



UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Contribuciones al estudio de
Funciones Peculiares
y

Teoría de Cópulas

por

Juan Fernández Sánchez

Director: Dr. Enrique de Amo Artero

*Memoria realizada en el Departamento
de Álgebra y Análisis Matemático
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas
por la Universidad de Almería.*

Primavera de 2010

A mi esposa

Agradecimientos

Al presentar esta Memoria, quiero dar las gracias a todas las personas que la han hecho posible, en particular y en primer lugar, a los miembros del Departamento de Álgebra y Análisis Matemático de la UAL, por los medios facilitados para la satisfactoria elaboración de esta Memoria.

Es necesario reflejar mi gratitud a quienes con sus libros y artículos, recogidos todos ellos en la Bibliografía, han sido los precursores de este trabajo.

De un modo especial, quiero destacar mi agradecimiento a las personas que han colaborado conmigo en alguno de los Capítulos de esta Memoria:

A la profesora Imen Bhourri, de la Universidad de Monastir, Túnez, con quien he tenido la suerte de hacer el estudio de los conjuntos de nivel de la función de Takagi; su amplio conocimiento del mundo fractal ha tenido una gran influencia en el resultado final.

Al profesor Antonio Salmerón, del Departamento de Estadística y Matemática Aplicada de la UAL, que ha colaborado, desde sus amplios conocimientos informáticos, en el estudio de los momentos en el Capítulo 3.

Al profesor Fabrizio Durante, de la Free University of Bozen-Bolzano, con quien he tenido el privilegio de trabajar en varias líneas de investigación. Buena parte de ese trabajo se encuentra recogido en los dos últimos Capítulos de esta Memoria. Su inmenso conocimiento de la Teoría de Cópulas, su amistad, voluntad y esfuerzo han hecho que, a pesar de haber realizado el trabajo en la distancia, se haya podido llegar a un resultado final tan satisfactorio.

Al profesor Manuel Díaz Carrillo, del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, quien ha colaborado en la mayoría de los Capítulos, he de reconocer su empuje, energía, ilusión, rigor, amplitud de conocimientos, sensatez y, sobre todo, su honesta amistad.

Con plena satisfacción, he de dar las gracias y hacer un reconocimiento particular a Enrique de Amo, la persona que durante estos años ha dirigido el desarrollo de las investigaciones que han hecho posible esta Memoria. He tenido la inmensa fortuna de poder trabajar junto a él y disfrutar de todas sus sugerencias, ideas y sus conocimientos enciclopédicos, que han permitido conjugar áreas tan variadas de las matemáticas. Ha sido una suerte compartir su visión del trabajo de investigación y disfrutar de la facilidad con la que plantea y aborda los problemas, el abanico de herramientas matemáticas que utiliza y su capacidad de enfocar su solución desde diversos puntos de vista.

Pero, principalmente, soy deudor de su amistad, que ha hecho que el compartir este tiempo y esfuerzo haya sido un privilegio.

Especialmente, quiero dar las gracias a mi hijo, Javier, y a mi hija, Irene. Sin su presencia nada sería igual.

Y, sobre todo, a mi esposa, que es la persona que ha hecho que esta memoria sea una realidad; sin ella y su impulso jamás hubiera comenzado esta tarea.

Introducción

La Teoría de la Medida es un área clásica de las Matemáticas que se ha desarrollado dando respuesta a distintos problemas, tanto teóricos como prácticos. Esa variedad de problemas ha hecho que aparezcan ramas, entre otras, como la Teoría de la Integración, la Teoría de Medidas Fractales, las Medidas Finitamente Aditivas, la Teoría de Capacidades, etc. A la vez, se ha manifestado como una herramienta que puede ser aplicada en una amplia variedad de contextos y como una ayuda que da respuesta a problemas que surgen en otras áreas de las matemáticas.

Esta Memoria es, por una parte, una muestra de la aplicación de diferentes herramientas relacionadas con la Teoría de la Medida al estudio de (ciertas) Funciones Peculiares; y, por otra parte, a la Teoría de Cópulas, donde estudiamos una amplia gama de aspectos, como pueden ser sus soportes, el modo en que se encuentra distribuida la masa en la función doblemente estocástica que subyace, las características fractales de conjuntos asociados, etc.

La Memoria está dividida en tres partes. Con el fin de que sea autocontenida, en la primera parte se presenta una serie de definiciones y resultados de los que se hará uso en las otras dos. En ella también se introduce un poco de notación. Se ha pretendido que la terminología y la notación sean las comúnmente aceptadas por la comunidad científica y son las que aparecen en libros que, normalmente, son los considerados como referencias de reconocido prestigio.

La segunda parte está dedicada al estudio de ciertas funciones peculiares. En la literatura no existe una definición de función peculiar. Entendemos, justificándonos en algunos de los trabajos usados en nuestra Memoria, que son aquellas funciones continuas definidas en el intervalo unidad que tienen propiedades inusuales de derivabilidad. Concretamente, nos centraremos en varios casos relacionados con las siguientes situaciones para tales funciones:

- a) No tiene derivada en ningún punto.
- b) Hay un conjunto de medida uno en el que la función es derivable y el valor de su derivada es cero.
- c) No son monótonas en ningún intervalo (ésto es, son de tipo MNI o MNTI).

Ejemplos de estas funciones son conocidos desde finales del siglo XIX, pero los estudios se habían realizado de modo independiente. En 1984, Hata y Yamaguti establecieron la relación existente entre una familia de funciones singulares y una función muy conocida debida a Takagi. Pretendemos continuar en esa línea y profundizar en la relación entre este tipo de funciones y realizar estudios de dimensiones de Hausdorff de conjuntos asociados a estas funciones. También, queremos enmarcar ciertas familias de funciones singulares estudiadas en esta Memoria, dentro de un espacio más amplio de funciones (de este tipo) relacionado con un campo de investigación matemático que ha aparecido en los últimos años como es el Análisis Armónico sobre Fractales.

La relación entre funciones continuas no derivables y funciones que no son monótonas en ningún punto es conocida desde el primer momento en que se inicia el estudio de estas últimas. Menos conocida es la existente entre las funciones con derivada nula en casi todo punto y aquellas que no tienen intervalos de monotonía. Dedicamos uno de los capítulos a analizar ejemplos de estas funciones y a cómo obtenerlas a partir de funciones que son constantes sobre una familia de intervalos de longitud total igual a uno.

Las principales herramientas que se utilizan en esta primera parte son resultados relacionados con la Teoría Ergódica, la distribución de masa en el intervalo unidad de forma que podemos utilizar el resultado conocido como lema de Frostman, la medida de los números normales en $[0, 1]$, resultados de la Teoría de Probabilidad, etc.

Los contenidos de esta primera parte se dividen en siete Capítulos del siguiente modo:

En el primer Capítulo se estudia una función de Takagi. Esta función ha sido analizada desde los puntos de vista geométricos y analíticos. Aquí, se realiza un estudio desde una perspectiva diferente: haciendo uso de la expresión en base dos de los números reales del intervalo $[0, 1]$, se obtiene una fórmula que permite alcanzar resultados (ya conocidos) que se han ido demostrando mediante otras técnicas. El principal resultado, presentado en el teorema 1.40, a nuestro entender, es el haber podido aplicar dicha fórmula para resolver un problema planteado por Maddock (Monats. für Maths., 2009), dando la acotación superior óptima de la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de nivel de la función de Takagi.

El segundo Capítulo está dedicado al estudio de un nuevo sistema de representación de los números reales, que hemos llamado sistema diádico generalizado y está recogido en el teorema 2.2. Se plantea desde una doble perspectiva: el análisis, en profundidad, de sus propiedades y la obtención de resultados que son necesarios en otros capítulos de esta Memoria. Se logrará con la ayuda de la Teoría Ergódica, siguiendo las ideas de Ryll-Nardzewski en el artículo que dio origen a la aplicación de estas técnicas a la Teoría de Números y del reciente libro de Dajani y Kraaikamp. También, se obtienen resultados probailísticos de este sistema con la aplicación de teoremas clásicos como son el T.C.L., la L.G.N. o la L.L.I.

El Capítulo 3 es el más amplio de esta Memoria. En él se estudian varios aspectos relacionados con la aplicación del sistema de representación diádico generalizado a diferentes tipos de funciones.

Las funciones que representamos por S_a , han sido estudiadas y redescubiertas por varios autores (como son Cèsaro, Faber, Salem, de Rham, etc.) a lo largo del siglo XX. Lo han hecho a partir de ideas geométricas y de paso al límite. Alguno de ellos (p.e., de Rham) se ha aproximado a planteamientos aritméticos, sin llegar a ponerlo plenamente de manifiesto. Con la ayuda del sistema diádico generalizado se obtienen las propiedades clásicas de esta familia de funciones y, además, se obtienen las dimensiones de Hausdorff de ciertos conjuntos relacionados con ellas.

