudio de espacios proyectivos finitos que realizamos en [26] y al estudio ya realizado de componentes irreducibles, pero de notablemente engorrosa notación al incluir en su enunciado qc-isomorfismos —motivo que nos hizo decantarnos por la exposición que sigue en la sección—; y por otra parte tenemos el lema «de *dévisage*», cuya demostración es bastante formal y se realiza también de forma análoga a la de esquemas. Para el teorema de las funciones formales, recomendamos

tomar como referencia la demostración intrínseca en términos de completaciones de haces cuasicoherentes y de completación de la resolución de Godement —aplicada aquí a la resolución estándar— introducida en [33], donde naturaleza finita de nuestros espacios es, de hecho, ventajosa.

### 7.6.1. El teorema de finitud de Grothendieck

**Teorema 7.6.1.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo pro-localmente propio —lo que requiere asumir que  $Y$  es separado— o algebraicamente propio —en ambos casos con  $Y$  noetheriano como hasta ahora—. Se verifica que, para todo  $\mathcal{M} \in \mathbf{Coh}(X)$ , el complejo  $\mathbb{R}f_*\mathcal{M}$  tiene cohomología coherente.

*Demostración.* Lo probamos para morfismos pro-localmente propios, siguiéndose el caso algebraicamente propio de un argumento formalmente idéntico. Basta ver que dado  $\mathcal{M}$  coherente,  $(R^i f_*\mathcal{M})_y$  es un  $\mathcal{O}_{Y,y}$ -módulo finito generado para todo  $y \in Y$ . Comencemos suponiendo que los morfismos  $\mathrm{Spec}(f^{-1}(U_y)) \rightarrow \mathrm{Spec}(U_y)$  son propios *de esquemas* para todo  $y \in Y$ . Si denotamos  $\mathcal{M}^y = \mathcal{M}|_{f^{-1}(U_y)}$ , tenemos —aplicando el Corolario B.4.31—

$$(R^i f_*\mathcal{M})_y = H^i(f^{-1}(U_y), \mathcal{M}^y) \simeq H^i(\mathrm{Spec}(f^{-1}(U_y)), \widetilde{\mathcal{M}}^y),$$

donde  $\widetilde{\mathcal{M}}^y$  es, *a priori*, el módulo coherente descendido en el esquema  $\mathrm{Spec}(f^{-1}(U_y))$  inducido por  $\mathcal{M}^y$  —Teorema B.4.11—; que además coincide con  $\widetilde{\mathcal{M}}|_{\mathrm{Spec}(f^{-1}(U_y))}$ ; luego el módulo de cohomología es cuestión es finito generado por el teorema de finitud de Grothendieck para esquemas por ser los  $\mathrm{Spec}(f^{-1}(U_y)) \rightarrow \mathrm{Spec}(U_y)$  propios.

Por la Proposición 7.5.27 sabemos que existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{\psi'} & Z & \xrightarrow{\psi} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ Y' & \xleftarrow{\varphi'} & W & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

donde todas las flechas horizontales son qc-isomorfismos. Como los qc-isomorfismos inducen equivalencias entre las categorías de módulos coherentes que, en particular, son exactas, todo  $\mathcal{M} \in \mathbf{Coh}(X)$  es  $\psi_*\psi'^*\mathcal{M}'$  para algún  $\mathcal{M}' \in \mathbf{Coh}(X)$  y además se tiene que  $R^i f_*\mathcal{M} \in \mathbf{Coh}(Y)$  si y solo si

$\varphi'_* \varphi'^* R^i f_* \mathcal{M} \in \mathbf{Coh}(Y')$ . Se concluye porque  $f'$  está en las condiciones del caso analizado antes y porque

$$\begin{aligned} \varphi'_* \varphi'^* R^i f_* \psi_* \psi'^* \mathcal{M}' &\simeq \varphi'_* R^i g_* \psi^* \psi_* \psi'^* \mathcal{M}' \simeq \varphi'_* R^i g_* \psi'^* \mathcal{M}' \simeq \\ &\simeq R^i f'_* \psi'_* \psi'^* \mathcal{M}' \simeq R^i f'_* \mathcal{M}', \end{aligned}$$

que es un haz coherente. □

**Corolario 7.6.2.** Sea  $f: S \rightarrow T$  un morfismo de esquemas qc-qs con  $T$  separado, verificando existencia y unicidad del criterio valorativo y tal que existen recubrimientos finitos  $\{U_i \rightarrow T\}$  y  $\{V_j^i \rightarrow U_i \times_T S\}$  por monomorfismos planos con  $U_i, V_j^i$  afines y de modo que  $\mathcal{O}_{U_i}(U_i) \rightarrow \mathcal{O}_{V_j^i}(V_j^i)$  son de tipo finito para todo  $i, j$ . Entonces, se verifica que para todo módulo coherente  $\mathcal{M} \in \mathbf{Coh}(S)$ , su imagen  $\mathbb{R}f_* \mathcal{M}$  tiene cohomología coherente.

**Corolario 7.6.3** (Finitud de la cohomología). Si  $f: S \rightarrow T$  es un morfismo propio de esquemas con  $T$  noetheriano y separado, entonces  $R^i f_*$  preserva módulos coherentes para todo  $i \geq 0$ .

### 7.6.2. Funciones formales y factorización de Stein

Seguimos aquí el procedimiento de [33], en términos de completaciones de haces de módulos respecto a haces de ideales y difiere del método clásico.

Sea  $Y$  un espacio esquemático —noetheriano—. Dado un  $\mathcal{O}_Y$ -módulo  $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}(Y)$  y un haz de ideales cuasicoherente  $\mathcal{I} \subseteq \underline{\underline{\mathcal{O}}}_Y$  —y por tanto coherente—, la completación  $\mathcal{I}$ -ádica de  $\mathcal{M}$  es el haz  $\widehat{\mathcal{M}} \equiv \widehat{\mathcal{M}}^{\mathcal{I}}$  tal que

$$\widehat{\mathcal{M}}_y := \widehat{\mathcal{M}}_y^{\mathcal{I}_y} = \lim_{n>0} \mathcal{M}_y / \mathcal{I}_y^n \mathcal{M}_y.$$

En general, dado un espacio localmente anillado  $T$ , un  $\mathcal{O}_T$ -módulo  $\mathcal{N}$  y un haz de ideales cuasicoherentes  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_T$ , definimos del mismo modo la completación  $\mathcal{J}$ -ádica de  $\mathcal{N}$ , como  $\widehat{\mathcal{N}} \equiv \widehat{\mathcal{N}}^{\mathcal{J}} = \lim_{n \geq 0} \mathcal{N} / \mathcal{J}^n \mathcal{N}$ .

**Lema 7.6.4.** Sea  $Y$  esquemático,  $\mathcal{I} \subseteq \underline{\underline{\mathcal{O}}}_Y$  haz de ideales cuasicoherentes y  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(Y)$ . Si  $T = \text{Spec}(Y)$  y  $\widehat{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{O}_T$  los haces cuasicoherentes descendidos asociados —Apéndice B.4—, el completado  $\widetilde{\mathcal{I}}$ -ádico de  $\widehat{\mathcal{M}}$  es isomorfo al haz cuasicoherente descendido asociado a  $\widehat{\mathcal{M}}$ .

*Demostración.* El caso general se prueba con las ideas aquí presentadas y técnicas del Apéndice B.4; pero aquí damos la demostración en el caso en que  $\text{Spec}(Y)$  es un esquema y, de hecho,  $Y$  tiene restricciones abiertas, pues para su aplicación en el Teorema 7.6.5 podemos reducirnos esta situación —véase el argumento de la demostración del Teorema 7.6.1—. Observemos que si  $T$  es un esquema, para todo abierto afín  $U \subseteq T$ ,  $\mathcal{N} \in \mathbf{Qcoh}(T)$  y  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_T$  haz de ideales cuasicoherente, se verifica que  $\widehat{\mathcal{N}}(U) \simeq \widehat{\mathcal{N}}(U)$ . Como estamos suponiendo que  $Y$  tiene restricciones abiertas, por la Proposición 4.3.9 se verifica que  $\widetilde{\mathcal{M}} = \pi_Y^* \mathcal{M} \simeq \lim_{y \in Y} i_{y*} \widetilde{\mathcal{M}}_y$  y que sus secciones en  $\text{Spec}(U_y) \subseteq \text{Spec}(Y)$  son  $\mathcal{M}_y$ ; uniendo este hecho a la observación anterior aplicada a estos abiertos afines y al hecho de que *límites conmutan con límites*, se concluye.  $\square$

**Teorema 7.6.5.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo pro-localmente propio o algebraicamente propio,  $\mathcal{M} \in \mathbf{Coh}(X)$  y  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_Y$  un haz de ideales cuasicoherente —coherente en nuestras hipótesis de noetherianidad—, se tiene un isomorfismo natural entre completados  $\mathcal{I}$ -ádicos

$$R^i f_* \widehat{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} R^i f_* \widehat{\mathcal{M}}.$$

En particular, si  $Y$  es afín, se tienen isomorfismos

$$H^i(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \widehat{\mathcal{M}})$$

y se verifica que  $H^i(X, \widehat{\mathcal{M}}) \simeq \lim_n H^i(X, \mathcal{M}/\mathcal{I}^n \mathcal{M})$ .

*Demostración.* Por las mismas razones que la demostración del Teorema 7.6.1, se reduce al resultado para morfismos propios y haces coherentes de esquemas —como en [33]— y al Lema 7.6.4. Nótese que  $f_* \mathcal{M}$  es coherente por el propio Teorema 7.6.1.  $\square$

**Lema 7.6.6.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo pro-localmente propio o algebraicamente propio tal que  $f_{\sharp}: \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} f_* \mathcal{O}_X$  es un isomorfismo, sus fibras son conexas; es decir, para todo  $\mathbf{y} \in \text{Spec}(Y)$  el poset

$$|\text{Spec}(\kappa(\mathbf{y})) \times_Y^{\text{geo}} X|$$

es conexo.

*Demostración.* Supongamos que existiese algún  $\mathbf{y} = [(y, \mathfrak{p}_y)]$  para el que no fuese conexa y sea  $y = \pi_Y(\mathbf{y})$  el centro de  $y$  —con las notaciones habituales—. Denotemos a la fibra

$$X_{\mathbf{y}} = \text{Spec}(\kappa(\mathbf{y})) \times_Y^{\text{geo}} X = \mathbf{Geo}(f^{-1}(y), \mathcal{O}_{X_{\mathbf{y}}}),$$

y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathbf{y}} & \xrightarrow{j_{\mathbf{y}}} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec}(\kappa(\mathbf{y})) & \xrightarrow{i_{\mathbf{y}}} & Y. \end{array}$$

Por la hipótesis y el Teorema 7.6.5 —y que  $f_*\mathcal{O}_X$  es coherente por el Teorema 7.6.1— se tienen isomorfismos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{O}_{Y,\mathbf{y}}} &\simeq (\widehat{f_*\mathcal{O}_X})_{\mathbf{y}} = \widehat{i_{\mathbf{y}}^{-1}f_*\mathcal{O}_X} \simeq \widehat{f'_*j_{\mathbf{y}}^{-1}\mathcal{O}_X} = \widehat{f'_*\mathcal{O}_{X|X_{\mathbf{y}}}} \simeq \\ &\simeq \lim_{n>0} H^0(X_{\mathbf{y}}, \mathcal{O}_{X|X_{\mathbf{y}}}/\mathfrak{p}_y^n); \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{O}_{X|X_{\mathbf{y}}}/\mathfrak{p}_y \simeq \mathcal{O}_{X_{\mathbf{y}}}$ . Como  $|X_{\mathbf{y}}| = |\mathbf{Geo}(X_{\mathbf{y}}, \mathcal{O}_{X|X_{\mathbf{y}}}/\mathfrak{p}_y^n)|$  para todo  $n$ , si la fibra fuese disconexa, todos estos  $H^0$  descompondrían como productos de anillos no nulos  $A_n \times B_n$  y, por la propiedad universal de los objetos conexos, el límite sería  $A \times B$  para  $A, B$  anillos no nulos; como este anillo no puede ser isomorfo a uno local, se concluye.  $\square$

*Observación 7.6.7.* De hecho, se prueba que las fibras del Lema 7.6.6 son *geométricamente conexas*; en particular conexas tras cualquier cambio de base a un cuerpo algebraicamente cerrado: «conexas en el sitio étale». Demostraremos esto en el Lema 9.1.3.

**Teorema 7.6.8** (Factorización de Stein). Sea  $f: X \rightarrow Y$  pro-localmente propio (resp. algebraicamente propio). Entonces existe una factorización  $X \rightarrow (X, f_*\mathcal{O}_X) \rightarrow Y$  con  $g: (X, f_*\mathcal{O}_X) \rightarrow Y$  finito y  $f': X \rightarrow (X, f_*\mathcal{O}_X)$  pro-localmente propio (resp. algebraicamente propio) de fibras conexas.

*Demostración.* Basta observar que  $g$  es finito porque  $f_*\mathcal{O}_X$  es coherente por el Teorema 7.6.1 y que, si  $f$  es pro-localmente propio,  $f'$  es de pro-localmente propio por la Proposición 7.5.30 y de fibras conexas por el Lema 7.6.6.  $\square$

**Corolario 7.6.9.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es finito si y solo si es afín y pro-localmente propio —si y solo si es afín y algebraicamente propio—. En particular, las nociones de *morfismo algebraicamente propio* y *morfismo pro-localmente propio* coinciden cuando se restringen a morfismos afines —y espacio de llegada separado—.

*Demostración.* Si  $f$  es afín y pro-localmente propio, la factorización del Teorema 7.6.8 coincide con la de la Proposición 7.4.11, luego  $f$  es qc-isomorfo a un morfismo finito y, como esta propiedad es geométrica, se concluye. Recíprocamente, todo morfismo finito es algebraicamente finito —Proposición 7.4.30—, luego algebraicamente propio, y por lo tanto pro-localmente propio —Corolario 7.5.28—.  $\square$

*Observación 7.6.10.* En particular, el Corolario 7.6.9 nos dice que, *a posteriori*, un morfismo  $(\star, A) \rightarrow (\star, B)$  como el descrito en el Ejemplo 7.5.22 es pro-localmente propio si y solo si el correspondiente  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$  es propio de esquemas. Esto parece indicar que, en efecto, como se sugiere en iii') de la Conjetura B.4.34, los recubrimientos finitos por monomorfismos planos de esquemas podrían refinarse por recubrimientos abiertos en algún sentido. Sin embargo, seguimos sin saber nada acerca de esta cuestión en general o de si, para el caso del Corolario en cuestión, esta coincidencia en el caso de espacios cuyo espectro es un esquema se mantiene al retirar las hipótesis de afinidad.

**Corolario 7.6.11.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es una inmersión cerrada si y solo si es algebraicamente un monomorfismo propio.

*Demostración.* Se sigue del resultado análogo para esquemas.  $\square$

De ser cierta la Conjetura 7.1.17, se tendría:

*Conjetura 7.6.12.* Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  —con  $Y$  separado— es una inmersión cerrada si y solo si es un qc-monomorfismo pro-localmente propio.

## 7.7. Inmersiones abiertas

Hasta ahora hemos considerado inmersiones planas, que son los monomorfismos planos de espacios esquemáticos en la categoría localizada  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}$  y definen la topología natural para trabajar con estos objetos

—todo espacio esquemático es un «espacio localmente afín» en ella—. Sin embargo, también tiene su interés dar la noción más fuerte de «inmersión abierta» de espacios esquemáticos.

**Definición 7.7.1.** Diremos que un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es una *inmersión abierta* si es algebraicamente una inmersión abierta.

De la definición y la caracterización de inmersiones abiertas de esquemas (qc-qs) como monomorfismos planos de tipo finito se tiene:

**Lema 7.7.2.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es una inmersión abierta si y solo si es una inmersión plana algebraicamente de tipo finito.

*Demostración.* Se sigue de que un monomorfismo plano de tipo finito de esquemas es una inmersión abierta y del Lema 7.5.12.  $\square$

*Ejemplo 7.7.3.* Si  $\{X_i\}$  es una colección finita de espacios esquemáticos, las inclusiones  $X_j \rightarrow \coprod_i X_i$  son inmersiones abiertas.

**Lema 7.7.4.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  esquemático. Se verifica que  $f$  es un qc-isomorfismo si y solo si es una inmersión abierta y fielmente plana.

*Demostración.* Se deduce del Teorema 5.1.9 teniendo en cuenta que toda inmersión abierta es una inmersión plana y de que todo qc-isomorfismo es algebraicamente un isomorfismo —Proposición 7.1.8—, luego es una inmersión abierta.  $\square$

Por las propiedades generales de los morfismos algebraicos, se tiene:

**Lema 7.7.5.** Ser *inmersión abierta* es una propiedad geométrica, estable por cambio de base arbitrario y composición, y si  $f: X \rightarrow Y$  induce un morfismo de esquemas  $\text{Spec}(f)$ , este es inmersión abierta de esquemas si y solo si  $f$  lo es.

Recordemos que un morfismo de espacios localmente anillados  $g: S \rightarrow T$  es una inmersión abierta si induce un homeomorfismo de  $S$  con un abierto de  $T$  y  $g^\#: g^{-1}\mathcal{O}_T \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$  es un isomorfismo. Es decir, si  $g(S)$  es abierto y  $g: S \rightarrow (g(S), \mathcal{O}_{T|g(S)})$  es un isomorfismo.

**Lema 7.7.6.** Las inmersiones abiertas de espacios localmente anillados son estables por cambio de base arbitrario.

*Demostración.* Misma demostración que para esquemas, pues el producto fibrado es el mismo, véase [10, Lemma 01JR].  $\square$

**Lema 7.7.7.** Sea  $S_i \rightarrow T_i$  una colección de inmersiones abiertas de espacios localmente anillados,  $S = \text{colim}_i S_i$  y  $T = \text{colim}_i T_i$ . Supongamos además  $S_i$  y  $T_i$  se identifican con subespacios de  $S$  y  $T$  verificando que  $\mathcal{O}_{S_i} \simeq \mathcal{O}_{S|S_i}$  y  $\mathcal{O}_{T_i} \simeq \mathcal{O}_{T|T_i}$ . Entonces  $f: S \rightarrow T$  es una inmersión abierta de espacios localmente anillados.

*Demostración.* Observemos que, por la condición en los  $\mathcal{O}_{T_i}$ , el espacio subyacente a  $T_i \times_T S$  coincide con el producto fibrado topológico, es decir, que si identificamos  $T_i$  con un imagen,  $T_i \times_T S \simeq f^{-1}(T_i)$ .

Comenzamos viendo que  $f(S)$  es abierto, lo cual sucede si y solo si  $f(S) \cap T_i \subseteq T_i$  es abierto. Por la observación anterior y ser cada  $f_i$  inmersión abierta,  $f(S) \cap T_i \simeq f_i(S_i)$ , que es abierto por hipótesis. Además, como todos los  $f_i$  son inyectivos, es claro que  $f$  es inyectivo. Queda ver que  $f^{-1}\mathcal{O}_T \simeq \mathcal{O}_S$ , lo cual puede comprobarse fibra en cada  $s \in S$ . Como los  $S_i$  recubren,  $s \in S_i$  para cierto  $i$ ; y como  $f_i$  es inmersión abierta,  $\mathcal{O}_{T_i, f_i(s)} \simeq \mathcal{O}_{S_i, s}$ . Se concluye por las hipótesis sobre los haces de anillos.  $\square$

**Proposición 7.7.8.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es una inmersión abierta si y solo si  $\text{Spec}(f)$  es una inmersión abierta de espacios localmente anillados.

*Demostración.* Si  $f$  es una inmersión abierta, entonces tenemos una familia de inmersiones abiertas de esquemas  $\text{Spec}(f^{-1}(U_y)) \hookrightarrow \text{Spec}(U_y)$  cuyo colímite es  $\text{Spec}(f)$ . Como esta familia está en las condiciones del Lema 7.7.7 —Proposición 4.3.12—, se concluye que  $\text{Spec}(f)$  es inmersión abierta.

Recíprocamente, si  $\text{Spec}(f)$  es inmersión abierta, cualquier cambio de base suyo lo es por el Lema 7.7.6. Si  $Z \rightarrow Y$  es un morfismo con  $\text{Spec}(Z)$  esquema, teniendo en cuenta la Proposición 4.4.4, se tiene que el morfismo  $\text{Spec}(Z \times_Y X) \simeq \text{Spec}(Z) \times_{\text{Spec}(Y)} \text{Spec}(X) \hookrightarrow \text{Spec}(Z)$  es una inmersión abierta y, además,  $\text{Spec}(Z \times_Y X)$  es un esquema por ser homeomorfo a un subesquema abierto de un esquema.  $\square$

La caracterización de la Proposición 7.7.8 tiene un problema: para un  $X$  arbitrario, no dice nada acerca de cuándo un abierto  $U \subseteq \text{Spec}(X)$  aparece como la imagen de  $\text{Spec}(f)$  para algún  $f$  esquemático. Una vez construido  $f$ , lo que sí nos dice es que esta debe ser una inmersión abierta.

**Corolario 7.7.9.** Dado un  $Y$  esquemático tal que  $\text{Spec}(Y)$  es esquema, se tiene una correspondencia biunívoca entre las clases de qc-equivalencia de inmersiones abiertas  $f: X \rightarrow Y$  y los abiertos (qc-qs) de  $\text{Spec}(Y)$ .

*Demostración.* Por ser  $\text{Spec}(Y)$  un esquema, todo abierto  $U \subseteq \text{Spec}(Y)$  lo es con su estructura inducida. En particular,  $U \simeq \text{Spec}(X)$  para cierto  $X$  esquemático —y con restricciones abiertas—. Se concluye por el Teorema B.4.22 y la Proposición 7.7.8.  $\square$

Si  $X$  es algebraico — $X \rightarrow X \times X$  es un morfismo algebraico—, cualquier morfismo desde un espacio cuyo espectro sea un esquema es algebraico por el Lema 7.1.12; en particular, las inclusiones  $i_x: U_x \rightarrow X$ , que *a priori* son inmersiones planas, son algebraicas. En general, para un  $X$  esquemático cualquiera, se verifica que  $X$  tiene restricciones abiertas si y solo si  $i_x$  es una inmersión abierta para todo  $x \in X$ . De darse este caso,  $\text{Spec}(X)$  es un esquema, luego  $X$  es algebraico. Más en general, como consecuencia del Corolario 7.7.9:

**Corolario 7.7.10.** Dado  $X$  esquemático,  $\text{Spec}(X)$  es un esquema si y solo si admite un recubrimiento por inmersiones abiertas  $\{U_i \rightarrow X\}$  con  $\text{Spec}(U_i)$  esquema para todo  $i$ .

### 7.7.1. Observaciones sobre el «sitio de Zariski»

En esta Sección recurrimos ampliamente al Apéndice B.4.

**Definición 7.7.11.** Dado un espacio esquemático  $X$ , definimos el *sitio pequeño de Zariski de  $X$* , denotado  $X_{\text{Zar}}$  como aquel cuyos objetos son las inmersiones abiertas  $U \rightarrow X$  y cuyos recubrimientos  $\mathbf{Cov}(U \rightarrow X)$  son familias finitas de inmersiones abiertas  $\{U_i \rightarrow U\}$  tales que  $\coprod_i U_i \rightarrow U$  es fielmente plano.

*Observación 7.7.12.* Dada una familia finita  $\{U_i \rightarrow U\}$  de morfismos algebraicos, el morfismo  $\coprod_i U_i \rightarrow U$  también es algebraico.

**Lema 7.7.13.** Dado  $X$  esquemático, todo haz  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X_{\text{Zar}})$  envía qc-isomorfismos a isomorfismos. Así, la localización induce una equivalencia  $\mathbf{Sh}(X_{\text{Zar}}) \simeq \mathbf{Sh}((X_{\text{Zar}})_{\text{qc}})$ .

*Demostración.* Misma demostración que la Proposición 5.6.6.  $\square$

**Definición 7.7.14.** Dado un proesquema  $S \simeq \text{Spec}(X)$  —Apéndice B.4—, definimos el *sitio pequeño «de Zariski»*, denotado  $S_{\text{Zar}}$  como aquel cuyos objetos son *inmersiones abiertas* esquemáticas y cuyos recubrimientos son familias *finitas* de inmersiones abiertas conjuntamente epiyectivas.

*Observación 7.7.15.* Nótese que un morfismo esquemático de proesquemas  $S \rightarrow T$  es una *inmersión abierta* en el sentido de espacios localmente anillados si y solo si es *algebraicamente inmersión abierta* —con la noción de algebraicidad de la Definición B.4.14—.

**Lema 7.7.16.** Dado  $X$  esquemático con  $\text{Spec}(X)$  esquema, se inducen equivalencias

$$(X_{\text{Zar}})_{\text{qc}} \simeq \text{Spec}(X)_{\text{Zar}}, \quad \mathbf{Sh}(X_{\text{Zar}}) \simeq \mathbf{Sh}(\text{Spec}(X)_{\text{Zar}}) \simeq \mathbf{Sh}(\text{Spec}(X)).$$

En particular, si  $X$  e  $Y$  son qc-isomorfos, se tienen  $(X_{\text{Zar}})_{\text{qc}} \simeq (Y_{\text{Zar}})_{\text{qc}}$  y  $\mathbf{Sh}(X_{\text{Zar}}) \simeq \mathbf{Sh}(Y_{\text{Zar}})$ .

*Demostración.* Se sigue del Corolario 7.7.9. □

Como el Corolario 7.7.9 no es cierto para  $X$  arbitrario, tenemos problemas comparar los haces en  $X_{\text{Zar}}$  con los haces ordinarios en  $\text{Spec}(X)$ . Con esta definición hemos esquivado el problema estableciendo que las inmersiones abiertas son las que vienen ya equipadas con una estructura de proesquema. Obsérvese que si  $S$  es un proesquema algebraico y se verifican las conclusiones de la Conjetura B.4.26, el análogo del Lema 7.7.16 sería cierto para este caso:

$$(X_{\text{Zar}})_{\text{qc}} \simeq \text{Spec}(X)_{\text{Zar}}, \quad \mathbf{Sh}(X_{\text{Zar}}) \simeq \mathbf{Sh}(\text{Spec}(X)_{\text{Zar}}).$$

Mientras que la última equivalencia  $\mathbf{Sh}(\text{Spec}(X)_{\text{Zar}}) \simeq \mathbf{Sh}(\text{Spec}(X))$  se obtendría si fuese cierta alguna variante de i) de la Conjetura B.4.34.

Por otra parte, con el mismo procedimiento estándar que en el caso débilmente étale,  $X_{\text{Zar}}$  se convierte en un sitio anillado con haz de anillos  $\mathcal{O}_{X_{\text{Zar}}}$ , luego podemos hablar de categorías de módulos y módulos cuasicoherentes en  $X_{\text{Zar}}$ . Se tienen inclusiones

$$X_{\text{Zar}} \rightarrow X_{\text{wZar}} \leftarrow X_{\tau};$$

y si  $X$  tiene restricciones abiertas hay, además, una inclusión  $X_{\tau} \rightarrow X_{\text{Zar}}$  cerrando un cuadrado conmutativo. En este caso, se verifica trivialmente:

**Lema 7.7.17.** Si  $X$  tiene restricciones abiertas,  $X_\tau \subseteq X_{\text{Zar}}$  induce una equivalencia  $\mathbf{Qcoh}(X) \simeq \mathbf{Qcoh}(X_{\text{Zar}}) \simeq \mathbf{Qcoh}(\text{Spec}(X))$ .

*Demostración.* Se deduce de que  $\text{Spec}(X)$  es un esquema y  $X$  un modelo finito suyo.  $\square$

**Lema 7.7.18.** Para todo punto esquemático  $\mathbf{x} \in \text{Spec}(X)$ , el functor  $\text{Fib}_{\mathbf{x}}: X_{\text{Zar}} \rightarrow \mathbf{Set}$  tal que  $(Y \rightarrow X) \mapsto |\text{Spec}(\kappa(\mathbf{x})) \times_X^{\text{geo}} Y|$  define un punto del sitio  $X_{\text{Zar}}$  —Definición B.3.6—.

*Demostración.* Inmediato.  $\square$

Por supuesto,  $\text{Fib}_{\mathbf{x}}(Y \xrightarrow{f} X)$  es, o bien  $\star$  si  $\mathbf{x}$  pertenece a la imagen de  $\text{Spec}(f)$ , o bien vacío en otro caso. Como siempre, el punto  $\mathbf{x}$  define un functor

$$(-)_{\mathbf{x}}: \mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}}) \rightarrow \mathbf{Set} \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\mathbf{x}}$$

de modo que  $\mathcal{F}_{\mathbf{x}} = \text{colim}_{U \rightarrow X} \mathcal{F}(U)$ , donde el colímite se toma sobre todos los entornos abiertos de  $\mathbf{x}$ , es decir, sobre los  $U \rightarrow X$  abiertos tales que  $\mathbf{x}$  pertenece a la imagen esquemática.

*Observación 7.7.19* (Patologías del topos de Zariski). Queda un problema más: ¿si todo punto tuviese algún entorno abierto *afín*, por tanto un entorno abierto que es un esquema,  $\text{Spec}(X)$  sería esquema! —por el Corolario 7.7.10—. Es decir, nuestros puntos no tienen entornos afines «esquemáticamente abiertos» en general, al contrario que sucedía en la topología de las inmersiones planas. De otro modo, *no es cierto* que  $\mathbf{Sh}(X_{\text{Zar}}) \simeq \mathbf{Sh}(X_{\text{Zar}}^{\text{Aff}})$ . Si  $\mathbf{x}$  no tiene ningún entorno abierto afín, la fibra de cualquier haz en  $\mathbf{x}$  es el colímite del diagrama vacío, es decir, el objeto inicial  $\star$ .

Es más, nótese que si  $\mathbf{x}$  centra en  $x$ , sí que tiene entornos abiertos en  $(U_x)_{\text{Zar}}$  —por ser este espacio un esquema—, pero esta restricción, *a priori*, no es compatible con considerar los topos asociados por no ser  $U_x \rightarrow X$  una inmersión abierta. En particular, *no* es claro ni esperamos que se verifique

$$(\mathcal{F}|_{U_x})_{\mathbf{x}} \simeq \mathcal{F}_{\mathbf{x}}.$$

Es más, si  $U, V \rightarrow X$  son dos inmersiones planas tales que  $U, V$  son esquemas y que contienen a  $\mathbf{x}$ , en principio tampoco puede afirmarse que tomar fibra

en  $\mathbf{x}$  en  $U_{\text{Zar}}$  y  $V_{\text{Zar}}$  sea equivalente. Parece que el fondo de estas cuestiones está, una vez más, relacionado con la comparación de  $X_{\text{Zar}}$  con la topología conjuntística de  $\text{Spec}(X)$ .

### 7.7.2. Otros sitios «algebraicos»

Del mismo modo que hemos definido la topología de Zariski para espacios esquemáticos, podemos definir las topologías étale y fppf —y la extensión de cualquier otra topología de esquemas que requiera presentación finita—. Del mismo modo, pueden definirse topologías *de inmersiones planas algebraica, pro-étale algebraica y fielmente plana algebraica*.

**Definición 7.7.20.** Sea  $\alpha$  una topología de Grothendieck en la categoría de esquemas cuasicompactos y cuasiseparados cuyos objetos son morfismos verificando una propiedad  $\mathbf{P}_\alpha$  estable por cambio de base y local en la topología fpqc. Dado un espacio esquemático  $X$ , se define el *sitio pequeño —fuerte—  $\alpha$  algebraico*, denotado genéricamente,  $X_{\text{alg}-\alpha}$ , como aquel cuyos objetos son morfismos  $Y \rightarrow X$  algebraicamente  $\mathbf{P}_\alpha$  y cuyos recubrimientos son  $\mathbf{Cov}(Y \rightarrow X)$  son familias finitas  $\{Y_i \rightarrow Y\}$  —algebraicamente— fielmente planas.

El análogo del Lema 7.7.16 es cierto para estas topologías:

**Proposición 7.7.21.** Con las notaciones anteriores, si  $X$  es esquemático tal que  $\text{Spec}(X)$  es un esquema, hay una equivalencia de sitios

$$(X_{\text{alg}-\alpha})_{\text{qc}} \simeq \text{Spec}(X)_\alpha.$$

*Demostración.* Se sigue de los Lemas 7.1.10 y 7.1.6. □

*Observación 7.7.22.* Si  $X$  es algebraico, el Lema 7.1.12 implica que hay un morfismo algebraicamente fielmente plano «estándar»  $U = \coprod_{x \in X} U_x \rightarrow X$ . Si  $\forall x, \mathbf{P}_\alpha(U_x \rightarrow X)$ , entonces  $U \rightarrow X$  es el recubrimiento estándar en  $X_{\text{alg}-\alpha}$ . Esto sucede, para  $X$  general, cuando  $\alpha$  es la topología de monomorfismos planos de esquemas o cualquiera que la contenga —como la pro-étale o la propia fpqc—. La existencia de un recubrimiento con estas características y la Proposición 7.7.21 permiten extender hechos de la topología  $\alpha$  para esquemas a  $X_{\text{alg}-\alpha}$  por medio análogos a los que clásicamente se emplean para extender cuestiones de la topología étale de esquemas a

espacios algebraicos o *stacks* algebraicos a través de sus morfismos de proyección natural. Finalmente, aunque  $X$  no sea algebraico, cada  $U_x \subseteq X$  sí es algebraico —por ser afín—, por lo que este tipo de argumentos siguen funcionando para  $\coprod_{y \geq x} U_y \rightarrow U_x$ .

**Proposición 7.7.23.** Si  $X$  es esquemático y  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X_{\text{alg}-\alpha})$  es un haz, entonces  $\mathcal{F}$  manda qc-isomorfismos a isomorfismos. Es decir, el functor de localización  $X_{\text{alg}-\alpha} \rightarrow (X_{\text{alg}-\alpha})_{\text{qc}}$  induce una equivalencia de topos

$$\mathbf{Sh}(X_{\text{alg}-\alpha}) \simeq \mathbf{Sh}((X_{\text{alg}-\alpha})_{\text{qc}}).$$

*Demostración.* Misma demostración que la Proposición 5.6.6. □

Por idénticos motivos al caso de las inmersiones planas, los funtores de puntos no son haces en ninguna de estas topologías, y por tanto no son subcanónicas. Sin embargo, sus hacificados son precisamente los funtores de puntos en la localización:

**Proposición 7.7.24.** Si  $X_{\text{alg}-\alpha}$  es como hasta ahora e  $Y \rightarrow X$  es un objeto de  $X_{\text{alg}-\alpha}$ , la hacificación del «prehaz de puntos» de  $Y$ , que llamaremos *haz de puntos de  $Y$* , es su functor de puntos en la categoría localizada. Es decir,

$$\text{Hom}_{X_{\text{alg}-\alpha}}(-, Y)^{\sharp} \simeq \text{Hom}_{(X_{\text{alg}-\alpha})_{\text{qc}}}(-, Y).$$

*Demostración.* Mismo argumento que la Proposición 7.7.24. □

**Corolario 7.7.25.** Si  $X$  es tal que  $\text{Spec}(X)$  es un esquema, para todo  $Y \rightarrow X$  en  $X_{\text{alg}-\alpha}$  se tiene un isomorfismo —véase la Proposición 5.2.4—

$$\text{Hom}_{X_{\text{alg}-\alpha}}(-, Y)^{\sharp}_{|\text{Spec}^{-1}(\mathbf{Sch})} \simeq \text{Hom}_{\text{Spec}(X)_{\alpha}}(-, \text{Spec}(Y)) \circ \text{Spec}_{|\text{Spec}^{-1}(\mathbf{Sch})}.$$

**Proposición 7.7.26.** Si  $\phi: X \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo, se induce una equivalencia de topos  $(\phi^{-1} \dashv \phi_*): \mathbf{Sh}(X_{\text{alg}-\alpha}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sh}(Y_{\text{alg}-\alpha})$ .

*Demostración.* Mismo argumento que la Proposición 5.6.10. □

Por último, acabamos observando que, si  $\mathbf{P}$  es una propiedad pro-local de morfismos esquemáticos definiendo una topología  $\alpha$  —por ejemplo, inmersiones planas o morfismos débilmente étale—, puede definirse para cada  $X$  el sitio pequeño de espacios pro-localmente  $\mathbf{P}$  sobre  $X$ , que denotamos  $X_{\alpha}$ . Nótese que todo morfismo algebraicamente  $\mathbf{P}$  es pro-localmente  $\mathbf{P}$  por el Corolario 7.5.11.

**Lema 7.7.27.** Si  $X$  es algebraico, la inclusión  $X_{\text{alg}-\alpha} \subseteq X_\alpha$  induce una equivalencia

$$\mathbf{Sh}(X_{\text{alg}-\alpha}) \simeq \mathbf{Sh}(X_\alpha).$$

*Demostración.* Como las inmersiones planas siempre son pro-localmente  $\mathbf{P}$ , cualquier morfismo  $U \rightarrow X$  de este tipo admite un recubrimiento dado por  $\{\coprod_{u \in U} U_u \rightarrow U \rightarrow X\}$ . Como los  $U_u \rightarrow X$  son morfismos desde un esquema a un espacio esquemático algebraico, son algebraicos, y por tanto algebraicamente  $\mathbf{P}$ , de donde se concluye.  $\square$

*Observación 7.7.28.* Insistimos en el hecho de que, en función de la topología  $\alpha$  de partida que elijamos, pueden ocurrir patologías como las de la Observación 7.7.19.

## Parte III

# El grupo fundamental étale de espacios esquemáticos

La gloria, como todo el mundo sabe, tiene un sabor amargo.

*El marino que perdió la gracia del mar*, Yukio Mishima

trad. Jesús Zulaika, John Nathan



## Capítulo 8

# Construcción de una categoría de Galois

Abordamos ahora la definición de la «categoría de revestimientos étale finitos» asociada a un espacio esquemático y la prueba de que, cuando el espacio base es conexo y se especifica un functor fibra, se obtiene una estructura de categoría de Galois que coincide cuando es pertinente con la versión homónima clásica de esquemas.

Se puede proceder de varias maneras, pero dado que hemos introducido la terminología de morfismos algebraicos, podemos definir «morfismo esquemático étale» como aquel que es algebraicamente étale. Como todo morfismo finito es afín, luego algebraico, esta definición recoge también la noción correcta de «morfismo finito étale». Con objeto de mantener la discusión más «geométrica» y motivados porque los que deben llamarse «revestimientos triviales» resulten ser estándar afines —Definición 7.4.20 y Lema 8.1.14—, cuando el espacio base es geométrico, vamos a decir que un «revestimiento finito étale» es un morfismo finito étale *y estándar afín*. Una buena parte del material que sigue está dedicado a extender los resultados clásicos relativos a los revestimientos étale de esquemas a este caso esquemático, siendo central la cuestión de ver que son equivalentes a los haces objetos localmente constantes del topos étale, salvando así el puente entre las teorías de categorías y topos de Galois. Probado dicho punto, nos dedicamos a verificar que nuestros revestimientos verifican las propiedades requeridas en los axiomas de categoría de Galois; ídem para los funtores fibra determinados por

«puntos geométricos» —definidos de modo análogo a los correspondientes a puntos esquemáticos con que ya hemos trabajado—. Todo ello converge al que es nominalmente el Teorema «principal» de la memoria: 8.2.7.