Cambiando la variable considerada para la derivación (es decir, con una sencilla permutación de papeles de las variables implicadas), se obtiene un conjunto de funciones que están relacionadas con la función de Takagi y, a su vez, la generalizan. Este método es directo; y evita el laborioso trabajo que supone el uso de bases de Schauder, como se hace en el trabajo pionero de Hata y Yamaguti. En el estudio realizado con estas nuevas funciones, se obtiene que algunas de ellas son continuas no derivables en ningún punto; y que, para otras, existe un conjunto de medida uno en el que su derivada es nula y son MNTI.

En la parte final de este Capítulo tercero, se establece una aplicación del sistema de representación diádico generalizado a la Teoría de Lógica Difusa. Se trata de la aplicación de este sistema de representación al estudio de las funciones $N_{k,k'}$, relacionadas con las Funciones de Agregación Lineal. Estas funciones fueron, inicialmente, estudiadas por Mayor y Torrens. Estos autores lograron dar una expresión explícita de ellas en un conjunto denso de los racionales en $[0, 1]$. Ahora, nos ha sido posible dar una expresión explícita de estas funciones en todo punto del intervalo unidad, como puede verse en el corolario 3.80, y estudiar propiedades sobre su derivabilidad y las de ciertos conjuntos asociados con ellas. Finalmente se aplican los resultados a una clase especial de negaciones, como son las k -negaciones, dando respuesta al problema abierto de lograr una expresión explícita de ellas. Además, se estudian propiedades de derivación y de dimensiones de Hausdorff.

Desde que Salem generalizara las funciones que se estudian en el Capítulo 3 se han obtenido pocos avances en el estudio de estas funciones generales. Su generalidad hace difícil obtener resultados válidos para todos los casos posibles, por lo que es necesario hacer estudios particulares de estas funciones. Destacan, por su interés, las asociadas con los inversos de los números primos y los sumandos de la serie armónica. En el cuarto Capítulo se hace un estudio de la función asociada con estos últimos valores y se determinan condiciones (suficientes) de derivabilidad nula y de derivada generalizada infinita. Asimismo, se calculan las dimensiones de Hausdorff de conjuntos en los que se concentra la masa de las medidas asociadas a funciones generalizadas.

La interpolación sobre conjuntos fractales dados mediante un IFS (siglas en inglés para los sistemas de funciones iteradas) es un problema de creciente interés por la aplicación en informática de estos objetos y las técnicas matemáticas involucradas. En el Capítulo 5, también, se dan condiciones necesarias y suficientes para obtener problemas de interpolación con solución única en ciertos espacios vectoriales.

En 2006, Demir et al. inician el estudio de la restricción al intervalo $[0, 1]$ de funciones armónicas en el triángulo de Sierpiński; y conjeturan que el conjunto de puntos en los que la derivada es nula es de medida uno. En este

Capítulo, en el teorema 5.24, se da respuesta positiva a esta conjetura; y se describen familias de funciones que generalizan las estudiadas y que tienen esa misma propiedad, como muestra el teorema 5.40.

Las construcciones de funciones singulares y continuas sin derivada en ningún punto han sido elaboradas y estudiadas desde distintas perspectivas. Ya se ha comentado anteriormente que Hata y Yamaguti establecieron un vínculo entre ambos campos de estudio. El sexto Capítulo, que es el último de esta segunda parte, está dedicado a lograr otra forma de relacionar estos dos tipos de funciones con la ayuda de un instrumento clásico como es la función de Cantor. Con ello, se concluye la segunda parte de la Memoria.

La relación existente entre una función de distribución n -dimensional y sus marginales unidimensionales ha despertado interés en las investigaciones en Estadística desde hace bastantes años. En este sentido han de ser valorados los trabajos que, en la década de los cincuenta del pasado siglo, desarrollaron Fréchet, Feron, Gumbel y Dall'Aglio. Fué en 1959 cuando Sklar demostró el teorema que hoy es conocido como Teorema de Sklar. Este resultado dice, esencialmente, que, en el caso multidimensional, si H es una función de distribución n -dimensional con marginales F_1, F_2, \dots, F_n , entonces existe una cópula C verificando la igualdad $H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$. Desde ese momento hasta la actualidad, las cópulas han sido un campo de investigación matemática que ha ido adquiriendo un interés creciente. En la tercera parte de esta Memoria se estudian varias cuestiones relacionadas con la cópulas. Las principales herramientas que se utilizan están relacionadas, por una parte, con funciones que conservan la medida y su conexión con cópulas, Teoría Ergódica y autoafinidad y autosimilaridad; y, por otra, con la redistribución de la masa de medidas n -estocásticas asociadas con cópulas. Ello nos permite conectar con las ideas recientemente desarrolladas bajo el nombre de "rectangular patchworks" (mosaicos rectangulares).

Esta parte se divide en cinco capítulos.

Es conocido que las parejas de funciones que conservan la medida proporcionan cópulas y que, dada una cópula, es posible encontrar parejas de funciones que conservan la medida de modo que, a partir de ellas, se vuelve a obtener la cópula inicial. Recientemente se ha planteado por Kolesárová et al. (Med. J. of Math., 2008), la dificultad de encontrar una pareja de funciones que conservan la medida de modo que proporcionen una cópula dada. En particular, se plantea el problema de dar un ejemplo para la cópula independiente (o cópula producto). En esta línea de investigación, en el Capítulo 7 se da un método general para calcular pares de funciones que conservan la medida que proporcionan una cópula dada; y se encuentran ejemplos particulares para la cópula independiente. Este resultado se refleja en el teorema 7.8. También se estudia el caso de las cópulas de soporte fractal introducidas por Fredricks et al. El resultado más relevante al respecto es el teorema 7.14.

Un resultado de interés en este mismo Capítulo será determinar condiciones para que la gráfica de una función pueda soportar una cópula. Aunque el primer ejemplo explícito de cópula con soporte fractal ha sido el citado anteriormente (introducido por Fredricks et al. en Ins. Math. Econ., 2005) estaba implícito en varios trabajos, sin embargo, que existen diferentes funciones que tienen por gráfica un conjunto fractal y son el soporte de una cópula. Estas funciones y sus gráficas no estaban estudiadas como soportes de cópulas. En este sentido, ayudándonos de la caracterización dada, logramos obtener condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo la gráfica de las funciones autoafines (en el sentido de Kamae) pueden soportar una cópula y calcular la dimensión de Hausdorff de la gráfica, resultados que aparecen en el teorema 7.27 y el corolario 7.31.

En el octavo Capítulo profundizamos en el estudio de las cópulas introducidas Fredricks et al. Concretamente, se dan, por primera vez, ejemplos de cópulas cuya masa se encuentra concentrada en un conjunto con dimensión fractal menor que la de su soporte; y ejemplos de cópulas con el mismo soporte que son mutuamente singulares.

Al tener el soporte fractal, los problemas relacionados con la integración de estas medidas doblemente estocásticas tienen una dificultad especial. El cálculo de medidas de asociación (como son la Tau de Kendall, la Rho de Spearman, o la Gamma de Gini) o el cálculo de momentos, resultan particularmente complejos. Utilizando la autosimilaridad de la medida doblemente estocástica asociada, se realiza un cálculo de las medidas de asociación y se establecen métodos iterativos que permiten calcular los momentos para estas cópulas. Este es el contenido central del Capítulo 8.

El Capítulo 9 está dedicado al estudio del Teorema de Sklar en dos dimensiones. La existencia de una cópula que extiende a una subcópula es la base de la demostración que dieron Schweizer y Sklar de ese resultado. Se profundiza aquí en esa idea; y se logra obtener cómo son todas las cópulas que extienden una subcópula dada y, por tanto,

se logra establecer cómo son todas las cópulas que están asociadas con variables aleatorias no continuas (Teorema 9.5). También, se obtienen acotaciones superior e inferior de estas cópulas. Estas acotaciones también son cópulas.

Recientemente Nelsen et al. (en *Insurance Math. Econom.*, 2008) han planteado dos problemas que permanecían sin respuesta:

a) Determinar si la única función diagonal que tiene un único elemento en el conjunto de cópulas con esa sección diagonal es la identidad.

b) Demostrar o refutar que dada una función diagonal, diferente de la identidad, la inclusión del conjunto de cópulas con esa sección diagonal en el conjunto de cuasicópulas con esa misma sección diagonal es estricta.