Para dar al cierre de la memoria cierto aspecto de sonata, empleamos algunas de las herramientas que hemos desarrollado para extender al caso esquemático dos resultados estándar relativos al grupo fundamental étale de esquemas: la sucesión exacta de homotopía, para la cual ya hemos desarrollado previamente la maquinaria de morfismos pro-localmente propios —si bien la demostración propiamente dicha es de carácter categorial—; y el Teorema de Seifert-Van Kampen, tanto para grupoides fundamentales como para grupos fundamentales, que se seguirá de argumentos de descenso formales para  $\mathfrak{C}$ -datos introducidos en la Sección 5.5.

Todo lo presentado es, estrictamente hablando, original; aunque las técnicas subyacentes, lenguaje de espacios esquemáticos al margen, son con frecuencia similares o análogas a las del caso clásico que hallamos en muy diversa literatura —[15], [17], [37], etc.— Sin embargo, nos gustaría enfatizar que este paralelismo tan estrecho es fruto de nuestro trabajo previo: se debe en buena medida a que hayamos definido los revestimientos en la categoría de morfismos estándar afines, para los cuales el comportamiento topológico de los espacios «triviales» es el esperado. De haber omitido este lenguaje, las demostraciones se habrían camuflado tras ropajes más estrafalarios.

## 8.1. Revestimientos étale finitos

Como los morfismos finitos son algebraicos por la Proposición 7.4.30, podemos restringir el estudio de los morfismos étale al caso algebraico para tratar los revestimientos finitos étale. Por independencia de exposición, escribimos las definiciones de las Secciones 7.1 y 7.7.2 en este caso particular.

**Definición 8.1.1.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  se dice *étale* si es algebraicamente étale. Fijado  $Y$  esquemático, definimos el *sitio (pequeño) étale* sobre  $Y$  como aquel cuyos objetos son morfismos étale  $X \rightarrow Y$  y cuyos recubrimientos  $\mathbf{Cov}(X \rightarrow Y)$  son familias finitas  $\{X_i \rightarrow X\}_i$  conjuntamente fielmente planas —automáticamente algebraicamente fielmente planas—.

*Observación 8.1.2.* De nuevo, la localización por qc-isomorfismos  $(Y_{\text{ét}})_{\text{qc}}$  es pequeña. Aplican las condiciones relativas a hacificación en este tipo de

sitios, análogas a las ya estudiadas para el sitio débil de Zariski.

Si  $f: X \rightarrow Y$  es étale, como  $\text{Spec}(Y)$  tiene la topología cociente de los  $\text{Spec}(U_y)$ , la imagen de  $\text{Spec}(f)$  es abierta —por ser la imagen de un morfismo plano y de presentación finita de esquemas abierta—. Con esta definición, tenemos que, como en el caso de esquemas:

**Lema 8.1.3.** [15, I, 5.9] Un morfismo de anillos  $A \rightarrow B$  es étale si y solo si es plano, de presentación finita y para todo primo  $\mathfrak{p} \subseteq A$ ,  $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B$  es una  $\kappa(\mathfrak{p})$ -álgebra separable —i.e. un producto directo finito de extensiones finitas separables de  $\kappa(\mathfrak{p})$ —. Un morfismo *afín* de esquemas  $S \rightarrow T$  es étale si y solo si es plano, de presentación finita y, para todo  $t \in T$ , la fibra es  $\text{Spec}(\kappa(t)) \times_T S \simeq \coprod_{i \in I} \text{Spec}(K_i)$  con  $I$  finito y  $\kappa(t) \rightarrow K_i$  extensiones finitas separables.

**Lema 8.1.4.** Un morfismo finito y plano  $f: X \rightarrow Y$  es finito étale si y solo si para todo punto esquemático  $\mathbf{y} \in \text{Spec}(Y)$ , la fibra geométrica es

$$\text{Spec}(\kappa(\mathbf{y})) \times_Y^{\text{geo}} X \simeq \coprod_{i \in I} \text{Spec}(K_i)$$

con  $I$  finito y  $\kappa(t) \rightarrow K_i$  extensiones finitas separables.

Si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo étale y  $\text{Spec}(Y)$  es un esquema, los Lemas 7.1.10 y 7.1.6 garantizan que se tiene una equivalencia entre los sitios étale de  $Y$  y —como esquema— de  $\text{Spec}(Y)$ :

$$(Y_{\text{ét}})_{\text{qc}} \simeq \text{Spec}(Y)_{\text{ét}}.$$

Dado un esquema  $S$ , denotemos por  $\mathbf{F}\acute{\text{E}}\mathbf{t}(S)$  a su categoría de revestimientos finitos étale —morfismos finitos y étale a  $S$ —; y del mismo modo, dado un espacio esquemático  $Y$ , denotemos  $\mathbf{F}\acute{\text{E}}\mathbf{t}(Y)$  a la categoría de espacios esquemáticos finitos y étale sobre  $Y$ . Nótese que por ahora *no* hemos empleado la palabra *revestimiento* en el contexto esquemático, dado que vamos a reservarla para una clase especial de morfismos finitos étale que posee un comportamiento más «geométrico». Como ambas son subcategorías de espacios afines sobre la base, por la Proposición 7.4.11, se inducen equivalencias con respectivas subcategorías plenamente fieles  $\mathbf{Q}\mathbf{coh}^{\text{fét}}(S) \subseteq \mathbf{Q}\mathbf{coh}^{\text{alg}}(S)$  y  $\mathbf{Q}\mathbf{coh}^{\text{fét}}(Y) \subseteq \mathbf{Q}\mathbf{coh}^{\text{alg}}(Y)$ :

$$\mathbf{F}\acute{\text{E}}\mathbf{t}(S) \simeq \mathbf{Q}\mathbf{coh}^{\text{fét}}(S)^{\text{op}}, \quad \mathbf{F}\acute{\text{E}}\mathbf{t}(Y)_{\text{qc}} \simeq \mathbf{Q}\mathbf{coh}^{\text{fét}}(Y)^{\text{op}}.$$

**Lema 8.1.5.** Si  $\phi: X \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo, se inducen equivalencias

$$(f^* \dashv f_*): \mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(Y), \quad \mathbf{FÉt}(X)_{\text{qc}} \simeq \mathbf{FÉt}(Y)_{\text{qc}}.$$

*Demostración.* Por la Proposición 7.4.11, se reduce a ver que la equivalencia  $(\mathbf{AffFin}/X)_{\text{qc}} \simeq (\mathbf{AffFin}/Y)_{\text{qc}}$ , dada por composición con  $f$  y producto fibrado, restringe al caso de morfismos finitos étale. Como los qc-isomorfismos son algebraicamente isomorfismos, son algebraicamente étale por la Proposición 7.1.8; luego componer un morfismo finito étale con un qc-isomorfismo sigue produciendo un morfismo finito étale por la Proposición 7.1.7. Recíprocamente, los morfismos algebraicamente étale son estables por cambio de base arbitrario por el mismo resultado. Equivalentemente, lo que hemos visto es que  $\mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(X) \simeq \mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)$  restringe al caso finito étale.  $\square$

Por el Lema 8.1.5, podemos suponer  $Y$  geométrico.

**Definición 8.1.6.** Sea  $Y$  geométrico. Se dice que un morfismo  $X \rightarrow Y$  es un *revestimiento finito étale* si es un morfismo finito étale y estándar afín —Definición 7.4.20—. Denotemos

$$\mathbf{RÉt}(Y)$$

a la categoría de revestimientos finitos étale de  $Y$ .

*Observación 8.1.7.* Para  $Y$  arbitrario, como caso particular de los Lemas 8.1.5 y 7.4.21, el functor  $\mathbf{St}$  induce equivalencias

$$\begin{aligned} \mathbf{FÉt}(Y)_{\text{qc}} &\simeq \mathbf{FÉt}(\mathbf{Geo}(Y))_{\text{qc}} \simeq \mathbf{RÉt}(\mathbf{Geo}(Y)) \simeq \\ &\simeq \mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(\mathbf{Geo}(Y))^{\text{op}} \simeq \mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(Y)^{\text{op}}. \end{aligned}$$

**Lema 8.1.8.** Si  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  son revestimientos finitos étale,  $g \circ f$  es un revestimiento finito étale. Si  $g \circ f$  y  $g$  son revestimientos finitos étale, entonces  $f$  es un revestimiento finito étale.

*Demostración.* Es claro para morfismos finitos étale por ser estos algebraicos y ser cierta la propiedad para esquemas. En lo referente a ser estándar afines, es la Proposición 7.4.28.  $\square$

Para morfismos finitos étale en el caso esquemático, podemos definir una noción de *grado* análoga a la clásica de esquemas. Recordemos que si  $\varphi: A \rightarrow B$  es un morfismo de anillos y  $A$  es noetheriano, que  $\varphi$  sea finito y plano implica que  $B$  es localmente libre —y finito—. Es decir, se tiene definida una función *grado*

$$\begin{aligned} \deg_A(B): \operatorname{Spec}(A) &\rightarrow \mathbb{Z}^+ \\ \mathfrak{p} &\mapsto \operatorname{rank}_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{p}}; \end{aligned}$$

donde  $\operatorname{rank}_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{p}}$  es el rango del  $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo libre  $B_{\mathfrak{p}}$ , que claramente coincide con el número de puntos de la fibra de  $\operatorname{Spec}(B) \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$  en  $\mathfrak{p}$ . Además, es bien sabido que esta función es localmente constante —constante en cada componente conexa—. En particular, si  $\operatorname{Spec}(A)$  es conexo, argumentando en fibra se tiene que (C.f. [17, Prop. 4.10]):

$$\begin{aligned} \deg_A(B) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{Spec}(B) = \emptyset, & (8.1.1) \\ \deg_A(B) = 1 &\Leftrightarrow \operatorname{Spec}(B) \rightarrow \operatorname{Spec}(A) \text{ es isomorfismo,} \\ \deg_A(B) \geq 1 &\Leftrightarrow \operatorname{Spec}(B) \rightarrow \operatorname{Spec}(A) \text{ es epiyectivo;} \end{aligned}$$

y además, este último caso sucede si y solo si  $\varphi: A \rightarrow B$  es inyectivo. Nótese que la parte no trivial de este resultado es que una mera condición topológica tenga reflejo algebraico.

Si ahora  $f: X \rightarrow Y$  es finito y plano —como es el caso de los revestimientos finitos étale— y  $\mathcal{A} = f_* \mathcal{O}_X \in \mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(Y)$  es el haz de álgebras cuasicoherente asociado, como  $\mathcal{A}_y$  es una  $\mathcal{O}_{Y,y}$ -álgebra plana y finita como  $\mathcal{O}_{Y,y}$ -módulo, se tiene una función grado

$$\begin{aligned} \deg_Y(X): \operatorname{Spec}(Y) &\rightarrow \mathbb{Z}^+ \\ \mathfrak{y} &\mapsto \operatorname{rank}_{\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{y}}} \mathcal{A}_{\mathfrak{y}}; \end{aligned}$$

donde ya vimos que la fibra en  $\mathfrak{y}$  es tomar fibra en  $y$  y localizar en el primo correspondiente. Por motivos análogos a los del caso de anillos, esta aplicación es localmente constante.

**Lema 8.1.9.** Si  $Y$  es pw-conexo, la función grado  $\deg_Y(X)$  definida previamente factoriza vía el morfismo centro  $\pi_Y$  por  $\deg_Y(X): |Y| \rightarrow \mathbb{Z}^+$ , que también es localmente constante.

*Demostración.* Como  $Y$  es pw-conexo y el grado de un morfismo finito y plano de anillos es localmente constante, es constante entre todos los puntos esquemáticos centrados en un mismo punto topológico: es decir,  $\deg_Y(X)|_{\text{Spec}(U_y)}$  se identifica con un entero  $n_y \in \mathbb{Z}^+$  y, por tanto, se define  $\deg_Y(X)(y) = n_y$ ; que es localmente constante por el Lema 6.3.2.  $\square$

En cualquiera de los casos, tiene sentido definir:

**Definición 8.1.10.** Si  $Y$  es geométrico conexo y  $f: X \rightarrow Y$  es un revestimiento finito étale, el entero  $\deg_Y(X) = n \in \mathbb{Z}^+$  es el *grado* de  $f$ .

**Lema 8.1.11.** Si  $Y$  es geométrico conexo y  $f: X \rightarrow Y$  es un revestimiento finito étale:

$$\begin{aligned} \deg_Y(X) = 0 &\Leftrightarrow X = \emptyset, & (8.1.2) \\ \deg_Y(X) = 1 &\Leftrightarrow f: X \rightarrow Y \text{ es isomorfismo,} \\ \deg_Y(X) \geq 1 &\Leftrightarrow f: X \rightarrow Y \text{ es epiyectivo.} \end{aligned}$$

En particular, si  $Y$  no es conexo,  $f$  es inyectivo si y solo si  $\deg_Y(X) \leq 1$ .

*Demostración.* El resultado se sigue de la ecuación 8.1.1 y del Lema 7.4.21. Para el caso de grado  $\geq 1$ , nótese que  $f$  es qc-epiyectivo por el caso de anillos, pero como  $Y$  es geométrico,  $|f|$  es epiyectivo. Para el caso de grado igual a 1, obsérvese que, *a priori*, se obtendría que  $f$  es un qc-isomorfismo, concluyéndose por el Corolario 7.4.27.  $\square$

### Haces localmente constantes

Sea  $Y$  esquemático,  $F$  un conjunto finito y tomemos el prehaz constante:

$$\underline{F}_{\text{pre}}: Y_{\text{ét}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (X \rightarrow Y) \mapsto F.$$

Como es habitual, el haz asociado  $\underline{F} := \underline{F}_{\text{pre}}^{\sharp}$ , definido si se quiere como el que verifica la propiedad universal de la hacificación —aunque nótese que en este caso  $\underline{F}_{\text{pre}}$  manda trivialmente qc-isomorfismos a isomorfismos y, por tanto, podemos emplear sin problemas el functor de hacificación—, es el *haz constante de fibra tipo  $F$* , que explícitamente es

$$\underline{F}(X \rightarrow Y) = \prod_{\pi_0^{\text{pw}}(X)} F;$$

donde recordamos que  $\pi_0^{\text{pw}}(X) = \pi_0(|\mathbf{pw}(X)|) = \pi_0(|\mathbf{Geo}(X)|)$ .

**Definición 8.1.12.** Sea  $F$  un conjunto finito. Un morfismo  $X \rightarrow Y$  es *finito constante de fibra tipo  $F$*  —en la topología étale— si su haz de puntos  $\mathrm{Hom}_{Y_{\acute{e}t}}(-, X)^{\sharp} = \mathrm{Hom}_{(Y_{\acute{e}t})_{\mathrm{qc}}}(-, X)$  es el haz constante de fibra tipo  $F$ .

**Lema 8.1.13.** Ser *finito constante de fibra tipo  $F$*  es una propiedad geométrica.

*Demostración.* Se sigue de que esté definida vía el haz de puntos.  $\square$

**Lema 8.1.14.** Dado un conjunto finito  $F$  y un espacio esquemático  $Y$ , el haz constante  $\underline{F}: (Y_{\acute{e}t})_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  es representable por la clase de qc-equivalencia de  $\pi_F: \coprod_F Y \rightarrow Y$ . Si  $Y$  es geométrico, la restricción de este haz a la subcategoría de espacios geométricos —étale sobre  $Y$ — es representable por  $\pi_F: \coprod_F Y \rightarrow Y$ , sin necesidad de localizar.

*Demostración.* Basta probar la segunda parte, pues la primera se deduce de esta por el Lema 5.2.8. En efecto, sea un morfismo étale  $X \rightarrow Y$  con  $X$  e  $Y$  geométricos —y, por tanto,  $\coprod_F Y$  también geométrico—. Supongamos además que  $Y$  es conexo. Sea  $X = \coprod_i X_i$  la descomposición en componentes top-conexas de  $X$ . Como  $\coprod_F Y \rightarrow Y$  es estándar afín —Definición 7.4.20 y discusión previa—, por el Corolario 7.4.25, tenemos biyecciones functoriales

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{(Y_{\acute{e}t})_{\mathrm{qc}}}(X, \coprod_F Y) &\simeq \mathrm{Hom}_{Y_{\acute{e}t}}(X, \coprod_F Y) \simeq \prod_{\pi_0^{\mathrm{pw}}(X)} \mathrm{Hom}_{Y_{\acute{e}t}}(X_i, \coprod_F Y) \simeq \\ &\simeq \prod_{\pi_0^{\mathrm{pw}}(X)} \prod_F \mathrm{Hom}_{Y_{\acute{e}t}}(X_i, Y) \simeq \prod_{\pi_0^{\mathrm{pw}}(X)} F; \end{aligned}$$

donde hemos empleado la propiedad universal del coproducto y la de objeto conexo categorial —Observación 6.3.12—. Si  $Y$  no es conexo, se argumenta en cada componente conexa.  $\square$

Si  $Y$  es geométrico,  $\coprod_F Y \rightarrow Y$  es un *revestimiento* finito étale.

**Corolario 8.1.15.** Un morfismo  $X \rightarrow Y$  es finito constante de fibra tipo  $F$  si y solo si es qc-equivalente a  $\coprod_F Y \rightarrow Y$ . En particular, si  $Y$  es geométrico, un morfismo estándar afín  $X \rightarrow Y$  lo es si y solo si es *isomorfo* a  $\coprod_F Y \rightarrow Y$ .

**Corolario 8.1.16.** Los morfismos finitos constantes son estables por cambio de base arbitrario y composición. Más concretamente:

- Si  $X \rightarrow Y$  e  $Y \rightarrow Z$  son finitos constantes de fibras tipo  $F$  y  $G$  respectivamente, la composición  $X \rightarrow Z$  es finito constante de fibra tipo  $F \times G$ .
- Si  $X \rightarrow Y$  es finito constante de fibra tipo  $F$ , cualquier cambio de base  $Z \times_Y X \rightarrow Z$  es finito constante de fibra tipo  $F$ .

**Definición 8.1.17.** Diremos que un haz  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(Y_{\text{ét}})$  es *finito localmente constante* —en la topología étale— si existe  $\{f_i: U_i \rightarrow Y\} \in \mathbf{Cov}(Y)$  tal que para cada  $i$ ,  $f_i^* \mathcal{F} \in \mathbf{Sh}((U_i)_{\text{ét}})$  es el haz constante  $\underline{F}_i$  para cierto conjunto finito  $F_i$ .

Se dice que un morfismo  $X \rightarrow Y$  es *finito localmente constante* —en la topología étale— si su haz de puntos —en la topología étale— es localmente constante; o equivalentemente, si existe un recubrimiento como antes tal que  $U_i \times_Y X \rightarrow U_i$  es qc-equivalente a  $\amalg_{F_i} U_i \rightarrow U_i$  para todo  $i$ .

**Lema 8.1.18.** Ser *finito localmente constante* es una propiedad geométrica. Además, esta clase de morfismos es estable por composición y cambio de base arbitrario.

*Demostración.* La primera parte se sigue de que la definición se da en términos del haz de puntos; la segunda, del Corolario 8.1.16.  $\square$

**Lema 8.1.19.** Todo morfismo finito localmente constante es afín. Un estándar afín  $X \rightarrow Y$  es finito localmente constante si y solo si existe un recubrimiento étale  $\{U_i \rightarrow Y\}$  con  $U_i$  geométricos tal que  $U_i \times_Y^{\text{st}} X \rightarrow U_i$  es isomorfo a  $\amalg_{F_i} U_i \rightarrow U_i$  para ciertos  $F_i$  y todo  $i$ .

*Demostración.* La primera parte dice que podemos suponer sin pérdida de generalidad que nuestros morfismos son afines: el resultado se sigue de que los morfismos  $U_i \times_Y X \rightarrow U_i$  de la definición son afines por ser qc-equivalentes a morfismos afines y de la Proposición 7.1.11 y Teorema 7.4.16. La segunda parte se sigue del Lema 7.4.21.  $\square$

*Observación 8.1.20.* Nótese que, en todos los argumentos que siguen, pueden reemplazarse los recubrimientos de nuestro sitio étale por recubrimientos *algebraicamente felmente planos de presentación finita*. En otras palabras, el topos de haces finitos localmente constantes en  $X_{\text{ét}}$  es equivalente al de  $X_{\text{alg-fppf}}$  —notación de la Sección 7.7.2—, como sucede en esquemas.

Denotemos por  $\mathbf{FLoc}(S_{\acute{e}t})$  y  $\mathbf{FLoc}(Y_{\acute{e}t})$  a las respectivas subcategorías de haces de conjuntos finitos y localmente constantes inducidas por  $S_{\acute{e}t}$  e  $(Y_{\acute{e}t})_{qc}$ . Es clásico que

$$\mathbf{F}\acute{E}t(S) \simeq \mathbf{Qcoh}^{\text{f}\acute{e}t}(S)^{\text{op}} \simeq \mathbf{FLoc}(S_{\acute{e}t});$$

donde a cada revestimiento se le asocia su functor de puntos, que es un haz localmente constante, y se prueba que cada uno de estos haces es representable. Veamos que lo análogo es cierto para el caso esquemático.

**Lema 8.1.21.** Si  $\phi: X \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo, induce una equivalencia

$$\mathbf{FLoc}(X_{\acute{e}t}) \simeq \mathbf{FLoc}(Y_{\acute{e}t}).$$

*Demostración.* Basta observar que la equivalencia de la Proposición 7.7.26 restringe al caso de haces localmente constantes.  $\square$

Ahora nos disponemos a probar que la categoría de haces localmente constantes en la topología étale sobre un espacio esquemático  $Y$  coincide con su categoría de espacios esquemáticos finitos étale sobre  $Y$  localizada por qc-isomorfismos. Una dirección es sencilla:

**Proposición 8.1.22.** Los haces finitos localmente constantes en la topología étale son representables por —las clases de qc-equivalencia de— morfismos finitos étale. Es decir, un morfismo finito localmente constante —en la topología étale— es un morfismo finito étale.

*Demostración.* Si  $\mathcal{F}$  es finito localmente constante como en la Definición 8.1.17, está representado por la clase de qc-isomorfismo de  $(Y, \mathcal{A}) \rightarrow Y$  con  $\mathcal{A}$  el haz cuasicoherente

$$\text{eq}\left(\prod_i \mathcal{O}_{\text{III}U_i} \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{O}_{\text{III}U_i} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{\text{III}U_j}\right)$$

—donde estamos considerando las imágenes directas en  $Y$  de todos los haces que aparecen, omitidas de la notación—. Este morfismo es afín, luego algebraico, y por construcción es  $U_i \times_Y (Y, \mathcal{A}) \simeq (U_i, \mathcal{O}_{\text{III}U_i})$  para todo  $i$ , que es qc-isomorfo a  $\text{III}U_i \rightarrow U$ , y por tanto un morfismo finito étale. Por la Proposición 7.1.11,  $(Y, \mathcal{A}) \rightarrow Y$  es finito étale. La última parte se sigue de que todas las propiedades involucradas son geométricas.  $\square$

Para el recíproco, observemos en primer lugar que el número de puntos de las fibras de un morfismo finito localmente constante es constante en cada componente conexa.

**Lema 8.1.23.** Si  $f: Z^1 \amalg Z^2 = X \rightarrow Y$  es fielmente plano con  $Y$  conexo y  $Z^i$  no qc-isomorfos al vacío ( $i = 1, 2$ ), entonces es  $Z^1 \times_Y^{\text{geo}} Z^2 \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Como  $\text{Spec}(f)$  es un epimorfismo efectivo de espacios localmente anillados por la Proposición 6.2.17, si  $Z^1 \times_Y^{\text{pw}} Z^2$  fuese vacío (por serlo  $Z^1 \times_Y^{\text{geo}} Z^2$ ), entonces  $\text{Spec}(Z^1) \times_{\text{Spec}(Y)} \text{Spec}(Z^2) = \emptyset$ ; y  $\text{Spec}(Y)$  sería desconexo por ser el coequalizador de

$$\coprod_{i=1}^2 (\text{Spec}(Z^i) \times_{\text{Spec}(Y)} \text{Spec}(Z^i)) \rightrightarrows \text{Spec}(Z^1) \times \text{Spec}(Z^2)$$

como espacios localmente anillados.  $\square$

*En los resultados que siguen, todos los espacios se suponen geométricos.*

**Lema 8.1.24.** Si  $Y$  es conexo, un morfismo estándar afín  $X \rightarrow Y$  es finito localmente constante si y solo si existe un recubrimiento  $Z \rightarrow Y$  algebraicamente étale fielmente plano tal que  $Z \times_Y^{\text{st}} X \rightarrow Z$  es isomorfo a  $\amalg_F Z \rightarrow Z$  para cierto conjunto finito  $F$ .

*Demostración.* La parte del «si» es trivial por definición de morfismo localmente constante. Para el recíproco, sean  $g: Z \rightarrow Y$  y supongamos que tenemos una descomposición en dos componentes conexas  $g_i: Z^i \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ); siendo  $F_1$  y  $F_2$  las fibras respectivas. Veamos  $F_1 = F_2$ . Como  $g: Z = Z^1 \amalg Z^2 \rightarrow Y$  es un recubrimiento algebraicamente fielmente plano e  $Y$  es conexo, se verifica que  $Z^1 \times_Y^{\text{geo}} Z^2 \neq \emptyset$  por el Lema 8.1.23. Con esto, se tiene la cadena de isomorfismos de espacios estándar afines sobre  $Z^1 \times_Y^{\text{geo}} Z^2$  —a priori qc-isomorfismos, a posteriori isomorfismos por el Lema 7.4.21—

$$\begin{aligned} \coprod_{F_1} (Z^1 \times_Y^{\text{geo}} Z^2) &\simeq \left( \coprod_{F_1} Z^1 \right) \times_Y^{\text{st}} Z^2 \simeq F_1 \times_Y^{\text{st}} X \times_Y^{\text{st}} Z^2 \simeq \\ &\simeq Z^1 \times_Y^{\text{st}} \left( \coprod_{F_2} Z^2 \right) \simeq \coprod_{F_2} (Z^1 \times_Y^{\text{geo}} Z^2); \end{aligned}$$

de donde  $F_1 = F_2$  —también se deduce de los meros qc-isomorfismos por el Lema 8.1.13—.  $\square$

**Corolario 8.1.25.** Si  $X \rightarrow Y$  es finito localmente constante, el número de puntos de las fibras es constante en cada componente conexa. En particular, si  $Y$  es conexo, para cada  $\mathbf{y} \in \text{Spec}(Y)$ ,  $|\text{Spec}(\kappa(\mathbf{y})) \times_Y^{\text{geo}} X| = F$  para cierto conjunto finito  $F$ .

Respecto a morfismos y revestimientos finitos étale:

**Lema 8.1.26.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es un revestimiento finito étale, factoriza por un morfismo  $f': X \rightarrow Y'$  epiyectivo y con  $Y' \subseteq Y$  una unión de componentes top-conexas de  $Y$ . En particular, si  $Y$  es conexo,  $f$  epiyectivo, por tanto algebraicamente fielmente plano. En general, si  $X$  es conexo,  $Y'$  es una componente top-conexa.

*Demostración.* Por la Proposición 7.4.26, ya tenemos que  $f$  es isomorfo a  $\coprod_i Y_i \rightarrow Y$  con  $|Y_i| \subseteq |Y|$  subespacios conexos, luego cada uno contenido en una componente conexa de  $|Y|$ . Así,  $f$  debe factorizar por un  $f': X \rightarrow Y'$  con  $Y'$  una unión de componentes conexas de  $Y$ . Queda ver la epiyectividad, para lo cual basta ver que si  $Y$  es conexo y  $\emptyset \neq Y_i \rightarrow Y$  un revestimiento finito étale, entonces es epiyectivo. Vencemos por el Lema 8.1.11.  $\square$

*Observación 8.1.27.* En el Lema 8.1.26,  $Y' \simeq \mathbf{St}(\mathbf{Im}(f))$ . El mismo resultado es cierto para morfismos finitos étale cualesquiera si  $Y$  es geométrico.

**Lema 8.1.28.** Dados  $f: X \rightarrow Y$  finito étale,  $Y$  conexo e  $\mathbf{y} \in \text{Spec}(Y)$ , los puntos de la fibra geométrica son  $|\text{Spec}(\kappa(\mathbf{y})) \times_Y^{\text{geo}} X| = F$  para cierto conjunto finito  $F$  independiente de  $\mathbf{y}$  y con cardinalidad  $n = \text{deg}_Y(X)$ ; es decir, el número de puntos de las fibras geométricas es constante e igual al grado de  $f$ .

*Demostración.* Como  $f$  es afín, por la Proposición 7.4.11, factoriza como  $X \rightarrow X' \rightarrow Y$  con  $X \rightarrow X'$  un qc-isomorfismo y  $f': X' = (Y, \mathcal{A}) \rightarrow Y$  un morfismo finito étale tal que  $|f'|$  es la identidad. Como las fibras de los qc-isomorfismos son siempre un punto —por ser inmersiones planas, véase Sección 6.4.1—, podemos suponer que  $|f| = \text{Id}_Y$  y  $\mathcal{O}_X = \mathcal{A}$ . Ahora se tiene que  $|\text{Spec}(\kappa(\mathbf{y})) \times_Y^{\text{geo}} X| = |\mathbf{Geo}(\star, \kappa(\mathbf{y}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y, \mathbf{y}}} \mathcal{A}_{\mathbf{y}})|$ , con  $\mathbf{y}$  el centro de  $\mathbf{y}$ . Se concluye porque  $\mathcal{A}_{\mathbf{y}}$  es un  $\mathcal{O}_{Y, \mathbf{y}}$ -módulo localmente libre de rango  $n = \text{deg}_Y(X)$ , luego la fibra es  $|\coprod_n(\star, \kappa(\mathbf{y}))| = \coprod_n \{\star\}$ .  $\square$

**Lema 8.1.29.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es un revestimiento finito étale admitiendo una sección  $s: Y \rightarrow X$ , entonces  $s$  factoriza por un isomorfismo  $s': Y \rightarrow X'$  con  $X' \subseteq X$  una unión de componente top-conexas de  $X$ . En particular, un revestimiento finito étale conexo es un isomorfismo si y solo si admite una sección.

*Demostración.* Por la condición de que  $s$  sea una sección, se tiene que  $\pi$  es epiyectivo —y que  $s$  es inyectivo y  $\text{Spec}(s)$  es inyectivo—. En particular,  $s$  es afín, luego algebraico; y como es una sección de un morfismo que es algebraicamente finito étale, también es finito étale —por la propiedad «2 de 3» para morfismos finitos étale de esquema—. Concluye el Lema 8.1.26.  $\square$

*Observación 8.1.30.* Como  $Y \rightarrow Y$  es estándar afín y en virtud del Corolario 7.4.25, el Lema 8.1.29 tiene la siguiente versión general: «Si  $X$  es pw-conexo,  $Y$  es conciso y  $f: X \rightarrow Y$  es finito étale tal que admite una sección salvo qc-isomorfismo, es decir, existe  $s: Y' \rightarrow X$  sobre  $Y$  tal que  $f \circ s: Y' \rightarrow Y$  es un qc-isomorfismo, entonces  $s$  factoriza por un qc-isomorfismo  $s': Y' \rightarrow X'$  con  $X' \subseteq X$  una unión de componentes top-conexas de  $X$ . En particular, todo morfismo finito étale conexo que admite una *sección salvo qc-isomorfismo*, es un qc-isomorfismo».

**Teorema 8.1.31.** Para todo espacio esquemático  $Y$ , se tienen equivalencias

$$\mathbf{R}\acute{\text{E}}\text{t}(\mathbf{Geo}(Y)) \simeq \mathbf{F}\acute{\text{E}}\text{t}(Y)_{\text{qc}} \simeq \mathbf{F}\text{Loc}(Y_{\acute{\text{e}}\text{t}})$$

de modo que, si  $Y$  es conexo, haces localmente constantes de fibra tipo  $F$  —Lema 8.1.24— se corresponden con revestimientos de grado  $n = \#F$ .

*Demostración.* Ya vimos que todo haz finito localmente constante es representable por la clase de qc-isomorfismo de un revestimiento finito étale —Proposición 8.1.22—. Para el recíproco, por los Lemas 8.1.5 y 8.1.21 y el Teorema 6.4.2 podemos suponer  $Y$  geométrico. Basta ver que para un *revestimiento* finito étale  $X \rightarrow Y$  existe  $g: Z \rightarrow Y$  algebraicamente étale fielmente plano con  $Z$  geométrico tal que, si  $Z \simeq \coprod_i Z^i$  es la descomposición en componentes top-conexas de  $Z$ , hay  $Z^i \times_Y^{\text{st}} X$  isomorfo a  $F_i \times Z^i$  —como espacios sobre  $Z_i$ — para cierto conjunto finito  $F_i$ . Además, por los Lemas 8.1.24 y 8.1.28, podemos suponer que  $Y$  es conexo y reducirnos a probar que hay un isomorfismo

$$Z \times_Y^{\text{st}} X \simeq F \times Z$$

para cierto conjunto finito  $F$ .

Procedemos, siguiendo las ideas de [17] expuestas en [37], por inducción sobre el grado  $n = \text{deg}_Y(X)$  de  $f: X \rightarrow Y$ .

Si  $n = 1$ ,  $f$  es un isomorfismo por el Lema 8.1.11 y el propio  $X \rightarrow Y$  lo trivializa, pues  $X \times_Y^{\text{geo}} X \simeq X \times_Y^{\text{st}} X \rightarrow X$  es un isomorfismo por 4) de la Proposición 7.3.16.

Para  $n > 1$ : sea el morfismo finito étale  $X \times_Y^{\text{st}} X \rightarrow X$ , que admite la sección diagonal  $\Delta: X \rightarrow X \times_Y^{\text{st}} X$ . Por el Lema 8.1.29,  $\Delta$  factoriza por un isomorfismo  $X \rightarrow X'$ , con  $X' \subseteq X \times_Y^{\text{st}} X$  una unión de componentes top-conexas —y por tanto estándar afín sobre  $Y$ — de complementario  $W$  estándar afín sobre  $Y$ ; siendo la inclusión  $W \subseteq X \times_Y^{\text{st}} X$  una inmersión abierta y, de hecho, un revestimiento finito étale. La composición  $g: W \rightarrow X$  es un revestimiento finito étale de grado  $n-1$  por construcción. Por hipótesis de inducción, existe  $Z' \rightarrow X$  afín finito étale tal que  $Z' \times_X^{\text{st}} W \simeq F' \times Z'$  con  $\#F' = n-1$ . Se tiene por tanto, que para la composición  $Z' \rightarrow X \rightarrow Y$ , que es composición de morfismos algebraicamente étale fielmente planos por hipótesis de inducción y el Lema 8.1.26 bajo la hipótesis de conexión de  $Y$ , hay isomorfismos

$$Z' \times_Y^{\text{st}} X \simeq Z' \times_X^{\text{st}} X \times_Y^{\text{st}} X \simeq Z' \times_X^{\text{st}} (X' \amalg W) \simeq (Z' \times_X^{\text{st}} X') \amalg (F' \times Z');$$

luego, si  $Z := Z \times_X X' \rightarrow Y$ , se concluye por el caso  $n = 1$  que hay isomorfismos

$$Z \times_Y^{\text{st}} X \simeq (Z \times_X^{\text{st}} X') \amalg (F' \times Z) \simeq Z \amalg (F' \times Z) \simeq F,$$

con  $F = F' \amalg \{\star\}$ , como queríamos. □

Aunque no era necesario este resultado para probar la mayor parte de equivalencias en el Corolario que sigue, del Teorema 8.1.31 se deduce:

**Corolario 8.1.32.** Si  $X$  es geométrico tal que  $S = \text{Spec}(X)$  es un esquema, se tienen equivalencias de categorías

$$\begin{aligned} \mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(X)^{\text{op}} &\simeq \mathbf{RÉt}(X) \simeq \mathbf{FLoc}(X) \simeq \\ &\simeq \mathbf{FLoc}(S) \simeq \mathbf{FÉt}(S) \simeq \mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(X)^{\text{op}}. \end{aligned}$$

*Observación 8.1.33.* La demostración del Teorema 8.1.31 construye un morfismo afín para trivializar el revestimiento, luego prueba, de hecho, que el

topos de haces finitos localmente constante en el sitio étale de un espacio esquemático es equivalente a su análogo en el sitio *de morfismos étale afines* —o, como en el caso clásico, *fppf afines*, a gusto del lector—. Por este motivo es posible tratar toda la teoría que sigue puramente en términos de haces cuasicohérentes, definiendo incluso una estructura de *cositio* en  $\mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)$ . Este es el enfoque que ya adoptamos en [27], pero que aquí hemos preferido evitar en pos de seguir un desarrollo mas «geométrico» y acorde con lo expuesto en la memoria hasta el momento.

**Proposición 8.1.34.** Si  $Y$  es conexo y pw-conexo, cualquier morfismo entre morfismos constantes  $f: \Pi_F Y \rightarrow \Pi_G Y$  viene inducido por composición con una aplicación  $\phi: F \rightarrow G$ , es decir,  $f(y, i) = (y, \phi(i))$  para  $(y, i) \in \Pi_F Y$  y  $f^\sharp$  la identidad en fibra.

*Demostración.* Vía el functor  $\mathbf{Geo}$ , el enunciado queda probado si vemos que  $\mathcal{O}_Y^{\times G} \rightarrow \mathcal{O}_Y^{\times F}$  viene inducido por una tal  $\phi$ , pues nuestro morfismo será  $f = \mathbf{Geo}((Y, \mathcal{O}_Y^{\times F}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y^{\times G}))$ . En cada fibra, como  $\mathcal{O}_{Y,y}$  es conexo por hipótesis, no tiene idempotentes no triviales, luego es un ejercicio de álgebra lineal que  $\mathcal{O}_{Y,y}^{\times G} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}^{\times F}$  viene inducido por  $\phi$  (basta imponer la condición de morfismo de anillos en la matriz de la aplicación lineal; véase [17, ex. 5.11(d)]). Este argumento es compatible con los morfismos de restricción, por lo que concluimos.  $\square$

### Cocientes por subgrupos finitos de automorfismos

Es clásico que si  $T \rightarrow S$  es un morfismo finito étale de esquemas, el grupo de automorfismos  $\text{Aut}_S(T)$  es finito.

**Lema 8.1.35.** Dado  $f: X \rightarrow Y$  morfismo finito étale, existen isomorfismos de grupos

$$\text{Aut}_{(\mathbf{F}\acute{\text{E}}\text{t}(Y))_{\text{qc}}}(X) \simeq \text{Aut}_{\mathbf{R}\acute{\text{E}}\text{t}(\mathbf{Geo}(Y))}(\mathbf{R}\acute{\text{E}}\text{t}(\mathbf{St}(X))) \simeq \text{Aut}_{\mathbf{Q}\text{coh}^{\text{fét}}(Y)}(f_*\mathcal{O}_X).$$

En particular,  $\text{Aut}_{\mathbf{F}\acute{\text{E}}\text{t}(Y)_{\text{qc}}}(X) \simeq \Gamma(\underline{\text{Aut}}_{\mathbf{Q}\text{coh}^{\text{fét}}(Y)}(f_*\mathcal{O}_X))$  es finito.

*Observación 8.1.36.* En realidad, el segundo isomorfismo es con el grupo *opuesto* en alguno de sus lados, detalle que obviamos para aligerar notación.

*Demostración.* La finitud se sigue del caso clásico para álgebras étale y de

$$\Gamma(\underline{\mathbf{Aut}}_{\mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(Y)}(f_*\mathcal{O}_X)) \subseteq \prod_{x \in X} \mathbf{Aut}_{\mathbf{Alg}(\mathcal{O}_{Y,y})}((f_*\mathcal{O}_X)_y);$$

las equivalencias de que  $\mathbf{F}\acute{\mathbf{E}}\mathbf{t}(Y)_{\text{qc}} \simeq \mathbf{R}\acute{\mathbf{E}}\mathbf{t}(\mathbf{Geo}(Y)) \simeq \mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(Y)^{\text{op}}$ .  $\square$

*Una vez más, suponemos que  $Y$  es geométrico.* Sea  $f: X \rightarrow Y$  revestimiento finito étale y  $G \subseteq \mathbf{Aut}_Y(X)$  un subgrupo —necesariamente finito— de automorfismos. Veamos que existe el cociente categorial  $X/G \rightarrow Y$  y que es un morfismo finito étale. En efecto,  $G$  actúa en el haz de puntos de  $f$  induciendo un functor de «puntos invariantes»

$$\mathbf{Q}_Y(X, G): \mathbf{R}\acute{\mathbf{E}}\mathbf{t}(Y) \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$(h: Z \rightarrow Y) \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathbf{R}\acute{\mathbf{E}}\mathbf{t}(Y)}(Z, X)^G \simeq \mathbf{Hom}_{\mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(Y)}(f_*\mathcal{O}_X, h_*\mathcal{O}_Z)^G;$$

donde  $(-)^G$  denota los morfismos  $G$ -invariantes. Por simplicidad, identificamos  $G$  como subgrupo de  $\mathbf{Aut}_{\mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(Y)}(f_*\mathcal{O}_X)$ , esto es

$$\mathbf{Hom}(f_*\mathcal{O}_X, h_*\mathcal{O}_Z)^G = \{h \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_*\mathcal{O}_X, h_*\mathcal{O}_Z) : \varphi \circ g = g \ \forall g \in G\}.$$

**Proposición 8.1.37.** El functor  $\mathbf{Q}_Y(X, G)$  es representable por el revestimiento  $\mathbf{St}(Y, (f_*\mathcal{O}_X)^G) \rightarrow Y$ , donde  $(f_*\mathcal{O}_X)^G$  denota el haz de elementos  $G$ -invariantes. Denotaremos a este representante por  $X/G \rightarrow Y$ .

*Demostración.* Sea  $(f_*\mathcal{O}_X)_x^G = \{a \in (f_*\mathcal{O}_X)_x : g_x(a) = a \ \forall g \in G\}$  la fibra en  $x \in X$  del haz que denotamos  $\mathcal{A} \equiv (f_*\mathcal{O}_X)^G$ . Este haz aparece como ecualizador de todos los morfismos de traslación por  $g$  —que es una familia finita—, luego es cuasicoherente por ser  $\mathbf{Qcoh}(Y)$  abeliana de Grothendieck. Basta ver que el morfismo afín que define  $f^G: (Y, \mathcal{A}) \rightarrow Y$ , que representa el functor  $\mathbf{Q}_Y(X, G)$  extendido a la categoría  $\mathbf{Qcoh}^{\text{alg}}(Y)^{\text{op}} \simeq (\mathbf{AffSch}/Y)_{\text{qc}}$ , es finito étale, para lo cual es suficiente ver que su haz de puntos es localmente constante —Teorema 8.1.31—.

En efecto, sea  $\{g_i: U_i \rightarrow Y\}$  recubrimiento algebraicamente étale fielmente plano tal que  $f_i: U_i \times_Y X \rightarrow U_i$  es finito constante de fibra tipo  $F_i$ . Denotemos  $G_i$  a la imagen de  $G$  por el morfismo

$$\begin{aligned} \mathbf{Aut}_{\mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(Y)}(f_*\mathcal{O}_X) &\rightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(Y)}(f_{i*}\mathcal{O}_{\Pi_{F_i}U_i}) = \mathbf{Aut}_{U_i}(\coprod_{F_i}U_i) = \\ &= \mathbf{Aut}(F_i), \end{aligned}$$

donde  $G_i$  actúa en la clase de  $f_i$  por permutaciones en las  $F_i$ , es decir,  $(f_{i*}\mathcal{O}_{\Pi_{F_i}U_i})^{G_i} \simeq \prod_{F_i/G_i} U_i$ . Se concluye porque, denotando a las «componentes» de  $f^G$  por  $(f^G)_i: U_i \times_Y (Y, \mathcal{A}) \rightarrow U_i$ , hay qc-isomorfismos

$$\begin{aligned} U_i \times_Y (Y, \mathcal{A}) &\simeq (U_i, (g_{i*}\mathcal{O}_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A})) \simeq (U_i, (g_{i*}\mathcal{O}_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*\mathcal{O}_X)^{G_i}) \simeq \\ &\simeq (U_i, (f_{i*}\mathcal{O}_{\Pi_{F_i}U_i})_i^G); \end{aligned}$$

en otras palabras,  $(f_i)^{G_i} \stackrel{\text{qc}}{=} (f^G)_i$ . □

*Observación 8.1.38.* Como nuestros revestimientos son morfismos estándar afines, se puede demostrar que  $|X/G| \simeq |X|/G$ , donde  $G$  actúa por permutaciones en las componentes de  $|X|$ .

### Monomorfismos y epimorfismos

Fijado  $Y$  geométrico, caracterizamos los monomorfismos y epimorfismos en  $\mathbf{R}\acute{\mathbf{E}}\mathbf{t}(Y)$ , es decir, los qc-monomorfismos y qc-epimorfismos en  $\mathbf{F}\acute{\mathbf{E}}\mathbf{t}(Y)$ . Dado que todo morfismo en  $\mathbf{F}\acute{\mathbf{E}}\mathbf{t}(Y)$  es, en sí mismo, un *morfismo* finito étale, basta especializar los resultados de los Corolarios 7.4.13 y 7.4.14. Recordemos que, además, todo morfismo en  $\mathbf{R}\acute{\mathbf{E}}\mathbf{t}(Y)$  es, en sí mismo, un *revestimiento* finito étale; y también que un morfismo finito étale de anillos  $A \rightarrow B$  es inyectivo si y solo si es un monomorfismo en su categoría.

**Lema 8.1.39.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Z$  en  $\mathbf{F}\acute{\mathbf{E}}\mathbf{t}(Y)$  es un qc-monomorfismo (resp. qc-epimorfismo) si y solo si  $f_{\sharp}$  es epiyectivo en fibra (resp. inyectivo en fibra).

*Demostración.* Respecto a los qc-monomorfismos, por los mencionados Corolarios, basta observar que un epimorfismo de anillos es epiyectivo si y solo si es finito y que el producto tensorial de álgebras finitas étale es finita étale.

Para los qc-epimorfismos: como los monomorfismos de anillos son exactamente los morfismos inyectivos, es claro que si  $f_{\sharp}$  es inyectivo en fibra, entonces es un monomorfismo en  $\mathbf{Q}\mathbf{c}\mathbf{oh}^{\text{fét}}(Y)$ . Para el recíproco, como la cuestión es salvo qc-isomorfismo, podemos suponer que todos los espacios implicados son geométricos y que  $f$  es un *revestimiento* —i.e. estándar afín—. Por el Lema 8.1.26 a nivel de haces,  $\mathcal{O}_Z \simeq \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1$  con  $\mathcal{A}_0 \simeq \mathcal{O}_Z/\ker(f_{\sharp})$  y  $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{I}$  para cierto ideal cuasicoherente  $\mathcal{I}$  —correspondiente a las componentes conexas que no están en la imagen—; de modo que  $f_{\sharp}$  factoriza

por  $\mathcal{A}_0 \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ . Obsérvese además que  $\mathcal{A}_0$  y  $\mathcal{A}_1$  siguen siendo haces de álgebras finitas étale. En particular, como en el diagrama

$$\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 \begin{matrix} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{matrix} \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{O}_Z \xrightarrow{f_\#} f_*\mathcal{O}_X$$

se verifica  $f_\# \circ \pi_0 = f_\# \circ \pi_1$  —con  $\pi_0$  y  $\pi_1$  las proyecciones obvias— y  $f_\#$  es un monomorfismo,  $\pi_0 = \pi_1$ , de donde  $\mathcal{A}_1 = 0$  y  $\ker(f_\#) = 0$ , por lo que  $f_\#$  es inyectivo en fibra.  $\square$

Resumen y especializando todo lo anterior a  $\mathbf{R}\acute{E}t(Y)$ , se tiene:

**Corolario 8.1.40.** Un morfismo  $f: X \rightarrow Z$  en  $\mathbf{R}\acute{E}t(Y)$  es un qc-epimorfismo si y solo si es epiyectivo.

*Demostración.* Reinterpretación de la demostración del Lema 8.1.39 mediante el Lema 8.1.26.  $\square$

**Teorema 8.1.41.** La categoría  $\mathbf{R}\acute{E}t(Y)$  verifica:

- 1) Los monomorfismos (resp. epimorfismos) en  $\mathbf{R}\acute{E}t(Y)$  son exactamente los morfismos inyectivos (resp. epiyectivos).
- 2) Los isomorfismos en  $\mathbf{R}\acute{E}t(Y)$  son exactamente los homeomorfismos.
- 3) Si  $Y$  es conexo, toda epiyección entre dos revestimientos del mismo grado es un isomorfismo.

*Demostración.* Solo queda ver que si  $f: X \rightarrow Z$  es un revestimiento finito étale,  $f_\#$  es epiyectivo en fibra si y solo  $f$  es inyectivo. En efecto, denotando  $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$ , basta ver  $\mathbf{pw}(Z, \mathcal{A}) \rightarrow Z$  es inyectivo si y solo si  $\mathcal{O}_{Z,z} \rightarrow \mathcal{A}_z$  es epiyectivo para todo  $z \in Z$  —puesto que  $X$  es un subespacio del primero—; pero esto se tiene porque  $(\star, \mathcal{A}_z) \rightarrow (\star, \mathcal{O}_{Z,z})$  es, o bien un isomorfismo, o bien el morfismo nulo, pues por la propia epiyección  $\mathcal{A}_z$  es localmente libre de rango  $\leq 1$ ; de donde se concluye por el Lema 8.1.11.  $\square$

**Corolario 8.1.42.** Todo morfismo en  $\mathbf{R}\acute{E}t(Y)$  factoriza como un epimorfismo seguido de un monomorfismo. Además, todo monomorfismo induce un isomorfismo con una unión de componentes conexas del espacio de llegada.

*Demostración.* Se sigue del Lema 8.1.26 y el Teorema 8.1.41.  $\square$

**Corolario 8.1.43.** Si  $Y$  es conexo y  $f: X \rightarrow Z$  es un morfismo epiyectivo en  $\mathbf{R\acute{E}t}(Y)$  tal que  $\deg_Y(X) = \deg_Y(Z)$ , entonces es un isomorfismo.

*Demostración.* Por el Teorema 8.1.31, encontramos recubrimientos algebraicamente étale fielmente planos —y afines— trivializando  $X \rightarrow Y$  y  $Z \rightarrow Y$  respectivamente, luego su producto fibrado,  $\{U_i \rightarrow Y\}$ , trivializa ambas. Los morfismos  $U_i \times_Y^{\text{st}} X \rightarrow U_i \times_Y^{\text{st}} Z$  son isomorfos a  $f_i: \Pi_F U_i \rightarrow \Pi_F U_i$  (con  $F = \deg_Y(X) = \deg_Y(Z)$ , independiente de  $Y$  por la conexión). Por hipótesis y estabilidad por cambio de base, cada  $f_i$  es epiyectivo y viene inducido por un endomorfismo de conjuntos  $\phi_i: F \rightarrow F$  como en la Proposición 8.1.34, luego  $\phi_i$  debe ser biyectivo. Se concluye que  $f_i$  es un isomorfismo para todo  $i$ , luego los  $U_i \times_Y^{\text{st}} X \rightarrow U_i \times_Y^{\text{st}} Z$  son isomorfismos y  $f$  es un isomorfismo por ser esta una cuestión local —por ejemplo, por las Proposiciones 7.1.8, 7.1.11 y el Lema 7.4.21—.  $\square$

## 8.2. Functores fibra

En esta sección,  $\Omega$  siempre denotará un cuerpo algebraicamente cerrado. Dado un espacio esquemático  $Y$ , como caso especial del Lema 5.6.30, los morfismos esquemáticos  $\text{Spec}(\Omega) \rightarrow Y$  están en correspondencia biunívoca con parejas de puntos esquemáticos de  $Y$  y extensiones de los correspondientes cuerpos residuales.

**Definición 8.2.1.** Dado un espacio esquemático  $Y$  y  $\Omega$  un cuerpo algebraicamente cerrado, un  $\Omega$ -punto geométrico —o simplemente *punto geométrico*— es un morfismo esquemático  $\bar{\mathbf{y}}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow Y$ , i.e un elemento  $\bar{\mathbf{y}} \in \text{Hom}_{\mathbf{SchFin}}(\text{Spec}(\Omega), Y)$ .

Cada punto geométrico  $\bar{\mathbf{y}}$  define un *functor fibra*

$$\begin{aligned} \text{Fib}_{\bar{\mathbf{y}}}: Y_{\acute{\text{e}t}} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ (X \rightarrow Y) &\mapsto |\text{Spec}(\Omega) \times_Y^{\text{geo}} X|. \end{aligned}$$

**Lema 8.2.2.** Para  $Y$  esquemático e  $\bar{\mathbf{y}}$  punto geométrico,  $\text{Fib}_{\bar{\mathbf{y}}}$  envía qc-isomorfismos a isomorfismos; es decir, factoriza por  $(Y_{\acute{\text{e}t}})_{\text{qc}}$ . Si  $\text{Spec}(Y) = T$  es un esquema y  $\bar{t} = \text{Spec}(\bar{\mathbf{y}})$ , este functor coincide exactamente con el functor fibra definido por  $\bar{t}$  en el sitio  $T_{\acute{\text{e}t}}$  vía la equivalencia con  $(Y_{\acute{\text{e}t}})_{\text{qc}}$ . Además,  $\text{Fib}_{\bar{\mathbf{y}}}$  es un punto el sitio  $Y_{\acute{\text{e}t}}$  —Definición B.3.6—.

*Demostración.* Es el análogo del Lema 6.4.4 y la Proposición 6.4.6: sus demostraciones siguen siendo válidas por la Observación 6.4.5. Nótese que la equivalencia entre sitios es la Proposición 7.7.21.  $\square$

*Observación 8.2.3.* Obsérvese que  $\text{Fib}_{\bar{y}}$  aplicado a un  $f$  coincide con el functor fibra en  $\text{Spec}(U_y)_{\text{ét}}$  y el punto inducido cuando lo aplicamos al revestimiento finito étale  $\text{Spec}(f^{-1}(U_y)) \rightarrow \text{Spec}(U_y)$ ; pero, en analogía con lo ya descrito en la Observación 7.7.19, como el morfismo  $U_y \rightarrow Y$  es solo una inmersión plana, no étale en general —y ni siquiera algebraica sin hipótesis de algebraicidad sobre  $Y$ —, no se puede esperar que la restricción tenga buenas propiedades al pasar a topos —por ejemplo, conmutar con tomar fibra de haces—.

¡No está claro siquiera si todo punto  $\bar{y}$  tiene algún entorno étale en  $Y_{\text{ét}}$ ! Si esto fuese cierto,  $\text{Spec}(Y)$  sería un espacio localmente anillado localmente afín vía morfismos étale y, como todo monomorfismo étale de esquemas es una inmersión abierta, parecería razonable que  $\text{Spec}(Y)$  fuese un esquema en ese caso —los detalles no son nada obvios—. Por fortuna, esto no será ningún impedimento para nuestros propósitos.

Supongamos de nuevo que  $Y$  es geométrico. Fijado este e  $\bar{y}$  punto geométrico, vamos a considerar ahora la restricción de  $\text{Fib}_{\bar{y}}$  a  $\mathbf{R}\acute{\text{E}}\mathbf{t}(Y)$  —o, si se prefiere, la restricción del functor fibra inducido  $(-)_{\bar{y}}: \mathbf{Sh}(Y_{\text{ét}}) \rightarrow \mathbf{Set}$  a  $\mathbf{FLoc}(Y)$ —. De la propia definición del functor fibra y la discusión hasta el momento, es inmediato el siguiente Lema:

**Lema 8.2.4.** Si  $X \rightarrow Y$  es un revestimiento finito étale e  $\bar{y}$  es un punto geométrico, se tiene  $\#\text{Fib}_{\bar{y}}(X \rightarrow Y) = \text{deg}_{Y'}(Y' \times_Y X)$  —con  $\#$  denotando el cardinal del conjunto finito—, con  $Y'$  la componente conexa de  $Y$  que contiene a  $\bar{y}$ . Si  $Y$  es conexo, el número de puntos de la fibra es el grado del revestimiento.

**Lema 8.2.5.** Dado  $Y$  e  $\bar{y}$  un punto geométrico de  $Y$ , el functor fibra  $\text{Fib}_{\bar{y}}: \mathbf{R}\acute{\text{E}}\mathbf{t}(Y) \rightarrow \mathbf{Set}$  conmuta con coproductos.

*Demostración.* Se sigue, por ejemplo, del Lema 8.2.4 previo.  $\square$

**Proposición 8.2.6.** Si  $Y$  es conexo e  $\bar{y}$  un punto geométrico, el functor

$$\text{Fib}_{\bar{y}}: \mathbf{R}\acute{\text{E}}\mathbf{t}(Y) \rightarrow \mathbf{Set}$$

es conservativo.

*Demostración.* Sea  $f: X \rightarrow Z$  tal que  $\text{Fib}_{\bar{y}}(f)$  es un isomorfismo. Por el Lema 8.2.4,  $\text{deg}_Y(X) = \text{deg}_Y(Z)$ . Por el Corolario 8.1.42,  $f = g \circ f'$  con  $f': X \rightarrow Z'$  epiyectivo y  $g: Z' \rightarrow Z$  inyectivo, con  $Z'$  una unión de componentes conexas de  $Z$ . Es decir,  $f: X \rightarrow Z^0 \amalg Z^1 = Z$  factorizando por  $f': X \rightarrow Z_0$  epiyectivo. Tomando fibra, por el Lema 8.2.5 y la hipótesis,  $\text{Fib}_{\bar{y}}(X) \rightarrow \text{Fib}_{\bar{y}}(Z^0) \amalg \text{Fib}_{\bar{y}}(Z^1)$  es biyectiva, luego  $\text{Fib}_{\bar{y}}(Z^1) = \emptyset$  y  $Z^1 \rightarrow Y$  es un revestimiento de grado 0, luego  $Z^1 \simeq \emptyset$  por el Lema 8.1.11. Se deduce que  $f$  es epiyectivo y se concluye por el Corolario 8.1.43.  $\square$

**Teorema 8.2.7.** Dado  $Y$  un espacio esquemático geométrico conexo e  $\bar{y}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow Y$  un punto geométrico, la pareja  $(\mathbf{R}\acute{\text{E}}\text{t}(Y), \text{Fib}_{\bar{y}})$  es una categoría de Galois —Definición C.1.1, donde recordamos que el functor fibra valora en la categoría de  $\mathbf{FinSet}$ —. Además, si  $T = \text{Spec}(Y)$  es un esquema y  $\bar{t} = \text{Spec}(\bar{y})$ , se tiene un isomorfismo natural de grupos profinitos

$$\pi_1^{\acute{\text{e}}\text{t}}(T, \bar{t}) \simeq \pi_1^{\acute{\text{e}}\text{t}}(Y, \bar{y}),$$

donde  $\pi_1^{\acute{\text{e}}\text{t}}(Y, \bar{y}) = \text{Aut}_{[\mathbf{R}\acute{\text{E}}\text{t}(Y), \mathbf{Set}]}(\text{Fib}_{\bar{y}}) = \text{Aut}_{[\mathbf{F}\acute{\text{E}}\text{t}(Y), \mathbf{Set}]}(\text{Fib}_{\bar{y}})$ .

*Demostración.* Ya hemos venido comprobando los axiomas de la Definición C.1.1: 1) es inmediato sin más que observar que los morfismos finitos étale son estables por cambio de base; 2) es observar que la unión disjunta de revestimientos finitos étale, es finito étale —por el Teorema 8.1.31, una unión disjunta finita es trivializable por el producto fibrado de los recubrimientos trivializantes de sus componentes— y que los cocientes en cuestión existen por la Proposición 8.1.37; 3) es exactamente el Corolario 8.1.42.

En los axiomas relativos al functor fibra, en 4) la única parte que puede no ser evidente es que  $\text{Fib}_{\bar{y}}$  commute con cocientes por subgrupos de automorfismos, pero esto se deduce de que los automorfismos actúan localmente por permutaciones en las fibras, como se ve en la propia demostración de la Proposición 8.1.37; 5) es exactamente la Proposición 8.2.6.

El isomorfismo de grupos profinitos del enunciado y la última igualdad, que afirma que  $\text{Aut}_{[\mathbf{F}\acute{\text{E}}\text{t}(Y)_{\text{qc}}, \mathbf{Set}]}(\text{Fib}_{\bar{y}}) \simeq \text{Aut}_{[\mathbf{F}\acute{\text{E}}\text{t}(Y), \mathbf{Set}]}(\text{Fib}_{\bar{y}})$ , son consecuencia del Lema 8.2.2.  $\square$

*Observación 8.2.8.* El Teorema 8.2.7 se traduce en que el topos —acotado sobre conjuntos finitos—  $\mathbf{FLoc}(Y)$  es un *topos de Galois*. Nótese también

que, aunque en la Observación 8.2.3 mencionamos que *no podíamos garantizar* que para un  $\bar{y}$  con imagen  $y$  el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Sh}(Y_{\acute{e}t}) & \xrightarrow{\text{Fib}_{\bar{y}}} & \mathbf{Set} \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 \mathbf{Sh}((U_y)_{\acute{e}t}) & & \text{---} \xrightarrow{(\text{Fib}_{\bar{y}})|_{\mathbf{Sh}((U_y)_{\acute{e}t})}}
 \end{array}$$

inducido por  $U_y \subseteq Y$  fuese conmutativo, *el diagrama análogo restringido a  $\mathbf{FLoc}(Y)$  sí lo será*, pues  $\mathbf{FLoc}(Y) \simeq \mathbf{R\acute{E}t}(Y)$  y tomar fibra a nivel de estos haces localmente constantes es lo mismo que tomarla a nivel de revestimientos, siendo ahora la conmutatividad obvia por la definición «geométrica» del functor fibra cuando se aplica a morfismos.



## Capítulo 9

# Generalización de resultados clásicos

### 9.1. La sucesión exacta de homotopía

El grupo fundamental étale es functorial en la categoría de espacios esquemáticos conexos punteados. Dado un morfismo  $h: Y' \rightarrow Y$  y  $\Omega$ -puntos geométricos respectivos  $\bar{\mathbf{y}}'$  e  $\bar{\mathbf{y}}$  de modo que  $h \circ \bar{\mathbf{y}}' = \bar{\mathbf{y}}$ , se tiene un morfismo de categorías de Galois

$$h^*: (\mathbf{R}\acute{\text{E}}\text{t}(Y), \text{Fib}_{\bar{\mathbf{y}}}) \rightarrow (\mathbf{R}\acute{\text{E}}\text{t}(Y'), \text{Fib}_{\bar{\mathbf{y}}'})$$

«trivial en los funtores fibra»; es decir, un functor  $h^*: \mathbf{R}\acute{\text{E}}\text{t}(Y) \rightarrow \mathbf{R}\acute{\text{E}}\text{t}(Y')$  dado por  $(X \rightarrow Y) \mapsto (Y' \times_Y^{\text{st}} X \rightarrow Y')$  de modo que  $\text{Fib}_{\bar{\mathbf{y}}'} \circ h^* = \text{Fib}_{\bar{\mathbf{y}}}$ . Esto induce un morfismo de grupos profinitos entre los grupos fundamentales dado por composición con  $h^*$ :

$$h_*: \pi_1^{\acute{\text{e}}\text{t}}(Y', \bar{\mathbf{y}}') \rightarrow \pi_1^{\acute{\text{e}}\text{t}}(Y, \bar{\mathbf{y}})$$

con  $h_*(g)(X \rightarrow Y) = g(Y' \times_Y^{\text{st}} X \rightarrow Y')$  sobre cada  $X \rightarrow Y$  en  $\mathbf{R}\acute{\text{E}}\text{t}(Y)$ . Referimos a la Sección C.1.1 para el caso abstracto general.

Ahora que hemos introducido el sitio étale, podemos mejorar la factorización de Stein del Teorema 7.6.8. Recordemos que dados  $Y$  e  $\mathbf{y}$ , dar un entorno étale de  $\mathbf{y}$  es dar una pareja  $(U \rightarrow Y, \mathbf{u} \in \text{Spec}(U))$  de modo que se

tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & Y \\ \mathbf{u} \uparrow & & \uparrow \mathbf{y} \\ \mathrm{Spec}(\kappa(\mathbf{u})) & \xrightarrow{g'} & \mathrm{Spec}(\kappa(\mathbf{y})); \end{array}$$

con  $g$ , y por tanto  $g'$ , étale —luego  $\kappa(\mathbf{y}) \rightarrow \kappa(\mathbf{u})$  es una extensión finita y separable—.

**Lema 9.1.1.** Si  $Y$  es esquemático,  $\mathbf{y} \in \mathrm{Spec}(Y)$  es un punto esquemático con centro en  $y \in Y$  y  $\kappa(\mathbf{y}) \rightarrow \Omega$  es una extensión finita separable, entonces existe un entorno étale  $(U, \mathbf{u}) \rightarrow (U_y, \mathbf{y})$  tal que  $\kappa(\mathbf{y}) \hookrightarrow \kappa(\mathbf{u})$  es isomorfa a  $\kappa(\mathbf{y}) \rightarrow \Omega$ . De hecho,  $|U| = |U_y|$ .

*Demostración.* El resultado es bien conocido para anillos, véase [10, Lemma 00UD]. Si tomamos  $U = U_y$ , existe por tanto  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow A$  étale y un primo  $\mathfrak{q} \subseteq A$  tal que  $\mathfrak{p}_y$  —el primo maximal de  $\mathbf{y}$ — es imagen inversa de  $\mathfrak{q}$ . Basta considerar  $\mathcal{A}$  el haz de  $\mathcal{O}_Y$ -álgebras que define en  $U$ .  $\square$

*Observación 9.1.2.* Nótese que la composición  $U \rightarrow U_y \rightarrow Y$  no es étale: en primer lugar porque no es, en general, algebraica —salvo si, por ejemplo,  $Y$  es algebraico—; pero también porque, aun en ese caso, sería composición de un morfismo étale con uno que es algebraicamente un monomorfismo plano, y por tanto solo débilmente étale en general. Sin embargo, para el lema que sigue, este entorno que podríamos llamar «pro-localmente étale» será suficiente.

**Lema 9.1.3.** Dado  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $\mathrm{Spec}(f^{-1}(U_y))$  es un esquema para cierto  $y \in Y$  e  $\mathbf{y}$  punto esquemático de  $Y$  centrado en  $y$ , se verifica que  $f$  tiene fibra geoméricamente conexa en  $\mathbf{y}$  —es decir, para toda extensión de cuerpos  $\kappa(\mathbf{y}) \hookrightarrow \Omega$ , el poset  $|\mathrm{Spec}(\Omega) \times_Y^{\mathrm{geo}} X|$  es conexo— si y solo si para todo entorno étale  $(U, \mathbf{u}) \rightarrow (U_y, \mathbf{y})$ , la fibra de  $f_U: U \times_Y X \rightarrow U$  en  $\mathbf{u}$  es conexa.

*Demostración.* Como el espectro de la fibra es un esquema por la hipótesis, la conexión geométrica puede comprobarse sobre extensiones finitas separables del cuerpo residual, véase la Observación 6.3.15. El «si» se sigue de

que cualquiera de estas extensiones se alcanza por un «entorno» étale como los del enunciado por el Lema 9.1.1. Recíprocamente, si la fibra de  $\mathbf{y}$  no fuese geoméricamente conexa, existiría una extensión finita y separable  $\kappa(\mathbf{y}) \rightarrow \Omega$  tal que  $\text{Spec}(\Omega) \times_Y^{\text{geo}} X$  no es conexo, pero por el mismo Lema construimos  $(U, \mathbf{u}) \rightarrow (U_y, \mathbf{y})$  étale con  $\kappa(\mathbf{y}) \rightarrow \kappa(\mathbf{u})$  isomorfa a la extensión de partida. En ese caso,

$$\text{Spec}(\kappa(\mathbf{u})) \times_U^{\text{geo}} (U \times_Y X) \simeq \text{Spec}(\Omega) \times_Y^{\text{geo}} X$$

sería desconexo por la suposición, contradiciendo la hipótesis. □

Probamos la siguiente mejora del Lema 7.6.6:

**Proposición 9.1.4.** Si  $f: X \rightarrow Y$  es un morfismo pro-localmente propio o algebraicamente propio. Si  $f_{\sharp}: \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{O}_X$  es un isomorfismo, las fibras de  $f$  son geoméricamente conexas. El recíproco es cierto si  $f$  es plano.

*Demostración.* Para el directo, gracias al Lema 7.6.6, basta ver que nos podemos reducir a probar que las fibras son conexas, pero esto se obtiene por el Lema 9.1.3, puesto que los morfismos  $f_U$  que aparecen en dicho enunciado siguen siendo pro-localmente propios o algebraicamente propios —para el caso pro-localmente propio,  $Y$  es separado, luego algebraico; y podemos suponer que  $|U| = |U_y|$  es afín, luego separado; por tanto  $U \rightarrow Y$  es algebraico y aplica la Proposición 7.5.31—. Recíprocamente, por la existencia de la factorización de Stein del Teorema 7.6.8, se tiene que  $f = g \circ h$ , con  $h$  pro-localmente propio (resp. algebraicamente propio) de fibras conexas con  $g$  finito y plano, y por tanto localmente libre; pero como las fibras de  $g$  son geoméricamente conexas por hipótesis, se deduce que las de  $g$  también lo son, y por tanto son un único punto. Se concluye que  $\text{deg}(g) = 1$  y por tanto,  $\mathcal{O}_Y \simeq f_*\mathcal{O}_X$  —aplicando la ecuación 8.1.1 en fibra: nótese vale para álgebras finitas localmente libres o, más aún, para álgebras finitas proyectivas—. □

**Teorema 9.1.5** (Sucesión exacta de homotopía). Sea  $h: Z \rightarrow Y$  plano y pro-localmente propio o algebraicamente propio con fibras geoméricamente íntegras y supóngase que  $Y, Z$  son geoméricos. Sea  $\mathbf{y} \in \text{Spec}(Y)$  un punto esquemático e  $\bar{\mathbf{y}}: \text{Spec}(\kappa(\bar{\mathbf{y}})) \rightarrow Y$  el punto  $\kappa(\mathbf{y})$ -geométrico asociado, donde la barra denota un cierre algebraico. Sea  $\bar{\mathbf{z}}$  un punto geométrico de  $Z_{\bar{\mathbf{y}}} := \text{Spec}(\bar{\mathbf{y}}) \times_Y^{\text{geo}} Z$ . Se tiene una sucesión exacta de grupos profinitos:

$$\pi_1^{\text{ét}}(Z_{\bar{\mathbf{z}}}, \bar{\mathbf{z}}) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(Z, \bar{\mathbf{z}}) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(Y, \bar{\mathbf{y}}) \rightarrow 1.$$

*Demostración.* Comprobamos las condiciones del Teorema C.1.7:

Para la epiyectividad, basta observar que las componentes conexas se controlan en términos de las secciones globales de la imagen directa de los estructurales: sea  $X \rightarrow Y$  revestimiento finito étale conexo con haz asociado  $\mathcal{A} \in \mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(Y)$ . El pullback  $Z \times_Y^{\text{st}} X$  tiene haz asociado  $h^*\mathcal{A}$ . Por la Proposición 9.1.4 se tiene que  $\mathcal{O}_Y \simeq h_*\mathcal{O}_Z$ , luego por cambio de base plano es  $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} h_*h^*\mathcal{A}$ . Se concluye tomando secciones globales.

La condición 2a) del Teorema C.1.7 es inmediata, puesto que todo revestimiento finito étale trivializa en las fibras geométricas. Para 2b), sea  $f: X \rightarrow Z$  revestimiento conexo tal que  $Z_{\bar{z}} \times_Z^{\text{st}} X \rightarrow Z_{\bar{z}}$  admite una sección, sea  $h \circ f: X \rightarrow Y$  la composición y consideremos

$$X \rightarrow W = (Y, h_*f_*\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\psi} Y$$

la factorización de Stein del Teorema 7.6.8, donde tomando  $\mathbf{St}$  podemos suponer que  $\psi$  estándar afín. Como  $h \circ f$  es plano,  $\psi$  es finito y plano, y por tanto correspondiente a un haz de álgebras localmente libre. Acabamos si vemos que  $\psi$  es finito étale y que hay un morfismo  $W' \rightarrow X$  sobre  $Z$  con  $W'$  una componente conexa de  $Z \times_Y^{\text{st}} W'$ .

En efecto, para ver que es finito étale basta comprobar la condición en las fibras del Lema 8.1.4. Dado  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(Y)$ , se tiene

$$\text{Spec}(\mathfrak{p}) \times_Y^{\text{geo}} W \simeq \text{Spec}(\mathfrak{p}) \times_Y^{\text{geo}} X;$$

pero como  $X \rightarrow W$  tiene fibras propias geoméricamente íntegras por la Proposición 9.1.4 —y cuyos espectros son esquemas por la hipótesis de propiedad—, estas deben ser espectros de extensiones algebraicas  $\kappa(\mathfrak{p})$ , deduciéndose que  $\text{Spec}(\overline{\kappa(\mathfrak{p})}) \times_Y^{\text{geo}} X \simeq \coprod_I \text{Spec}(\overline{\kappa(\mathfrak{p})})$  para cierto  $I$  finito, luego que  $\psi$  es finito étale; donde además  $W$  conexo porque  $X$  es conexo y  $X \rightarrow W$  epiyectivo. Por último, como  $Z_{\bar{z}} \times_Z X \rightarrow Z_{\bar{z}}$  admite una sección, el cambio de base a  $Z_{\bar{z}}$  de  $Z \times_Y^{\text{st}} W \rightarrow Z$  también lo hace: en particular  $X \rightarrow Z \times_Y^{\text{st}} W$  es un revestimiento finito étale de grado 1, luego un isomorfismo por el Lema 8.1.11.  $\square$

**Corolario 9.1.6.** Si  $\Omega$  es un cuerpo algebraicamente cerrado y  $X, Y$  son espacios conexos con uno de ellos pro-localmente propio o algebraicamente propio, para cualesquiera puntos  $\Omega$ -geométricos  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\bar{\mathbf{y}}$  de  $X$  e  $Y$  se tiene un

isomorfismo de grupos profinitos

$$\pi_1(X \times Y, (\bar{x}, \bar{y})) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X \times Y, (\bar{x}, \bar{y})) \times \pi_1(X \times Y, (\bar{x}, \bar{y})).$$

*Demostración.* Se sigue de la sucesión exacta de homotopía y el «lema de los cinco».  $\square$

## 9.2. El teorema de Seifert-Van Kampen

Vamos a probar el teorema de Seifert-Van Kampen para el grupo fundamental étale de un espacio esquemático respecto a un recubrimiento finito cualquiera por inmersiones planas. Para ello, abordamos primero su versión más general para el grupoide fundamental étale. La estrategia consiste en probar que un functor geométrico adecuado —Definición 5.5.1— verifica descenso interno —Definición 5.5.3— y, por el Teorema 5.5.7 —que emplea la maquinaria abstracta del cilindro esquemático—, obtendremos los resultados deseados. En términos de haces —Sección 5.6.1—, lo que se demuestra es que la asignación de cada espacio a su grupoide fundamental es un 2-(co)haz —un *costack* según cierta literatura— en el topos débil de Zariski de espacios esquemáticos.

Comenzamos con un lema sobre «pegado» de revestimientos. Consideremos a  $\mathbf{SchFin}^{\text{geo}}$  como una 1-categoría y sea el pseudofunctor<sup>1</sup>:

$$\mathbf{RÉt}: : \mathbf{SchFin}^{\text{geo}} \rightarrow \mathbf{Cat}^{\text{op}} \quad X \mapsto \mathbf{RÉt}(X).$$

**Lema 9.2.1.** El functor  $\mathbf{RÉt}$  es geométrico, es decir, factoriza por  $\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}^{\text{geo}}$ .

*Demostración.* Es el Lema 8.1.5.  $\square$

**Lema 9.2.2.** El functor  $\mathbf{RÉt}$  satisface descenso interno.

*Demostración.* Gracias al Corolario 8.1.32 basta ver que, para todo  $X$  esquemático, se tienen equivalencias functoriales en  $X$

$$\mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(X)^{\text{op}} \xrightarrow{\sim} 2\text{-lím}_{x \in X} \mathbf{Qcoh}^{\text{fét}}(\text{Spec}(U_x)).$$

---

<sup>1</sup>Como los productos fibrados son únicos salvo isomorfismos canónicos, supondremos que los 2-morfismos de la definición de pseudofunctor están especificadas por estos y, por tanto, solo explicitaremos el 1-functor subyacente. Ya hemos aplicado tácticamente este tipo de consideraciones en otras partes de la memoria. Véase nota al pie 2, Sección 1.3.