En el Capítulo 10 se demuestra que es cierto que la única función diagonal con la propiedad descrita en a) es la identidad; y que la respuesta afirmativa a b) conlleva siempre una inclusión estricta. Además, dada una función diagonal convexa, el teorema 10.3 da un método que permite construir nuevos ejemplos de cópulas que tienen como sección diagonal esta función. A diferencia de las creadas por otros métodos, estas cópulas tienen, en general, componente singular y componente absolutamente continua.

El último Capítulo se dedica al estudio de una familia de cópulas que generalizan las conocidas como "Shuffles of Min" (que podría traducirse, muy libremente, como "barajada de (la cópula) Mínimo". Recientemente han aparecido varias publicaciones extendiendo estas cópulas. Durante et al. (*J. Math. An. Appl.*, 2009) lo hacen en el caso bidimensional con funciones que conservan la medida. En este Capítulo, se introducen unas cópulas, que llamaremos S -cópulas, que generalizan los shuffles of Min y que, como caso particular, incluyen la generalización multidimensional de Mikusinski y Taylor. Se estudian algunas propiedades, obteniéndose, como principal resultado, la densidad de esta clase de cópulas en la familia de las cópulas con la topología derivada de la convergencia puntual en la clase de todas las cópulas (Teorema 11.20).

Índice general

I	Resultados previos	1
0.1.	Derivación	3
0.2.	Base de Schauder	4
0.3.	Teoría de la Medida	4
0.4.	Probabilidad	5
0.5.	Teoría Ergódica	7
0.6.	Fractales	10
0.7.	Cópulas	11
II	Funciones peculiares	13
1.	La función de Takagi y sus conjuntos de nivel	15
1.1.	Introducción	15
1.2.	La función de Takagi	16
1.3.	Propiedades clásicas de T	20
1.4.	Teorema de Kôno	23
1.5.	Ecuaciones funcionales caracterizando a T y autoafinidad	25
1.6.	Fórmula de Trollope	26
1.7.	Conjuntos de nivel	27
1.7.1.	Preliminares y notación	28
1.7.2.	El resultado principal	30
1.7.3.	Conclusiones	33
1.8.	La función de Takagi y los números de Bernoulli	34
1.8.1.	Identidad de Euler generalizada para los números de Bernoulli	35
1.8.2.	Demostración de la fórmula de Euler para $\zeta(2p)$	37
2.	Sistema de representación diádico generalizado	39
2.1.	Introducción	39
2.2.	Sistema de numeración diádico generalizado (SNDG)	40
2.3.	Sistema dinámico asociado con el SNDG	41
2.4.	Extensión natural y pares de Jager	45
2.5.	Teorema tipo Gauss-Kuzmin-Levy y resultados relacionados	48
3.	Funciones singulares y funciones de Takagi generalizadas	53
3.1.	Introducción	53
3.2.	La familia $\{S_a : a \in \mathbb{I}\}$	53
3.2.1.	Ecuaciones funcionales	57
3.2.2.	Convoluciones y una demostración alternativa de la singularidad de S_a	59
3.3.	Resultados métricos relacionados con S_a	60
3.3.1.	El sistema dinámico T	60
3.3.2.	El sistema dinámico H	61
3.4.	Aplicación a dimensiones de Hausdorff	63
3.5.	Una generalización de la función de Takagi	66
3.6.	Funciones de agregación lineal y k-negaciones	73
3.7.	La función $N_{k,k'}$	74

3.7.1. K -negaciones	80
4. Una función de Salem generalizada	83
4.1. Introducción	83
4.2. Relación entre sistemas de representación y dimensiones de Hausdorff	83
4.3. Unas cuestiones sobre la derivada	89
4.4. Una función que genera a SG^{-1} como a.d.f.	90
5. Interpolación y funciones singulares en fractales	93
5.1. Introducción	93
5.2. Notaciones y definiciones	93
5.2.1. Funciones de Interpolación Fractal	93
5.2.2. Estructuras autosimilares p.c.f.	95
5.2.3. Funciones armónicas	95
5.3. Resultados	96
5.3.1. Interpolación fractal generalizada	96
5.3.2. Interpolación FIF en p.c.f.	97
5.3.3. Interpolación armónica en estructuras p.c.f.	99
5.4. Funciones armónicas en el triángulo de Sierpiński	99
5.5. Resultados	101
5.5.1. El lado l_1	101
5.5.2. El lado l_2	103
5.5.3. El lado l_3	103
5.6. Propiedades en el caso del lado l_1	104
5.7. Generalización	106
6. La función de Cantor y funciones peculiares	107
6.1. Introducción	107
6.2. Funciones singulares estrictamente crecientes	108
6.3. Una función MTNI y de variación acotada con derivada nula en casi todo punto	109
6.4. Una función continua que no admite derivada en ningún punto	111
6.5. El caso absolutamente continuo	115
6.5.1. Particiones de \mathbb{I} y funciones MNI	116
III Teoría de Cópulas	117
7. Funciones que conservan la medida y cópulas	119
7.1. Introducción	119
7.2. Resultado general	119
7.3. El caso de la cópula producto \mathbb{I}	121
7.3.1. Ejemplo de Cantor	122
7.3.2. Ejemplo de Hilbert	123
7.3.3. Ejemplo de Peano	123
7.4. Cópulas autosimilares	124
7.5. Propiedades de los sistemas de representación	125
7.6. Cópulas y funciones autoafines	127
7.7. Aplicación al cálculo de dimensiones fractales	128
7.8. El caso no continuo	131
8. Copulas con soporte fractal	133
8.1. Introducción	133
8.2. Estudio ergódico	134
8.2.1. Generalización	137
8.3. Cópulas con soporte de interior no vacío	138
8.4. Ejemplos en los que el soporte no es conexo	139
8.4.1. Ejemplos en los que la proyección sobre cada eje es un punto	141

8.5.	Fórmula recurrente de los momentos	142
8.5.1.	Primer método	142
8.5.2.	Segundo método	144
8.5.3.	Secciones diagonales	145
8.6.	Medidas de asociación	147
9.	Cóputas y variables aleatorias no continuas	149
9.1.	Introducción	149
9.2.	Resultado Principal (Extensión del Teorema de Sklar)	150
9.2.1.	El H -proceso	150
9.2.2.	Teorema de Sklar	151
9.2.3.	Extensión del Teorema de Sklar	151
9.3.	Aplicaciones	153
9.3.1.	Acotaciones superior e inferior	153
9.3.2.	Extensión de sub-cuasicóputas	154
10.	Cuestiones sobre cóputas con sección diagonal dada	155
10.1.	Introducción	155
10.2.	Construcción de cóputas con una sección diagonal convexa	155
10.3.	Resolución de dos problemas abiertos sobre \mathcal{C}_δ y \mathcal{Q}_δ	156
11.	S-cóputas	159
11.1.	Introducción	159
11.2.	S -estructura	159
11.3.	Propiedades de las S -cóputas	161
11.4.	Aproximación	165

Parte I

Resultados previos

Con el fin de que esta Memoria sea autocontenida, en esta Parte se pretende recopilar y mostrar las definiciones, resultados y notaciones que se utilizarán a lo largo de ella. Consideramos que la selección realizada recoge todos aquellos que son más relevantes. Las notaciones que utilizaremos son las de tipo estándar y, junto a los siguientes resultados, están tomadas de libros reconocidos y de un uso extendido como son: [27, Billingsley], [30, Billingsley], [63, Falconer], [62, Falconer], [64, Feller], [73, Halmos], [74, Hardy; Wright], [122, Nelsen], [88, Joe], [94, Kharazishvili], [108, Loeve], [127, Niederreiter; Kuipers], [140, Pollicott; Yuri], [146, Riesz; Nagy] o [147, Rudin].

La Sección 0.1 está dedicada a recordar algunas propiedades sobre las derivadas de funciones reales de variable real. Seguidamente, en la Sección 0.2 se recuerda la definición de base de Schauder y un ejemplo para las funciones continuas definidas en $[0, 1]$. En la Sección 0.3 se introducen algunos resultados básicos de la Teoría de la Medida. La Sección 0.4 esta dedicada a los resultados probabilísticos que se utilizarán posteriormente. Las herramientas de la Teoría Ergódica serán utilizadas con mucha frecuencia y están recogidas en la Sección 0.5. En la mayoría de los Capítulos será frecuente el uso de la Teoría de Fractales. Los instrumentos que utilizaremos de esta teoría se muestran en la Sección 0.6. Finalmente, en la Sección 0.7, se hace una descripción de algunas propiedades de las cópulas y cuasicópulas que serán utilizadas en la tercera parte de la Memoria.

0.1. Derivación

Recogemos a continuación algunos resultados sobre derivación que serán utilizados con frecuencia en esta primera parte de la Memoria.

Teorema 0.1 *Si g es una función de variación acotada, entonces g es derivable para casi todo valor x con la medida de Lebesgue y su derivada g' pertenece a la clase $L^1(\mathbb{R})$.*

Demostración. Véase [94], [146, pág. 11] o [147, pág. 149]. ■

Corolario 0.2 *Si g es una función monótona, entonces es derivable para casi todo x , en el sentido de Lebesgue.*

Lema 0.3 *Si existe la derivada $f'(x)$, entonces, para $u \searrow x, v \nearrow x$, se tiene que*

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} \longrightarrow f'(x).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{f(u) - f(v)}{u - v} &= \frac{f(u) - f(x) + f(x) - f(v)}{u - v} = \\ &= \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \frac{u - x}{u - v} + \frac{f(x) - f(v)}{x - v} \frac{x - v}{u - v} = \\ &= (f'(x) + o(1)) \frac{u - x}{u - v} + (f'(x) + o(1)) \frac{x - v}{u - v} = \\ &= f'(x) + o(1) \rightarrow f'(x). \end{aligned}$$

■

Comentario 0.4 *Podemos eliminar la condición de que (u_n) y (v_n) estén separados por x y suponer, únicamente, que (u_n) y (v_n) sean convergentes a x , si añadimos la exigencia de que $\frac{u_n - x}{u_n - v_n} = O(1)$ y $\frac{v_n - x}{u_n - v_n} = O(1)$.*

Definición 0.5 *Se dice que una función g admite derivada generalizada en x si existe $g'(x)$ en el sentido usual o*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \pm\infty.$$

Lema 0.6 *Si existe la derivada generalizada $g'(x)$ y $u \nearrow x$ y $v \searrow x$, entonces*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(u) - g(v)}{u - v} = g'(x).$$

Teorema 0.7 (Teorema de Fubini) *Sea*

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots = s(x)$$

una serie convergente donde los términos son funciones monótonas del mismo tipo, definidas sobre el intervalo $a \leq x \leq b$. Entonces, tenemos que

$$f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots = s'(x),$$

salvo, posiblemente, en un conjunto de medida nula.

Demostración. Véase [94, pág. 63] o [146, pág. 12]. ■

Teorema 0.8 (Teorema de Fubini para funciones de Variación Acotada) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie de funciones de variación acotada. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} T f_n$ de las variaciones totales de las funciones es convergente. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es convergente a una función f de variación acotada y $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ en casi todo punto.

Demostración. Véase [93]. ■

0.2. Base de Schauder

Recordamos la definición de base de Schauder y la base correspondiente que utilizaremos en esta Memoria.

Definición 0.9 Sea $(X, \|\circ\|)$ un espacio de Banach. Se dice que la sucesión (x_i) de elementos de X es una base de Schauder si para cada $x \in X$ hay una única sucesión (α_i) de elementos de \mathbb{R} (en nuestro caso) tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$.

En este trabajo siempre que hablemos de base de Schauder, salvo que se diga lo contrario, nos referiremos al contexto del espacio de las funciones continuas en $[0, 1]$, notado $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\circ\|)$, donde $\|\circ\|$ es la norma de Chebychev. Sean

$$g_1(t) = t; \quad g_2(t) = 1 - t$$

y $g_{k,i}(x)$ es la función definida en $[0, 1]$ que tiene por gráfica un triángulo isósceles de altura 1 y vértices en $\frac{i}{2^k}$ y $\frac{i+1}{2^k}$ y vale cero en el resto, con $k = 0, 1, \dots$ y $0 \leq i \leq 2^k - 1$.

Teorema 0.10 Las funciones $g_1, g_2, g_{00}, g_{10}, g_{11}, \dots$ con $k = 0, 1, \dots$ y $0 \leq i \leq 2^k - 1$ son una base de Schauder y sus coeficientes vienen dados por $\alpha_1 = f(1)$, $\alpha_2 = f(0)$, y

$$\alpha_{ki} = f\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{i}{2^k}\right) + f\left(\frac{i+1}{2^k}\right) \right).$$

Demostración. Véase [137, pág. 278], o bien [83]. ■

0.3. Teoría de la Medida

Recordamos, de manera sucinta, la forma en la que usaremos los teoremas relevantes de teoría de la medida. Las demostraciones pueden encontrarse en la mayoría de libros de este tema, por ejemplo en [147].

Una función se dice medible cuando preserva la estructura entre espacios medibles. Formalmente, una función f entre dos espacios medibles (X, \mathbb{A}) y (X', \mathbb{A}') se dice medible si la preimagen de cualquier conjunto medible es, a su vez, medible; es decir, $f^{-1}(\mathbb{A}') \subset \mathbb{A}$.

Teorema 0.11 (de la Convergencia Monótona) Dados el espacio de medida (X, \mathbb{A}, μ) y (f_n) una sucesión de funciones medibles de X en $[0, +\infty]$ tal que:

- a. $f_n \leq f_{n+1}$ para casi todo $x \in X$, y
- b. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$, para casi todo $x \in X$.

Entonces, f es medible y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Teorema 0.12 (de la Convergencia Dominada) Sean dados el espacio de medida (X, \mathbb{A}, μ) y (f_n) una sucesión de funciones medibles de X en \mathbb{R} tal que existe

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

para casi todo $x \in X$. Si existe una función integrable g tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ con } x \in X \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+,$$

entonces f es integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Definición 0.13 Dadas dos medidas μ_1 y μ_2 definidas en un mismo espacio medible (X, \mathbb{A}) , decimos que μ_1 es absolutamente continua respecto de μ_2 (escrito ésto en la forma $\mu_1 \ll \mu_2$) si para un conjunto medible A tal que $\mu_2(A) = 0$, entonces $\mu_1(A) = 0$.

Por otra parte, se dice que son mutuamente singulares (representado por $\mu_1 \perp \mu_2$) si existen dos conjuntos medibles A y B para los que ocurre que

$$\mu_1(X \setminus A) = 0 = \mu_2(A) = \mu_2(X \setminus B) = \mu_1(B).$$

Podemos enunciar en un teorema dos resultados de gran importancia:

Teorema 0.14 Sean μ_1 y μ_2 dos medidas definidas en (X, \mathbb{A}) .

a) (Lebesgue) Existe un único par de medidas $\mu_{1,a}$ y $\mu_{1,s}$ para las que

$$\mu_1 = \mu_{1,a} + \mu_{1,s}; \quad \mu_{1,a} \ll \mu_2; \quad \mu_{1,s} \perp \mu_2.$$

b) (Radon-Nikodým) Existe una única función integrable g tal que

$$\mu_{1,a}(E) = \int_E g d\mu_2.$$

Reservamos las letras: \mathbb{I} para el intervalo cerrado unidad $[0, 1]$, \mathcal{B} para las σ -álgebras de Borel y λ para la medida de Lebesgue (indistintamente, pues no habrá confusión) en una o varias dimensiones.

Una medida que se utilizará con frecuencia es v_g , llamada *capacidad de la función* g : Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que $\lambda(A) < \infty$ y una función $g: A \rightarrow \mathbb{R}$. Se define entonces

$$v_g(x) := \lambda(\{t : g(t) \leq x\}).$$

Cuando tenemos una función monótona f , representamos por df a la correspondiente medida de Stieltjes asociada a ella.

0.4. Probabilidad

En varios lugares se precisará, con frecuencia, de diferentes resultados de tipo probabilístico, que recordamos a continuación en la forma en la que serán utilizados.

Teorema 0.15 (Ley fuerte de los grandes números, L.G.N.) Si las variables aleatorias X_n son independientes y están idénticamente distribuidas con una ley común $L(X)$, entonces en un conjunto de medida uno tenemos el límite

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \longrightarrow c$$

si, y sólo si, $E|X| < \infty$; y, en tal caso, $c = E(X)$.

Demostración. Véase [108, pag. 233]. ■

Definición 0.16 Sean F_1, F_2 dos funciones de distribución. Llamaremos convolución de ambas, y la notamos por $F_1 * F_2$, a la nueva función de distribución

$$(F_1 * F_2)(x) := \int F_1(x - y) dF_2(y).$$

Definición 0.17 Dada la función de distribución F , a la función integral

$$f(u) = \int e^{iux} dF(x)$$

la llamamos función característica de F .

Definición 0.18 Una sucesión de funciones (F_n) converge débilmente a otra función F si $F_n(x) \rightarrow F(x)$ en todo punto x , y se notará $F_n \Rightarrow F$.

Teorema 0.19 a) Si para las funciones de distribución se tiene $F_n \Rightarrow F$, entonces $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para las funciones características.

b) Si $F = F_1 * F_2$, entonces $f = f_1 f_2$, para las correspondientes características.