Especializando la equivalencia de la Proposición 3.1.11 para álgebras cuasicoherentes, basta probar que  $(X, \mathcal{A}) \rightarrow X$  es finito étale si y solo si  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{A}_x$  es finito étale de anillos. El «solo si» es inmediato por estabilidad por cambio de base y su recíproco se sigue del Lema 7.4.15, de la definición de morfismo finito étale como morfismo algebraico y de que ser finito étale es local para esquemas. En efecto, por las dos primeras cuestiones, podemos suponer que  $\text{Spec}(X)$  es un esquema y, de hecho, que tiene restricciones abiertas: si  $f: Z \rightarrow X$  es un morfismo con  $\text{Spec}(Z)$  un esquema,  $\text{Spec}(Z \times_X (X, \mathcal{A})) \rightarrow \text{Spec}(Z)$  será finito étale si y solo si  $Z \times_X (X, \mathcal{A}) \simeq (Z, f^*\mathcal{A}) \rightarrow Z$  lo es; y vía las equivalencias entre cuasicoherentes descendidos —Definición B.4.5— podemos, como en el Lema 7.4.15, suponer que  $X$  tiene restricciones abiertas. Se concluye porque el resultado es local para esquemas, luego basta comprobarlo en el recubrimiento abierto  $\text{Spec}(U_x) \subseteq \text{Spec}(X)$  —de hecho, ser finito étale es local en la topología fpqc de esquemas [10, Lemma 02LA, Lemma 02VN], luego ni siquiera hace falta reducir al caso de restricciones abiertas—.  $\square$

En el Teorema 8.2.7 hemos probado que si  $X$  es conexo y  $\bar{x}$  es un punto  $\Omega$ -geométrico, la pareja  $(\mathbf{R}\acute{\text{E}}\mathbf{t}(X), \text{Fib}_{\bar{x}})$  es una categoría de Galois. En vista de la discusión general del Apéndice C.1 y de la Definición C.1.3, se tiene también que  $(\mathbf{R}\acute{\text{E}}\mathbf{t}(X), \{\text{Fib}_{\bar{x}}\})$ , con  $\bar{x}$  recorriendo todos los puntos geométricos de  $X$ , es una categoría de Galois finitamente multiconexa —donde hay un conjunto de puntos geométricos por ser estos un subconjunto de los del esquema  $\coprod_{x \in X} \text{Spec}(U_x)$  y la finitud proviene de que basta un punto geométrico en cada componente conexa para que se verifique el axioma 3') de la Definición en cuestión—. Se tiene así un *grupoide fundamental étale*

$$\Pi_1^{\acute{\text{e}}\text{t}}(X)$$

cuyos objetos son los puntos  $\Omega$ -geométricos y cuyos morfismos son las transformaciones naturales —«camino de Tannaka»— entre funtores fibra. Como  $X$  es conexo, se tienen, de hecho, equivalencias

$$\text{Fib}_{\bar{x}}: \mathbf{R}\acute{\text{E}}\mathbf{t}(X) \xrightarrow{\sim} \Pi_1^{\acute{\text{e}}\text{t}}(X)\text{-FinSet} \equiv [\Pi_1^{\acute{\text{e}}\text{t}}(X), \mathbf{FinSet}] \quad (9.2.1)$$

para cualquier  $\bar{x}$  fijado, inducidas por la equivalencia categorial dada por la inclusión de un punto  $\pi_1^{\acute{\text{e}}\text{t}}(X, \bar{x}) \simeq \Pi_1^{\acute{\text{e}}\text{t}}(X)$  y por el correspondiente functor de evaluación. Nótese que estamos conjuntos finitos con una acción *continua*

del grupoide fundamental. Para el caso no conexo, la equivalencia análoga también se tiene, inducida por al menos un functor fibra en cada componente conexa —exactamente el Teorema C.1.4—.

*Observación 9.2.3.* De hecho, una estrategia alternativa para esta sección sería considerar el problema de descenso interno para el 2-functor que envía cada espacio a la categoría de Galois finitamente multiconexa definida por sus revestimientos étale y cierta colección de funtores fibra —uno prefijado por cada componente conexa, o quizá todos ellos, como se prefiera—. Haciendo valorar este functor no en **Cat**, sino en la 2-categoría de categorías de Galois finitamente multiconexas, se llegaría al resultado análogo al Lema 9.2.2. Solo habría que demostrar que los pseudolímites en esta 2-categoría, con la estructura definida en [35], no son más que los pseudolímites de las categorías subyacentes equipados con la unión de todos los funtores fundamentales de partida —extendidos al total vía las proyecciones—.

Se define un functor *grupoide fundamental étale*

$$\Pi_1^{\text{ét}} : \mathbf{SchFin} \rightarrow \mathbf{Gpd}_{\text{Stone}}$$

con valores en la 2-categoría de grupoides profinitos con un número finito de componentes conexas —en el sentido del Teorema C.1.4—.

**Lema 9.2.4.** El functor  $\Pi_1^{\text{ét}}$  es geométrico.

*Demostración.* Es probar que espacios qc-isomorfos tienen el mismo grupoide fundamental étale asociado, lo cual se sigue de que tienen las mismas categorías de revestimientos finitos étale por el Lema 9.2.1, los mismos puntos geométricos —Proposición 5.3.6—, de que dos categorías de Galois isomorfas tienen grupos fundamentales isomorfos, —aplicando esto a cada componente conexa— y de que lo análogo es cierto para caminos de Tanaka entre los funtores fibra. Nótese que todo esto es elemental por ser todos los datos «geométricos»: dado un qc-isomorfismo  $X \rightarrow Y$ , se induce una equivalencia  $\mathbf{RÉt}(X) \simeq \mathbf{RÉt}(Y)$  vía producto fibrado y composición, estando la biyección entre puntos geométricos expresada por estos mismos funtores; de donde se sigue que los funtores fibra de  $X$  e  $Y$  están en correspondencia biyectiva y sus imágenes tienen expresiones isomorfas, por lo que producirán los mismos automorfismos y transformaciones naturales.

Si se prefiere una demostración más abstracta, el resultado también es consecuencia del Lema 9.2.2, el «teorema de Galois» de la ecuación 9.2.1 y el Corolario C.1.5.  $\square$

**Proposición 9.2.5.** El functor  $\Pi_1^{\acute{e}t}$  satisface descenso interno.

*Demostración.* Nótese que  $\Pi_1^{\acute{e}t}$  induce un functor geométrico a valores en **Cat**-codatos de conjuntos finitos con una acción continua  $\Pi_1^{\acute{e}t}$ -**FinSet** vía  $X \mapsto \Pi_1^{\acute{e}t}(X)$ -**FinSet**. Con la notación de la Definición 5.5.3, se tienen cuadrados conmutativos en **[SchFin, Cat-codata]**

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{R\acute{E}t} & \xrightarrow{\eta_{\mathbf{R\acute{E}t}}} & \mathbf{R\acute{E}t} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{\Pi_1^{\acute{e}t}\text{-FinSet}} & \xrightarrow{\eta_{\Pi_1^{\acute{e}t}\text{-FinSet}}} & \Pi_1^{\acute{e}t}\text{-FinSet};
 \end{array}$$

donde las flechas verticales inducen, por el «teorema de Galois» —ecuación 9.2.1, aplicado a  $X$  y a cada  $U_x \subseteq X$  respectivamente— equivalencias para todo  $X \in \mathbf{SchFin}$  y, por tanto, equivalencias —isomorfismos de pseudofuntores— al poscomponer con el functor de secciones; y  $\eta_{\mathbf{R\acute{E}t}}$  induce una equivalencia por el Lema 9.2.2. Por tanto, componer  $\eta_{\Pi_1^{\acute{e}t}\text{-FinSet}}$  con el functor de secciones induce una equivalencia, pero entonces, gracias a que el functor  $\mathbf{Gpd}_{\text{Stone}} \rightarrow \mathbf{Cat}^{\text{op}}$  tal que  $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}\text{-FinSet}$  conmuta con pseudocolímites, i.e. se obtiene que

$$\begin{aligned}
 (\Pi_1^{\acute{e}t}(X))\text{-FinSet} &\xrightarrow{\sim} 2\text{-lím}_{x \in X} (\Pi_1^{\acute{e}t}(U_x)\text{-FinSet}) \simeq \\
 &\simeq (2\text{-colím}_{x \in X} \Pi_1^{\acute{e}t}(U_x))\text{-FinSet}
 \end{aligned}$$

es una equivalencia para todo  $X \in \mathbf{SchFin}$ . Por el Corolario C.1.5 se concluye que  $2\text{-colím}_{x \in X} \Pi_1^{\acute{e}t}(U_x) \xrightarrow{\sim} \Pi_1^{\acute{e}t}(X)$ , es decir, que el morfismo

$$\eta_{\Pi_1^{\acute{e}t}} : \underline{\Pi_1^{\acute{e}t}} \rightarrow \Pi_1^{\acute{e}t}$$

en **[SchFin, (Gpd<sup>op</sup><sub>Stone</sub>)-codata]** induce un isomorfismo  $\Gamma_*(\eta_{\Pi_1^{\acute{e}t}})$ .  $\square$

*Ejemplo 9.2.6.* Si  $S$  es un esquema conexo y  $\pi: S \rightarrow X$  un modelo finito suyo de modo que  $\pi^{-1}(U_x)$  es conexo y de grupo fundamental étale trivial, es decir

de grupoide fundamental equivalente a la categoría trivial  $\Pi_1^{\text{ét}}(U_x) \simeq \{\star\}$ . Entonces, se tiene

$$\Pi_1^{\text{ét}}(S) \simeq \Pi_1^{\text{ét}}(X) \simeq 2\text{-colím}_{x \in X} \{\star\} \simeq \Pi_1^{\text{fn}}(|X|),$$

donde  $\Pi_1^{\text{fn}}(|X|)$  es el grupoide fundamental asociado a la categoría de revestimientos topológicos finitos del poset subyacente, que por ser conexo es equivalente a la completación profinita del grupo fundamental ordinario de  $|X|$  con base en cualquiera de sus puntos.

Como ilustra este ejemplo, la Proposición 9.2.5 ya contiene el Teorema de Seifert-Van Kampen en cierto sentido y, de hecho, implica el clásico de esquemas —en formulación para límites— restringido a recubrimientos puntualmente afines; pero gracias al Teorema 5.5.7, este se extiende automáticamente a recubrimientos por monomorfismos planos de esquemas cualesquiera:

**Corolario 9.2.7** (Teorema de Seifert-Van Kampen). Si  $X$  es un espacio esquemático y  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  es un recubrimiento finito por inmersiones planas con **SchFin**<sup>geo</sup>-codato asociado  $\mathcal{U} \equiv \mathbf{Geo} \circ \mathcal{U}$ , se tiene una equivalencia de grupoides topológicos

$$2\text{-colím}_{\Delta \in \mathcal{P}^*(I)} \Pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta)) \xrightarrow{\sim} \Pi_1^{\text{ét}}(X).$$

En otras palabras, el functor  $\Pi_1^{\text{ét}} : X_{\text{wZar}} \rightarrow \mathbf{Gpd}_{\text{Stone}}$  —así como su análogo en el sitio «grande»— es un *costack* a valores en grupoides topológicos.

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 9.2.5 previa y el Teorema 5.5.7. La última parte es el Teorema 5.6.17.  $\square$

*Observación 9.2.8.* Por [35, Proposition 5.1], como  $|\mathcal{U}|$  es siempre un poset irreducible, por tanto un poset filtrante, el 2-límite de grupoides fundamentales del Teorema 9.2.7 es isomorfo al límite 1-categorial.

**Corolario 9.2.9.** Si  $S$  es un esquema qc-qs y  $\{V_i \rightarrow S\}_{i \in I}$  es un recubrimiento por monomorfismos planos; si  $\mathcal{V}(\Delta)$  denota el producto fibrado de los  $V_i$  para  $i \in \Delta$ , se tiene una equivalencia de grupoides topológicos

$$2\text{-colím}_{\Delta \in \mathcal{P}^*(I)} \Pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{V}(\Delta)) \xrightarrow{\sim} \Pi_1^{\text{ét}}(S).$$

En otras palabras, el functor  $\Pi_1^{\text{ét}} : S_{\text{wZar}} \rightarrow \mathbf{Gpd}_{\text{Stone}}$  —así como su análogo en el sitio grande— es un *costack* a valores en grupoides topológicos.

Ahora especializamos el resultado a grupos fundamentales. Para ello debemos fijar un «sistema de puntos base». Lo que sigue sustituye a la noción homónima dada en [36] en términos más intrínsecos que los allí expuestos.

Sea  $X$  esquemático,  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  un recubrimiento por inmersiones planas y  $\mathcal{U}'$  el **SchFin**<sup>geo</sup>-codato asociado de conjunto subyacente  $\mathcal{P}(I)$ , es decir, obtenido añadiendo al codato  $\mathcal{U}$  habitual el producto vacío  $\mathcal{U}'(\emptyset) = X$ .

**Definición 9.2.10.** En las condiciones anteriores, un *sistema de puntos base* asociado al recubrimiento  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  es un objeto de la categoría

$$\underline{\mathbf{x}} \in \text{Ob}(2\text{-}\lim_{\Delta \in \mathcal{P}(I)} \Pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}'(\Delta))).$$

En otras palabras, dar un sistema de puntos base  $\underline{\mathbf{x}}$ , es dar un punto geométrico  $\underline{\mathbf{x}}_{\Delta}$  cada  $\mathcal{U}'(\Delta)$  y para cada  $\Delta \leq \Delta'$ , un camino de Tannaka entre los funtores fibra correspondientes:

$$\varphi_{\Delta\Delta'}: \text{Fib}_{\underline{\mathbf{x}}_{\Delta'}} \circ \mathbf{R}\dot{\mathbf{E}}\text{t}(X)(\Delta \rightarrow \Delta') \xrightarrow{\sim} \text{Fib}_{\underline{\mathbf{x}}_{\Delta}}.$$

Si ahora  $\mathcal{U} = \mathcal{U}'|_{\mathcal{P}^*(I)}$  es el codato restringido,  $\underline{\mathbf{x}}$  define

$$\underline{\mathbf{x}}^* \in \text{Ob}(2\text{-}\lim_{\Delta \in \mathcal{P}(I)} \Pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta)));$$

y, por otro lado, denotemos  $\bar{\mathbf{x}} := \underline{\mathbf{x}}_{\emptyset}$  al punto correspondiente a  $X$ .

**Corolario 9.2.11** (Seifert-Van Kampen para grupos fundamentales). Si  $X$  es esquemático y conexo,  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  es un recubrimiento por monomorfismos planos con codato asociado  $\mathcal{U}$  tal que  $\mathcal{U}(\Delta)$  es conexo para todo  $\Delta$  y  $\underline{\mathbf{x}}$  es un sistema de puntos base —con las notaciones anteriores—, se tiene un isomorfismo de grupos profinitos

$$\text{colim}_{\Delta \in \mathcal{P}^*(I)} \pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta), \underline{\mathbf{x}}_{\Delta}) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{\mathbf{x}})$$

inducido por los  $\varphi_{\Delta\Delta'}$ .

*Demostración.* Como  $X$  es conexo, la inclusión  $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{\mathbf{x}}) \rightarrow \Pi_1^{\text{ét}}(X)$  es una equivalencia. Sea  $\mathbf{Gr}_{\text{Stone}} \subseteq \mathbf{Gpd}_{\text{Stone}}$  la categoría de grupos profinitos, donde podemos pensar los grupos tanto como categorías como de modo conjuntístico. Definimos el codato

$$\pi_1^{\text{ét}}(-, \underline{\mathbf{x}}^*): \mathcal{P}^*(I) \rightarrow \mathbf{Gr}_{\text{Stone}}^{\text{op}}, \quad \Delta \mapsto \pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta), \underline{\mathbf{x}}_{\Delta});$$

que a nivel de morfismos viene definido por conjugación con los  $\varphi_{\Delta\Delta'}$  asociados al sistema de puntos base. De nuevo, como cada  $\mathcal{U}(\Delta)$  es conexo, la transformación natural

$$\pi_1^{\text{ét}}(-, \underline{\mathbf{x}}^*) \rightarrow \Pi_1^{\text{ét}} \circ \mathcal{U}$$

es un isomorfismo —entre funtores a valores en la 2-categoría de grupoides profinitos—, luego es un (2-)isomorfismo al tomar secciones. Por el ya demostrado Teorema 9.2.7 de Seifert-Van Kampen para grupoides fundamentales étale, al tomar secciones se tienen equivalencias

$$2\text{-colim}_{\Delta \in \mathcal{P}^*(I)} \pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta), \underline{\mathbf{x}}_\Delta) \xrightarrow{\sim} 2\text{-colim}_{\Delta \in \mathcal{P}^*(I)} \Pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta)) \xrightarrow{\sim} \Pi_1^{\text{ét}}(X);$$

donde el primero es un grupoide conexo que se identifica con el colímite de grupos profinitos abstractos  $\text{colim}_{\Delta \in \mathcal{P}^*(I)} \pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta), \underline{\mathbf{x}}_\Delta)$  y el último es equivalente al grupo fundamental  $\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{\mathbf{x}})$  por la conexión. Como toda equivalencia entre categorías con los mismos objetos es un isomorfismo, se concluye.  $\square$

*Ejemplo 9.2.12.* Del Teorema 9.2.11 se recupera el resultado clásico para esquemas, pero en la topología de los monomorfismos planos: si  $S$  es un esquema conexo,  $V_1, V_2 \rightarrow S$  es un recubrimiento por monomorfismos planos conexos con intersección  $W = V_1 \times_S V_2$  conexa y  $\bar{s}$  es un punto geométrico de  $W$  —y por tanto de  $V_1, V_2$  y  $S$ —, se tiene un isomorfismo de grupoides profinitos

$$\pi_1^{\text{ét}}(V_1, \bar{\mathbf{s}}) \amalg_{\pi_1^{\text{ét}}(W, \bar{\mathbf{s}})} \pi_1^{\text{ét}}(V_2, \bar{\mathbf{s}}) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(S, \bar{\mathbf{s}})$$

Como siempre, la versión para grupos fundamentales puede escribirse en términos de espacios punteados, donde un sistema de puntos base puede pensarse como un «punto» de un recubrimiento en el sitio de los monomorfismos planos; de modo que se concluye que el functor  $\pi_1^{\text{ét}}(-, -)$  definido en el sitio de los monomorfismos planos y recubrimientos punteados —con morfismos que respetan apropiadamente los puntos— y a valores en grupos profinitos es un «cohoz».



# Parte IV

## Apéndices

Una vez llegues a darte cuenta de la virtud de alguien, quienquiera que sea, olvídate de lo demás y tómalo de modelo en esa virtud solamente. Serás tú mismo un buen modelo y un buen maestro para los demás.

Yamamoto Tsunetomo



# Apéndice A

## Apéndices a la Parte I

### A.1. 2-límites y 2-colímites en $\mathbf{Cat}$

Repasamos algunas nociones estándar de teoría de 2-categorías. Para el lector no familiar con estos conceptos, bastará que tome como definiciones las descripciones explícitas y propiedades 2-universales que enunciamos. Sea  $I$  una 1-categoría —finita para los casos que trataremos en la memoria—,  $\mathbf{Cat}$  la 2-categoría de 1-categorías —pongamos que localmente pequeñas—, funtores y transformaciones naturales en sentido ordinario; y  $\mathcal{F} : I \rightarrow \mathbf{Cat}$  un pseudofunctor pensado como diagrama de categorías. En esta sección, denotaremos a las imágenes de este functor por

$$i \mapsto \mathfrak{C}_i, \quad (i \rightarrow j) \mapsto (f_{ij} : \mathfrak{C}_i \rightarrow \mathfrak{C}_j)$$

con  $f_{jk} \circ f_{ij} \simeq f_{ik}$  para  $i \rightarrow j \rightarrow k$  y  $f_{ii} \simeq \text{Id}$  2-morfismos invertibles *especificados*. De modo *ad hoc*, se define el *límite laxo* de  $\mathcal{F}$ , denotado  $\text{LaxLím } \mathcal{F} \equiv \text{LaxLím}_i \mathfrak{C}_i$ , como la categoría tal que

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\text{LaxLím } \mathcal{F}) &= \\ &= \{(c_i, \alpha_{ij}) : c_i \in \text{Ob}(\mathfrak{C}_i) \text{ y } \alpha_{ij} \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_j}(f_{ij}(c_i), c_j) \text{ para todo } i \rightarrow j\}, \\ \text{Hom}_{\text{LaxLím } \mathcal{F}}((c_i, \alpha_{ij}), (d_i, \beta_{ij})) &= \\ &= \{f_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}_i}(c_i, d_i) : f_j \circ \alpha_{ij} \simeq \beta_{ij} \circ f_i \text{ para todo } i \rightarrow j\}; \end{aligned}$$

con  $\{\alpha_{ij}\}$  verificando la condición de cociclo,  $\alpha_{jk} \circ \alpha_{ij} = \alpha_{ik}$  y  $\alpha_{ii} = \text{Id}$ , *relativa a los  $f_{ij}$  y a los 2-morfismos invertibles de especificados en la definición*

de  $\mathcal{F}$  —nótese que si hubiésemos partido de un 2-functor *laxo*, estas condiciones se debilitarían—. Mientras que su 2-límite o *pseudolímite*, denotado  $2\text{-lím } \mathcal{F} \equiv 2\text{-lím}_i \mathfrak{C}_i$ , es la categoría con

$$\text{Ob}(2\text{-lím } \mathcal{F}) = \{(c_i, \alpha_{ij}) \in \text{LaxLím } \mathcal{F} : \alpha_{ij} \text{ es isomorfismo para todo } i \rightarrow j\},$$

$$\text{Hom}_{2\text{-lím } \mathcal{F}}((c_i, \alpha_{ij}), (d_i, \beta_{ij})) = \text{Hom}_{\text{LaxLím } \mathcal{F}}((c_i, \alpha_{ij}), (d_i, \beta_{ij})).$$

*Observación A.1.1.* Los morfismos vienen dados en realidad por colecciones de 1-morfismos y 2-morfismos invertibles especificados que hagan conmutar los diagramas pertinentes. Así, la composición de morfismos se define también a través de los 2-morfismos invertibles de la definición del pseudofunctor. Permítasenos la licencia de no explicitar estas cuestiones en la práctica, que a menudo serán triviales por motivos coyunturales.

*Observación A.1.2.* Análogamente, el 2-límite estricto se define en la categoría de 2-funtores estrictos —es decir, tales que  $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ ,  $f_{ii} = \text{Id}$  idénticamente, situación no insólita en esta memoria: un pseudofunctor  $I \rightarrow \mathfrak{C}$  será estricto si  $\mathfrak{C}$  está enriquecida en **pos**— y transformaciones naturales estrictas, y es aquel tal que los morfismos  $\alpha_{ij}$  son la identidad.

Un sencillo cómputo prueba que estas son las generalizaciones directas de la definición de límite de un functor a valores en **Set**, es decir,

$$\text{LaxLím } \mathcal{F} = \text{Hom}_{[I, \mathbf{Cat}]^{\text{Lax}}}(\star, \mathcal{F}), \quad 2\text{-lím } \mathcal{F} = \text{Hom}_{[I, \mathbf{Cat}]}(\star, \mathcal{F});$$

donde  $\star$  es el functor constante a la categoría terminal y  $\text{Hom}_{[I, \mathbf{Cat}]}$  (resp.  $\text{Hom}_{[I, \mathbf{Cat}]^{\text{Lax}}}$ ) es la categoría de transformaciones pseudonaturales (resp. transformaciones naturales laxas) y modificaciones entre ellas —véase la discusión de la Sección 2.2, donde definimos estos conceptos—. Si se consideran las inclusiones naturales  $\mathbf{Cat} \rightarrow [I, \mathbf{Cat}] \rightarrow [I, \mathbf{Cat}]^{\text{Lax}}$ , se verifican las 2-propiedades universales esperables: para todo diagrama  $\mathcal{F}$  como antes y categoría  $\mathfrak{C}$ , definiendo el 2-functor  $\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathfrak{C}, \mathcal{F}) : I \rightarrow \mathbf{Cat}$  ( $i \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathfrak{C}, \mathcal{F}(i))$ ), se tienen *equivalencias de categorías*

$$\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathfrak{C}, \text{LaxLím } \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{[I, \mathbf{Cat}]^{\text{Lax}}}(\mathfrak{C}, \mathcal{F}) \simeq \text{LaxLím } \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathfrak{C}, \mathcal{F}),$$

$$\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathfrak{C}, 2\text{-lím } \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{[I, \mathbf{Cat}]}(\mathfrak{C}, \mathcal{F}) \simeq 2\text{-lím } \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathfrak{C}, \mathcal{F}).$$

Si ahora  $\mathfrak{D}$  es una 2-categoría cualquiera, los 2-límites y límites laxos en  $\mathfrak{D}$ , si existen, quedan expresados en términos 2-límites y límites laxos

en **Cat** a través de sus propiedades universales —y nótese que eso incluye los 2-colímites (o pseudocolímites), 2-colím, y colímites laxos en  $\mathfrak{D}$  sin más que tomar  $\mathfrak{D}^{\text{op}}$ —. Es decir, si  $\mathcal{G}: I \rightarrow \mathfrak{D}$  es un diagrama en  $\mathfrak{D}$  análogo al anterior,  $d \in \mathfrak{D}$  es un objeto y  $\text{Hom}_{\mathfrak{D}}(d, \mathcal{G}): I \rightarrow \mathbf{Cat}$  es el functor  $i \mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(d, \mathcal{G}(i))$ , se definen el 2-límite y límite laxo de  $\mathcal{G}$  como, si existen, aquellos que verifican las equivalencias

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(d, \text{LaxLím } \mathcal{G}) &\simeq \text{LaxLím } \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(d, \mathcal{G}), \\ \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(d, \text{2-lím } \mathcal{G}) &\simeq \text{2-lím } \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(d, \mathcal{G}); \end{aligned}$$

estando las categorías de la derecha calculadas explícitamente con anterioridad.

*Observación A.1.3.* En el caso de los límites laxos, una variante son los *límites oplaxos*, donde se invierte la dirección de los 2-morfismos.

Acabamos mencionando que **Cat** tiene todos los 2-límites, 2-colímites y 2-límites laxos. La 2-categoría de grupoides **Gpd** también tiene todos los 2-límites y 2-colímites, que coinciden con los laxos, y de modo que los 2-límites son preservados por  $\mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Cat}$  —como salta a la vista por la construcción explícita—; mientras que la 2-categoría **pos** de posets —Sección 1.3—, cuyos 2-límites y 2-colímites existen y además coinciden con los 1-categoriales —pues todo 2-functor en  $[I, \mathbf{pos}]$  es estricto y toda transformación pseudo-natural es estricta—, también tiene todos los colímites laxos *indexados por posets*, como probamos tácitamente en el Lema 2.3.3.

## A.2. Posibles continuaciones: datos $\Phi$ -afines

En esta sección continuamos con la Observación 2.1.8 e introducimos una serie de definiciones generales que, creemos, pueden ser el punto de partida para generalizar las técnicas empleadas en el estudio de los espacios esquemáticos y sus espectros a  $\mathfrak{C}$ -datos arbitrarios. Entendemos que, en el fondo, esto puede entenderse como un modo de tratar ciertos problemas de descenso a nivel formal, aunque aún no comprendemos bien algunos puntos clave, como las diferencias entre los casos de 1-categorías ordinarias y 2-categorías o el papel preciso que juega la condición de separabilidad —i.e. esquematicidad—. Entiéndase lo que sigue, por tanto, como una conversación informal y de un tono casi especulativo.

Sean  $\mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{D}$  1-categorías (resp. 2-categorías —o  $(n, m)$ -categorías si procediese—) con suficientes límites —por simplicidad— y  $\Phi: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  un functor (resp. pseudofunctor). Sea  $\Phi_*: \mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow \mathfrak{D}\text{-data}$  el functor inducido. Para las categorías  $\mathfrak{C}\text{-data}$  y  $\mathfrak{D}\text{-data}$ , denotemos  $\Gamma_{\mathfrak{C}}$  y  $\Gamma_{\mathfrak{D}}$  a los respectivos funtores de secciones (resp. 2-secciones). Denotemos  $\Gamma_{\Phi} := \Gamma_{\mathfrak{D}} \circ \Phi_*$  al functor de «secciones relativas a  $\Phi$ ». De las propiedades universales se obtiene una transformación natural de funtores  $\mathfrak{C}\text{-data} \rightarrow \mathfrak{D}^{\text{op}}$

$$\eta_{\Phi}: \Phi \circ \Gamma_{\mathfrak{C}} \rightarrow \Gamma_{\Phi}.$$

*Observación A.2.1.* Lo que acabamos de describir, en rigor, solo funciona para el caso ordinario 1-categorial:  $\Gamma_{\Phi}$  no es un functor en el caso 2-categorial; el eslogan es que «la imagen directa de un haz cuasicoherente no es cuasicoherente». Se requiere alguna condición adicional de separabilidad que mantenga la «cuasicoherencia» de los 2-límites involucrados. Como las cosas sí funcionan a nivel de objetos, admitamos por ahora esta licencia, ni irrelevante ni trivial y que discutiremos más adelante, puesto que sí queremos tener en mente la posibilidad de describir el caso 2-categorial por ser justo el que incumbe a los espacios esquemáticos.

**Definición A.2.2.** Se dice que un  $\mathfrak{C}$ -dato  $\mathcal{F}$  es  $\Phi$ -afín si el morfismo  $\eta_{\Phi}(\mathcal{F})$  inducido en  $\mathfrak{D}^{\text{op}}$  es un isomorfismo (resp. 2-isomorfismo).

*Ejemplos A.2.3.* Esta noción de datos  $\Phi$ -afines simplemente recoge cuándo el límite que computa las secciones de  $\mathcal{F}$  conmuta con  $\Phi$ .

- i) La Definición 4.1.1 de posets anillados **Mod**-afines es un caso particular de la aquí presentada para  $\mathfrak{C} = \mathbf{CRing}$ ,  $\mathfrak{D} = \mathbf{Cat}$  y  $\Phi = \mathbf{Mod}$ .
- ii) Un espacio esquemático es afín si y solo si es Spec-afín —Proposición 4.1.13—.
- iii) Todo **SchFin**-codato 2-esquemático es  $\Pi_1^{\text{ét}}$ -afín —Teorema 9.2.7—.
- iv) Si  $Y_{\mathfrak{C}}: \mathfrak{C} \rightarrow [\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$  es el functor de Yoneda contravariante para una categoría  $\mathfrak{C}$ , todo  $\mathfrak{C}$ -dato es  $Y_{\mathfrak{C}}$ -afín.
- v) Más en general, si  $\Phi: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  es cualquier functor que conmute con límites (finitos), todo  $\mathfrak{C}$ -dato es  $\Phi$ -afín.

- vi) Si  $Y_{\mathcal{C}}$  es como antes,  $\mathbf{Comp}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$  la subcategoría de objetos compactos de  $\mathcal{C}$  y  $Y'_{\mathcal{C}}$  la restricción del functor de Yoneda a esta subcategoría, un  $\mathcal{C}$ -codato  $\mathcal{F}$  con  $|\mathcal{F}|$  filtrante es  $Y'_{\mathcal{C}}$ -afín —pues los objetos compactos son por definición los que conmutan con colímites filtrantes—.

El problema de esta definición es que, al particularizarla al caso de posets anillados afines y espacios **Mod**-afines, no deja claro cuál es el rol de la condición de esquematicidad en la afirmación «si  $X$  es esquemático,  $X$  es **Spec**-afín si y solo si es **Mod**-afín». Del mismo modo, tampoco queda clara la cuestión análoga en cuanto a morfismos se refiere. Definamos:

**Definición A.2.4.** Con las notaciones anteriores, un morfismo de  $\mathcal{C}$ -datos  $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  se dice  $\Phi$ -afín si  $f^{-1}(U_y)$  es  $\Phi$ -afín para todo  $y \in |\mathcal{G}|$ . Además, se dice que  $f$  es una  $\Phi$ -equivalencia si es  $\Phi$ -afín y  $f_{\sharp}: \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$  es un isomorfismo (o 2-isomorfismo).

*Observación A.2.5.* De hecho, la segunda condición puede —y quizá deba— relajarse para lo que sigue: basta que  $f|_{f^{-1}(U_y)}: \mathcal{F}|_{f^{-1}(U_y)} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_y}$  induzca un isomorfismo en secciones  $\Gamma_{\Phi}(f|_{f^{-1}(U_y)}): \Gamma_{\Phi}(\mathcal{F}(f^{-1}(U_y))) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\Phi}(\mathcal{G}_y)$  para todo  $y \in |\mathcal{G}|$ .

*Ejemplo A.2.6.* El ejemplo que motiva la definición de  $\Phi$ -equivalencia son los qc-isomorfismos: un morfismo esquemático es un qc-isomorfismo si y solo si es una **Spec**-equivalencia —y si y solo si es **Mod**-equivalencia—. También es evidente que si  $\Phi = \text{Id}$  es el functor identidad, un morfismo  $f$  de  $\mathcal{C}$ -datos es una **Id**-equivalencia si y solo si  $f_{\sharp}$  es un isomorfismo.

Restrinjámonos ahora al caso de 1-cateogías. El functor de secciones relativas  $\Gamma_{\Phi}$  envía  $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  a un morfismo  $\Gamma_{\Phi}(f): \Gamma_{\Phi}(\mathcal{G}) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(\mathcal{F})$  en  $\mathfrak{D}$ . Si  $f$  es una  $\Phi$ -equivalencia, generalizando la demostración del apartado a.2) del Teorema 5.1.9, podemos definir un morfismo en sentido opuesto. Denotemos  $f_y \equiv f|_{f^{-1}(U_y)}$ . Se tienen morfismos en  $\mathfrak{D}$

$$\Gamma_{\Phi}(\mathcal{F}) \rightarrow \Phi(\Gamma_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}|_{f^{-1}(U_y)})) \xleftarrow{\sim} \Gamma_{\Phi}(\mathcal{F}|_{f^{-1}(U_y)}) \xrightarrow{\sim} \Phi(\mathcal{G}_y) \equiv \Gamma_{\Phi}(\mathcal{G}|_{U_y})$$

—con el primer morfismo el inducido por la inclusión  $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U_y)} \hookrightarrow \mathcal{F}$ — que, por la propiedad universal de los límites —i.e. de  $\Gamma_{\Phi}$ —, inducen

$$\Gamma_{\Phi}(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{D}}(\Phi(\mathcal{G}_y)) \equiv \Gamma_{\Phi}(\mathcal{G})$$

que, se comprueba, es el inverso de  $\Gamma_{\Phi}(f)$ . Es decir, se tiene:

**Lema A.2.7.** Si un morfismo  $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es una  $\Phi$ -equivalencia, entonces  $\Gamma_\Phi(f)$  es un isomorfismo.

Una vez más, en el caso 2-categorial es esperable que se requiera una condición de «cuasiseparabilidad» para que el resultado análogo sea cierto. Esto responde a que los morfismos preserven cierta «coherencia» de los 2-límites que aparecen pues, como ya mencionamos,  $\Gamma_\Phi$  ni siquiera es un functor sin esta condición original: *¡la imagen directa de un «cuasicoherente» no es cuasicoherente!*

El siguiente problema es lograr caracterizar el recíproco, que sí se tiene en el caso de qc-isomorfismos esquemáticos. Si se repasa la demostración del Teorema 5.1.9 se verá que, para el 2-functor **Mod**, además de requerir esta «cuasiseparabilidad» en el morfismo para estar bien definida la cuasicoherencia de la imagen directa, *parece* necesario un «teorema de extensión de haces cuasicoherentes», que es equivalente a la esquematicidad —i.e. «cuasiseparabilidad»— de los espacios involucrados. Nos resulta especialmente misterioso cómo se traduciría una idea de este tipo al caso 1-categorial, pues para este tampoco está claro cómo proceder para probar dicho recíproco.

De este modo, si logramos obtener una definición adecuada de  $\mathcal{C}$ -datos y morfismos de  $\mathcal{C}$ -datos  $\Phi$ -separables para los cuales estos resultados sean ciertos, toda la teoría de espacios esquemáticos podría replicarse a este nivel. En particular, las  $\Phi$ -equivalencias definirían un sistema multiplicativo de flechas —en principio a la izquierda— y podríamos localizar la categoría de  $\mathcal{C}$ -datos por estas, podríamos preguntarnos por la « $\Phi$ -separabilidad» de los cilindros de estos  $\mathcal{C}$ -datos, etc.

## Apéndice B

# Apéndices a la Parte II

### B.1. Espacios infinitos y no noetherianos

Como observamos en varios puntos de la memoria, los espacios esquemáticos presentados en ella modelan esquemas qc-qs, luego noetherianos. Como los A-modelos representan la información combinatoria de un recubrimiento, la restricción que nos imponemos cuando nos reducimos al caso de posets finitos equipados con haces estructurales «puntualmente» noetherianos parece más que justificada. Sin embargo, la filosofía de pensar en los posets anillados como «datos de construcción» para esquemas —y *a posteriori*, de espacios localmente anillados más generales— justifica plantearse la generalización de la teoría al caso de posets infinitos. Puede esperarse que la no-noetherianidad, por norma general, plantee dificultades análogas a las que conlleva en la categoría de esquemas, así que no será un problema específico del contexto esquemático salvo para algunas cuestiones que comentaremos a continuación.

En la práctica, una de las principales complicaciones del «caso infinito» es que, al tratar de escribir condiciones explícitas en los haces estructurales, aparecen productos infinitos, que no son isomorfos como módulos a sumas directas infinitas. En una situación similar, funtores tan ubicuos como  $\text{Spec}: \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{LRS}^{\text{op}}$  no conmutan con productos infinitos, sino que solo nos dan un morfismo natural al afinizado, i.e.

$$\coprod_i \text{Spec}(A_i) \rightarrow \text{Spec}\left(\prod_i A_i\right)$$

para cualquier colección  $\{A_i\}$  dada.

Por fortuna, si se define el  $\mathbf{A}$ -modelo  $\pi: S \rightarrow X$  de un esquema  $S$  cuasi-separado respecto a un recubrimiento abierto localmente afín cualquiera, se siguen verificando las propiedades deseadas: las antiimágenes de los  $U_x$  son afines y  $\pi$  induce una equivalencia entre las categorías de haces cuasicohérentes en ambos espacios. La cuestión es caracterizar los posets anillados, que hemos venido llamando **CRing**-datos, que tienen un comportamiento «esquemático». Consideramos que la guía final debe ser recuperar la Proposición 4.4.6 para el caso infinito: la categoría esquemática debe ser la mayor subcategoría de **CRing-data** con un buen comportamiento respecto a sus módulos cuasicohérentes. También debe recuperarse la localización por qc-isomorfismos de la Sección 5.2, verificándose que si  $\text{Spec}(X)$  es cuasicompacto, debe existir algún representante en la clase de qc-isomorfismo de  $X$  cuyo espacio subyacente es finito.

Con estos objetivos, consideramos que las definiciones de espacio **Mod**-afín y de espacio esquemático que hemos introducido, dadas en términos de haces de módulos, son correctas. La cosa cambia cuando tratamos de caracterizarlas explícitamente: por ejemplo, en b) de la Proposición 4.1.4, no solo se obtiene que para un espacio **Mod**-afín  $X$  el morfismo natural  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}$  es fielmente plano, sino la condición más fuerte de que  $\prod_{x \in X} \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$  es epiyectivo (que también implica la fielplitud). Así, cuando queramos caracterizar espacios afines en términos de sus anillos, deberemos buscar imponer esta segunda condición, que habrá que analizar cómo responde a las técnicas de descenso fielmente plano habituales. El primer requisito sería, por tanto, partiendo de las definiciones cohomológicas, tratar de recuperar las diferentes caracterizaciones explícitas de espacios y morfismos que extraemos de [28] o [32], con las modificaciones técnicas pertinentes.

El siguiente problema tiene que ver con el functor  $\text{Spec}(X)$ . Si un poset anillado  $X$  no está superiormente acotado, la segunda parte de la Proposición 4.3.3 no se verifica, sino solo la siguiente variante: para todo punto de  $|\text{Spec}(X)|$ , que podemos pensar como un haz de ideales cuasicohérente  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$ , el soporte  $\text{sop}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}) \subseteq |X|$  es *filtrante* como categoría —en vez de irreducible como espacio topológico, i.e. con objeto final como categoría—. Esto replica la condición de que un poset con el haz constante  $(X, \mathbb{Z})$  es esquemático si y solo si es filtrante —y en el caso finito, si y solo si es

irreducible—. En particular, no tenemos un modo claro de definir un morfismo centro  $\pi_X: \text{Spec}(X) \rightarrow X$ . La solución más sencilla, aunque quizá ni necesaria ni óptima, sería restringir nuestra situación una vez más: como todo esquema  $S$  es *localmente compacto*, puede comprobarse que siempre podemos tomar  $A$ -modelos suyos superiormente acotados —por ejemplo, para un esquema irreducible, el punto genérico da un punto maximal—, luego podemos restringirnos al caso de posets *superiormente acotados* sin perder generalidad en cuanto a modelar esquemas se refiere. Nótese que la acotación inferior está relacionada con la noetherianidad. Convendría analizar, no obstante, qué tipo de espacios representan los posets no superiormente acotados que estaríamos retirando de nuestro estudio.