Lema 0.20 Si el momento de orden dos de F_n es finito (para cada valor de n), entonces la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(F_n) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(F_n)$$

implica la convergencia de $H_n(x) = F_1 * \dots * F_n(x)$.

Demostración. Véase [87, pág. 56]. ■

Teorema 0.21 Si $F(x) = F_1 * F_2 * \dots(x)$ es una convolución infinita convergente donde cada F_n sea atómica pura, entonces F es atómica pura, singular o absolutamente continua.

Demostración. Véase [87, pag. 86]. ■

Teorema 0.22 (Levy) Sean F_n funciones de distribución y $d_n = \max\{F_n(z^+) - F_n(z^-)\}$. Entonces, la convolución infinita $F := F_1 * F_2 * \dots$ es continua si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - d_n)$ diverge.

Demostración. Véase [60, pág. 46]. ■

Teorema 0.23 (Criterio 0-1 de Borel) Si los sucesos A_n son independientes, entonces

- a) $P(\limsup A_n) = 0$ si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.
- b) $P(\limsup A_n) = 1$ si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$.

Teorema 0.24 (Criterio de las tres series) Sean X_n variables aleatorias independientes. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge casi seguro si, y sólo si, existe c de modo que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n| \geq c]; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2 X_n^c; \quad \sum_{n=1}^{\infty} E X_n^c$$

convergen, donde

$$X_n^c(x) = \begin{cases} X_n(x), & \text{si } x \leq c \\ 0, & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

y EX es la esperanza de X .

Demostración. Véase [30, pág. 290]. ■

Teorema 0.25 (Lindeberg-Levy) Si X_n son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con varianza finita, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a < \frac{S_n - ES_n}{\sigma(S_n)} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

donde $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Demostración. Véase [71, pag. 556]. ■

Teorema 0.26 (Ley del Logaritmo Iterado, L.L.I.) Si X_n son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con $EX_n = 0$ y $\sigma_n = 1$, entonces

$$P \left[\limsup \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1 \right] = 1,$$

donde $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Demostración. Véase [30, pág. 154] ■

Teorema 0.27 En las condiciones anteriores; si hacemos $a_n \rightarrow \infty$ y $\frac{a_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, entonces

$$P \left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq a_n \right] = e^{-\frac{a_n^2}{2}(1+o(1))}.$$

Demostración. Véase [30, pág. 153]. ■

0.5. Teoría Ergódica

Unas técnicas que utilizaremos de forma profusa, tanto en el estudio de funciones peculiares como en el de cópulas, son las de la Teoría Ergódica. Recordamos algunas de ellas.

Definición 0.28 Dados dos espacios de medida (X, \mathbb{A}, μ) e (Y, \mathbb{M}, γ) decimos que la función medible $T : X \rightarrow Y$ preserva la medida si, y sólo si, para todo $B \in \mathbb{M}$ tenemos la igualdad $\mu(T^{-1}(B)) = \gamma(B)$.

Para ahorrar cálculos es muy práctico el siguiente resultado.

Teorema 0.29 Supongamos que $X = Y$ (y $\mathbb{A} = \mathbb{M}$) y que existe una colección \mathbb{P} cerrada para intersecciones finitas que genera a \mathbb{A} . Si $T^{-1}(A) \in \mathbb{A}$ y $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathbb{P}$, entonces T es medible y preserva la medida.

Demostración. Véase [30, pag. 311]. ■

Definición 0.30 A (X, \mathbb{A}, μ, T) lo llamaremos sistema dinámico de representación.

Normalmente, y para simplificar notación, escribiremos al sistema dinámico por T (sobreentendiéndose los otros elementos).

Teorema 0.31 (Teorema Ergódico) Si (X, \mathbb{A}, μ) es un espacio de medida, la aplicación medible $T : X \rightarrow X$ preserva la medida y la aplicación $f \in L_1$, entonces

$$\frac{\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))}{n}$$

converge en casi todo punto (con la medida μ) y el límite, que lo notaremos por $f^*(x)$, tiene las siguientes propiedades:

- a. $f^*(x) \in L_1$.
- b. $f^*(T(x)) = f^*(x)$, para casi todo x .
- c. Si $\mu(X)$ es finito entonces, $\int f d\mu = \int f^* d\mu$.
- d. Las medias $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$ convergen a f^* en media.

Demostración. Véase [73]. ■

Definición 0.32 Con la notación anterior decimos que $T : X \rightarrow X$ es ergódica si para todo conjunto E invariante ($E = T(E)$) se tiene que $\mu(E) = 0$ o $\mu(X \setminus E) = 0$.

Lema 0.33 Sea \mathbb{P} un subconjunto de la sigma álgebra \mathbb{A} que la genera. Supongamos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para cada $A \in \mathbb{P}$ existe un valor n_A para el que

$$P(B \cap T^{-n_A}(A)) \geq cP(A)P(B) \quad \forall B \in \mathbb{P}.$$

Si $T^{-1}(C) = C$, entonces $\mu(C) = 0$ o $\mu(X \setminus E) = 0$.

Demostración. Véase [30]. ■

Teorema 0.34 Con f^* según la notación del teorema ergódico, si $T : X \rightarrow X$ es ergódica y preserva la medida μ , entonces f^* es constante para casi todo x . Si $\mu(X)$ es finito, entonces

$$f^*(x) = \frac{\int f d\mu}{\mu(X)}.$$

Demostración. Véase [73, pág. 31]. ■

Definición 0.35 Se dice que la sucesión (a_n) tiene a F (función de distribución) como función de distribución asintótica (a.d.f.) si existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{a_k < x : k = 1, \dots, n\}}{n} = F(x).$$

Corolario 0.36 En las condiciones del teorema anterior, si $X = \mathbb{I}$, la σ -álgebra es \mathcal{B} y $F(x) = \mu([0, x])$, entonces el conjunto de puntos tales que $(T^n(x))$ tiene a F como a.d.f. es de medida uno.

Demostración. Es una consecuencia del teorema anterior. ■

Definición 0.37 Decimos que x es normal para un sistema dinámico de representación $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, \mu, T)$ si la x pertenece al conjunto descrito en el corolario anterior.

Esta definición es equivalente a las que aparecen en [127], [105], [39], [74] o [128] para los sistemas de numeración en base n , número entero positivo.

El lector interesado puede ver la definición de entropía y algunas de sus propiedades en [40], [27], o [140]. Aquí, únicamente señalamos que se trata de un invariante, que notamos $h(T)$, y los dos resultados siguientes.

Teorema 0.38 Dado el sistema dinámico de representación $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, T, \lambda)$ en el que T es una función con segunda derivada continua a trozos y que existe β para el que $\inf_{x \in I} |T'(x)| > \beta > 1$. Entonces,

$$h(T) = \int \ln |T'(x)| d\lambda$$

siempre que ésta tenga sentido.

Demostración. Véase [140, pág. 133]. ■

Definición 0.39 Llamamos cilindro de orden k , y lo notaremos por $\Delta_{i_0 i_1 i_2 \dots i_k}$ (aunque normalmente omitiremos los índices y únicamente escribiremos Δ_k), al conjunto $A_{i_0} \cap T^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap T^{k-1}(A_{i_{k-1}})$. Los cilindros de cada orden forman una partición de X y cuando nos referimos al cilindro de orden k al que pertenece x lo notaremos $\Delta_k(x)$.

Teorema 0.40 (Shannon-McMillan-Breiman) Sea (X, \mathbb{A}, μ) un espacio de medida y T una función que preserva la medida μ . Entonces, para un conjunto de medida uno (en la medida μ)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\ln(\mu(\Delta_n))}{n} = h(T).$$

Demostración. Véase [27] o [140]. ■

Definición 0.41 Si x no tiene representación finita y su k -ésimo cilindro es $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$. Representamos por $\varsigma_n(x)$, normalmente omitiremos la x , como el valor de desarrollo finito con k índices, el primero i_k , segundo i_{k-1} y así, sucesivamente, hasta el índice k que será i_1 .