Respecto a las definiciones de morfismos planos, fielmente planos, inmersiones planas y qc-isomorfismos, nos parece razonable tomar las dadas por las caracterizaciones functoriales del Teorema 5.1.9, cuyas diferentes descripciones no necesariamente van a mantenerse para el caso de morfismos fielmente planos. Por ejemplo, en el caso infinito no es claro *a priori* que un morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  con  $f^*$  fielmente exacto se pueda caracterizar en términos de la fielplattitud de  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \prod_{x \in f^{-1}(U_y)} \mathcal{O}_{X,x}$  —de nuevo, por cuestiones de conmutación con productos infinitos—, pero sí es claro que la propiedad que buscamos a nivel conceptual es la de  $f^*$ . Habrá que tener cuidado, por tanto, en cómo llevamos estas cuestiones a las aplicaciones, lo que requerirá adaptar algunas de las demostraciones presentadas en la memoria o en las referencias para formularlas en los nuevos términos. Es más, el propio rol solitario de la fielplattitud queda en entredicho en algunos contextos, pues al tratar con el caso infinito ya no debemos tener en mente solo recubrimientos finitos «conjuntamente fielmente planos», sino que, *a priori*, debemos buscar un análogo para la noción de *recubrimiento fpqc* para esquemas —[10, Definition 03NW]— con que equipar a nuestra topología de las inmersiones planas. En efecto: un recubrimiento finito de esquemas por morfismos cuasicompactos es un recubrimiento fpqc si y solo si es epiyectivo como familia. Un problema previo es, por tanto, definir espacios y morfismos «cuasicompactos» entre espacios esquemáticos infinitos. Es claro que la caracterización debe ser: «un espacio esquemático  $X$  es cuasicompacto si y solo si  $\text{Spec}(X)$  es cuasicompacto»; pero nos gustaría disponer de una descripción en términos del propio  $X$ .

Las consideraciones anteriores también aplican al caso de espacios esque-

máticos finitos pero no puntualmente noetherianos, lo cual será de importancia si se quiere desarrollar la teoría de morfismos ind-Zariski e isomorfismos locales que describimos brevemente como parte del Apéndice B.2. En relación con esto, quizá merezca también una mención la construcción de espacios pw-conexos de la Sección 6.3, puesto que cuando  $A$  no es noetheriano,  $\pi_0(\mathrm{Spec}(A))$  no es un conjunto finito, pero sí un conjunto profinito si se considera con la topología final del morfismo natural  $\mathrm{Spec}(A) \rightarrow \pi_0(\mathrm{Spec}(A))$ . En concreto, el análogo de la «descomposición en componentes conexas» es [10, Lemma 097C]: para  $T \subseteq \pi_0(\mathrm{Spec}(A))$  cerrado, existe functorialmente un  $A \rightarrow A_T$  que es colímite filtrante de localizaciones en elementos idempotentes y de modo que  $\pi_0(\mathrm{Spec}(A_T))$  se identifica con  $T$  vía el morfismo inducido. En particular, como los puntos de todo espacio profinito son cerrados, hay una descomposición  $\pi_0(\mathrm{Spec}(A)) = \coprod_{\alpha} \{\alpha\}$  produciendo epimorfismos planos  $A \rightarrow A_{\alpha}$  —con  $\alpha \in A$  idempotente asociado a la componente conexa  $\alpha$ — de modo que  $\coprod_{\alpha} \mathrm{Spec}(A_{\alpha}) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$  es epiyectivo, y por tanto  $A \rightarrow \prod_{\alpha} A_{\alpha}$  es fielmente plano. El problema es que, como  $\mathrm{Spec}$  no conmuta con coproductos arbitrarios,  $A$  no se identifica con el producto de estas «componentes».

En general, si  $A_T$  denota al anillo asociado a un cerrado  $T$  y se tiene  $\pi_0(\mathrm{Spec}(A)) = \coprod_{1 \leq i \leq n} T_i$  para cierta colección de abierto-cerrados  $T_i$  —que podemos suponer finita por ser los espacios profinitos son cuasicompactos—, se obtiene por esta vía una descomposición  $A \simeq \prod_i A_{T_i}$ . Puede ser interesante considerar cómo esta estructura adicional afecta a las diferentes posibles nociones de conexión. Por ejemplo, de modo muy naif, podríamos decir que un espacio esquemático  $X$  es *w-pw-conexo* —«débilmente puntualmente conexo»— si el espacio profinito  $\pi_0(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))$  es conexo y obtener un functor **w-pw** análogo a **pw**.

Una vez salvadas estas cuestiones fundacionales, el resto de la memoria debería poder reproducirse en el caso infinito sin modificaciones sustanciales, describiendo esquemas cuasiseparados cualesquiera. Esto incluye, por ejemplo, Grassmannianas infinitas y los espacios de móduli construidos a partir de ellas, como en [2] o [19]. Nos daría tranquilidad de espíritu ver, por ejemplo, que [26], que describe las propiedades universales de espacios proyectivos y grassmannianas esquemáticas como objetos de la categoría de todos los espacios anillados, puede adaptarse a este caso. Además de esto, considerar en la situación no noetheriana nos permitiría trabajar con

la *topología pro-étale* adaptada a espacios esquemáticos, así como su análoga «abierta», que podríamos llamar «topología pro-Zariski» o «de los isomorfismos locales», que está muy estrechamente relacionada con la de las inmersiones planas, como comentamos en el Apéndice B.2.

## B.2. Epimorfismos planos de anillos

La mayor parte de resultados de esta sección son bien conocidos o lo suficientemente elementales como para que debieran encontrarse en literatura clásica, pero a falta de referencias, perdónenos la redundancia de proporcionar demostraciones para aquellos que no hayamos localizado explícitamente. Una vez discutidas las propiedades que necesitaremos de los epimorfismos planos de anillos, recomendamos la lectura de la comparación que realizamos entre estos y los morfismos ind-Zariski, que si bien no será relevante para la memoria, consideramos que tiene interés conceptual.

### Morfismos planos y epimorfismos de anillos

Recordemos que un morfismo de anillos  $A \rightarrow B$  es plano si el functor de cambio de base  $(-) \otimes_A B: \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(B)$  —que es adjunto por la izquierda del functor de restricción de escalares  $\mathbf{Mod}(B) \rightarrow \mathbf{Mod}(A)$ — es exacto. La noción de plitud es estable por cambio de base y composición, además de local —al localizar tanto en elementos como en ideales primos—. También es conocido que los morfismos planos de anillos verifican la *propiedad del descenso*: la imagen del morfismo

$$\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

es abierta en la topología de las especializaciones de  $\mathrm{Spec}(A)$ .

*Observación B.2.1.* Si, además de plano,  $A \rightarrow B$  es de presentación finita,  $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$  es abierto en la topología de Zariski. En efecto, en ese caso la imagen de un conjunto constructible es constructible y, para dichos conjuntos, ser abierto por generalizaciones y abierto de Zariski es equivalente.

**Proposición B.2.2.** Sean  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  morfismos de anillos con  $g$  y  $g \circ f$  planos. Sea  $\mathfrak{p} \subseteq B$  un primo que no está en la imagen de  $\mathrm{Spec}(g)$  y

denotemos  $\mathfrak{q} = f^{-1}(\mathfrak{p})$ . Se verifica que el morfismo natural

$$\mathfrak{q} \otimes_A C \xrightarrow{\sim} C$$

es un isomorfismo de  $C$ -módulos.

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta  $0 \rightarrow \mathfrak{q} \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{q} \rightarrow 0$ . Como  $g \circ f$  es plano, obtenemos  $0 \rightarrow \mathfrak{q} \otimes_A B \rightarrow C \rightarrow A/\mathfrak{q} \otimes_A C \rightarrow 0$ , y por tanto el resultado es equivalente a ver que  $A/\mathfrak{q} \otimes_A C \simeq 0$ . Si no fuera así, tomando espectros tendríamos que

$$\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{q}) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(C) \neq \emptyset$$

y, por tanto, existiría algún primo  $\alpha \subseteq C$  con  $(f \circ g)^{-1}(\alpha) \subseteq \mathfrak{q}$ ; en particular,  $g^{-1}(\alpha) \subseteq \mathfrak{p}$ . Como  $g$  es plano, satisface la propiedad del descenso, luego obtendríamos un primo  $\beta \subseteq C$  con  $g^{-1}(\beta) = \mathfrak{p}$ , lo cual contradice la hipótesis.  $\square$

Diremos que un morfismo de anillos es un *epimorfismo* si lo es en la categoría **CRing** de anillos conmutativos y con unidad.

**Lema B.2.3.** [10, Lemma 08YS] Si  $\varphi: A \rightarrow B$  un epimorfismo de anillos, el functor de restricción  $\varphi_*: \mathbf{Mod}(B) \rightarrow \mathbf{Mod}(A)$  es plenamente fiel.

**Lema B.2.4.** Si  $\varphi: A \rightarrow B$  es un epimorfismo de anillos, la composición de funtores

$$\mathbf{Mod}(B) \xrightarrow{\varphi_*} \mathbf{Mod}(A) \xrightarrow{\otimes_A^B} \mathbf{Mod}(B)$$

es isomorfa a la identidad.

*Demostración.* Si  $M, N$  son  $B$ -módulos, por el Lema B.2.3 y la adjunción «tensor-Hom»,

$$\mathrm{Hom}_B(M, K) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, K) \simeq \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, K).$$

Como esto es válido para todo  $K$  y functorial, se concluye por Yoneda.  $\square$

*Observación B.2.5.* En particular, el Lema B.2.4 implica que si  $A \rightarrow B$  es un epimorfismo de anillos y  $B \rightarrow C$  un morfismo tal que  $A \rightarrow C$  es plano, entonces  $B \rightarrow C$  también lo es. Nótese que esta condición es demasiado fuerte, pues basta que  $A \rightarrow B$  tenga morfismo de multiplicación plano —esto es la conocida «propiedad de cancelación» para una propiedad de morfismos  $\mathbf{P}$  estable por cambio de base y composición—, no que sea un isomorfismo.

**Lema B.2.6.** Sea  $\varphi: A \rightarrow B$  es un epimorfismo de anillos. Entonces el functor de restricción  $\varphi_*: \mathbf{Alg}(B) \rightarrow \mathbf{Alg}(A)$  es plenamente fiel.

*Demostración.* Es claro que el functor es fiel, veamos la plenitud. Sean  $B$ -álgebras  $R_1$  y  $R_2$ . Para cada morfismo  $f: R_1 \rightarrow R_2$  de  $A$ -álgebras. Se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 R_1 & \xrightarrow{f} & R_2 \\
 & \swarrow h_1 & \searrow h_2 \\
 & B & \\
 & \uparrow \varphi & \\
 & A & 
 \end{array}$$

tal que  $f \circ h_1 \circ \varphi = h_2 \circ \varphi$ ; pero como  $\varphi$  es epimorfismo, esto implica que  $f \circ h_1 = f \circ h_2$ , es decir, que  $f$  es de  $B$ -álgebras.  $\square$

**Corolario B.2.7.** Si  $A \rightarrow B$  es un epimorfismo anillos y  $B \rightarrow C, D$  son epimorfismos de anillos, entonces el morfismo natural de  $A$ -álgebras

$$C \otimes_A D \rightarrow C \otimes_B D$$

es un isomorfismo.

*Demostración.* Basta comprobar la propiedad universal: dada  $E$  una  $B$ -álgebra cualquiera, por las propiedades universales y el Lema B.2.6,

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{B\text{-alg}}(C \otimes_A D, E) &\simeq \text{Hom}_{A\text{-alg}}(C \otimes_A D, E) \simeq \\
 &\simeq \text{Hom}_{A\text{-alg}}(C, E) \times \text{Hom}_{A\text{-alg}}(D, E) \simeq \text{Hom}_{B\text{-alg}}(C, E) \times \text{Hom}_{B\text{-alg}}(D, E),
 \end{aligned}$$

como queríamos.  $\square$

**Proposición B.2.8.** Sea  $A \rightarrow B$  un epimorfismo de anillos. Entonces el functor de cambio de base  $(-) \otimes_A B: \mathbf{Alg}(A) \rightarrow \mathbf{Alg}(B)$  es adjunto por la izquierda del functor de restricción. Es decir, si  $R_1$  una  $A$ -álgebra y  $R_2$  una  $B$ -álgebra. Se tiene una biyección functorial

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(R_1, R_2) = \mathrm{Hom}_{B\text{-alg}}(R_1 \otimes_A B, R_2).$$

*Demostración.* Por la propiedad universal del producto tensorial de  $A$ -álgebras, se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{B\text{-alg}}(R_1 \otimes_A B, R_2) &\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(R_1 \otimes_A B, R_2) \simeq \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(R_1, R_2) \times \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, R_2). \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $A \rightarrow B$  es un epimorfismo y la estructura de  $A$ -álgebra de  $R_2$  está fijada,  $\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(B, R_2) = \{\star\}$ . Por otra parte, se tiene que  $\mathrm{Hom}_{B\text{-alg}}(R_1 \otimes_A B, R_2) = \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(R_1 \otimes_A B, R_2)$  por el Lema B.2.6, obteniéndose la conclusión deseada.  $\square$

**Corolario B.2.9.** Si  $\varphi: A \rightarrow B$  es un epimorfismo de anillos, la composición de funtores

$$\mathbf{Alg}(B) \xrightarrow{\varphi_*} \mathbf{Alg}(A) \xrightarrow{\otimes_A B} \mathbf{Alg}(B)$$

es isomorfa a la identidad.

*Demostración.* Se sigue del Lema B.2.6 y la Proposición B.2.8 con la misma demostración que el Lema B.2.4.  $\square$

**Proposición B.2.10.** Sea  $\varphi: A \rightarrow B$  un epimorfismo de anillos,  $I \subseteq B$  un ideal y  $J = \varphi^{-1}(I)$ . Entonces  $JB = I$ . En particular, si  $A$  es noetheriano,  $J \otimes_A B \xrightarrow{\sim} I$  es un isomorfismo. Si, además,  $\varphi$  es plano,  $A/J \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B/I$ .

*Demostración.* Recordemos que, como  $\varphi(\varphi^{-1}(I)) \subseteq I$ , se tiene  $JB \subseteq I$ . Consideremos

$$A \xrightarrow{\varphi} B \begin{array}{c} \xrightarrow{i_1 \circ \pi_J} \\ \xrightarrow{i_2 \circ \pi_I} \end{array} B/JB \otimes_A B/I,$$

donde las flechas paralelas son composición de las proyecciones con los morfismos naturales al producto tensorial. Es claro que  $i_1 \circ \pi_J \circ \varphi = i_2 \circ \pi_I \circ \varphi$ ,

luego por la condición de epimorfismo obtenemos que  $i_1 \circ \pi_J = i_2 \circ \pi_I$  y, en particular, que los núcleos de ambos coinciden. Basta observar que

$$\begin{aligned} \ker(i_1 \circ \pi_J) &= \{b \in B : [b] \otimes 1 = 0\} = \\ &= \{b \in B : b \in JB \text{ o } \langle b = \varphi(a) + b' \text{ (} b' \in JB) \text{ y } \varphi(a) \in I \rangle\} = \\ &= \{b : b \in JB \text{ o } \langle b = \varphi(a) + b' \text{ y } a \in J \rangle\} = \\ &= \{b : b \in JB \text{ o } \langle b = \varphi(a) + b' \text{ y } \varphi(a), b' \in JB \rangle\} = JB \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} \ker(i_2 \circ \pi_I) &= \{b \in B : 1 \otimes [b] = 0\} = \\ &= \{b \in B : b \in I \text{ o } \langle b = \varphi(a) + b' \text{ (} b' \in I) \text{ y } \varphi(a) \in JB \rangle\} = I + JB = I; \end{aligned}$$

de donde concluimos. La segunda parte se sigue de que, si  $A$  es noetheriano,  $J$  es finito generado, y en ese caso es bien conocido que  $J \otimes_A B \rightarrow JB$  es un isomorfismo. La última afirmación se sigue cambiando de base a  $B$  la sucesión exacta  $0 \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow A/J \rightarrow 0$ .  $\square$

**Lema B.2.11.** [10, Lemma 04VW] Si  $\varphi: A \rightarrow B$  es un epimorfismo de anillos,  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  es inyectivo y, para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$  con imagen  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$ , se tiene un isomorfismo de  $\kappa(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} \kappa(\mathfrak{q})$ ; es decir, los epimorfismos de anillos son isomorfismos «puntuales».

Como consecuencia, observamos que las «fibras» del morfismo en espectros inducido por un epimorfismo se comportan «bien» topológicamente.

**Proposición B.2.12.** Sean  $f: A \rightarrow C$  y  $g: A \rightarrow B$  morfismos de anillos tales que al menos uno de ellos es un epimorfismo de anillos. Se tiene que

$$|\text{Spec}(A) \times_{\text{Spec}(C)} \text{Spec}(B)| = |\text{Spec}(A)| \times_{|\text{Spec}(C)|} |\text{Spec}(B)|.$$

*Demostración.* En efecto, según [14, I.3.4.7], los puntos conjuntísticos del producto fibrado de espacios localmente anillados están en correspondencia biunívoca con ternas  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \alpha)$  tales que

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in |\text{Spec}(A)| \times_{|\text{Spec}(C)|} |\text{Spec}(B)| \text{ y } \alpha \in \text{Spec}(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{\kappa(f^{-1}(\mathfrak{p}))} \kappa(\mathfrak{q}));$$

pero como los epimorfismos de anillos son isomorfismos *puntuales*, el producto tensorial de cuerpos residuales es isomorfo a un cuerpo y, por tanto,  $\alpha$  está determinado.  $\square$

Además, los cerrados asociados a ideales primos se comportan como podría esperarse.

**Proposición B.2.13.** Sea  $\varphi: A \rightarrow B$  un epimorfismo de anillos y sea  $f = \text{Spec}(\varphi)$ . Para todo primo  $\mathfrak{p} \subseteq A$  se verifica que  $f^{-1}(V(f(\mathfrak{p}))) = V(\mathfrak{p})$ .

*Demostración.* Escribiendo las definiciones, la demostración se reduce a ver que para todo  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$  que verifica  $f(\mathfrak{p}) \subseteq f(\mathfrak{q})$ , se tiene  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ . Esto se deduce de la inyectividad y de  $f$  y de su continuidad en la topología de las especializaciones.  $\square$

Vamos a generalizar la Proposición B.2.13 a cualquier ideal. Dado un anillo  $A$ , denotemos  $\text{Id}(A)$  al conjunto de todos los ideales de  $A$ . Dotamos a  $\text{Id}(A)$  de la topología definida por el orden parcial tal que  $I \leq J$  cuando  $J \subseteq I$  —inducida, de hecho, por la topología análoga definida en las partes de  $A$ —. La topología de Zariski en  $\text{Spec}(A)$  es la restricción de esta. A nivel de morfismos,  $\varphi: A \rightarrow B$  induce una aplicación continua

$$\text{Id}(\varphi): \text{Id}(B) \rightarrow \text{Id}(A),$$

pero además se tiene que componiendo con el functor «ideal generado por un subconjunto»,  $\langle - \rangle$ , hay un morfismo  $\varphi_d = \langle - \rangle \circ \varphi: \text{Id}(A) \rightarrow \text{Id}(B)$ .

**Lema B.2.14.** Si  $\varphi: A \rightarrow B$  es un epimorfismo de anillos, entonces se tiene  $\varphi_d \circ \text{Id}(\varphi) = \text{Id}_B$ . En particular,  $\text{Id}(\varphi)$  es inyectiva y  $\varphi_d$  epiyectiva. Restringiéndonos al espectro primo,  $\text{Spec}(\varphi): \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  es inyectiva.

*Demostración.* Esto es el contenido de la Proposición B.2.10.  $\square$

Nótese que, en las condiciones anteriores, para todo ideal  $I \subseteq A$ , el ideal  $(\text{Id}(\varphi) \circ \varphi_d)(I) = \varphi^{-1}(IB)$  se corresponde con el mayor punto de  $\text{Id}(A)$  en el cierre de  $I$  que está en la imagen de  $\text{Id}(\varphi)$ . En efecto,  $IB = \bigcap_{I \subseteq \varphi^{-1}(J)} J$  (con  $J$  ideales), luego

$$\varphi^{-1}(IB) = \bigcap_{I \subseteq \varphi^{-1}(J)} \varphi^{-1}(J)$$

En particular, como esta antiimagen es conjuntísticamente no vacía (pues contiene a  $I$ ), concluimos que hay algún punto en la imagen de  $\text{Id}(\varphi)$  que está en el cierre de  $I$ .

**Proposición B.2.15.** Sea  $\varphi: A \rightarrow B$  un epimorfismo de anillos y sea  $f = \text{Id}(\varphi)$ . Para todo ideal  $I \subseteq A$  se verifica que  $f^{-1}(V(f(I))) = V(I)$ .

*Demostración.* Como en la Proposición B.2.13, se concluye por la inyectividad de  $f$  que hemos demostrado en el lema B.2.14.  $\square$

### Epimorfismos planos de anillos

**Lema B.2.16.** Si  $\varphi: A \rightarrow B$  es un epimorfismo plano,  $\text{Spec}(B)$  es homeomorfo a un abierto de  $\text{Spec}(A)$  en la topología de las especializaciones.

*Demostración.* Se sigue de la inyectividad de  $\text{Spec}(\varphi)$  y de la propiedad del descenso para morfismos planos.  $\square$

Tenemos ahora un recíproco para la Proposición B.2.10.

**Proposición B.2.17.** Si  $\varphi: A \rightarrow B$  es un epimorfismo plano de anillos y  $\mathfrak{q} \subseteq A$  un ideal primo finito generado tal que  $\mathfrak{q}B = \mathfrak{p}$  para algún primo  $\mathfrak{p} \subseteq B$ . Entonces  $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ .

*Demostración.* Como  $\mathfrak{q}$  es finito generado  $\mathfrak{q} \otimes_A B \simeq \mathfrak{q}B$ ; como  $\varphi$  es plano, la condición  $\mathfrak{q} \otimes_A B \xrightarrow{\sim} \mathfrak{p}$  es equivalente a que  $A/\mathfrak{q} \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{p}$ . En particular, el isomorfismo inducido entre espectros da lugar a un homeomorfismo

$$|\text{Spec}(A/\mathfrak{q}) \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(B)| \simeq |\text{Spec}(B/\mathfrak{p})|.$$

Por la Proposición B.2.12, el primer conjunto se identifica con el subyacente al producto fibrado topológico. En particular, obtenemos que

$$\{\alpha \in \text{Spec}(B) : \mathfrak{p} \subseteq \alpha\} = \{\alpha \in \text{Spec}(B) : \mathfrak{q} \subseteq \varphi^{-1}(\alpha)\}.$$

Por un lado, tomando  $\alpha = \mathfrak{p}$ , obtenemos que  $\mathfrak{q} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ . Por otro, como  $\varphi$  es plano, el teorema del descenso nos dice que existe algún  $\beta \in \text{Spec}(B)$  tal que  $\varphi^{-1}(\beta) = \mathfrak{q}$  que, por construcción, debe pertenecer a la fibra de  $\text{Spec}(A/\mathfrak{q})$  en  $\text{Spec}(B)$ , que es  $\text{Spec}(B/\mathfrak{p})$ ; luego  $\mathfrak{p} \subseteq \beta$ . En conclusión, hemos obtenido que

$$\mathfrak{q} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \subseteq \varphi^{-1}(\beta) = \mathfrak{q},$$

de donde se concluye.  $\square$

**Proposición B.2.18.** Si  $\varphi: A \rightarrow B$  es un epimorfismo plano con  $B$  local de maximal  $\mathfrak{m}$ , entonces  $A_{\mathfrak{m}} \simeq B$ .

**Teorema B.2.19.** [16, Prop. 2.4] Sea  $\varphi: A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. Se verifica que  $\varphi$  es un epimorfismo plano si y solo si  $\varphi$  verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- Para todo primo  $\mathfrak{p} \subseteq B$ , el morfismo  $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \otimes_A B$  es isomorfismo.
- Para todo primo  $\mathfrak{q} \subseteq A$ , o bien  $\mathfrak{q}B = B$ , o bien  $A_{\mathfrak{q}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$  es isomorfismo.

En particular, si  $\varphi$  es un epimorfismo, es un epimorfismo plano si y solo si es un *isomorfismo local*, i.e. si para todo primo  $\mathfrak{p} \subseteq B$ , el morfismo inducido  $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$  es isomorfismo.

*Demostración.* La última parte se sigue de la primera y la Proposición B.2.10. □

**Lema B.2.20.** Si  $\varphi: A \rightarrow B$  es un epimorfismo plano de anillos e  $I \subseteq A$  un ideal, entonces  $I$  es radical si y solo si  $I \otimes_A B \subseteq B$  es un ideal radical. En particular, si  $A$  es reducido si y solo si  $B$  es reducido.

*Demostración.* El nilradical y los productos tensoriales conmutan con localizaciones, luego el resultado se sigue del Teorema B.2.19. □

**Proposición B.2.21.** Sea  $\varphi: A \rightarrow B$  un epimorfismo plano de anillos,  $f = \text{Spec}(\varphi)$  y sea  $C \subseteq \text{Spec}(A)$  un cerrado de Zariski con antiimagen  $D = f^{-1}(C) \subseteq \text{Spec}(A)$ . Entonces el morfismo natural  $I(C) \otimes_A B \rightarrow I(D)$  es isomorfismo de  $B$ -módulos.

*Demostración.* Como los epimorfismos planos cambian de base

$$A/I(C) \rightarrow B/I(C)B$$

es un epimorfismo plano y, como  $A/I(C)$  es reducido,  $B/I(C)B$  también lo es por el Lema B.2.20. Además, por la Proposición B.2.12,  $B/I(C)B$  y  $B/I(D)$  definen el mismo cerrado topológico de  $\text{Spec}(B)$ , por lo que ambos deben ser isomorfos. □

**Observaciones sobre la «topología pro-abierta»**

Recordemos la siguiente caracterización clásica de Grothendieck.

**Proposición B.2.22.** [10, Theorem 025G] Un morfismo  $S \rightarrow T$  de esquemas es una inmersión abierta si y solo si es un monomorfismo plano y localmente de presentación finita. En particular, las inmersiones abiertas entre esquemas afines se corresponden con los epimorfismos de anillos planos y de presentación finita.

El siguiente lema es casi trivial, pero de interés conceptual:

**Lema B.2.23.** Si  $\varphi: A \rightarrow B$  es un epimorfismo plano de anillos tal que  $f = \text{Spec}(\varphi)$  es un homeomorfismo, entonces  $\varphi$  es un isomorfismo. En otras palabras: un epimorfismo fielmente plano es isomorfismo.

*Demostración.* En estas hipótesis sabemos además que  $\varphi$  es fielmente plano. El cambio de base de  $\varphi$  por  $\varphi$  es  $B \otimes_A B \rightarrow B$ , que es un isomorfismo, luego  $\varphi$  es un isomorfismo.  $\square$

Fijemos ahora un anillo  $A$  y consideremos la topología en  $\text{Spec}(A)$  generada por las imágenes de los monomorfismos planos  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ . Si  $V \subseteq \text{Spec}(A)$  es uno de estos abiertos básicos, gracias al Lema B.2.23 tiene asociado de modo único un epimorfismo plano  $A \rightarrow B_V$  salvo isomorfismo. Por otra parte, esta topología verifica que todo punto  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  tiene un entorno mínimo: el correspondiente al epimorfismo plano  $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ ; lo que en particular la convierte en una topología de Alexandroff.

Llegados a este punto, uno podría pensar que, como la condición de haz se da sobre una base de abiertos, si  $\text{Spec}(A)_{\text{wZar}}$  denota el sitio de los monomorfismos planos de esquemas afines, se tiene una equivalencia  $\mathbf{Sh}(\text{Spec}(A)_{\text{wZar}}) \simeq \mathbf{Sh}(\text{Spec}(A)_{\leq})$ . Sin embargo, bajo las consideraciones de esta memoria, esto es *falso en general*, puesto que la topología de los monomorfismos planos viene equipada por defecto con *recubrimientos fpqc* —en este caso, *finitos*—, mientras que en la topología de las especializaciones admitiríamos cualquier recubrimiento. Dicho de otro modo, la equivalencia de topos solo se tiene si  $\text{Spec}(A)_{\leq}$  es cuasicompacto como espacio topológico —por ejemplo, si es un espacio finito o el espectro de un anillo semilocal—.

Podemos describir esta situación de modo más general. Extrapolando la definición de recubrimiento fpqc para esquemas, definimos:

**Definición B.2.24.** En la categoría de espacios topológicos, una familia de morfismos  $\{\varphi_i: S_i \rightarrow S\}_{i \in I}$ , diremos que es una *familia cuasicompacta* si  $\coprod_i \varphi_i$  es epiyectiva y, para cada abierto cuasicompacto  $U \subseteq S$ , existe un conjunto finito  $K$ , una aplicación  $j: K \rightarrow I$  y abiertos cuasicompactos  $U_{j(k)} \subseteq S_{j(k)}$  de modo que  $U = \cup_{k \in K} \varphi_{j(k)}(U_{j(k)})$ .

*Ejemplo B.2.25.* Si  $X$  es un poset finito, cualquier familia finita epiyectiva  $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  es cuasicompacta. Si  $S$  es un esquema, una familia epiyectiva  $\{S_i \rightarrow S\}$  es una familia cuasicompacta si y solo si es un recubrimiento fpqc en el sentido ordinario.

**Definición B.2.26.** Dado un espacio topológico  $S$  con A-espacio asociado  $S_{\leq}$  —véase la Observación 1.1.9—, llamaremos *sitio pro-abierto* de  $S$  a aquel cuyos objetos son abiertos de  $S_{\leq}$  y cuyos recubrimientos son las familias cuasicompactas  $\{S_i \hookrightarrow S_{\leq}\}$  de estos abiertos.

Al final, denotando temporalmente a este sitio como  $S_{\text{pro-op}}$ , resulta que podemos interpretarlo en el mismo sentido que la topología conjuntística ordinaria, solo teniendo en cuenta la condición adicional sobre los recubrimientos. Es más, podemos definir un sitio con recubrimientos cuasicompactos a partir de cualquier topología de partida.

*Ejemplo B.2.27.* Si  $X$  es un espacio topológico finito, la topología pro-abierta coincide exactamente con la topología natural de  $X$ , que es la de las especializaciones, puesto que toda familia epiyectiva de abiertos es cuasicompacta, pues está refinada por una familia finita. Si  $X$  es un A-espacio arbitrario, pensado como categoría, ya *no se verifica* la equivalencia de la Proposición 1.4.1

$$\mathbf{Sh}(X_{\text{pro-op}}) \not\cong [X, \mathbf{Set}];$$

puesto que al solo poder considerar recubrimientos cuasicompactos en la condición de haz, dado un functor  $\mathcal{F}: X \rightarrow \mathbf{Set}$  y un «pro-abierto»  $U \subseteq X$ , el límite  $\lim_{x \in U} \mathcal{F}(x)$  ya no computa el ecualizador de la condición de haz —salvo que, por ejemplo,  $U$  sea finito—. En el caso del espectro de un anillo que describimos antes, es fácil ver que se tiene

$$\mathbf{Sh}(\text{Spec}(A)_{\text{pro-op}}) \simeq \mathbf{Sh}(\text{Spec}(A)_{\text{wZar}}).$$

Una observación es que, en el contexto de esta topología pro-abierta, las afirmaciones:

- «Para todo punto  $x \in X$  existe un entorno abierto  $U$  de  $x$  tal que...»;
- «Existe un recubrimiento abierto  $\{U_i\}$  de  $X$  tal que...»

*no son equivalentes* en general. Así, a la hora de hablar de nociones locales, por ejemplo, para definir espacios localmente noetherianos, haces cuasicoherentes o coherentes, etc.; debe tomarse el segundo enunciado. Por ejemplo: si  $(X_{\text{pro-op}}, \mathcal{O})$  un sitio anillado, un haz de  $\mathcal{O}$ -módulos  $\mathcal{M}$  es cuasicoherente si y solo si existe un recubrimiento *cuasicompacto* —como familia—  $\{U_i\}$  por pro-abiertos tal que  $\mathcal{M}|_{U_i}$  es conúcleo de  $\mathcal{O}|_{U_i}$ -módulos libres.

### Comparación con morfismos ind-Zariski

Si nos permitimos trabajar en la situación no noetheriana, los epimorfismos planos están muy estrechamente relacionados con las nociones de «morfismo ind-Zariski» e «isomorfismo local». Este es el análogo para la topología de Zariski de la parte algebraica de [5] para la topología étale, que puede encontrarse desarrollado explícitamente en las primeras secciones de [10, 0966]. Dado que no parece materia estándar, haremos explícitas todas las definiciones necesarias.

**Definición B.2.28.** [5, Definition 2.2.1] Un morfismo de anillos  $\varphi: A \rightarrow B$  es una *localización de Zariski* si  $B = \prod_{i \in I} A_{f_i}$  para ciertos  $f_i$  e  $I$  conjunto finito. Se dice que  $\varphi$  es *ind-(localización de Zariski)* si es colímite filtrante de localizaciones de Zariski.

Nótese que en la definición que sigue vamos a emplear una terminología distinta a la usada en la referencia, puesto que preferimos reservar la terminología «isomorfismo local» para algo más cercano a lo que hemos venido tratando en la memoria.

**Definición B.2.29.** [10, Definition 096E] Un morfismo de anillos  $\varphi: A \rightarrow B$  es *localmente Zariski* —en [10], «*local isomorphism*»— si para todo primo  $\mathfrak{p} \subset B$  existe un  $g \notin \mathfrak{p}$  tal que  $A \rightarrow B \rightarrow B_g$  es un epimorfismo plano de presentación finita. Se dice que  $\varphi$  es *ind-Zariski* si es colímite filtrante de morfismos localmente Zariski. Un morfismo de anillos  $\varphi: A \rightarrow B$  es un *isomorfismo local* —en [10], «*identifies local rings*»— si para todo primo  $\mathfrak{p} \subset B$ , el inducido  $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$  es isomorfismo.

*Ejemplo B.2.30.* Por el Teorema B.2.19, todo epimorfismo plano es un isomorfismo local, y además es claro que toda localización de Zariski y morfismo localmente Zariski también lo es, así como todos los morfismos ind-Zariski e ind-(localización de Zariski).

El gran problema que tenemos al comparar estas clases de morfismos con los epimorfismos planos es que dada una colección de epimorfismos planos  $A \rightarrow B_i$ , el morfismo  $A \rightarrow \prod_i B_i$  es un isomorfismo local, *pero no es un epimorfismo*. Esto se materializa en la siguiente cuestión, que describimos para espacios esquemáticos afines por comodidad, donde todas las condiciones están dadas a nivel de los anillos de secciones globales.

**Lema B.2.31.** Sea  $X$  esquemático afín. Sea un prehaz  $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}})$  verificando: 1) la restricción a la topología conjuntística es un haz, es decir  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$ ; 2) para todo morfismo  $U \rightarrow V$  tal que el morfismo en secciones globales es un isomorfismo local,  $\mathcal{F}$  verifica la condición de haz. Entonces  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}})$ .

*Demostración.* En efecto, por la condición 1),  $\mathcal{F}$  conmuta con productos fibrados finitos, luego para cualquier recubrimiento  $\coprod U_i \rightarrow V$  por inmersiones planas —epimorfismos planos en secciones globales— se tiene  $\mathcal{F}(\coprod U_i) \simeq \prod \mathcal{F}(U_i)$ . Como el propio morfismo  $\coprod U_i \rightarrow V$  es un isomorfismo local fielmente plano en secciones globales, se concluye.  $\square$

Para topologías como la étale —fppf, fpqc, etc.—, el recíproco es cierto, puesto que el morfismo  $\coprod U_i \rightarrow V$  es uno de los morfismos de la topología en la que se trabaja, pero ese no es nuestro caso ahora, lo cual resulta problemático a nivel técnico y no permite identificar los topos de inmersiones planas y «de isomorfismos locales».

La situación se complica algo más al tener que considerar la situación no noetheriana, puesto que una de las propiedades esenciales de esta «topología de los isomorfismos locales» es que los afines admiten recubrimientos por anillos o espacios w-locales: espacios a partir de los cuales cualquier otro recubrimiento escinde. En la topología pro-étale estos son los llamados «objetos w-contráctiles». Por un lado, esta escisión de recubrimientos permite refinar recubrimientos por otros en la topología de Zariski; por otro, resultan ser objetos adecuados para tratar nociones locales sin necesidad de hacificar en muchos casos, reemplazando en cierto sentido a los puntos

de este tipo de topos —que sobre un sitio pequeño no podemos caracterizar en términos de puntos topológicos o esquemáticos del objeto final— a la hora de comprobar propiedades locales, además de otras propiedades relacionadas con con la categoría derivada en este tipo de topologías.

**Definición B.2.32.** [10, Definition 096A] Un anillo  $A$  se dice *w-local* si  $X = \text{Spec}(A)$  es un espacio espectral *w-local*: esto es, si su subconjunto de puntos cerrados es cerrado —si un primo que contiene a la intersección de todos los maximales, es maximal— y todo punto especializa a un único punto cerrado —todo primo está contenido en un único maximal—.

**Lema B.2.33.** [5, Definition 2.1.1, Lemma 2.1.4], [10, Lemma 09AZ] Si  $A$  es *w-local*, para todo recubrimiento abierto  $\{U_i \rightarrow \text{Spec}(A)\}$ ,  $\coprod U_i \rightarrow \text{Spec}(A)$  admite sección. Además,  $\pi_0(\text{Spec}(A))$  es extremalmente desconexo —i.e. el cierre de todo abierto es abierto— si y solo si todo isomorfismo local (si y solo si todo morfismo ind-Zariski)  $A \rightarrow B$  tiene sección.

Quizá la condición de «extremalmente desconexo» pueda debilitarse en nuestro caso, pues solo estaríamos interesados en que los recubrimientos finitos por inmersiones planas tengan sección, que es un caso particular de los isomorfismos locales que describe el Lema —nótese que para que escindan morfismos pro-étale hay que añadir una condición sobre que los anillos locales sean estrictamente henselianos [5, Lemma 2.4.8]—. En cualquier caso, el problema no es tanto este, sino la demostración del Teorema fundamental:

**Teorema B.2.34.** [10, Lemma 09B0] Para todo anillo  $A$  existe un morfismo ind-Zariski fielmente plano  $A \rightarrow B$  tal que  $B$  es *w-local* y  $\pi_0(\text{Spec}(B))$  extremalmente desconexo.

En el contexto de los isomorfismos locales y de la topología pro-étale, esto prueba que todo espacio esquemático  $X$  admite un recubrimiento por «isomorfismos locales»  $\{U_x^{\text{w-loc}} \rightarrow U_x \rightarrow X\}_{x \in X}$  con espacios de salida afines y *w-locales*. Este tipo de recubrimientos serán los «recubrimientos estándar» y generarán el mismo topos que el deseado. Además, es fácil comprobar que cualquier recubrimiento finito por inmersiones planas de un espacio *w-local* de este tipo *está refinado por un recubrimiento de Zariski*, lo cual está unido a cuestiones que se plantean en la Conjetura B.4.34.

Para demostrar el Teorema, primero se prueba una versión sin la última condición, que es donde comienza la problemática: la construcción del

anillo  $w$ -local asociado en [10, 096U], que además es universal, comienza observando que para cada conjunto finito  $E \subseteq A$  se obtiene una estratificación finita de  $\text{Spec}(A) = \coprod_i T_i$  por subconjuntos constructibles, que acaba induciendo localizaciones de Zariski  $A \rightarrow \prod_i A_i$ ; tomándose entonces colímite filtrante sobre toda la familia de subconjuntos finitos de  $A$  para obtener una ind-localización de Zariski  $A \rightarrow B$  —proceso que, por cierto, garantiza que la cardinalidad de  $B$  es, como mucho, la de  $A$ , lo que en última instancia permite hacificar en estas topologías—. Hay dos problemas evidentes: salvo que el anillo  $A$  sea finito,  $B$  no descompone como producto directo de localizaciones o epimorfismos planos y, de hecho,  $B$  no es un anillo noetheriano.

La universalidad de la construcción de anillos  $w$ -locales y el hecho de que, si queremos espacios para los cuales los recubrimientos por inmersiones planas tengan sección, también deben tener sección los recubrimientos por inmersiones abiertas, dibuja una situación bastante desfavorable, pues no parece fácil que pueda modificarse la estrategia para que  $A \rightarrow B$  sea un producto de epimorfismos planos o que, al menos, podamos descomponerlo de algún modo a partir  $\pi_0(\text{Spec}(B))$  y argumentando como discutimos en el Apéndice B.1.

En cualquiera de los casos, nos sigue pareciendo muy interesante la comparación de estos dos topos, de inmersiones planas —o monomorfismos planos de esquemas— e isomorfismos locales, así como las interacciones que puedan plantearse con toda esta teoría algebraica.

### Búsqueda de ejemplos no triviales de espacios esquemáticos

Es sencillo construir espacios esquemáticos cuyo espectro no es un esquema y que, por tanto, no son modelo finito de ningún esquema qc-qs. Cualquier par de esquemas afines «pegados» en los anillos locales de puntos son ejemplos de ello. También podemos construir espacios esquemáticos cuyo espectro es un esquema, pero que no aparecen como modelo finito de ninguno —al menos no respecto a la topología de Zariski—.

*Ejemplos B.2.35.* Sea  $X = \{a, b \leq c\}$  un poset equipaco con el haz de anillos  $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}_X$  tal que  $\mathcal{O}_a = k[x]$ ,  $\mathcal{O}_b = k[x]$ ,  $\mathcal{O}_c = k(x)$  —con  $k$  un cuerpo—. Es trivial comprobar que  $X$  es un espacio esquemático, pero  $\text{Spec}(X)$  es el «pegado» de dos rectas afines en su punto genérico —identificado por la identidad—, que es ejemplo estándar de espacio localmente anillado que no es esquema. De hecho, la intersección de cualesquiera subespacios afines de

$X$  es afín, por lo que la diagonal  $X \rightarrow X \times X$  es afín y, en particular,  $X$  es un espacio esquemático algebraico.

Por otra parte, si consideramos  $Y = \{0 < 1\}$  con haz estructural  $\mathcal{O}_Y$  tal que  $\mathcal{O}_{Y,0} = A$ ,  $\mathcal{O}_{Y,1} = A_{\mathfrak{p}}$  para cierto primo  $\mathfrak{p} \subseteq A$ ,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  es esquemático afín con  $\text{Spec}(Y) = \text{Spec}(A)$ ; pero no es modelo finito de este esquema afín en general —en el limitado sentido de la Construcción 1.5.4, que ampliaremos en el Lema B.4.17—, pues  $\text{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) \subseteq \text{Spec}(A)$  no es, en general, un abierto de Zariski.

Para construir ejemplos más patológicos debemos observar que existen epimorfismos planos de anillos que no son localizaciones —ni «localizaciones universales»—: dado  $A$ , estos morfismos  $A \rightarrow B$  se clasifican en [23, Theorem 5.17] como los correspondientes a subconjuntos de  $\text{Spec}(A)$  abiertos para la topología de las especializaciones verificando una condición de nulidad de cierto grupo de «cohomología local». Más concretamente, esto se hace vía la clásica correspondencia de Neeman ([21]) entre subconjuntos de  $\text{Spec}(A)$  —resp. abiertos en la topología de las generalizaciones— y subcategorías localizantes de  $D(A)$  —resp. subcategorías *smashing*—, verificando en este caso ciertas condiciones adicionales. En este contexto, la cohomología local aparece asociada a uno de los funtores —de «torsión» de un *recollement* de categorías trianguladas—. Los autores proporcionan ejemplos explícitos de anillos y subconjuntos en dichas hipótesis, pero la correspondencia es, al menos a nuestro entender, demasiado compleja para traducir el mero criterio de existencia —de un representante en una categoría derivada— en un morfismo de anillos explícito. Quizá pueda aliviarse esta dificultad vía la descripción de la correspondencia de Neeman dada en términos de derivadores en [1, Section 5].

### B.3. Sitios y topos

Recopilamos aquí definiciones de algunos conceptos que aparecerán en la memoria, dado que la terminología no es siempre estándar, así como resultados básicos relativos a ellas. Las de continuidad y cocontinuidad que aparecen a continuación proceden de [10] y no deben confundirse con las *a priori* diferentes usadas en teoría de categorías general —referentes a conmutación con límites y colímites respectivamente—. En un abuso de lenguaje, trabajaremos siempre en términos de *pretopologías* de Grothendieck,

i.e. especificando las familias de «recubrimientos» de cada objeto.

**Definición B.3.1.** [10, Definition 00WV] Sean  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$  sitios y  $u: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  un functor. Se dice que  $u$  es *continuo* si para todo recubrimiento  $\{V_i \rightarrow V\}_i$  en  $\mathfrak{C}$ : 1)  $\{u(V_i) \rightarrow u(V)\}_i$  es un recubrimiento en  $\mathfrak{D}$ ; 2)  $u$  cambia de base el recubrimiento, i.e. para todo  $T \rightarrow V$ , se tienen isomorfismos naturales  $u(T \times_V V_i) \simeq u(T) \times_{u(V)} u(V_i)$  para todo  $i$ .

Un functor verificando la condición 2) es a veces llamado *functor plano*. Un functor continuo define un *morfismo de sitios*, que denotamos en sentido opuesto por analogía con el caso topológico, i.e. un morfismo de sitios  $f: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$  es un functor continuo  $u: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ . Se induce un *morfismo geométrico* entre los topos de haces correspondientes

$$(f^{-1} \dashv f_*): \mathbf{Sh}(\mathfrak{D}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathfrak{C});$$

donde imagen directa e inversa se definen de modo análogo al caso topológico —la segunda en presencia de límites y requiriendo hacificación que, para la discusión que realizamos, supondremos existe functorialmente—. Nótese que denotamos  $f^{-1}$  a la imagen inversa —en vez de  $f^*$ — para distinguir con el caso de haces de módulos en sitios anillados.

**Definición B.3.2.** Un functor entre sitios  $u: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  se dice *cocontinuo* si para todo  $V$  en  $\mathfrak{C}$  y recubrimiento  $\{U_i \rightarrow u(V)\}$  en  $\mathfrak{D}$  existe un recubrimiento  $\{V_j \rightarrow V\}$  de modo que la familia de morfismos  $\{u(V_j) \rightarrow u(V)\}$  refina al recubrimiento de partida.

Si ahora tenemos que  $u: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  es un functor *continuo y cocontinuo* definiendo un morfismo de sitios  $f: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$ , se tiene un functor «imagen directa admirable»  $f^!$  adjunto a la derecha de la imagen inversa y de modo que la terna

$$(f^{-1} \dashv f_* \dashv f^!): \mathbf{Sh}(\mathfrak{D}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathfrak{C})$$

define un morfismo geométrico *esencial* de topos.

*Observación B.3.3.* Si el functor  $u$  definiendo  $f$  es continuo y cocontinuo, el functor «prehaz imagen directa» coincide con el haz: no es necesario hacificar. Esto es [10, Lemma 00XR].

Lo que se tiene en realidad es que  $u$  cocontinuo define un morfismo de topos  $(f_* \dashv f^!)$  en dirección opuesta —abusando de notación al utilizar las  $f$  sin haber exigido continuidad—. El siguiente resultado, que reproducimos con diferencias en notación, dice cuándo  $\mathbf{Sh}(\mathfrak{C})$  se identifica como un subtopos de  $\mathbf{Sh}(\mathfrak{D})$ .

**Proposición B.3.4.** [10, Lemma 00XT, Lemma 00XU] Sea  $u: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  un functor 1) continuo, cocontinuo y plenamente fiel; entonces  $\text{Id} \xrightarrow{\sim} f_* f^{-1}$  y  $f_* f^! \xrightarrow{\sim} \text{Id}$ . Si además 2)  $\mathfrak{C}$  admite productos fibrados y  $u$  conmuta con ellos, 3)  $\mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{D}$  tienen objeto final y  $u$  los preserva; entonces, si  $f$  denota el morfismo de sitios inducido, la composición de morfismos

$$\mathbf{Sh}(\mathfrak{C}) \xrightarrow{(f_* \dashv f^!)} \mathbf{Sh}(\mathfrak{D}) \xrightarrow{(f^{-1} \dashv f_*)} \mathbf{Sh}(\mathfrak{C})$$

es isomorfa a la identidad. Además,  $f^{-1}$  es plenamente fiel y  $\mathbf{Sh}(\mathfrak{C})$  es subtopos de  $\mathbf{Sh}(\mathfrak{D})$ .

**Proposición B.3.5.** [10, Lemma 03A0] Sea  $u: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  como antes verificando: 1) es continuo y cocontinuo; 2) para cualesquiera  $a, b: V \rightarrow V'$  en  $\mathfrak{C}$  con  $u(a) = u(b)$  existe un recubrimiento  $\{f_i: V_i \rightarrow V\}$  tal que  $a \circ f_i = b \circ f_i$  para todo  $i$ ; 3) dados  $V, V'$  y  $c: u(V) \rightarrow u(V')$ , existe un recubrimiento  $\{f_i: V_i \rightarrow V\}$  y morfismos  $c_i: V_i \rightarrow V'$  tales que  $u(c_i) = c \circ u(f_i)$ ; 4) todo  $U \in \mathfrak{D}$  admite un recubrimiento  $\{u(V_i) \rightarrow U\}$ . Entonces el morfismo  $(f_*, f^!)$  induce una equivalencia.

Por último, acabamos observando que, por [10, Lemma 03A2], todo morfismo geométrico de topos  $(f^{-1}, f_*): \mathbf{Sh}(\mathfrak{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathfrak{D})$  viene inducido por un triángulo de morfismos de sitios  $\mathfrak{C} \leftarrow \mathfrak{C}' \rightarrow \mathfrak{D}$  donde la flecha de la izquierda viene dada por un functor en la hipótesis de la Proposición B.3.5. Dicho informalmente, el functor  $\mathfrak{C} \mapsto \mathbf{Sh}(\mathfrak{C})$ , localizado por la clase de morfismos de sitios verificando las hipótesis de la Proposición B.3.5, es plenamente fiel.

Vamos ahora a repasar las definiciones relativas a *puntos*. Un *punto de un topos*  $\mathcal{E}$  no es más que un morfismo geométrico de topos  $p: \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{E}$ . Tomamos como definición de punto la caracterización de [10, Proposition 00YC] para sitios con límites finitos —que será el caso en toda esta memoria—, obtenida partir de las observaciones del párrafo anterior:

**Definición B.3.6.** Dado  $\mathfrak{C}$  un sitio con límites finitos —equivalentemente, productos fibrados y objeto final—, un *punto*  $p$  de  $\mathfrak{C}$  es un morfismo de sitios  $\mathbf{Set} \rightarrow \mathfrak{C}$  dado por un functor  $u: \mathfrak{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  tal que

- $u$  conmuta con límites finitos —o equivalentemente,  $u$  con productos fibrados y envía el objeto final al conjunto final  $\star$ —.
- Para todo recubrimiento  $\{U_i \rightarrow U\}$  en  $\mathfrak{C}$ ,  $\coprod_i u(U_i) \rightarrow u(U)$  es epiyectivo.

Esta definición se escribe de tal modo que los puntos de un sitio se correspondan con los *puntos del topos* inducido:

**Definición B.3.7.** Dado un topos  $\mathcal{E}$ , un punto es un morfismo geométrico de topos  $p: \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{E}$ . Se dice que  $\mathcal{E}$  tiene *suficientes puntos* si para cualesquiera  $f, g: A \rightarrow B$  en  $\mathcal{E}$  con  $f \neq g$ , existe  $p$  tal que  $p^*(f) \neq p^*(g)$ .

Si  $\mathfrak{C}$  es un sitio y  $\mathbf{Sh}(\mathfrak{C})$  el topos inducido, hay una correspondencia 1:1 entre los puntos de  $\mathfrak{C}$  y de  $\mathbf{Sh}(\mathfrak{C})$ : cada punto del topos es el morfismo geométrico inducido por el morfismo de sitios. Se dice que  $\mathfrak{C}$  tiene suficientes puntos si  $\mathbf{Sh}(\mathfrak{C})$  los tiene.

La moraleja de la historia es que un sitio  $\mathfrak{C}$  tiene suficientes puntos si los isomorfismos de haces pueden determinarse en «fibra». Si  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathfrak{C})$  y  $p$  es un punto, es habitual denotar

$$\mathcal{F}_p := p^*(\mathcal{F}).$$

Hay diferencias de terminología en la literatura, pero a menudo los esquemas qc-qs también se llaman *esquemas coherentes*, por ejemplo en [5]. Un motivo es que la noción que sustituye a la de «cuasicompacidad» a nivel de topos es la de «topos coherente» —o si se prefiere, «sitio coherente»—.

**Definición B.3.8.** [3, Exposé VI, 2.3; 2.1 (ii)] Se dice que un topos de Grothendieck  $\mathcal{E}$  es un *topos localmente coherente* si es  $\mathcal{E} \simeq \mathbf{Sh}(\mathfrak{C})$  para  $\mathfrak{C}$  un sitio con productos fibrados finitos y tal que todo objeto admite un recubrimiento finito —es «cuasicompato»—.

*Observación B.3.9.* En [3] también se dan nociones de finitud más restrictivas, con las que se definen los conceptos de *topos algebraico*, *topos cuasise-parado* y *topos coherente*. En [24, D.3.3] se prueban propiedades adicionales de los topos (localmente) coherentes.

*Ejemplo B.3.10.* El topos de Zariski de un esquema  $S$  es coherente si y solo si  $S$  es cuasicompacto. El topos étale —tanto el pequeño para un esquema cuasicompacto como el grande grande— también es coherente: recordemos que un monomorfismo étale es una inmersión abierta, luego las condiciones 1) y 2) siguen verificándose; y como los morfismos étale tienen imagen abierta —por ser planos y de presentación finita—, la cuasicompacidad sigue aplicando —en el caso del sitio grande hay que ver que el subsitio étale de esquemas afines genera el mismo topos—.

El siguiente es un Teorema clásico de Deligne que da condiciones suficientes para que un topos de Grothendieck tenga suficientes puntos.

**Teorema B.3.11** (Teorema de completitud de Deligne). [3, Exposé VI, Prop. 9.0], [18, Corollary 4.2]. Todo topos localmente coherente tiene suficientes puntos.

Cuando un topos tiene suficientes puntos, la noción de «topos localmente anillado» que recordamos a continuación coincide con la definición en términos de fibras a la que nos llevaría la intuición de los espacios localmente anillados.

**Definición B.3.12.** [10, Definition 04EU] Un sitio anillado  $(\mathfrak{C}, \mathcal{O})$  es localmente anillado si para todo  $U$  y  $f \in \mathcal{O}(U)$  existe un recubrimiento  $\{U_i \rightarrow U\}$  tal que, para cada  $i$ , o bien  $f|_{U_i}$  o bien  $(1 - f)|_{U_i}$  son invertibles.

**Proposición B.3.13.** [10, Lemma 05D8, Lemma 04ET] Sea  $(\mathfrak{C}, \mathcal{O})$  un sitio anillado con suficientes puntos. Se verifica que es localmente anillado si y solo si para todo punto  $p$ , la fibra  $\mathcal{O}_p$  es un anillo local no nulo.

## B.4. Proesquemas

Aunque en general es preferible trabajar con espacios esquemáticos y evitar hablar de sus espectros, un estudio elemental de estos últimos proporciona algunas herramientas importantes que pueden aclarar la situación general y proporcionar técnicas con que abordar algunos resultados, como el Teorema 7.4.16. Como el espectro de un espacio esquemático es un *recollement* de esquemas afines por monomorfismos planos de esquemas afines, que se corresponden «esencialmente» con los límites proyectivos de inmersiones abiertas, emplearemos la siguiente terminología:

**Definición B.4.1.** Un espacio localmente anillado  $S$  es un *proesquema* si existe algún espacio esquemático  $X$  tal que  $S \simeq \text{Spec}(X)$ . Se dice que  $X$  es una *presentación* de  $S$ .

Añadiendo a la descripción topológica de  $\text{Spec}(X)$  del Lema 3.2.7, se tienen los siguiente resultados. Citamos los presentados en [32], pero proporcionamos nuevas demostraciones cuando se indique. Nótese que mantendremos la distinción allí considerada entre abiertos y abiertos cuasicompactos, es decir, que en principio se está considerando incluso la situación no puntualmente noetheriana.

*Observación B.4.2.* En [32] se prueban muchos resultados solo para el caso de  $\text{Spec}(U) \subseteq \text{Spec}(X)$  con  $U \subseteq X$  un abierto. Sin embargo, estos generalizan automáticamente al caso en que  $U \rightarrow X$  es una inmersión plana cualquiera —y así lo expondremos en lo que sigue—, pues estas factorizan como  $U \subseteq X' \rightarrow X$  con  $U \subseteq X'$  un abierto y  $X' \rightarrow X$  un qc-isomorfismo —Corolario 5.4.19—, quedando así cualquier cuestión relativa a  $\text{Spec}(X) \simeq \text{Spec}(X')$  e independiente de la presentación reducida al caso de abiertos.

**Lema B.4.3.** [32, Section 13, Lemma 20] Sea  $X$  esquemático y sea un abierto  $W \subseteq \text{Spec}(X)$ . Se verifica que  $W$  es cuasicompacto si y solo si  $\text{Spec}(X) - W = V(\mathcal{I})$  para  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$  *coherente*.

Como en el caso de la topología de Zariski en el espectro de un anillo noetheriano, se razona para probar la siguiente colección de resultados básicos —y más variantes que no citamos aquí—:

**Proposición B.4.4.** [32, Section 13, Proposition 21, Corollaries 22, 25, 26, Theorem 27] Dado  $X$  esquemático y  $S = \text{Spec}(X)$ , se verifica:

- 1) Una intersección finita de abiertos cuasicompactos de  $S$  es cuasicompacta, es decir  $S$  es *cuasiseparado*.
- 2) Los abiertos cuasicompactos de  $\text{Spec}(X)$  son una base de su topología.
- 3) Si  $i: U \rightarrow X$  es una inmersión plana y  $W \subseteq \text{Spec}(X)$  un abierto cuasicompacto,  $\text{Spec}(U) \cap W$  es cuasicompacto.
- 4) Si  $U$  es como antes y  $V \subseteq \text{Spec}(U)$  es un abierto, existe un abierto  $W \subseteq \text{Spec}(X)$  tal que  $V = \text{Spec}(U) \cap W$ .

5) Si  $U$  es como antes,  $\text{Spec}(U)$  coincide con la intersección de todos sus entornos abiertos cuasicompactos; i.e.  $\text{Spec}(U) = \bigcap_{\text{Spec}(U) \subseteq W} W$  con  $W$  abierto cuasicompacto.

6) Para todo sistema filtrante de haces de grupos abelianos  $\{\mathcal{F}_j\}$  en  $S$ ,

$$H^i(S, \text{colim } \mathcal{F}_j) \simeq \text{colim } H^i(S, \mathcal{F}_j)$$

para todo  $i \geq 0$ .

7) Si  $i: U \rightarrow X$  es una inmersión plana y  $V \subseteq \text{Spec}(U)$  un abierto cuasicompacto, para todo haz de grupos abelianos  $\mathcal{F}$  en  $S$  se tiene

$$\mathcal{F}|_{\text{Spec}(U)}(V) \simeq \text{colim}_{V \subseteq W} \mathcal{F}(W);$$

donde el colímite se toma sobre todos los entornos abiertos cuasicompactos  $W$  de  $V$ . En particular,  $H^i(V, \mathcal{F}|_{\text{Spec}(U)}) \simeq \text{colim}_{V \subseteq W} H^i(W, \mathcal{F})$  para todo  $i \geq 0$ .

8) Para todo  $i: U \rightarrow X$ , se tiene  $\mathcal{O}_{S|\text{Spec}(U)} \simeq \mathcal{O}_{\text{Spec}(U)}$ .

Ya vimos que todo espacio esquemático  $X$  está dotado de una aplicación

$$\pi: \text{Spec}(X) \rightarrow X;$$

pero en general esta no es continua, luego no se puede esperar establecer una equivalencia entre haces cuasicoherentes  $\text{Spec}(X)$  y  $X$  de un modo tan sencillo como haríamos en esquemas. Recordemos que para todo poset anillado  $X$  tenemos las inclusiones naturales  $i_x: \text{Spec}(U_x) \rightarrow \text{Spec}(X)$  induciendo una proyección natural

$$\rho: \coprod_{x \in X} \text{Spec}(U_x) \rightarrow \text{Spec}(X)$$

de modo que  $\coprod_{x \in X} \text{Spec}(U_x)$  es un esquema. El morfismo  $\coprod_x U_x \rightarrow X$  es fielmente plano, luego el functor imagen inversa que induce entre los cuasicoherentes es fielmente exacto. Esto motiva la siguiente Definición:

**Definición B.4.5.** Dado  $X$  esquemático, diremos que un  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(X)}$ -módulo  $\mathcal{N}$  es un módulo *cuasicoherente descendido* si  $\rho^* \mathcal{N} \in \mathbf{Qcoh}(\coprod_{x \in X} \text{Spec}(U_x))$ . Denotemos por

$$\mathbf{dQcoh}(X) \subseteq \mathbf{Mod}(\text{Spec}(X))$$

a la categoría de módulos cuasicoherentes descendidos en  $\text{Spec}(X)$ .

**Construcción B.4.6.** Dado  $X$  esquemático y un  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ , definimos el *módulo cuasicoherente descendido asociado a  $\mathcal{M}$* , que denotamos  $\widetilde{\mathcal{M}}$ , como

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \lim_{x \in X} i_{x*} \widetilde{\mathcal{M}}_x;$$

donde  $\widetilde{\mathcal{M}}_x$  es el módulo cuasicoherente en  $\mathrm{Spec}(U_x)$  asociado a  $\mathcal{M}_x$ .

**Proposición B.4.7.** Se tiene una equivalencia de categorías

$$\mathbf{Qcoh}(X) \simeq \mathbf{dQcoh}(X)$$

dada por  $\mathcal{M} \mapsto \widetilde{\mathcal{M}}$  y cuya inversa envía cada  $\mathcal{N}$  cuasicoherente descendido al  $\mathcal{O}_X$ -módulo  $\mathcal{N}^\Gamma$  con  $\mathcal{N}_x^\Gamma = \mathcal{N}(\mathrm{Spec}(U_x))$ .

*Demostración.* Inmediato. □

**Corolario B.4.8.** Dado un proesquema  $S$  y dos presentaciones cualquiera  $\mathrm{Spec}(Y) \simeq S \simeq \mathrm{Spec}(X)$ , se tiene una equivalencia  $\mathbf{dQcoh}(Y) \simeq \mathbf{dQcoh}(X)$ . En particular, la categoría de módulos cuasicoherentes descendidos de no depende —salvo equivalencia— de la presentación elegida y, cuando no se especifique o no queramos fijar una presentación, la denotamos  $\mathbf{dQcoh}(S)$ .

*Observación B.4.9.* En el Corolario 5.5.9 ya probamos que ser cuasicoherente es local en la topología de las inmersiones planas de espacios esquemáticos. En el caso separado, el Corolario previo puede interpretarse como una reformulación de esto vía la Construcción 5.4.22 de «modelos finitos».

**Corolario B.4.10.** Si  $X$  es un espacio esquemático tal que  $S = \mathrm{Spec}(X)$  es un esquema, se tienen equivalencias de categorías

$$\mathbf{Qcoh}(X) \simeq \mathbf{dQcoh}(S) \simeq \mathbf{Qcoh}(S).$$

*Demostración.* La última equivalencia se sigue de que ser cuasicoherente es local en la topología fpqc de esquemas [10, Theorem 03O8]. □

Como sucede en el caso de módulos coherentes en ind-esquemas, tenemos un mejor comportamiento cuando estamos bajo hipótesis de finitud.

**Teorema B.4.11.** Si  $X$  es esquemático y  $S = \text{Spec}(X)$ , se tiene una equivalencia

$$\mathbf{Coh}(X) \simeq \mathbf{Coh}(S).$$

En particular,  $\mathbf{Coh}(S)$  es una subcategoría abeliana de Grothendieck de  $\mathbf{Mod}(S)$ .

*Demostración.* Basta demostrar que todo módulo cuasicoherente descendido  $\mathcal{N} \in \mathbf{dQcoh}(S)$  correspondiente a uno coherente en  $X$  vía la Proposición B.4.7 es, de hecho, coherente para la topología conjuntística de Zariski de este espacio. Esto es, tenemos que dar un recubrimiento abierto  $\{U_i\}$  de  $S = \text{Spec}(X)$  tal que cada  $\mathcal{N}|_{U_i}$  es un  $\mathcal{O}_{U_i}$ -módulo finito generado. Esto es exactamente [32, Section 15, Lemma 7]. El argumento clave es que si un morfismo de  $\mathcal{O}_S$ -módulos  $\mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$  es epiyectivo en un punto  $\mathbf{x}$ , entonces  $\mathcal{N}'|_V \rightarrow \mathcal{N}|_V$  es un epimorfismo en algún entorno abierto  $V$  de  $\mathbf{x}$ . Esto se sigue de que  $\{s \in S : \mathcal{N}_s = 0\}$  es un abierto de  $S$  y, por tanto,  $\{s \in S : \mathcal{N}_s = 0\} \cap \text{Spec}(U_x)$  es abierto de  $\text{Spec}(U_x)$  para todo  $x \in X$ ; lo que aplicamos al conúcleo de nuestro morfismo.

Queda ver que para todo abierto  $V \subseteq S$ , todo  $n \geq 0$  y toda epiyección  $\varphi: \mathcal{O}_V^{\oplus n} \rightarrow \mathcal{N}|_V$ ,  $\ker(\varphi)$  es finito generado como  $\mathcal{O}_V$ -módulo, es decir, para todo  $\mathbf{x} \in V$ , existe un  $m \geq 0$ , un entorno abierto  $W$  de  $\mathbf{x}$  y una epiyección  $\mathcal{O}_W^{\oplus m} \rightarrow \ker(\varphi)|_W \rightarrow 0$ . En efecto, dado dicho  $\mathbf{x}$ , se tiene que  $\ker(\varphi)_{\mathbf{x}}$  es finito generado por ser ideal de un anillo noetheriano  $\mathcal{O}_{X,\mathbf{x}}^{\oplus m}$ , y por el mismo argumento de antes,  $\ker(\varphi)|_W$  es finito generado en algún entorno  $W$  de  $\mathbf{x}$ . La última afirmación se sigue del Teorema 3.1.7.  $\square$

**Corolario B.4.12.** Si  $S \simeq \mathbf{Qcoh}(X)$  es un proesquema, se tiene una equivalencia

$$\mathbf{dQcoh}(S) \simeq \{\mathcal{N} \in \mathbf{Mod}(S) : \mathcal{N} = \text{colim}_i \mathcal{N}_i \text{ con } \mathcal{N}_i \in \mathbf{Coh}(S)\};$$

donde el colímite es filtrante. Además, esto es compatible con las equivalencias de la Proposición B.4.7 y el Teorema B.4.11, es decir, si  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$  es  $\mathcal{M} = \text{colim}_i \mathcal{M}_i$  con  $\mathcal{M}_i \in \mathbf{Coh}(X)$ , entonces  $\widetilde{\mathcal{M}} = \text{colim}_i \widetilde{\mathcal{M}}_i$ .

*Demostración.* Dado  $\mathcal{N} \in \mathbf{dQcoh}(S)$  y  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$  el haz cuasicoherente asociado, se tiene que  $\mathcal{M} \simeq \text{colim}_i \mathcal{M}_i$  con  $\mathcal{M}_i \in \mathbf{Coh}(X)$  por ser

los coherentes la subcategoría de compactos de la de cuasicoherentes y ser esta última compactamente generada —véase la Observación 3.1.15—. Como límites finitos conmutan con colímites filtrantes en categorías abelianas de Grothendieck, se concluye gracias a los isomorfismos naturales  $\mathcal{N} \simeq \widetilde{\mathcal{M}} \simeq \widetilde{\text{colim}_i \mathcal{M}_i} \simeq \text{colim}_i \widetilde{\mathcal{M}_i}$ . La compatibilidad se sigue de la construcción.  $\square$

El Corolario B.4.12 implica, en espíritu, que la cohomología de haces cuasicoherentes descendidos coincide con la cohomología de los cuasicoherentes en el modelo finito, pero hay algunos detalles técnicos que explicaremos más adelante y que nos van a limitar a casos con más hipótesis de las deseables. Por el momento, vamos a tratar los morfismos entre proesquemas.

**Definición B.4.13.** Dado un morfismo de espacios localmente anillados  $g: S \rightarrow T$  con  $S, T$  proesquemas, se dice que  $g$  es *esquemático* si  $g_*$  preserva módulos cuasicoherentes descendidos. Sea **PSch** la categoría de proesquemas y morfismos esquemáticos.

En [32, Section 14, Proposition 6] se prueba que dado un morfismo esquemático de espacios esquemáticos  $f: X \rightarrow Y$  y  $\text{Spec}(f)$  el morfismo inducido, tomar imágenes directas de un cuasicoherente conmuta con tomar los haces cuasicoherentes descendidos asociados. En particular,  $\text{Spec}(f)$  es un morfismo esquemático.

En este contexto, en [32] también se demuestra que los morfismos esquemáticos de proesquemas se corresponden con morfismos en **SchFin<sub>qc</sub>**, pero solo bajo la hipótesis adicional de que el espacio de llegada sea *semiseparado*, lo cual, *a posteriori*, forzaría que los morfismos sean afines. En general y sin esta hipótesis, sí que se tiene que el functor  $\text{Spec}$  induce un functor

$$\text{Spec}: \mathbf{SchFin}_{\text{qc}} \rightarrow \mathbf{PSch}.$$

*fiel y esencialmente epiyectivo* —[32, Section 15, Proposition 25]—, pero la equivalencia de categorías en general, aunque creemos debe ser cierta, sigue quedando fuera de nuestro alcance. Para evitar esta condición de semiseparabilidad y tener un caso suficientemente amplio para nuestros propósitos: válido, al menos, a espacios esquemáticos cuyos espectros sean esquemas; nos restringimos al caso «algebraico»

**Definición B.4.14.** Se dice que un morfismo  $g: S \rightarrow T = \text{Spec}(X)$  entre proesquemas es *algebraico* si para todo morfismo esquemático  $Z \rightarrow X$  con  $R = \text{Spec}(Z)$  un esquema,  $S \times_T R \rightarrow R$  es un morfismo *entre esquemas qc-qs*. Se dice que un proesquema  $S$  es algebraico si su diagonal  $S \rightarrow S \times S$  es algebraica. Sea **AlgPSch** la subcategoría de proesquemas algebraicos y morfismos algebraicos.

*Observación B.4.15.* Esta definición depende, *a priori*, de la presentación  $S = \text{Spec}(X)$ , pero el Teorema B.4.22 demostrará que acaba siendo independiente de ella. Es claro que los isomorfismos siempre son algebraicos, con independencia de las presentaciones elegidas.

*Notación B.4.16.* Sea **AlgSchFin**  $\subseteq$  **SchFin** la subcategoría de espacios esquemáticos algebraicos y morfismos —esquemáticos— algebraicos entre ellos. Por la Proposición 7.1.8, los qc-isomorfismos son algebraicos, luego tiene sentido considerar la localización **AlgSchFin**<sub>qc</sub>. Es claro que se tiene un functor inducido

$$\text{Spec}: \mathbf{AlgSchFin}_{\text{qc}} \rightarrow \mathbf{AlgPSch}$$

fiel y esencialmente epiyectivo. De hecho, el functor valora en la intersección **AlgPSch**  $\times_{\mathbf{LRS}}$  **PSch**. El Corolario B.4.23 probará que esta es **AlgPSch**.

**Lema B.4.17.** Sea  $S$  un esquema afín y  $\{f_i: V_i \rightarrow S\}$  un recubrimiento finito «localmente afín» por monomorfismos planos —es decir, para todo  $s \in S$  el «entorno mínimo de  $s$ », definido como el producto fibrado sobre la base  $V^s = \prod_{s \in f_i(V_i)} V_i$ , es afín—, entonces *el modelo finito* de  $S$  respecto a las imágenes de este recubrimiento — $\pi_S: S \rightarrow X$ , equipado con el haz estructural tal que  $\mathcal{O}_{X, \pi_S(s)} = \mathcal{O}_{V^s}(V^s)$ — es esquemático afín y verifica que  $\text{Spec}(X) \simeq S$ . En particular, se inducen equivalencias

$$\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_S(S)) \simeq \mathbf{Qcoh}(S) \simeq \mathbf{dQcoh}(S) \simeq \mathbf{Qcoh}(X).$$

*Observación B.4.18.* Recordemos que podemos entender  $\mathcal{O}_S$  como haz en el sitio de los monomorfismos planos y cuyos recubrimientos están dados por familias finitas epiyectivas —por ejemplo, por ser un haz de Zariski y verificarse (2') de [10, Lemma 022H], pues un monomorfismo fielmente plano es un isomorfismo por el Lema B.2.23—. Dado un monomorfismo plano  $V \rightarrow S$  con  $V$  afín, denotemos  $\mathcal{O}_S(V) = \mathcal{O}_V(V)$ . Esto tiene sentido

porque, como estamos en la situación afín, la imagen de  $V \rightarrow S$  determina  $V$  salvo isomorfismo por el mismo Lema B.2.23 y la discusión bajo este. Dado ahora un recubrimiento  $\{W_k \rightarrow V\}$  finito por monomorfismos planos con  $W_k$  afines y de modo que cada  $W_k \times_S W_{k'}$  se recubre por un número finito de  $\{W_{k''} \rightarrow W_k \times_S W_{k'}\}$ , se tiene que  $\mathcal{O}_S(V) \simeq \lim_k \mathcal{O}_S(W_k)$  por la propia condición de haz.

*Demostración.* Reemplazamos el recubrimiento de partida por  $\{V^s \rightarrow S\}$ , con  $s$  recorriendo cierto conjunto finito de puntos de  $S$ . Por definición de  $\text{Spec}(X)$ , se tiene  $f: \text{Spec}(X) \rightarrow S$  de espacios localmente anillados, epiyectivo por construcción y verificando  $f^{-1}(V^s) = \pi_X^{-1}(U_{\pi_S(s)}) = \text{Spec}(U_{\pi_S(s)})$  —identificando monomorfismos planos con sus imágenes—. Para empezar, es claro que  $X$  es pseudoesquemático, pues el cambio de base de un monomorfismo plano de esquemas es un monomorfismo plano y, entre esquemas afines, estos son exactamente aquellos cuyos morfismos entre secciones globales son epimorfismos planos de anillos. Obtenemos por composición  $\pi_S \circ f: \text{Spec}(X) \rightarrow X$  epiyectivo. Por el Teorema 4.3.19, acabamos si vemos que  $f$  es un isomorfismo. Para empezar,  $f$  es un homeomorfismo por descenso fielmente plano para esquemas, véase, por ejemplo [10, Lemma 02JY]; pero además, por la Observación B.4.18 y notando que si  $\alpha \in V^s \cap V^t$  para ciertos  $\alpha, s, t \in S$ , hay una factorización  $V^\alpha \rightarrow V^s \times_S V^t \rightarrow S$ , tenemos finalmente  $\mathcal{O}_S(S) \simeq \lim_s \mathcal{O}_S(V^s) \simeq \mathcal{O}_{\text{Spec}(X)}(\text{Spec}(X))$ . De la propiedad universal

$$\text{Hom}_{\mathbf{LRS}}(\text{Spec}(X), \text{Spec}(\mathcal{O}_S(S))) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{CRing}}(\mathcal{O}_S(S), \mathcal{O}_{\text{Spec}(X)}(\text{Spec}(X)))$$

y se concluye que  $f$  es isomorfo al morfismo natural de afinización en  $\mathbf{LRS}$ ,  $\text{Spec}(X) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{\text{Spec}(X)}(\text{Spec}(X)))$ ; pero como ya sabíamos que es un homeomorfismo, se obtiene que es un isomorfismo, completando la demostración. Observemos, por completitud, que

$$\mathcal{O}_X(U_{\pi(s)} \cap U_{\pi(t)}) \simeq \mathcal{O}_S(V^s \cap V^t) \equiv \mathcal{O}_{V^s \times_S V^t}(V^s \times_S V^t)$$

para todo  $s, t \in S$ ; donde el primer isomorfismo se tiene porque

$$\mathcal{O}_X(U_{\pi(s)} \cap U_{\pi(t)}) \simeq \lim_{z \geq \pi(s), \pi(t)} \mathcal{O}_{X,z} = \lim_{\alpha \in V^s \cap V^t} \mathcal{O}_S(V^\alpha) \simeq \mathcal{O}_S(V^s \cap V^t)$$

por la Observación B.4.18 — $V^s \times_S V^t \rightarrow S$  tiene imagen  $V^s \cap V^t$  y es, salvo isomorfismo, el único monomorfismo plano con dicha imagen—.  $\square$

*Observación* B.4.19. En las condiciones del Lema B.4.17, para todo abierto  $U \subseteq X$ ,  $\text{Spec}(U)$  es un proesquema. En particular,  $\text{Spec}$  define un morfismo de sitios del sitio de los monomorfismos planos en  $S$  —pensado como proesquema— al topológico de  $X$ .

**Lema B.4.20.** Dado un esquema qc-qs  $S$  y un recubrimiento  $\{W_i \rightarrow S\}$  finito por monomorfismos planos con  $W_i$  esquemas qc-qs, existe un recubrimiento por monomorfismos planos localmente afín —en el sentido del Lema B.4.17— refinando a  $\{W_i \rightarrow S\}$ .