La definición anterior es la usual para la fracción continua, que ilustramos como ejemplo:

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k + \frac{1}{\ddots}}}}} \quad \varsigma_n = \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1}}}}}$$

Definición 0.42 Diremos que (X, \mathbb{A}, μ, T) es fuertemente mezclado si para todos $B, C \in \mathbb{A}$ tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}C \cap B) = \mu(B)\mu(C).$$

Teorema 0.43 Que (X, \mathbb{A}, μ, T) sea fuertemente mezclado es equivalente a que para todo par de funciones $f \in L^\infty$ y $g \in L^1$, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f \circ T^n) g d\mu = \int_X f d\mu \int_X g d\mu.$$

Definición 0.44 Sea dado un espacio de medida (Y, \mathbb{A}, μ) y sea $(X, \mathbb{B}, \mu') = \prod_{n=1}^{\infty} (Y, \mathbb{A}, \mu)$, donde \mathbb{B} es la σ -álgebra generada por los conjuntos de la forma $\{x = (x_k)_{k \geq 1} : x_i \in A_1, \dots, x_{i+n-1} \in A_n\}$ y A_1, \dots, A_n son elementos de \mathbb{A} , n es un entero positivo y μ' es la medida producto. Consideraremos el operador desplazamiento $\sigma((y_1, y_2, y_3, y_4, \dots)) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$. Sea $k \geq 2$ un entero y p_0, p_1, \dots, p_{k-1} números reales positivos satisfaciendo la relación $\sum_{i=0}^{k-1} p_i = 1$. Let $K = \{0, 1, \dots, k-1\}$ y $P = 2^K$ el conjunto de las partes de K . La tripleta (K, P, μ) es el espacio de probabilidad con $\mu(i) = p_i$. Al espacio $\prod_{j=1}^{\infty} (K, P, \mu)$, junto con la transformación $\sigma((x_0, x_1, x_2, \dots)) = (x_1, x_2, \dots)$, se le llama sistema de Bernoulli lateral o de una cara. Podemos comprobar que un sistema de Bernoulli de una cara es fuertemente mezclado (véase [164, Sec. 4.9]).

Recordemos (véase [140, Chap. 8]) que, dados dos espacios dinámicos de representación $(X_i, \Omega_i, \mu_i, F_i)$, $i = 1, 2$, un isomorfismo es una aplicación $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ tal que:

- (1) ϕ es una biyección (tras eliminar conjuntos de medida cero, si es necesario),
- (2) ϕ y ϕ^{-1} son aplicaciones medibles (i.e., $\phi^{-1}(\Omega_2) \subset \Omega_1$ y $\phi(\Omega_1) \subset \Omega_2$),
- (3) $\mu_1(\phi^{-1}B) = \mu_2(B)$, para $B \in \Omega_2$ (también $\mu_2(\phi B) = \mu_1(B)$, para $B \in \Omega_1$), y
- (4) $\phi \circ F_1 = F_2 \circ \phi$.

Definición 0.45 Decimos que $(X_1, \Omega_1, \mu_1, F_1)$ y $(X_2, \Omega_2, \mu_2, F_2)$ son isomorfos si entre ellos existe un isomorfismo ϕ . Si un espacio (X, Ω, μ, F) es isomorfo a otro que es un sistema de Bernoulli de una cara, entonces decimos que (X, Ω, μ, F) es un sistema de Bernoulli.

Definición 0.46 Sean (X, \mathbb{A}, μ, T) y $(Y, \mathbb{M}, \gamma, S)$ dos sistemas dinámicos de representación. Decimos que $(Y, \mathbb{M}, \gamma, S)$ es un factor de (X, \mathbb{A}, μ, T) si existe una aplicación sobreyectiva $\Psi : X \rightarrow Y$ tal que:

- a) $\Psi^{-1}\mathbb{M} \subset \mathbb{A}$
- b) $\Psi T = S\Psi$
- c) $\mu(\Psi^{-1}E) = \gamma(E) \quad \forall E \in \mathbb{M}$

El sistema (X, \mathbb{A}, μ, T) es llamado una extensión de $(Y, \mathbb{M}, \gamma, S)$ y Ψ es llamada una aplicación factor.

Definición 0.47 Sea un sistema $(Y, \mathbb{M}, \gamma, S)$ con S no inversible. Una extensión (X, \mathbb{A}, μ, T) de $(Y, \mathbb{M}, \gamma, S)$ con T inversible es llamado una extensión natural si la aplicación factor Ψ satisface que la σ -álgebra \mathbb{A} está generada por $T^m \Psi^{-1}\mathbb{M} = \mathbb{A}$ con $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Teorema 0.48 Con la notación de la definición anterior, todo sistema $(Y, \mathbb{M}, \gamma, S)$ con S no inversible tiene una extensión natural; y ésta es única, salvo isomorfismos. Además,

- a) (X, \mathbb{A}, μ, T) es ergódico si, y sólo si, $(Y, \mathbb{M}, \gamma, S)$ lo es.
- b) (X, \mathbb{A}, μ, T) es fuertemente mezclado si, y sólo si, $(Y, \mathbb{M}, \gamma, S)$ lo es.

0.6. Fractales

El concepto de fractal, introducido formalmente por Mandelbrot en 1975, tiene su origen en el estudio de diferentes conjuntos matemáticos con propiedades especiales, denominados comúnmente como "monstruos matemáticos" por su carácter patológico, que había propiciado su estudio como elementos disconexos y casos particulares de una ciencia que estaba por nacer. Describimos aquí los resultados de los que haremos uso en esta Memoria.

Definición 0.49 Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n y $0 \leq s \leq n$, $\delta > 0$. Para tal s , se define la medida exterior s -dimensional de Hausdorff de A por

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \inf \sum_i |U_i|^s \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los recubrimientos numerables $\{U_i\}$ de A por subconjuntos de \mathbb{R}^n , con $0 < |U_i| \leq \delta$. La dimensión de Hausdorff, que se denota por $\dim_{\mathcal{H}}(A)$, es el valor s_0 tal que $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ para $s < s_0$, y $\mathcal{H}^s(A) = 0$ para $s > s_0$. Escribimos $|U| = \sup \{\|x - y\| : x, y \in U\}$ para el diámetro del conjunto U .

Definición 0.50 Una función $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ es bilipschitziana si es biyectiva y tanto f como f^{-1} son lipchitzianas.

Definición 0.51 Sea A un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n . Para cada $\delta > 0$ notamos por $N_\delta(A)$ al menor número de conjuntos de diámetro menor que δ que son necesarios para cubrir el conjunto A . La dimensión inferior y superior por cajas se definen, respectivamente como $\underline{\dim}_B(A) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}$ y $\overline{\dim}_B(A) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}$. Si estos números reales son iguales se llamará dimensión por cajas de A .

En [62, Prop. 4.1] encontramos la siguiente relación entre estas dimensiones.

Proposición 0.52 Si $A \subset \mathbb{R}^n$ puede ser recubierto por n_k conjuntos de diámetro máximo δ_k . Si $\delta_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \underline{\dim}_B(A) \leq \overline{\dim}_B(A) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}.$$

El siguiente resultado es usado con frecuencia en el cálculo de dimensiones de Hausdorff.

Lema 0.53 (Frostman) Sea F un conjunto de Borel de \mathbb{R} y μ una medida finita definida sobre la σ -álgebra de Borel. (Por $B_S(x)$ denotamos la bola de centro x y radio S .) Bajo estas hipótesis:

- i. Si el límite superior $\limsup \frac{\mu(B_S(x))}{S^s}$ está acotado en F , entonces $\dim_{\mathcal{H}} F \leq s$.
- ii. Si existe un número real positivo c tal que $\liminf \frac{\mu(B_S(x))}{S^s} > c > 0$ en F , entonces $\dim_{\mathcal{H}} F \geq s$.

Un sistema iterado de funciones (IFS) es un conjunto finito de contracciones, $\{F_1, \dots, F_m\}$, en un espacio métrico (X, d) dado. El siguiente resultado es la versión del principio de la aplicación contractiva en espacios métricos completos, cuando consideramos como espacio a la clase de los compactos (no vacíos) de X .

Teorema 0.54 Para un IFS dado por $\{F_1, \dots, F_m\}$, existe un único compacto S , tal que $S = \cup_i F_i(S)$. A este conjunto lo llamaremos atractor.

Demostración. Véase [62]. ■

Recordamos que un IFS puede ser aplicado para definir medidas invariantes soportadas en el atractor del sistema.

Definición 0.55 Sea $\{F_1, \dots, F_m\}$ un IFS en $K \subset \mathbb{R}^n$ y sean p_1, \dots, p_m números reales verificando que $p_i > 0$ para todo i con $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. Una medida μ se dice que es autosimilar si $\mu(B) = \sum_{i=1}^m p_i \mu(F_i^{-1}(B))$ para todo conjunto de Borel B .

La demostración de la existencia de estas medidas puede verse, por ejemplo, en [62] o [81].

0.7. Cópulas

El estudio y construcción de distribuciones multidimensionales que tienen unas distribuciones marginales dadas ha ocupado, y sigue haciéndolo, mucho interés en Estadística. Después de que Sklar demostrara (1959) el teorema que lleva su nombre, el interés se ha centrado en las cópulas. Recordamos la definición de cópula.