*Demostración.* Basta considerar un recubrimiento abierto finito y localmente afín  $\{U_{ij}\}_j$  de cada  $W_i$  —que existe por ser estos esquemas qc-qs— y tomar  $\{U_{ij} \rightarrow S\}_{i,j}$ . Si  $S$  es semiseparado —por ejemplo, afín—, hemos acabado. En caso contrario, las intersecciones  $U_{ij} \times_S U_{i'j'}$  vuelven a ser cuasicompactas, luego cada una se recubre por un número finito de afines  $V_{ij'i'j'}$  contenidas en algún afín. Como los productos fibrados entre afines son afines, se comprueba fácilmente que el recubrimiento  $\{U_{ij}, V_{ij'i'j'} \rightarrow S\}$  es localmente afín en el sentido requerido, exactamente igual que se argumenta para recubrimientos abiertos: identificando los espacios con sus imágenes, si  $s \in U_{ij}$  para solo un  $U_{ij}$ , entonces  $U^s = U_{ij}$ ; si pertenece a varios, está en un producto fibrado de  $V_{ij'i'j'}$  contenidos en cierto afín, luego el producto fibrado de todos ellos, el entorno mínimo buscado, es afín.  $\square$

El siguiente Teorema es, en esencia, generalización de [32, Section 15, Theorem 29]. Aclaremos que cuando hablemos de *monomorfismos* y *morfismos planos* en el contexto de proesquemas, nos referimos, *a priori*, a sus definiciones en la categoría de espacios localmente anillados —un morfismo  $g: S \rightarrow T$  es plano si  $g_s^\sharp$  es plano  $\forall s \in S$ —. Nótese que los monomorfismos planos son estables por cambio de base arbitrario en **LRS**, pues los monomorfismos los son y, precisamente por estar cambiando de base un monomorfismo, el producto fibrado en **LRS** tiene como espacio subyacente el producto fibrado topológico, siendo las fibras del haz de anillos el producto tensorial de las fibras de sus componentes. Un qc-monomorfismo (resp. morfismo plano) de espacios esquemáticos  $f: X \rightarrow Y$  induce un monomorfismo (resp. morfismo plano) entre los espectros.

*Observación* B.4.21. De hecho, en la situación que aparece en el Teorema B.4.22 que sigue, vamos a cambiar de base un morfismo que sabemos es

límite filtrante de abiertos cuasicompactos, luego su antiimagen será un límite filtrante de abiertos de un esquema, i.e. un monomorfismo plano.

**Teorema B.4.22.** Si  $g: \text{Spec}(X) = S \rightarrow T = \text{Spec}(Y)$  es un morfismo algebraico de proesquemas con  $X$  algebraico, se verifica que  $g = \text{Spec}(f/\phi)$  para algún morfismo  $f/\phi$  con  $f$  y  $\phi$  algebraicos. En particular, el functor

$$\text{Spec}: \mathbf{AlgSchFin}_{\text{qc}} \rightarrow \mathbf{AlgPSch}$$

es una equivalencia de categorías.

*Demostración.* Solo queda ver que el functor es pleno. Consideremos un morfismo algebraico  $g: \text{Spec}(X) \rightarrow \text{Spec}(Y)$ . Supongamos en primer lugar que  $X$  es afín, por lo que  $\text{Spec}(X)$  es un esquema afín. Sea  $\{\text{Spec}(U_y)\}_{y \in Y}$  el recubrimiento estándar por monomorfismos planos, inducido por  $U_y \subseteq Y$ ; y sea  $\{\text{Spec}(U_y) \times_{\text{Spec}(Y)} \text{Spec}(X) \equiv g^{-1}(\text{Spec}(U_y))\}$  el recubrimiento antiimagen, que sigue siendo un recubrimiento por monomorfismos planos entre esquemas qc-qs por las hipótesis sobre  $g$ . Considérese  $\{V_i^y\}_{i,y}$  un recubrimiento como en el Lema B.4.20 refinando a este. Como en la construcción de modelos finitos ordinaria, se obtiene un modelo finito  $\text{Spec}(X) \rightarrow Z$  respecto a este recubrimiento, que es esquemático por el Lema B.4.17, y morfismos de posets anillados entre espacios esquemáticos

$$(\star, \mathcal{O}_X(X)) \xleftarrow{\phi'} Z \xrightarrow{f} Y;$$

esquemáticos por el Teorema 4.3.26. Tomando  $Z' := Z \times_{(\star, \mathcal{O}_X(X))} X$  obtenemos un morfismo en la localización  $f/\phi: X \leftarrow Z' \rightarrow Y$  de modo que  $\text{Spec}(f/\phi) = g$ . Nótese que, a la postre,  $g$  es esquemático.

Ahora, si  $X$  es un espacio esquemático cualquiera,  $\text{Spec}(U_x) \rightarrow \text{Spec}(Y)$  es algebraico por serlo  $X \rightarrow Y$  y por tanto  $U_x \rightarrow X$ . Como  $X = \text{colim}_x U_x$  y  $\text{Spec}(X) = \text{colim}_x \text{Spec}(U_x)$ , por el caso afín y la conmutación del functor de puntos covariante con colímites, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}}(X, Y) &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}}(\text{colim}_x U_x, Y) \simeq \\ &\simeq \text{colim}_x \text{Hom}_{\mathbf{SchFin}_{\text{qc}}}(U_x, Y) \simeq \text{colim}_x \text{Hom}_{\mathbf{PSch}}(\text{Spec}(U_x), \text{Spec}(Y)) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{PSch}}(\text{Spec}(X), \text{Spec}(Y)), \end{aligned}$$

de donde concluimos. □

**Corolario B.4.23.** Todo morfismo algebraico entre proesquemas algebraicos es esquemático. Es decir,  $\mathbf{AlgPSch} \subseteq \mathbf{PSch}$ .

*Observación B.4.24.* Sospechamos que todo morfismo algebraico podría ser automáticamente esquemático, sin suponer algebraicidad en los espacios: ser cuasicoherente descendido es una cuestión local, luego para probar el resultado bastaría aplicar la algebraicidad para cambiar de base los  $\mathrm{Spec}(U_y) \rightarrow T$  y emplear algún teorema de cambio de base plano para las imágenes directas sin derivar, que habría de probarse a este nivel de proesquemas y morfismos de espacios localmente anillados.

En particular, el Teorema B.4.22 dice que, en la categoría de proesquemas algebraicos, los morfismos cambian de base cualquier morfismo desde un esquema, aunque no provenga de un morfismo entre espacios esquemáticos, con lo que se recupera en cierto sentido la pérdida de generalidad en que habíamos incurrido en la definición de morfismo algebraico en pos de poder definir el functor  $\mathrm{Spec}$  entre las categorías deseadas.

**Corolario B.4.25.** Si  $g: S \rightarrow T$  es un morfismo algebraico de proesquemas, entonces para todo morfismo esquemático algebraico  $R \rightarrow T$  con  $R$  un esquema,  $S \times_T R$  es un esquema.

*Demostración.* Sea  $Y$  tal que  $\mathrm{Spec}(Y) \simeq T$  y sea  $X$  un modelo finito de  $R$ . Por ser  $R \rightarrow T$  es algebraico, el Teorema B.4.22 garantiza que viene inducido por un  $f/\phi: X \leftarrow Z \rightarrow Y$ . Ahora,  $\mathrm{Spec}(Z) \times_T S \simeq R \times_T S$  es un esquema por la hipótesis de algebraicidad sobre  $g$ .  $\square$

*Observación B.4.26.* Empleando ahora el Teorema 7.4.16, que depende del Teorema B.4.22 previo, se concluye que todo espacio esquemático semiseparado  $X$  es algebraico, pero creemos que se tiene más; que los morfismos afines son «fuertemente algebraicos»: es decir, se debería verificar que si  $f: X \rightarrow Y$  es afín, para todo esquema qc-qs  $R$  y morfismo esquemático  $g: R \rightarrow \mathrm{Spec}(Y)$ ,

$$R \times_{\mathrm{Spec}(Y)} \mathrm{Spec}(X) \simeq \underline{\mathrm{Spec}}_R(g^* f_* \mathcal{O}_X).$$

En particular, si  $X$  es semiseparado y  $\mathrm{Spec}(A) \rightarrow X$  es un morfismo esquemático, este sería automáticamente algebraico, luego procediendo como la última parte de la demostración del Teorema B.4.22, se recupera el resultado expuesto en [32, Section 15, Theorem 29]: todo morfismo esquemático

$\mathrm{Spec}(X) \rightarrow \mathrm{Spec}(Y)$  con  $Y$  semiseparado proviene de un morfismo  $f/\phi$ . En el fondo, lo que sucede es que los  $\mathrm{Spec}(U_x) \rightarrow \mathrm{Spec}(Y)$  son afines por la semiseparabilidad de  $Y$  y, como todas las construcciones son compatibles, se obtiene  $f/\phi$  como un colímite de morfismos afines.

*Conjetura B.4.27.* Todo morfismo algebraico  $S \rightarrow T$  cambia de base cualquier  $R \rightarrow T$  con  $R$  esquema a un esquema qc-qs  $R \times_T S$ , es decir, es «fuertemente algebraico». En particular, todo morfismo  $S \rightarrow T$  con  $S$  esquema qc-qs y  $T$  algebraico, sería un morfismo algebraico. Bajo esta hipótesis, se demostraría el Teorema B.4.22 imponiendo algebraicidad solo en el espacio de llegada.

**Corolario B.4.28.** Si  $g: S \rightarrow T$  es un monomorfismo plano algebraico y epiyectivo de proesquemas, entonces es un isomorfismo.

*Demostración.* Por el Teorema B.4.22, se tiene que  $g = \mathrm{Spec}(f/\phi)$  con  $f: X \rightarrow Y$  esquemático algebraico para cierto  $X$ . Como *ser monomorfismo plano* cambia de base, para todo  $Z \rightarrow Y$  con  $\mathrm{Spec}(Z)$  esquema, el morfismo  $\mathrm{Spec}(Z) \times_T S \simeq \mathrm{Spec}(Z \times_Y X) \rightarrow \mathrm{Spec}(Z)$  es un monomorfismo plano, i.e.  $f$  es algebraicamente monomorfismo plano, luego inmersión plana  $\square$

**Corolario B.4.29.** La categoría de proesquemas algebraicos tiene productos fibrados finitos y el functor olvido  $\mathbf{AlgPSch} \hookrightarrow \mathbf{LRS}$  los preserva.

Volviendo a la cohomología, en [32] se prueba el siguiente resultado:

**Teorema B.4.30.** [32, Section 14] Si  $X$  es esquemático *semiseparado* y  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ , se tienen isomorfismos  $H^i(X, \mathcal{M}) \simeq H^i(\mathrm{Spec}(X), \widetilde{\mathcal{M}})$  para todo  $i \geq 0$ .

Creemos que la hipótesis de separabilidad puede reemplazarse por la más débil de que  $X$  sea algebraico, en especial si es cierta la Conjetura B.4.27, y con una estrategia de demostración «natural» que esbozaremos en la Conjetura B.4.34, basada en dar una definición intrínseca del functor  $\widetilde{(-)}$  como uno inducido por cierta equivalencia de sitios. Esta formulación recogería también el caso que sigue, para espacios esquemáticos cuyo espectro es un esquema, que obtenemos de otro modo, vía la Proposición 5.2.4 —de hecho, los espacios esquemáticos cuyo espectro es un esquema verifican la conclusión de la Conjetura B.4.27 y los puntos i) y ii) de B.4.34, por lo que

probar el resultado para ellos «de modo natural» se reduce a la cuestión, quizá puramente topológica, planteada en iii) de dicha Conjetura B.4.34—. En cualquier caso, la versión que sigue será suficiente para su aplicación en el Teorema 7.6.1:

**Corolario B.4.31.** Sea  $X$  esquemático con  $\text{Spec}(X)$  un esquema y sea  $\mathcal{M} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ . Se tienen isomorfismos  $H^i(X, \mathcal{M}) \simeq H^i(\text{Spec}(X), \widetilde{\mathcal{M}})$  para todo  $i \geq 0$ .

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 5.2.4, de que el resultado es cierto para modelos finitos de esquemas —respecto a recubrimientos abiertos— y de que la equivalencias de categorías abelianas, inducidas por el morfismo continuo  $\pi_X: \text{Spec}(X) \rightarrow X$ , es exacta.  $\square$

De hecho, sospechamos que el resultado análogo podría ser cierto sin hipótesis alguna sobre  $X$  —al igual que el Teorema B.4.22—.

Solo nos queda exponer una estrategia de demostración para el caso algebraico, que consiste en definir intrínsecamente el functor  $\widetilde{(-)}$ :

**Definición B.4.32.** Dado un proesquema  $S \simeq \text{Spec}(X)$ , denotemos por  $S_{\text{wZar}}$  al sitio cuyos objetos con los monomorfismos planos esquemáticos entre proesquemas  $T \rightarrow S$  y cuyos recubrimientos son las familias finitas epiyectivas. Denotemos por  $S_{\text{wZar}}^{\text{Aff}}$  al subsitio generado por los morfismos desde afines, que define el mismo topos —como en la Proposición 5.6.13—.

El functor  $\text{Spec}$  induce, a nivel de sitios, un functor

$$\text{Spec}: X_{\text{wZar}} \rightarrow S_{\text{wZar}}$$

que, de hecho, factoriza por la localización por qc-isomorfismos.

**Proposición B.4.33.** Si todos los espacios y morfismos que aparecen son algebraicos,  $\text{Spec}$  induce una equivalencia  $(X_{\text{wZar}})_{\text{qc}} \simeq S_{\text{wZar}}$ . En particular, se tiene una equivalencia de topos  $\mathbf{Sh}(X_{\text{wZar}}) \simeq \mathbf{Sh}(S_{\text{wZar}})$ . Además, esta equivalencia extiende a una de topos anillados y da equivalencias entre las categorías de haces de módulos, que finalmente inducen

$$\mathbf{dQcoh}(S) \simeq \mathbf{Qcoh}(X) \simeq \mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}}) \simeq \mathbf{Qcoh}(S_{\text{wZar}}).$$

*Demostración.* La equivalencia de sitios se sigue del Teorema B.4.22, lo cual implica la equivalencia de topos. A nivel de sitios anillados —con el haz de anillos estándar—, se sigue de 8) la Proposición B.4.4, lo que, en combinación con la Proposición 5.6.26, implica el resto de afirmaciones.  $\square$

Si la Conjetura B.4.27 es cierta —o si se verifica su conclusión— la Proposición B.4.33 es cierta imponiendo solo que  $X$  sea algebraico, pues se tiene una equivalencia de sitios  $(X_{\text{wZar}}^{\text{Aff}})_{\text{qc}} \simeq S_{\text{wZar}}^{\text{Aff}}$ , que induce la misma equivalencia de topos requerida. *Supongamos a partir de este punto que trabajamos bajo estas hipótesis.*

Dado  $X$  algebraico, sea ahora  $X_\tau$  el sitio definido por la topología de  $|X|$ . Se tiene un functor continuo de inclusión  $X_\tau \rightarrow X_{\text{wZar}}$  induciendo, por la Proposición 5.6.26, equivalencias  $\mathbf{Qcoh}(X) \simeq \mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}})$  —y también  $\mathbf{Coh}(X) \simeq \mathbf{Coh}(X_{\text{wZar}})$ —. Si  $X_{\text{Zar}}$  es el sitio de Zariski en el sentido de la Definición 7.7.11, se tiene una inclusión  $X_{\text{Zar}} \rightarrow X_{\text{wZar}}$  —que, de hecho, valora en el sitio *algebraico* de los monomorfismos planos—. Por lo expuesto y la Proposición B.4.33, se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Qcoh}(X) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Qcoh}(X_{\text{wZar}}) \\ \widetilde{(-)} \downarrow & & \downarrow \sim \\ \mathbf{dQcoh}(X) & & \mathbf{Qcoh}(\text{Spec}(X)_{\text{wZar}}). \end{array}$$

En este contexto, la situación ideal sería tener un functor plenamente fiel

$$\mathbf{Mod}(\text{Spec}(X)_{\text{wZar}}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\text{Spec}(X))$$

*definido a partir de un morfismo de sitios* y tal que la imagen esencial de la subcategoría de  $\mathbf{Qcoh}(\text{Spec}(X)_{\text{wZar}})$  coincidiese exactamente con la subcategoría de cuasicohérentes descendidos. Esto está relacionado con las siguientes cuestiones:

*Conjetura B.4.34.*

- i) Si  $U \subseteq S \simeq \text{Spec}(X)$  es un abierto —cuasicompacto—, ¿es  $U$  un pro-esquema? ¿Es cierto lo análogo para  $V \rightarrow S$  un monomorfismo plano de espacios localmente anillados? ¿Se simplifica la situación si suponemos que  $X$  es algebraico?

- ii) Podríamos definir un proesquema como un espacio localmente anillado qc-qs que es localmente afín en la topología de los monomorfismos planos. También como un haz en el sitio grande de los monomorfismos planos que está «dominado» por una unión disjunta finita de monomorfismos planos desde esquemas conjuntamente epiyectiva. Puede que sea necesario incluir la condición de diagonal representable y restringirnos al caso «algebraico». Probar la equivalencia de estas potenciales definiciones con la nuestra es equivalente, en esencia, a la cuestión planteada en i); o dicho de otro modo, ¿podemos considerar modelos finitos de objetos que verifiquen estas definiciones alternativas de proesquema?
- iii) Si i) es cierto para abiertos, con las notaciones antes introducidas, se tiene un functor de inclusión continuo

$$\mathrm{Spec}(X)_\tau \rightarrow \mathrm{Spec}(X)_{\mathrm{wZar}}$$

definiendo el functor  $i_*: \mathbf{Mod}(\mathrm{Spec}(X)_{\mathrm{wZar}}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathrm{Spec}(X))$  que buscábamos. De hecho, si podemos ver que los topos están generados por afines sin hipótesis de algebraicidad en  $X$  —siendo el problema si un abierto  $V \subseteq \mathrm{Spec}(X)$  se recubre por afines—, podríamos trabajar sin hipótesis o con alguna más débil.

- iii') En relación con el punto anterior, nos preguntamos por una cuestión, quizá topológica, cuya sombra planea sobre muchos razonamientos de esta memoria: en el caso de que  $S$  sea *esquema*, ¿se refina todo recubrimiento *fppc* de  $S$  por monomorfismos planos —pongamos que finito— por un recubrimiento abierto? Un resultado así implicaría que, cuando  $S = \mathrm{Spec}(X)$ , este espacio esquemático  $X$  es, en esencia, el modelo finito respecto a un recubrimiento abierto junto con una serie de «pro-abiertos» añadidos. Además, estaríamos diciendo exactamente que el functor de inclusión  $S_{\mathrm{Zar}} \rightarrow S_{\mathrm{wZar}}$  es cocontinuo, luego por la Proposición B.3.4 identificaríamos el topos de Zariski de  $S$  como un subtopos del de los monomorfismos planos y, además, como se verifican las condiciones de la Proposición B.3.5, tendríamos una equivalencia. No creemos, sin embargo, que esto sea cierto en esta generalidad: el análogo no es cierto para la topología pro-étale al compararla con la étale, puesto que los refinamientos por abiertos solo existen tras pasar

a ciertos anillos «w-contráctiles», es decir, que para los sitios pequeños sobre los esquemas afines de dichos anillos los topos pro-étale y étale son equivalentes, pero no sobre esquemas arbitrarios; y en vista de las observaciones realizadas para morfismos ind-Zariski en relación con los anillos «w-locales» en el Apéndice B.2, quizá la situación de los monomorfismos planos podría ser similar.

- iv) Si i) y iii) son ciertos,  $\mathrm{Spec}(X)_\tau \rightarrow \mathrm{Spec}(X)_{\mathrm{wZar}}$  subyace a un morfismo de sitios anillados  $i: (\mathrm{Spec}(X)_{\mathrm{wZar}}, i^{-1}\mathcal{O}) \rightarrow (\mathrm{Spec}(X)_\tau, \mathcal{O})$  tal que  $i^* \simeq i^{-1}$ , que debería inducir un functor de imagen directa *plenamente fiel*  $\mathbf{Mod}(\mathrm{Spec}(X)_{\mathrm{wZar}}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathrm{Spec}(X))$ , pues que  $\mathrm{Spec}(X)$  viene equipado con la topología cociente de los  $\mathrm{Spec}(U_x)$ —; de modo podríamos definir  $\mathbf{dQcoh}(X)$  como su imagen esencial. En particular, si  $\mathrm{Spec}(X)$  es un esquema,  $\mathbf{Qcoh}(\mathrm{Spec}(X)) \simeq \mathbf{Qcoh}(\mathrm{Spec}(X)_{\mathrm{wZar}})$ , lo cual es compatible con todo lo expuesto. Nótese que, en el caso para esquemas, el functor en cuestión *siempre* existe. Observemos también que los funtores  $\mathrm{Spec}$  inducen morfismos de sitios anillados —teniendo en cuenta la Sección 7.7—

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Spec}(X)_{\mathrm{wZar}}, i^{-1}\mathcal{O}) & \longrightarrow & (\mathrm{Spec}(X)_\tau, \mathcal{O}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X_{\mathrm{wZar}}, \mathcal{O}_{X_{\mathrm{wZar}}}) & \longrightarrow & (X_{\mathrm{Zar}}, \mathcal{O}_{X_{\mathrm{Zar}}}) \end{array}$$

cuyas propiedades deberían estudiarse.

- v) Si iv) es cierta, como tenemos un cuadrado conmutativo dado por equivalencias entre categorías abelianas, por lo tanto exactas, y estas vienen inducidas por morfismos de sitios —luego el functor derivado de la imagen directa *es la hacificación de la cohomología en las imágenes* por los funtores subyacentes—, se concluiría que la cohomología en todas estas categorías es isomorfa. En particular, recuperaríamos

$$H^i(X, \mathcal{M}) \simeq H^i(\mathrm{Spec}(X), \widetilde{\mathcal{M}})$$

para todo  $i \geq 0$  y para  $X$  algebraico —o quizá en general, como mencionamos en iii)—, además de que habríamos construido una teoría natural relacionando los haces de espacios esquemáticos y proesquemas. Esto también puede hacerse a partir de la equivalencia a nivel

de haces coherentes, gracias al Teorema B.4.11 y el Corolario B.4.12, junto con 6) de la Proposición B.4.4. Insistimos: el problema es que  $(-)$  no viene inducido por un morfismo de sitios en *a priori*, luego si iv) no fuese cierto, el functor derivado que le corresponde no se expresaría en términos de grupos de cohomología ordinarios y no podríamos probar la afirmación.

**Observación sobre «completación esquemática»**

Algunas de las cuestiones planteadas en esta sección pueden estar relacionadas con la siguiente patología: dado un poset anillado  $X$ , pongamos que pseudoesquemático, ¿cuándo puede encontrarse un espacio esquemático  $X'$  tal que  $X \subseteq X'$  y  $\text{Spec}(X) \simeq \text{Spec}(X')$ ? La situación más simple se da cuando  $\text{Spec}(X)$  es un esquema qc-qs, véase el Ejemplo 4.1.5. Sugerimos aquí un método muy rudimentario para solventar esta cuestión.

Como sabemos, un poset anillado pseudoesquemático  $X$  es esquemático si y solo si todo punto  $\mathfrak{x} \in \text{Spec}(X)$  *centra* en un único  $x \in X$ ; es decir, si para todo haz de ideales primos cuasicoherente  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$ , el cociente  $\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}$  está soportado en un cerrado irreducible de  $X$ . Podemos considerar el subconjunto

$$\text{Spec}(X)_0 = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(X) : \text{sop}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}) \text{ es irreducible.}\} \subseteq \text{Spec}(X);$$

que podemos llamar la *parte esquemática* de  $\text{Spec}(X)$ . Por definición, se tiene una aplicación  $\text{Spec}(X)_0 \rightarrow X$  y el problema consiste en extenderla a todo  $\text{Spec}(X) \rightarrow X'$  para cierto  $X'$ . Un espacio pseudoesquemático es esquemático si y solo si  $\text{Spec}(X)_0 = \text{Spec}(X)$ .

**Definición B.4.35.** Si  $X$  es pseudoesquemático, diremos que  $x \in X$  es *redundante* si no está en la imagen de  $\text{Spec}(X)_0 \rightarrow X$ .

**Construcción B.4.36.** Supongamos que  $X = U_x$  y que  $x$  no es redundante. Para proceder, denotemos  $C_{\mathfrak{p}} = \text{sop}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{p})$  para  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X$ . La idea es que si  $C_{\mathfrak{p}} = C_{x_1} \cup \dots \cup C_{x_n}$  son las componentes irreducibles, deberemos añadir un punto  $x_{\mathfrak{p}}$  con anillo  $\otimes_{1 \leq i \leq n} \mathcal{O}_{X,x_i}$  —tensorial sobre  $\mathcal{O}_{X,x}$ —. Para abordar este problema sugerimos lo siguiente: consideremos la inclusión conjuntística  $X \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Cada  $\Delta \in \mathcal{P}(X)$  define un subconjunto

$$\text{Spec}(X)_{\Delta} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(X) : C_{\mathfrak{p}} = \cup_{y \in \Delta} C_y \text{ son componentes irreducibles}\}.$$

Claramente  $\coprod_{\Delta} \text{Spec}(X)_{\Delta} = \text{Spec}(X)$  y  $\coprod_{y \in X} \text{Spec}(X)_{\{y\}} = \text{Spec}(X)_0$ . Por construcción, hay una aplicación

$$\rho: \text{Spec}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

tal que  $\rho(\mathfrak{p})$  es subconjunto definido por los máximos de  $C_{\mathfrak{p}}$ . Dotemos a  $\mathcal{P}(X)$  de la topología cociente de la topología de las especializaciones de  $\text{Spec}(X)$ .

Para  $r \geq 0$ , denotemos  $\mathcal{P}_r(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$  al subconjunto de partes de  $r$  elementos. Vía la aplicación antes definida,  $\rho^{-1}(\mathcal{P}_1(X)) = \text{Spec}(X)_0$ . Nótese que  $\mathcal{P}_1(X) \simeq X$ . Definamos pues  $X' := \text{Im}(\rho)$  y equipemos a este poset con el haz estructural  $\mathcal{O}_{X'}$  tal que

$$\mathcal{O}_{X',\Delta} = \otimes_{x_i \in \Delta} \mathcal{O}_{X,x_i} \text{ (tensorial sobre } \mathcal{O}_{X,x} \text{)}.$$

**Proposición B.4.37.** El espacio  $X'$  definido en la Construcción B.4.36 es esquemático y afín con  $\text{Spec}(X) \simeq \text{Spec}(X')$ . Además, si  $X$  es esquemático,  $X = X'$ .

*Demostración.* Por el Teorema 4.3.19, basta ver que  $\text{Spec}(X') \simeq \text{Spec}(X)$ , pero esto es inmediato por ser  $x \in X$  no redundante, lo que implica que  $X'$  tiene un punto mínimo con anillo  $\mathcal{O}_{X,x}$  y, por tanto, que se tienen isomorfismos  $\text{Spec}(X') \simeq \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \simeq \text{Spec}(X)$ . La última parte se sigue de que  $\rho$  valora en  $\mathcal{P}_1(X)$  cuando  $X$  es esquemático.  $\square$

*Ejemplo B.4.38.* Si  $X$  es como en el Ejemplo 4.1.5, es fácil comprobar que  $X' = \{a, b, c, d\}$  con  $a < b, c$  y  $b, c < d$  y  $\mathcal{O}_{X',d} = C \otimes_A B$ .

En general,  $X$  es esquemático si y solo si  $U_x \subseteq X$  lo es para todo  $x \in X$ , luego podemos considerar el recubrimiento  $\mathcal{U} = \{U_x \rightarrow X\}_{x \in X}$ , aplicar el procedimiento anterior a cada  $U_x$  para obtener  $\mathcal{U}'$  tal que  $|\mathcal{U}'| = |\mathcal{U}| = |X|$  y  $\mathcal{U}'(x) = U'_x$  definido como en la construcción previa. Ahora consideramos  $X' := \text{Cyl}(\mathcal{U}')$ . Se obtiene así que  $X \leftarrow \text{Cyl}(\mathcal{U}) \subseteq X'$ , donde la flecha hacia la izquierda es un qc-isomorfismo si el  $X$  de partida es esquemático y, en cualquier caso, induce un isomorfismo entre los espectros.

*Conjetura B.4.39.* Para  $X$  arbitrario tal que  $\text{Spec}(X)$  es un espacio localmente anillado cuasicompacto y cuasiseparado, si repetimos la Construcción B.4.36 y definimos ahora  $\mathcal{O}_{X',\Delta} := \mathcal{O}_{\text{Spec}(X)|\rho^{-1}(U_{\Delta})}(\rho^{-1}(U_{\Delta}))$ , ¿obtenemos una «completación esquemática» de  $X$ ?

## Apéndice C

# Apéndices a la Parte III

### C.1. Categorías de Galois

En esta memoria emplearemos la noción de *categoría de Galois* introducida en [15] por Grothendieck —véase también [17]—. La idea es encontrar parejas de una categoría  $\mathfrak{C}$  y un functor «fibra»  $F: \mathfrak{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  de modo que, si  $G$  es el grupo de automorfismos de  $F$ , se establezca una equivalencia con la categoría de  $G$ -conjuntos  $F \simeq G\text{-Set}$ , en analogía con el teorema de Galois clásico, que tenga unas propiedades «razonables». En este sentido,  $G$  «clasifica» los objetos de la categoría  $\mathfrak{C}$ . En la versión clásica planteada para revestimientos *finitos*, es decir, de modo que  $F$  valora en conjuntos finitos, el functor  $F$  es *pro-representable*,  $G$  es un grupo profinito y la equivalencia se obtiene con  $G\text{-FinSet}$ , donde  $\mathbf{FinSet}$  es la categoría de conjuntos finitos y la acción de  $G$  es continua. Existen, además, múltiples variaciones de esta formulación inicial, tanto para tratar el caso infinito como para admitir múltiples «componentes conexas» en la categoría a través de la inclusión de familias de funtores fibra. Cabe mencionar también que esto se interseca con el paradigma de la teoría de topos, en que todo topos (*resp. topos con algún punto*) es equivalente al espacio clasificante de un *grupoide* localíco (*resp. topológico*), hecho que especializa a la teoría de *topos de Galois*, que no seguiremos aquí y es el análogo de nuestras categorías de Galois —y de hecho, intercambiable por ellas para los propósitos de este trabajo—. Cabe destacar que la diferencia entre emplear grupoides y grupos reside tan solo en fijar un functor fibra, que es quien actúa como punto base —en el caso

de topos, son *puntos* de este—.

Sin más dilación, recordamos las definiciones. Todo lo expuesto se encuentra demostrado en las referencias mencionadas:

**Definición C.1.1.** Sea  $\mathfrak{C}$  una categoría y  $F: \mathfrak{C} \rightarrow \mathbf{FinSet}$  un functor. Se dice que  $(\mathfrak{C}, F)$  es una *categoría de Galois con functor fundamental*  $F$  si se verifican las siguientes condiciones:

- 1)  $\mathfrak{C}$  tiene objeto terminal y productos fibrados finitos.
- 2)  $\mathfrak{C}$  tiene sumas finitas —en particular, objeto inicial— y cocientes por subgrupos finitos de automorfismos de cualquier objeto de  $\mathfrak{C}$ .
- 3) Cualquier morfismo  $f$  en  $\mathfrak{C}$  admite una factorización  $f = g \circ h$  con  $h$  un epimorfismo y  $g$  un monomorfismo. Además, todo monomorfismo  $f: X \rightarrow Y$  establece un isomorfismo con un sumando directo de  $Y$ .
- 4)  $F$  preserva objetos terminales, epimorfismos, productos fibrados finitos, sumas finitas y cocientes por subgrupos finitos de automorfismos.
- 5)  $F$  es *conservativo*, es decir, si  $f$  es un morfismo tal que  $F(f)$  es isomorfismo, entonces  $f$  es isomorfismo.

Si  $(\mathfrak{C}, F)$  es una categoría de Galois, se denota

$$\pi_1(\mathfrak{C}, F) := \text{Aut}_{[\mathfrak{C}, \mathbf{FinSet}]}(F)$$

al *grupo fundamental de*  $(\mathfrak{C}, F)$ . Un objeto  $X$  se dice *de Galois* si es conexo —en el sentido de que para todo  $X \simeq X_1 \amalg X_2$ , o bien  $X_1$  o bien  $X_2$  son isomorfos al objetos inicial; compárese con la Observación 6.3.12— y su cociente por su grupo completo de automorfismos es isomorfo al objeto final. Se demuestra que los objetos de Galois forman un conjunto *cofinal* en la categoría y, de hecho, el functor  $F$  es *pro-representable* por ellos, es decir, existe un «sistema proyectivo filtrante» de objetos de Galois  $\underline{X} = \{X_i\}_{i \in I}$  tal que se tiene un isomorfismo de functores

$$F \simeq \text{colim Hom}(\underline{X}, -),$$

donde el segundo es el functor  $i \mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_i, -)$ . Este sistema  $\underline{X}$  se puede entender como el *revestimiento universal* de  $(\mathfrak{C}, F)$ . El motivo de que este

revestimiento no exista en general como objeto de  $\mathfrak{C}$  es simplemente que  $\mathfrak{C}$  no tiene límites pequeños —infinitos— por estar «fibrada» sobre conjuntos finitos en vez de sobre conjuntos. Si se modifica con astucia la definición de categoría de Galois para el caso infinito,  $\lim \underline{X}$  sería el revestimiento universal —como sucede en el caso topológico—.

Más intrínsecamente, sea  $\text{Pro}(\mathfrak{C})$  la categoría de pro-objetos asociada a  $\mathfrak{C}$  —cuyos objetos son funtores en  $[I, \mathfrak{C}]$  para  $I$  cualquier categoría pequeña filtrante y cuyos morfismos son, definiéndolos como «lo que deberían ser» si  $\text{Hom}$  conmutase con límites en ambos factores, es decir, como  $\text{Hom}_{\text{Pro}(\mathfrak{C})}(\underline{X}, \underline{Y}) = \lim_j \text{colim}_i \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(\underline{X}(i), \underline{Y}(j))$ — y la inclusión

$$\mathfrak{C} \rightarrow \text{Pro}(\mathfrak{C}) \qquad X \mapsto X,$$

que verifica que, si  $\mathfrak{C}$  es completa, tiene una adjunta a la derecha  $\underline{X} \mapsto \lim \underline{X}$  —la extensión de Kan derecha: esto es totalmente paralelo a la discusión sobre adjuntas de  $\mathfrak{C}$ -datos—. Que  $F$  sea pro-representable es decir que la extensión  $F: \text{Pro}(\mathfrak{C}) \rightarrow \text{Pro}(\mathbf{FinSet}) \rightarrow \mathbf{Set}$  —de hecho, a valores en «espacios de Stone»— es representable por un objeto de  $\text{Pro}(\mathfrak{C})$ .

En cualquier caso, se demuestra, no solo que  $F$  es pro-representable, sino que sus automorfismos pueden computarse como

$$\pi_1(\mathfrak{C}, F) = \lim_i \text{Aut}_{\mathfrak{C}}(X_i);$$

luego, como cada uno de estos grupos de automorfismos es finito,  $\pi_1(\mathfrak{C}, F)$  viene equipado con una topología profinita natural. Es claro que  $\pi_1(\mathfrak{C}, F)$  actúa sobre la imagen de  $F$  de modo continuo —lo cual puede expresarse a nivel de pro-objetos—. El Teorema es:

**Teorema C.1.2** (de Galois-Grothendieck). Si  $(\mathfrak{C}, F)$  es una categoría de Galois,  $F$  establece una equivalencia de categorías

$$F: \mathfrak{C} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathfrak{C}, F)\text{-FinSet}$$

—donde  $\pi_1(\mathfrak{C}, F)\text{-FinSet}$  denota la categoría de  $\pi_1(\mathfrak{C}, F)$ -conjuntos finitos con acción continua de  $\pi_1(\mathfrak{C}, F)$ —, de modo que objetos conexos se corresponden con conjuntos donde la acción es transitiva, cocientes se corresponden con subgrupos y cocientes que son de Galois con subgrupos normales.

Se demuestra además que la elección de functor fibra no varía dentro de cada componente conexa. En analogía con el caso topológico, dadas dos categorías de Galois  $(\mathfrak{C}, F)$ ,  $(\mathfrak{C}, F')$  con la misma categoría subyacente, una transformación natural  $\phi: F \rightarrow F'$  se llama un *camino de Tannaka*. En caso de existir,  $\phi$  es siempre invertible y define por conjugación un isomorfismo de grupos profinitos

$$\pi_1(\mathfrak{C}, F') \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathfrak{C}, F) \quad \varphi \mapsto \phi^{-1} \circ \varphi \circ \phi.$$

En otras palabras, cada una categoría  $\mathfrak{C}$ , la colección de funtores fundamentales  $F$  tales que  $(\mathfrak{C}, F)$  es una categoría de Galois define un *grupoide profinito*, que podemos llamar *grupoide fundamental de  $\mathfrak{C}$*  y denotarlo  $\Pi_1(\mathfrak{C})$ . El problema es que, en general, si existiesen dos funtores fibra  $F, F'$  tales que no hubiese ninguna transformación natural entre ellos,  $(\mathfrak{C}, F)$  y  $(\mathfrak{C}, F')$  no serían categorías de Galois, pues fallaría el axioma 5) de la Definición C.1.1: que los funtores sean conservativos. Dicho de otro modo, el grupoide  $\Pi_1(\mathfrak{C})$  siempre debe ser conexo. Podemos entender que esto es una *categoría de Galois conexa*. Para tratar el caso general con varias componentes conexas, solo se requiere modificar mínimamente la definición de categoría de Galois, admitiendo ahora familias de funtores fibra —al menos uno por cada «componente conexa»— y pidiendo que esta familia sea «conjuntamente conservativa». Esto se introdujo en [35, Definition 3.1] —aquí enunciamos los axiomas de modo ligeramente diferente para que especialicen a los que hemos elegido en la Definición C.1.1, pero se ve sin dificultades que ambas formulaciones son equivalentes—:

**Definición C.1.3.** Sea  $\mathfrak{C}$  una categoría y  $\{F_i: \mathfrak{C} \rightarrow \mathbf{FinSet}\}_{i \in I}$  un conjunto de funtores. Se dice que  $(\mathfrak{C}, \{F_i\}_{i \in I})$  es una *categoría de Galois (finitamente) multiconexa* si

- 1')  $\mathfrak{C}$  verifica los axiomas 1-3) de la Definición C.1.1.
- 2') Cada  $F_i$  verifica 4) de la Definición C.1.1.
- 3') La familia  $\{F_i\}_{i \in I}$  es *finitamente* conjuntamente conservativa, es decir, existe una subfamilia finita  $J \subseteq I$  de modo que, si  $f$  es un morfismo tal que  $F_i(f)$  es isomorfismo para todo  $i \in J$ , entonces  $f$  es isomorfismo.

Con esta definición, se tiene que  $\mathfrak{C}$  descompone como producto directo de categorías

$$\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{C}_1 \times \dots \times \mathfrak{C}_n$$

donde  $(\mathfrak{C}_j, F_{i_j})$  es una categoría de Galois ordinaria para funtores de cierta subfamilia de  $\{F_i\}_{i \in I}$ . Más concretamente, lo que se tiene es que, como en el caso de categorías de Galois ordinarias, una aplicación del axioma 3) demuestra que todo objeto admite una descomposición en un número finito de «componentes conexas» y, en particular, el objeto terminal de  $\mathfrak{C}$  es  $\star = e_1 \amalg \dots \amalg e_n$ . Ahora se pueden reindexar los  $F_i$  de modo que  $F_i(e_i) = \star$  y  $F_i(e_j) = \emptyset$  para  $1 \leq i, j \leq n$ , definiéndose —[35, Lema 3.4]—

$$\mathfrak{C}_i = \{X \in \mathfrak{C} : F_j(X) = \emptyset \text{ para todo } j \neq i \text{ y } 1 \leq j \leq n\}$$

de modo que  $(\mathfrak{C}_i, F_i)$  es Galois —nótese que la reordenación de los índices no es única, de ahí que pueda haber  $F_k$  con  $k$  fuera de los  $\{1, \dots, n\}$  tal que  $(\mathfrak{C}_i, F_k)$  también sea Galois: se prueba de hecho que todo  $F_k$  es isomorfo a uno de los  $F_i$  para  $1 \leq i \leq n$ —. Se dice que las  $\mathfrak{C}_j$  son las *componentes conexas* de  $\mathfrak{C}$ . Si hay una única componente conexa  $\mathfrak{C}$ , equipándola con cualquiera de los funtores  $F_i$  obtenemos una categoría de Galois —«conexa»— en el sentido de la Definición C.1.1.

Generalizando ahora la teoría de categorías de Galois clásicas, se tiene que  $(\mathfrak{C}, \{F_i\})$  define un *grupoide fundamental*  $\Pi_1(\mathfrak{C}) \equiv \Pi_1(\mathfrak{C}, \{F_i\}_{i \in I})$  tal que

$$\text{Ob}(\Pi_1(\mathfrak{C})) = I \qquad \text{Hom}(i, j) = \text{Hom}_{[\mathfrak{C}, \mathbf{FinSet}]}(F_i, F_j);$$

de modo que los automorfismos de un punto  $i$  recuperan el grupo fundamental de la categoría de Galois  $(\mathfrak{C}_j, F_i)$  asociada a  $F_i$ . Se tiene que  $\Pi_1(\mathfrak{C})$  es un grupoide profinito, hecho que nos limitaremos a entender como que cada  $\text{Hom}_{\Pi_1(\mathfrak{C})}(-, -)$  viene equipado con una topología profinita. En particular, el teorema de Galois extiende para dar una equivalencia

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\mathfrak{C})\text{-FinSet} \equiv [\Pi_1(\mathfrak{C}), \mathbf{FinSet}]$$

—donde se entiende que las acciones son continuas—. Esto no es más que observar que, para todo grupoide conexo  $\mathcal{G}$  y  $g \in \mathcal{G}$ , se tiene una equivalencia de categorías  $\text{Aut}_{\mathcal{G}}(g) \simeq \mathcal{G}$  —donde la primera es el grupo de automorfismos

entendido como categoría puntual—, y aplicar el teorema de Galois ordinario a cada componente conexa de  $\mathfrak{C}$  y  $\Pi_1(\mathfrak{C})$ . Nótese que estamos considerando acciones continuas.

Por último, sea  $\mathbf{Gpd}_{\text{Stone}}$  la 2-categoría de grupoides profinitos con *un número finito de componentes conexas* —en el sentido previamente introducido; los denotamos de este modo puesto que la topología profinita suele conocerse como *topología de Stone*— y sea  $\mathbf{FGal}$  la 2-categoría de categorías de Galois finitamente multiconexas —acéptese por ahora sin definir en detalle—. Es fácil comprobar que  $(\mathcal{G}\text{-FinSet}, \{\text{ev}_g\}_{g \in \mathcal{G}})$  junto con el functor  $\text{ev}_g: \mathcal{G}\text{-FinSet} \rightarrow \mathbf{FinSet}$  de evaluación en  $g$  es una categoría de Galois multiconexa. Se tiene el siguiente:

**Teorema C.1.4.** [35, 3.11] Se tiene una equivalencia de 2-categorías

$$\mathbf{FGal} \simeq \mathbf{Gpd}_{\text{Stone}}^{\text{op}}$$

donde  $(\mathfrak{C}, \{F_i\}) \mapsto \Pi_1(\mathfrak{C})$  y  $\mathcal{G} \mapsto (\mathcal{G}\text{-FinSet}, \{\text{ev}_g\}_{g \in \mathcal{G}})$ . En particular, fijado una componente  $(\mathfrak{C}_i, F_i)$  se induce una equivalencia

$$F_i: \mathfrak{C}_i \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\mathfrak{C}_i)\text{-FinSet},$$

donde  $\Pi_1(\mathfrak{C}_i) \subseteq \Pi_1(\mathfrak{C})$  es el grupoide fundamental conexo asociado a todos los funtores  $F_j$  que hacen a  $(\mathfrak{C}_i, F_j)$  categoría de Galois conexa.

Enunciar este teorema con precisión requiere definir morfismos entre categorías de Galois multiconexas y transformaciones naturales entre ellos, que no son de nuestro interés aquí —baste decir que un *morfismo de categorías de Galois conexas* no es más que un functor y una transformación natural invertible entre los funtores fundamentales, véase la Sección C.1.1—; sin embargo, como toda equivalencia de categorías «levanta» de modo trivial a uno de dichos (iso)morfismos, se obtiene el siguiente corolario que sí emplearemos —aunque su enunciado pueda precisarse mucho más, esta presentación nos es suficiente—.

**Corolario C.1.5.** El 2-functor  $\mathbf{Gpd}_{\text{Stone}} \rightarrow \mathbf{Cat}^{\text{op}}$  definido en objetos por  $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}\text{-FinSet} \equiv [\mathcal{G}, \mathbf{FinSet}]$  es 2-conservativo; es decir, si  $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  es un morfismo —functor— de grupoides profinitos induciendo una equivalencia  $[\mathcal{H}, \mathbf{FinSet}] \simeq [\mathcal{G}, \mathbf{FinSet}]$ , se tiene que  $f$  es una equivalencia.

*Observación C.1.6.* Es fácil probar que el functor  $\mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{BTopos}_{\mathbf{Set}}^{\text{ess}}$  tal que  $\mathcal{G} \mapsto [\mathcal{G}, \mathbf{Set}]$  valorando en la 2-categoría de topos de Grothendieck —i.e. «acotados» sobre  $\mathbf{Set}$ — y morfismos geométricos «esenciales» —i.e. tales que la imagen inversa admite una adjunta a la izquierda— es 2-plenamente fiel y, en particular, 2-conservativo. El análogo es cierto para grupoides finitos actuando sobre conjuntos finitos  $\mathbf{FinGpd} \rightarrow \mathbf{BTopos}_{\mathbf{FinSet}}^{\text{ess}}$ , como caso particular de [24, D.2.2.23].

Por otra parte, es posible hablar de 2-pro-objetos en 2-categorías, donde en nuestro caso nos bastará considerar aquellos que vengan indexados por 1-categorías, véase [11]: se puede demostrar que si  $\mathcal{G}$  es un grupoide de Stone con un número finito de componentes conexas —como el caso que nos ocupa—, existe un 2-pro-objeto en la 2-categoría de grupoides finitos —i.e. un *grupoide profinito* en sentido estricto, no un *grupoide de Stone*—,  $\widehat{\mathcal{G}}$  tal que  $\mathcal{G} = \text{lim } \widehat{\mathcal{G}}$ . Explícitamente, por [6, Corollary 2.3.2],  $\widehat{\mathcal{G}}$  está dado por el functor olvido

$$\int (\text{Hom}_{\mathbf{Gpd}_{\text{Stone}}}(\mathcal{G}, -)_{|\mathbf{FinGpd}}) \rightarrow \mathbf{FinGpd};$$

donde  $\int(-)$  denota la categoría de elementos del functor  $(-)$ , en este caso del functor de puntos covariante restringido a grupoides finitos.

Tiene sentido, por tanto, pensar en los grupoides fundamentales como 2-pro-objetos. Podemos considerar el functor que envía  $\widehat{\mathcal{G}}: I \rightarrow \mathbf{FinGpd}$  a

$$\begin{aligned} &\text{Pro}(\mathbf{FinGpd}) \rightarrow \text{Pro}(\mathbf{BTopos}_{\mathbf{FinSet}}^{\text{ess}}) \\ &\widehat{\mathcal{G}} \mapsto \text{Hom}_{\text{Pro}(\mathbf{Cat})}(\widehat{\mathcal{G}}, \mathbf{FinSet}) = 2\text{-colim}_i \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{G}(i), \mathbf{FinSet}). \end{aligned}$$

La 2-categoría de topos acotados sobre conjuntos finitos  $\mathbf{BTopos}_{\mathbf{FinSet}}^{\text{ess}}$  solo tiene 2-límites *finitos* —pseudolímites como categorías vía los funtores imagen inversa—. Luego si pasamos a este límite, valoramos en la 2-categoría opuesta de categorías sobre  $\mathbf{FinSet}$ , no en topos. Usando resultados clásicos de reindexación de pro-objetos y de caracterización de isomorfismos —aplicados al caso 2-categorial—, debería poderse que la composición

$$\text{Pro}(\mathbf{FinGpd}) \rightarrow \text{Pro}(\mathbf{BTopos}_{\mathbf{FinSet}}^{\text{ess}}) \xrightarrow{2\text{-lim}} \mathbf{Cat}_{\mathbf{FinSet}}^{\text{op}}$$

es 2-conservativa a partir puramente del conocido caso finito, *sin mediar topología*.

### C.1.1. Morfismos entre grupos fundamentales

Dado un *morfismo de categorías de Galois*  $(G, \varphi): (\mathfrak{C}, F) \rightarrow (\mathfrak{C}', F')$ , es decir, una pareja de un functor  $G: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}'$  de modo que  $(\mathfrak{C}, F' \circ G)$  siga siendo *categoría de Galois* y una transformación natural —siempre invertible—  $\varphi: F' \circ G \xrightarrow{\sim} F$ , se induce por conjugación con  $\varphi$  y composición con  $G$  un morfismo de grupos fundamentales

$$G_*: \pi_1(\mathfrak{C}', F') \rightarrow \pi_1(\mathfrak{C}, F)$$

de modo que, para cada  $g \in \pi_1(\mathfrak{C}', F') = \text{Aut}(F')$  y  $X \in \mathfrak{C}$  es

$$G_*(g)(X) = \varphi \circ g(G(X)) \circ \varphi^{-1}.$$

Recordemos que en una categoría de Galois ordinaria —conexa—, el objeto final  $\star$  es conexo. Diremos que un objeto  $X \in \mathfrak{C}$  *admite sección* si el morfismo al objeto final  $X \rightarrow \star$  admite una sección. Nótese que cualquiera de estas secciones será un monomorfismo, lo que por el axioma 3) de la Definición C.1.1 implica que  $X \simeq \star \amalg X'$  para cierto  $X'$ . En particular, un objeto conexo es isomorfo al final si y solo si admite sección.

**Teorema C.1.7.** Sean morfismos de categorías de Galois

$$(\mathfrak{C}, F) \xrightarrow{(G, \varphi)} (\mathfrak{C}', F') \xrightarrow{(H, \phi)} (\mathfrak{C}'', F'')$$

induciendo morfismos de grupos profinitos

$$\pi_1(\mathfrak{C}'', F'') \xrightarrow{H_*} \pi_1(\mathfrak{C}', F') \xrightarrow{G_*} \pi_1(\mathfrak{C}, F).$$

Se verifican las siguientes propiedades:

- 1) El morfismo  $G_*$  es epiyectivo si y solo si  $G$  preserva objetos conexos.
- 2) La sucesión es exacta si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes:
  - 2a) Para todo  $X \in \mathfrak{C}$ ,  $H(G(X))$  es trivial, i.e. isomorfo a un coproducto —finito— de copias del objeto final.
  - 2b) Para todo  $X' \in \mathfrak{C}$  conexo de modo que  $H(X')$  admite sección, existe  $Y \in \mathfrak{C}$  y un morfismo  $Z \rightarrow X'$  en  $\mathfrak{C}'$  con  $Z$  una componente conexa de  $G(Y)$ .

*Demostración.* Véase [37, Section 5.5]: se reproduce formalmente sin cambios, pues solo emplea conceptos categoriales y propiedades de los subgrupos profinitos vía el Teorema C.1.2. Nótese que cambiar de functor fibra da isomorfismos de grupos fundamentales, luego se puede suponer que  $F' = F'' \circ H$ ,  $F = F' \circ G$  y que  $\varphi$  y  $\phi$  son la identidad.  $\square$

## C.2. La topología pro-étale esquemática

Una cuestión que no podemos pasar por alto es que el papel que juegan las inmersiones planas (resp. monomorfismos planos) en espacios esquemáticos (resp. esquemas) respecto a las inmersiones abiertas es análogo al que juegan los morfismos débilmente étale—también llamados *absolutamente planos*— en esquemas, que definen la topología pro-étale de [5], respecto a los morfismos étale. Como la propiedad de ser débilmente étale de anillos es pro-local —Definición 7.5.1—, la siguiente definición se comporta bien:

**Definición C.2.1.** Un morfismo esquemático  $f: X \rightarrow Y$  se dice *débilmente étale* si es plano y su diagonal relativa  $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$  es plana. Fijado  $X$ , sea  $X_{\text{pro-Ét}}$  el sitio de los morfismos débilmente étale y cuyos recubrimientos son familias finitas conjuntamente fielmente planas. Como en la Sección 7.7.2, sea  $X_{\text{alg-pro-Ét}}$  el correspondiente sitio de morfismos algebraicamente débilmente étale.

Es fácil comprobar, por ser lo análogo cierto para planos, que un morfismo algebraico es débilmente étale si y solo si es algebraicamente débilmente étale. Nótese que la definición de morfismo débilmente étale tiene sentido para cualquier espacio localmente anillado, y en particular para cualquier proesquema  $S$ .

Sea ahora  $X$  tal que  $S = \text{Spec}(X)$  es un esquema qc-qs. Tenemos dos posibilidades: definir el sitio pro-étale de  $S$  como en [5], denotado  $S_{\text{pro-Ét}}$ , pero considerando ahora recubrimientos finitos en vez de fpqc —el topos asociado al sitio pro-étale pequeño de un esquema cuasicompacto es *coherente*—; y también el sitio análogo pensando  $S$  como pro-esquema y admitiendo cualquier morfismo de proesquemas débilmente étale, denotado  $S \underset{\text{pro-Ét}}{\sim}$ . Nos preguntamos si este sitio más grande puede aportar información adicional.

Por otra parte, por motivos ya expuestos en la discusión sobre morfismos ind-Zariski del Apéndice B.2, esta topología pro-étale solo tiene un buen

comportamiento en el *caso no noetheriano*, donde resulta ser equivalente a la generada por objetos afines  $w$ -contráctiles. Algunas cuestiones ya fueron planteadas en el Apéndice B.1.

Acabamos destacando que existe una definición axiomática de morfismos étale [12] en un topos que los sitúa como los «isomorforismos locales», i.e. localmente inyectivos y epiyectivos o, de otro modo, con diagonal localmente epiyectiva; respecto a la estructura del topos dado, véase [12]. En el caso de la topología de Zariski de un esquema, esto recupera la noción de morfismo étale clásica. ¿Son los morfismos débilmente étale para esquemas (resp. espacios esquemáticos) los «objetos étale» del topos de monomorfismos planos (resp. inmersiones planas)?

### C.3. Grupos fundamentales prodiscreto y de Nori

En el SGA3 —Exposé X—, A. Grothendieck esboza una generalización de su grupo fundamental étale —«groupe fondamental élargi», más conocido como  $\pi_1^{\text{SGA3}}$ — que clasifica haces localmente constantes, no necesariamente finitos, en la topología étale de un esquema. El grupo fundamental resultante es un grupo prodiscreto cuya completación profinita recupera el grupo fundamental étale ordinario. Cabe destacar que, si bien es cierto que el grupo pro-étale generaliza ambos, el  $\pi_1^{\text{SGA3}}$  no requiere que nos salgamos de la situación localmente noetheriana. Varios autores han formalizado o redescubierto esta teoría desde sus propios puntos de vista. Vamos a tomar como referencia los axiomas de categoría de Galois generalizados a este caso en [22, Section 2, Definition 2.15].

Resulta que las diferencias con la Definición C.1.1 son mínimas: en 2) se requiere que la categoría  $\mathfrak{C}$  tenga sumas *arbitrarias* y cocientes bajo relaciones de equivalencia cualesquiera —en particular, bajo acciones de grupo fieles—; en 3) se requiere que el epimorfismo de la factorización sea efectivo; y en 4) el functor fundamental  $F$  debe conmutar con las sumas arbitrarias, epimorfismos efectivos y cocientes que hemos considerado.

Para aplicar estos resultados al caso esquemático, basta destacar que necesitamos considerar espacios esquemáticos «infinitos», pero solo en el sentido de admitir uniones disjuntas arbitrarias de espacios esquemáticos finitos. Al considerar esto surgen algunas patologías, por ejemplo, la unión disjunta arbitraria de espacios afines no es afín —como sucede en esquemas—,

luego para una colección arbitraria de anillos  $\{A_i\}$ , el morfismo natural  $\coprod_i(\star, A_i) \rightarrow (\star, \prod_i A_i)$  no es un qc-isomorfismo; pero en general, al seguir trabajando en el caso puntualmente noetheriano, puede replicarse toda la discusión sin grandes cambios fijando  $\mathfrak{C}$  como la categoría —el topos— de haces localmente constantes en el sitio pequeño étale de un espacio conexo  $Y$ .

Respecto al grupo fundamental de Nori, discutido de modo relativamente elemental en [37, Section 6.7], cabe destacar que busca clasificar  $G$ -fibrados principales — $G$ -torsores— sobre un esquema  $S$  para  $G$  un grupo algebraico finito —luego afín—. Esto se logra mediante el formalismo de *categorías de Tannaka* y el resultado es un esquema en grupos afín. Este esquema existe cuando  $S$  es propio íntegro sobre un cuerpo  $k$  y tiene algún  $k$ -punto racional.

Que el grupo fundamental resultante sea un esquema afín son buenas noticias, pues si tratamos de extender la teoría al caso esquemático, es esperable que obtengamos también un espacio afín. En este caso, además, la estructura de grupo quedaría codificada por una estructura de álgebra de hopf en el anillo de secciones globales. El problema es, por tanto, de fundamentos: ¿cómo trabajar con espacios esquemáticos —no afines— en grupos para definir  $G$ -fibrados principales? Si uno pide que un espacio esquemático  $X$  sea un objeto en grupos en **SchFin**, la ley de grupo también afectará al poset  $|X|$  y, teniendo en cuenta que los puntos de un espacio esquemático representan «moralmente» abiertos afines de cierto espacio localmente anillado, la definición parece demasiado restrictiva *a priori*. Por supuesto, uno puede evitar este problema exigiendo que la clase de  $X$  sea un objeto en grupos en **SchFin**<sub>qc</sub>, pero como venimos explicando en la memoria, nos gustaría disponer de una noción más «geométrica». Buscar la definición intermedia adecuada sería objeto de otro proyecto totalmente distinto, pero una vez logrado, es más que esperable que se pudiera obtener el mencionado grupo de Nori en el caso esquemático.



# Epílogo del autor

Si echo la vista atrás, al fin de aquel verano de hace ya cuatro años, veo en mi cuerpo a un joven que comenzaba con ilusión su camino en este programa de doctorado; hoy no encuentro mucho de aquella persona que haya permanecido intacto. Ahora creo con firmeza que este camino no se elige, que la inercia de aquel brillo en las pupilas que con tantos de mis compañeros compartía lo hizo inevitable; «*car nous nous en allons, comme s'en va cette onde: Elle à la mer, nous au tombeau!*». Es por ello que no me planteo que nada de esto haya sido un acierto o un error, sino solo lo que *debía* ser. Alcanzada esta aceptación, de la necesidad de sobrevivir nació la fortaleza. Las cosas nunca devienen como las planificamos, y quizá del mismo modo esta tesis debiera haberse titulado con otras palabras.

Este viaje transformador comenzó con una tarea bien definida, pero apenas estudiado lo básico, en apariencia sencillo, no tardé en darme cuenta de mi error al calibrarla. Al principio eché la culpa a la teoría que debía emplear, a las limitaciones que pensaba tenía; redacté incluso un escrito describiendo cada uno de los problemas «insalvables» con que me encontraba, casi como si fueran ofensas a mi persona. Para desgracia mía, no mucho después cayó del cielo una solución a mi problema de partida, pero que consideraba yo trivial hasta el punto de amargar cualquier satisfacción. ¿A quién iba a echar la culpa? Me planteé incluso cambiar por completo el tema de mi tesis, aquello no tenía sentido. Y lo que es peor, ¿qué había de geométrico en lo que estaba diciendo?

Llegaron entonces los albores de mi salvación: ese año 2020 y la locura del encierro que nos impuso. Si bien hablo de *locura*, por fortuna para mí, esta parecía concernir sobre todo a mi relación con las matemáticas: releo mis escritos de aquella época y soy incapaz de seguir mis propios razonamientos,

que construían castillos en el aire sin control alguno, con una arquitectura que bien pudiera haber salido del expresionismo alemán. El seísmo que dejar libres aquellos pensamientos causó en mi mente ha tenido réplicas de notable intensidad en tiempos más recientes, pero fue esa sacudida inicial la que cambió algo: a la vez que una revelación intelectual me llegaba por otras vías, comencé tener dudas acerca de la naturaleza de este oficio. ¿Qué demonios trataba de hacer con esta tesis? ¿Qué problema estaba tratando de resolver? Una densa niebla engullía aún el horizonte.

Los verbos *resolver* y *solucionar* son sinónimos: ambos provienen del latín *solvere* y tratan sobre la reducción de complejidad de un problema, sobre *disolverlo* cual sustancia química con objeto de reducir su concentración; pero hay dos maneras muy distintas de hacer esto y me voy a permitir asignarlas a cada una de estas palabras bajo mi propio criterio. Cuando digo que *resolvemos un problema*, entiendo estamos empleando como disolvente el propio contexto en que se formula, un entorno neutro que no reacciona ni modifica sus propiedades. Las líneas en estas cuestiones son muy debatibles y no es mi pretensión ser riguroso al trazarlas, pero los problemas de geometría y aritmética que abordaban con éxito los griegos se *resuelven* en un contexto tan natural que pocos, salvo aquellos envenenados en exceso por los fatuos fuegos de Bourbaki, se atreven a cuestionar. Creo que podemos convertir esto en una cuestión lingüística: si se me permite que entendamos que la lógica, y por extensión las matemáticas, no es sino una abstracción del lenguaje natural —más o menos «universal»—, los problemas *resolubles* más elementales son aquellos que podemos formular y tratar en sus dominios.

*Solucionar un problema*, por otro lado, tiene para mí un timbre muy diferente. La palabra ya recuerda a jerga informática o a esas consultoras capitalistas que anuncian «soluciones para tu negocio» —y es que la capitalización de ese ancestral pasatiempo que eran las matemáticas tiene mucho que ver aquí—. El disolvente empleado esta vez solo lo es en apariencia, pues es en realidad un reactivo que altera la naturaleza del soluto de modo localmente imperceptible; y es más, cada peón de esta obra llamada *investigación* tiene complejo de arquitecto y aporta algo de propia elección a ese compuesto comunitario sobre el que todos trabajamos. En otros términos, citando a algún matemático cuyo nombre no recuerdo, el resultado es que «todo es cierto en una categoría suficientemente irrelevante», entendido esto

en un sentido informal. Por desgracia, abusar de este método me parece la naturaleza de muchas de las matemáticas contemporáneas, al menos en lo que a mi limitado conocimiento atañe —espoleadas por una superestructura externa de la cual mucho se ha escrito ya—. En una versión más visual de esta analogía, son como el pontingue que hacen los niños en los vasos al acabar una comida, al que cada uno añade su propio sabor hasta que la mezcla se troca en un negro ofuscado e irreconocible. En mi caso, en nombre de «resolver» mi problema de una manera «geométrica», en lo que suficiente perspectiva revela como un ataque de egocentrismo, acabé creando una pócima apócrifa, pueril, pero que adquiere tonos y aromas comparables a los de otras geometrías que el mundo ha aceptado como canónicas —sin que por ello debamos olvidar que un disparate repetido suficientes veces se convierte en verdadero y que nadie es invulnerable a dicha perversión—. No seré tan vanidoso como para afirmar que el resultado de mis experimentos aporta algo de valor ni tan idiota como para negarlo, pues solo otros pueden juzgar esa cuestión.

Hablo de valor, pero me consuelo en mi opinión de que la guía de muchas de las matemáticas actuales es y *debe ser* estética, lo cual es bastante frívolo y no dista mucho de equipararlas a una refinada forma de onanismo intelectual. No digo esto último en sentido del todo negativo, pues una vez alcanzado el resultado, comparten con esta actividad la capacidad de otorgarnos una relativa libertad, si bien de una clase diferente: la libertad del preso, del soldado, la de librar a la mente de dudas; sorprendentemente, las matemáticas más abstractas adquieren por esta vía un valor pragmático y casi espiritual —mucho más civilizado que optimizar las ganancias de los inversores; casi es activismo político—. Reza *Hagakure* que «el Camino del samurái es la muerte», afirmación que ha sido terriblemente malinterpretada y tomada fuera de contexto para ridiculizar a esta clase guerrera japonesa que decayó en tiempos de paz. «Lanzarse como un loco hacia la muerte» y la máxima de tener a esta siempre presente han de entenderse como un modo de *liberar* la mente de dudas y de afilar y volver más certera la acción, que debe ser como una *katana*, letal al ser desenvainada en un fugaz pestañeo. La certeza de la muerte y la limitación que impone nos libera del peligroso mundo de las posibilidades, nos da un *camino*. Permítanseme unos versos:

¿Por qué los humanos, siempre finitos,  
alzamos nuestra mirada al cielo?  
¿Será que en esta eterna sombra  
las estrellas nos llaman con su brillo  
y hunden en un sueño con alas de Ícaro?  
Promesas vacuas que arden bajo la aurora,  
mas en noches serenas y frías, algunos,  
siervos del firmamento, las suponen divinas.

Trágico seguir ese bello faro,  
nunca navegar mirando abajo,  
no ver las olas: lomas y lamentos;  
si bien otros, no más afortunados,  
van a la deriva, anclados en lo opaco;  
aturdidos por el contoneo de los vientos,  
sin siquiera imaginar por qué en la noche  
chispean a veces las crestas del océano.

¿Cuándo vivimos, sin solo existir,  
sino en esos discretos momentos  
en que los hombres convierten en acción  
la duda que atenaza sus cuellos?

¿Cómo capturar esa poesía,  
la fugaz mirada al horizonte?  
Quizá en la pureza del acero,  
en el brillo humano de su filo  
vestido de carmesí,  
pátina del instante  
en que podré decir *fui*.

El principio de fusionar voluntad y acción, atributos que encontramos por separado en el cobarde o el temerario, en una singularidad temporal que nos acerque a lo sublime es también esencial en las artes marciales, o incluso en algo tan prosaico como realizar una sentadilla con peso a la espalda: la determinación necesaria para comenzar el movimiento con un descenso, cual guerrero saliendo de una trinchera a un peligro inminente, y

ese punto de inflexión «abajo» en que las piernas arrebatan en liderazgo a la mente y el único camino a seguir queda perfectamente definido. Salvando las distancias, las rígidas cadenas de unas matemáticas ya construidas liberan nuestra mente de incertidumbre en un sentido parecido, si bien sus grilletes autoimpuestos nunca alcanzarán la urgencia de los que procuran el nivelador universal de la muerte o una sencilla barra de acero —citando a Don Quijote: «quítenseme delante los que dijeren que las letras hacen ventaja a las armas; que les diré, y que sean quien fueren, que no saben lo que dicen. (...) como si en esto que llamamos armas los que las profesamos no se encerrasen los actos de la fortaleza, los cuales piden para ejecutarlos mucho entendimiento, o como si no trabajase el ánimo del guerrero (...) así con el espíritu como con el cuerpo»—. Creo que olvidar esto es la causa de que los ojos de tantos jóvenes pierdan su coraje y vigor.

Quizá no haya encontrado en estos años grandes argumentos a favor de mucha de la actividad asociada a la profesión del matemático moderno, menos aún de instituciones que depredan las jóvenes mentes que sueñan con ejercerla —sí a favor de las matemáticas como pura actividad intelectual, que aún logran despertarme una pasión que pensaba había agotado, especialmente si hay con quien discutir de ellas; queda clara su función comunicativa y docente—; pero puedo afirmar que, paradójicamente, he hallado en la fútil guerra que desarrollan un lugar en que los humanos siguen buscando satisfacer su ansia de libertad —o lo que es lo mismo, de combatir el *miedo*, el eterno *casus belli*—: las matemáticas son humanidades, ¡arte! Ha contribuido esta noble búsqueda a iluminarme otros caminos para alcanzar el mismo fin y a concederme resiliencia para perseguirlos, luego poco importa que seguir aquel brillo fuese error o acierto: no hay arrepentimiento.

Salamanca, 4 de octubre de 2022



# Bibliografía

- [1] Alonso Tarrío, L.; Álvarez Díaz, B.; Jeremías López, A. *Unbounded algebraic derivators*, arXiv:2111.05918v1 [math.CT].
- [2] Álvarez Vázquez, A. *Estructuras aritméticas de las curvas algebraicas*, tesis doctoral, Salamanca, 1996.
- [3] Artin, M.; Grothendieck, A.; Verdier, J. L. (eds.), *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas - SGA 4. II*, LNM **270** Springer Heidelberg 1972.
- [4] Barmak, J. A. *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*, Lecture Notes in Mathematics 2032. Springer, Heidelberg (2011).
- [5] Bhatt, B.; Scholze, P. *The pro-étale topology for schemes*, Astérisque No. 369 (2015), 99-201.
- [6] Blom, T. *Profinite Homotopy Theory*, Master's Thesis at Universiteit Utrecht, supervised by I. Moerdijk, 2019. Disponible en   
  
<https://studenttheses.uu.nl/handle/20.500.12932/31743>
- [7] Carmona Sánchez, V.; Maestro Pérez, C.; Sancho de Salas, F.; Torres Sancho, J. F. *Homology and cohomology of finite spaces*. J. Pure Appl. Algebra 224 (2020), no. 4, 106200, 38 pp.
- [8] Codara, P., contributed chapter in *From combinatorics to philosophy*. Springer, New York, 2009. xviii+260 pp. ISBN: 978-0-387-88752-4

- [9] Codara, P. PhD thesis: *A theory of partitions of partially ordered sets*; O.M. D'Antona, V. Marra. Milano: Università degli studi di Milano. Dipartimento di Matematica, Dipartimento di Informatica e Comunicazione, 2008 Nov 21. 20. ciclo, Anno Accademico 2006/2007.
- [10] De Jong, A. J. et al. *The Stacks Project*, disponible en  
<https://stacks.math.columbia.edu/>
- [11] Descotte, E.; Dubuc, E. *A theory of 2-pro-objects*. Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. 55 (2014), no. 1, 2–36.
- [12] Dubuc, E. J. *Axiomatic etal maps and a theory of spectrum*, Journal of Pure and Applied Algebra **149** (200), 15-45.
- [13] Gillam, W.D. *Localization of Ringed Spaces*, arXiv: arXiv:1103.2139v1 [math.AG].
- [14] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. *Éléments de géométrie algébrique*. Pub. Math. I.H.E.S., 1960.
- [15] Grothendieck, A. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], **3**. Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [16] Lazard, D. *Séminaire Samuel, Algèbre Commutative*, Tome 2 (1967-1968), Exposé no. 4, 12pp.
- [17] Lenstra, H. W. *Galois Theory for Schemes*, disponible en  
<https://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/GSchemes.pdf>
- [18] Lurie, J. *Spectral Schemes*, disponible en  
<http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/DAG-VII.pdf>
- [19] Martín Ovejero, J. *Móduli de fibrados principales y teoría algebraica de solitones*, tesis doctoral, Salamanca, 2021.

- [20] McCord, M. C. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke Math. J. **33** (1966), 465–474.
- [21] Neeman, A. *The chromatic tower for  $D(R)$ . With an appendix by Marcel Bökstedt*, Topology **31** (1992), 519–532.
- [22] Noohi, B. *Fundamental groups of topological stacks with the slice property*. Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no. 3, 1333–1370.
- [23] Hügel, L.A.; Marks, F.; Šťovíček, R. Takahashi, J.; Vitória, J. *Flat ring epimorphisms and universal localizations of commutative rings*, The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 71 (2020), Issue 4, 1489–1520, doi: 10.1093/qmath/haaa041.
- [24] Johnstone, P. *Sketches of an elephant: a topos theory compendium. Vol. 2*. Oxford Logic Guides, 44. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2002. pp. i–xxii, 469–1089 and I1–I71. ISBN: 0-19-851598-7.
- [25] Raynaud, M. *Un critère de effectivité de descente*. In: Séminaire Samuel, Algèbre Commutative, vol. 2, pp. 1–22 (1967–1967).
- [26] Sánchez González, J.; Sancho de Salas, F. *Universal ringed spaces*. arXiv:2101.02126v1 [math.AG].
- [27] Sánchez González, J.; Tejero Prieto, C. *Étale Covers and Fundamental Groups of Schematic Finite Spaces*. Mediterr. J. Math. **19** (2022), no. 5, 229.
- [28] Sancho de Salas, F.; Sancho de Salas, P. *Affine ringed spaces and Serre’s criterion*. Rocky Mountain J. Math. **47** (2017), no. 6, 2051–2081.
- [29] Sancho de Salas, F. *Finite spaces and schemes*. J. Geom. Phys. **122** (2017), 3–27.
- [30] Sancho de Salas, F. *Homotopy of finite ringed spaces*. J. Homotopy Relat. Struct. **13** (2018), no. 3, 481–501.
- [31] Sancho de Salas, F.; Torres Sancho, J.F. *Derived categories of finite spaces and Grothendieck duality*. Mediterr. J. Math. **17** (2020), no. 3, Paper No. 80, 22 pp.

- [32] Sancho de Salas, F.; Sancho de Salas, P. *Notes on schematic finite spaces*. arXiv:2102.09263v1 [math.AG].
- [33] Sancho de Salas, F.; Sancho de Salas, P. *A direct proof of the theorem on formal functions*. Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 12, 4083–4088.
- [34] Stong, R.E. *Finite topological spaces*. Trans. Am. Math. Soc. **123**, 325–340 (1966)
- [35] Pirashvili, I. *The étale fundamental groupoid as a 2-terminal costack*. Kyoto J. Math. **60** (2020), no. 1, 379–403.
- [36] Stix, J. *A general Seifert-Van Kampen theorem for algebraic fundamental groups*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42** (2006), no. 3, 763–786.
- [37] Szamuely, T. *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 117. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

# Índice de definiciones

- ℳ-dato, 42
  - Φ-afín, 262
  - 2-categorías de ℳ-datos, 52
  - 2-secciones y 2-cosecciones, 53
  - en  $X$ , 41
  - secciones y cosecciones, 43, 44
- Anillo  $w$ -local, 281
- Categoría
  - de Galois, 306
  - de Galois finitamente multicone-  
xa, 308
  - delgada, 28
  - esqueletal, 28
  - esquemática, 83
- Centro de un punto esquemático, 87
- Cilindro, 54
- Componente  $pw$ -conexa, 151
- Descenso interno, 118
- Ecualizador, 170
- Entorno plano, 134
- Espacio
  - Mod**-afín, 76
  - íntegro, 167
  - 2-esquemático, 109
  - afín, 78
  - con restricciones abiertas, 70
  - conciso, 142
  - conexo, top-conexo,  $pw$ -conexo,  
147
  - de Alexandroff ( $A$ -espacio), 27
  - epic-espacio, 67
  - esquemático, 78
  - esquemático algebraico, 158
  - Fr-espacio, 65
  - geométricamente conexo, 151
  - geométrico, 152
  - irreducible, top-irreducible,  $pw$ -  
irreducible, 166
  - pseudoesquemático, 68
  - puntualmente noetheriano, 65
  - reducido, 165
- Estructura 2-categorial homotópica
  - de **ℳ-data** con  $\mathfrak{C}$  1-categoría, 48
  - de **ℳ-data** con  $\mathfrak{C}$  2-categoría, 51
  - de **ord**, 33
- Fibra y fibra geométrica, 133
- Functor
  - cocontinuo, 284
  - continuo, 284
  - fibra, 153, 240
  - geométrico, 117
- Grado de un revestimiento, 228

- Imagen  
 cerrada, 186  
 de un ideal, 185  
 densa, 188  
 esquemática, 183
- Límite  
 2-límite de categorías, 260  
 límites y colímites en 2-categorías, 261  
 laxo de categorías, 259
- Módulo cuasicoherente descendido, 289
- Modelo finito, 37  
 de un espacio esquemático, 117  
 de un esquema, 84
- Morfismo  
 $\Phi$ -equivalencia, 263  
 2-esquemático, 109  
 afín, 82  
 algebraicamente  $\mathbf{P}$ , 159  
 algebraico, 158  
 algebraico de proesquemas, 293  
 central, 92  
 débilmente étale, 313  
 de fibras coherentes, 32  
 de sitios, 284  
 esquemático, 81  
 esquemático de proesquemas, 292  
 estándar afín, 178  
 fielmente plano, 98  
 finito, 181  
 finito constante, 229  
 finito localmente constante, 230  
 inmersión, 184  
 inmersión abierta, 213  
 inmersión cerrada, 182  
 inmersión plana, 99  
 levanta especializaciones, 189  
 localmente acíclico, 81  
 plano, 98  
 pro-localmente  $\mathbf{P}$ , 199  
 pro-localmente de tipo finito, 202  
 pro-localmente propio, 206  
 qc-epiyectivo, 112  
 qc-isomorfismo, 98  
 qc-isomorfismo de posets anillados, 109  
 qc-monomorfismo y qc-epimorfismo, 171  
 revestimiento étale, 226  
 separado, 191  
 v-cerrado y v-separado, 192
- Morfismo de anillos  
 ind-localización de Zariski, 279  
 ind-Zariski, 279
- Preorden de bloques, 31
- Proesquema, 288  
 algebraico, 293
- Propiedad  
 geométrica, 137  
 pro-local, 198
- Punto  
 $\Omega$ -geométrico, 240  
 de un sitio, 286  
 esquemático, 87  
 redundante, 141  
 sistema de puntos base, 254
- Qc-equivalencia de morfismos, 168
- Recubrimiento  
 por inmersiones planas, 114

- puntuamente abierto, 36
- Refinamiento, 39
  - $g$ -refinamiento, 39
- Retracto a la derecha, 139
- Sitio
  - $\alpha$  algebraico, 218
  - étale, 224
  - débil de Zariski, 121, 123
  - de Zariski (esquemático), 215
  - localmente anillado, 287
  - pro-abierto, 278
- Topos
  - con suficientes puntos, 286
  - localmente coherente, 286
- Transformación pseudonatural, 50
  - estricta, 50
  - laxa, 50