Definición 0.56 Una cópula es una función $C : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ que cumple las condiciones:

C1) Para todo \mathbf{u} de \mathbb{I}^n ,

$$C(\mathbf{u}) = 0 \text{ si al menos una coordenada de } \mathbf{u} \text{ es } 0$$

y

si todas las coordenadas de \mathbf{u} son 1 excepto u_k , entonces $C(\mathbf{u}) = u_k$

C2) Para cada \mathbf{a} y \mathbf{b} de \mathbb{I}^n tal que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$,

$$V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} C(\mathbf{b}) \geq 0$$

donde $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ y

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(\mathbf{t}) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Decimos que una ecuación verificando C2) es n -creciente.

Son ejemplos clásicos de copulas $M(\mathbf{u}) = \min(u_1, u_2, \dots, u_n)$ o $\Pi(\mathbf{u}) = u_1 u_2 \dots u_n$. Esta última es la llamada cópula producto o cópula independiente. Nos centraremos principalmente en el caso bidimensional. En esta dimensión ocurre que hay otra cópula muy destacada $W(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}$; y se da la relación

$$M \leq C \leq W,$$

para cualquier otra cópula (en particular, naturalmente, para el caso en el que C sea la cópula producto). Al conjunto de todas las cópulas lo representamos por COP (sin hacer referencia a la dimensión, que vendrá determinada por el contexto).

Toda cópula tiene asociada una medida doblemente estocástica definida en la σ -álgebra de Borel, $\mathcal{B}(\mathbb{I}^2)$ (véase [122]).

El teorema fundamental de la Teoría de Cópulas, conocido como Teorema de Sklar, tiene diferentes demostraciones que, por ejemplo, pueden verse en [33], [42], [119], [148], [152] o [155]. Lo dejamos enunciado:

Teorema 0.57 (Sklar) Sea F una función de distribución multidimensional y sean F_i , con $i = 1, \dots, n$, sus distribuciones marginales. Entonces, existe una cópula C para la que

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Además, si todas las F_i son continuas entonces C es única.

Algunas definiciones. Una generalización de las cópulas son las *cuasicópulas*. Aparecen por primera vez en 1993 en [3]; y han sido caracterizadas (véase [70]), como las funciones $Q : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ que satisfaciendo la condición C1), en lugar de C2), se le exigen estas otras condiciones más débiles:

Q1) Q es no decreciente en cada variable; y

Q2) la condición de Lipschitz

$$|Q(u_1, u_2, \dots, u_n) - Q(v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| + \dots + |u_n - v_n|,$$

para todo $(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de \mathbb{I}^n (una función con esta propiedad diremos que es 1-Lipschitz).

Cuando una cuasicópula no es una cópula decimos que es una *cuasicópula propia*.

Una *subcópula bidimensional* (o una *subcópula*, por brevedad) es una función $C^* : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{I}$, donde S_1 y S_2 son subconjuntos de I conteniendo 0 y 1, que satisface:

i) $C^*(u, 0) = 0 = C^*(0, v)$, para todo $u \in S_1, v \in S_2$.

ii) $C^*(u, 1) = u, C^*(1, v) = v$ para todo $u \in S_1, v \in S_2$.

iii) C^* es 2–creciente; esto es,

$$C^*(u_2, v_2) - C^*(u_2, v_1) - C^*(u_1, v_2) + C^*(u_1, v_1) \geq 0,$$

para todos $u_1, u_2 \in S_1, v_1, v_2 \in S_2$ tales que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$.

La *sección diagonal* de una cópula C (y similarmente de una cuasicópula) es la función definida por $\delta_C(t) = C(t, t, \dots, t)$ para todo $t \in \mathbb{I}$.

Una *función diagonal* es una función $\delta : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ que cumple las condiciones

D1) $\forall t \in \mathbb{I}, \delta(t) \leq t$.

D2) $\delta(1) = 1$.

D3) $\forall s, t \in \mathbb{I}, s \leq t \implies 0 \leq \delta(t) - \delta(s) \leq n(t - s)$.

Dada una diagonal δ , el conjunto de las cópulas cuya sección diagonal es δ se representa por \mathcal{C}_δ y por \mathcal{Q}_δ el de las cuasicópulas.

Utilizando el volumen de un hipercubo $V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ y el teorema de extensión (veáse [30]) tenemos que toda cópula tiene asociada una medida n -estocástica que representaremos por μ_C . La relación existente entre cópulas y medidas doblemente estocásticas nos permite trasladar muchos conceptos de la Teoría de la Medida a la Teoría de Cópulas. En particular, el teorema de descomposición de Lebesgue (en el caso bidimensional) podemos expresarlo (véanse, [147] y [122]) de la forma siguiente:

Teorema 0.58 *Para cada cópula C , tenemos que $\mu_C = \mu_C^c + \mu_C^s$ donde*

$$\mu_C^c(D) = \int_D \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v} d\lambda \text{ y } \mu_C^s(D) = \mu_C(D) - \mu_C^c(D)$$

para todo $D \in \mathcal{B}(\mathbb{I}^2)$, con $\mu_C^c \ll \lambda$ (como es usual \ll indica que μ_C es una medida absolutamente continua respecto de λ), y $\mu_C^s \perp \lambda$ (medidas mutuamente singulares).

Puesto que las marginales de C tienen la distribución uniforme se deduce que μ_C^s no tiene átomos.

Definición 0.59 *El soporte de una cópula es el conjunto de los puntos en el cuadrado unidad que tienen sus entornos con medida positiva.*

A lo largo de varios capítulos haremos referencia a un tipo particular de cópulas; nos referimos a las introducidas por Fredricks et al. en [67]. Recordemos algunos conceptos relacionados con ellas.

Definición 0.60 *Una matriz de transformación T es una matriz con entradas no negativas, para las que la suma de sus entradas es 1 y ninguna fila ni columna tiene todas sus entradas nulas.*

Siguiendo a [67], recordamos que cada matriz de transformación T determina una subdivisión de \mathbb{I}^2 en subrectángulos $R_{ij} = [p_{i-1}, p_i] \times [q_{j-1}, q_j]$, donde p_i (respect. q_j) es la suma de las entradas de las primeras i columnas (respect. j filas) de T .

Para una matriz de transformación T y una cópula C , denotamos por $T(C)$ a la cópula que, para cada (i, j) , distribuye la masa en R_{ij} de la misma forma en que lo hace C en \mathbb{I}^2 .

Teorema 0.61 ([67, Th. 2]) *Para toda matriz de transformación $T \neq [1]$, existe una única cópula C_T para la que $T(C_T) = C_T$.*

Sea T una matriz de transformación. Consideramos las siguientes condiciones:

i) T tiene, al menos, una entrada igual a cero.

ii) Para cada entrada no nula de T , las sumas a lo largo de la fila y de la columna de esa entrada son iguales.

iii) Hay, al menos, una fila o columna de T con entradas no nulas.

Teorema 0.62 ([67, Th. 3]) *Si T es una matriz de transformación que satisface i), entonces C_T es singular (esto es, su soporte tiene medida de Lebesgue cero o bien $\mu_{C_T} \equiv \mu_{C_T}^s$).*

Definición 0.63 *Una cópula C es invariante si $C = C_T$ para una matriz de transformación T . Una cópula invariante C_T se dice auto-similar si T satisface la condición ii).*

Teorema 0.64 ([67, Th. 6]) *El soporte de la cópula C_T , con T satisfaciendo i) y iii), es un conjunto fractal cuya dimensión de Hausdorff está entre 1 y 2.*

Parte II

Funciones peculiares

Capítulo 1

La función de Takagi y sus conjuntos de nivel

1.1. Introducción

Estamos acostumbrados a trabajar con funciones de una forma natural, casi sin pararnos a pensar en su significado: en la actualidad es un concepto plenamente definido; sin embargo, esto no siempre ha sido así a lo largo de la historia; y durante mucho tiempo eran definidas de modo más bien complicado y tortuoso. El gran logro del Cálculo (1665-1685), mostrar que derivación e integración de funciones son operaciones recíprocas, fue logrado en ausencia de una definición explícita. Fue necesario esperar hasta 1718 cuando Johan Bernouilli dijo que "*una función de una variable es una (nueva) magnitud compuesta, de un modo u otro, con esa magnitud variable y constantes*".

Sin embargo, y éstos eran los excesos, se consideraba que para toda función: (i) se verificaba el Teorema Fundamental del Cálculo; (ii) existía su desarrollo en serie de potencias; y (iii) era posible integrar y derivar término a término en todas estas series. (Véase [136].)

El concepto de función, en una forma moderna, fue dado durante el siglo XIX. A pesar de estas mejoras, durante buena parte de ese siglo, un gran número de matemáticos pensaban que las funciones continuas tenían derivada en un "importante" subconjunto de puntos de entre los que estaba definida. (Ampère creyó haber demostrado este hecho.)

Pero, tres grandes matemáticos encontraron, independientemente, una respuesta negativa a esta cuestión mostrando ejemplos explícitos de funciones continuas que no tienen derivada en ningún punto. Ellos fueron: Bolzano (1830), publicado mucho después, en 1922 (véase [84]); Cellérier (1860, aprox.), publicado en 1890 (véase [37]); y Weierstrass, que dio su celebre función

$$W(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi x), \quad 0 < a < 1, ab > 1 + \frac{3}{2}\pi, b \in (2n-1)\mathbb{Z},$$

en julio de 1872, siendo publicada en 1875 (véase [31]). Como hemos podido colegir de arriba, los dos primeros nunca vieron publicados sus resultados; y se da la paradoja de que los ejemplos fueron publicados en el orden inverso al que fueron descubiertos por sus autores.

Un poco más tarde, en 1903, Takagi dio un ejemplo extraordinariamente sencillo de una función continua sin derivada en ningún punto (tal como reconoce el propio autor en el título de su artículo; véase [158]).

Esta función ha sido ampliamente estudiada desde un punto de vista geométrico (véanse, por ejemplo, [16], [29], [35] y [153]). Originalmente, fue definida en [158] de dos formas distintas que mostraremos que son coincidentes. Para $x \in \mathbb{I}$, Takagi considera su desarrollo binario

$$0.x_1x_2\dots x_n\dots$$

($x_n \in \{0, 1\}$ para todo n) y define la función

$$f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$$

con

$$a_n := \begin{cases} \nu_n \dots, & x_n = 0 \\ \pi_n \dots, & x_n = 1 \end{cases}$$

donde π_n y ν_n denotan, respectivamente, el número de ceros y unos entre x_1, x_2, \dots, x_n . (Por tanto $\pi_n + \nu_n = n$ y $0 \leq a_n \leq n - 1$.)

Posteriormente, este tipo de funciones continuas y no derivables en ningún punto fueron redescubiertas por otros muchos autores (véase [76]).

En este Capítulo se estudian las propiedades de la función de Takagi haciendo uso de una expresión para ella que enunciamos como teorema 1.3; y haciendo uso de la autoafinidad que se establece a partir de ese resultado, se da una acotación óptima de la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de nivel de esta función, demostrando una conjetura recientemente planteada por Maddock.

1.2. La función de Takagi

Comenzamos con la siguiente definición para la función de Takagi (véanse [158], [16], [30] o [35]). Sea $d(x)$ la distancia de cada número real x al entero más próximo. Definimos la función:

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{d(2^k x)}{2^k}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

El límite (uniforme) de (T_n) es la función de Takagi. Como consecuencia, dicha función límite es continua en \mathbb{R} . La notaremos por T .

Por tanto, tenemos ahora una definición analítica para T :

$$T(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d(2^k x)}{2^k}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lema 1.1 *Las funciones f y T son la misma función.*

Demostración. Si x tiene desarrollo binario igual a $0.x_1x_2\dots x_n\dots$, entonces

$$d(x) := \begin{cases} x\dots, & x_1 = 0 \\ 1 - x\dots, & x_1 = 1 \end{cases}$$

La función actúa como sigue en el desarrollo binario:

$$d(x) := \begin{cases} 0.x_1x_2\dots x_n\dots, & x_1 = 0 \\ 0.\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_n\dots, & x_1 = 1 \end{cases}$$

donde $\bar{x}_k := 1 - x_k$. Además,

$$\frac{d(2^k x)}{2^k} := 0,0\dots,0\tilde{x}_{k+1}\tilde{x}_{k+2}\dots \quad [*]$$

donde

$$\tilde{x}_j := \begin{cases} x_j\dots, & x_{k+1} = 0 \\ 1 - x_j\dots, & x_{k+1} = 1 \end{cases}$$

Finalmente, sumando en el índice k en $[*]$, sigue la igualdad requerida. ■

El objetivo de este Capítulo es obtener otra expresión (la tercera) para la función de Takagi T ; y, también, deducir sus propiedades clásicas. Comenzamos probando una propiedad de unicidad para dos expresiones binarias de ciertos números racionales.

Lema 1.2 *Sea x en el intervalo \mathbb{I} . Cuando sea posible escribir*

$$x = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{\alpha_k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\alpha'_k}},$$

con

$$\begin{cases} \alpha_k = \alpha'_k \dots, & \text{si } k = 1, 2, \dots, n - 1 \\ k + \alpha_n = \alpha'_{n+k-1} \dots, & \text{si } k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 2(k-1)}{2^{\alpha_k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha'_k - 2(k-1)}{2^{\alpha'_k}}.$$

Demostración. Podemos suponer $x \in]0, 1[$. Realizando sencillos cálculos en la serie de la derecha se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha'_k - 2(k-1)}{2^{\alpha'_k}} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha'_k - 2(k-1)}{2^{\alpha'_k}} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha'_k - 2(k-1)}{2^{\alpha'_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha'_k - 2(k-1)}{2^{\alpha'_k}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n + k - 2(n-1+k-1)}{2^{\alpha_n+k}}, \end{aligned}$$

manipulando la última serie de la suma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n + k - 2(n-1+k-1)}{2^{\alpha_n+k}} &= \frac{1}{2^{\alpha_n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n - k - 2n - 2}{2^k} \\ &= \frac{\alpha_n - 2n}{2^{\alpha_n}} + \frac{1}{2^{\alpha_n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4-k}{2^k} \\ &= \frac{\alpha_n - 2(n-1)}{2^{\alpha_n}}. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.3 Sea $x \in \mathbb{I}$. Si $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\alpha_n}}$, entonces

$$T(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k - 2(k-1)}{2^{\alpha_k}}.$$

Demostración. No existe restricción si únicamente calculamos T para $x = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{\alpha_k}}$, por argumentos de continuidad en conjuntos densos. Notemos que

$$d(2^{\alpha_n-1}x) = \frac{1}{2} \text{ y } d(2^m x) = 0, \forall m \geq \alpha_n.$$

Trabajando en el desarrollo en serie de $T(x)$:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d(2^k x)}{2^k} = \sum_{k=0}^{\alpha_n-1} \frac{d(2^k x)}{2^k} \\ &= d(x) + \dots + \frac{d(2^{\alpha_1-1}x)}{2^{\alpha_1-1}} + \frac{d(2^{\alpha_1}x)}{2^{\alpha_1}} + \dots + \frac{d(2^{\alpha_n-1}x)}{2^{\alpha_n-1}} \\ &= x + \frac{2x}{2} + \frac{(\alpha_1-2)}{2^{\alpha_1-2}} + \frac{2^{\alpha_1-2}x}{2^{\alpha_1-2}} + \frac{1-2^{\alpha_1-1}x}{2^{\alpha_1-1}} + \frac{d(2^{\alpha_1}x)}{2^{\alpha_1}} + \dots + \frac{d(2^{\alpha_n-1}x)}{2^{\alpha_n-1}} \\ &= (\alpha_1 - 2)x + \frac{1}{2^{\alpha_1-1}} + \frac{d(2^{\alpha_1}x)}{2^{\alpha_1}} + \dots + \frac{d(2^{\alpha_n-1}x)}{2^{\alpha_n-1}}. \end{aligned}$$

Sea

$$x_1 := \frac{1}{2^{\alpha_2-\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_3-\alpha_1}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_n-\alpha_1}}; \text{ i.e., } 2^{\alpha_1}x = 1 + x_1;$$

y usando la periodicidad de T :

$$\begin{aligned} &= (\alpha_1 - 2) \left[\frac{1}{2^{\alpha_1}} + \sum_{j=2}^n \frac{1}{2^{\alpha_j}} \right] + \frac{1}{2^{\alpha_1-1}} + \frac{1}{2^{\alpha_1}} T(x_1) \\ &= \frac{\alpha_1}{2^{\alpha_1}} + (\alpha_1 - 2) \sum_{j=2}^n \frac{1}{2^{\alpha_j}} + \frac{1}{2^{\alpha_1}} T(x_1). \end{aligned}$$

Haciendo manipulaciones similares en x_1 , y siendo

$$x_2 := \frac{1}{2^{\alpha_3 - \alpha_2}} + \frac{1}{2^{\alpha_4 - \alpha_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_n - \alpha_2}}; \text{ i.e., } 2^{\alpha_2} x_1 = 1 + x_2;$$

sigue que

$$\begin{aligned} T(x_1) &= \sum_{k=0}^{\alpha_n - \alpha_1} \frac{d(2^k x_1)}{2^k} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1 - 2)x_1 + \frac{1}{2^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2 - \alpha_1}} T(x_2); \end{aligned}$$

y, por sustitución en $T(x)$:

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{\alpha_1}{2^{\alpha_1}} + (\alpha_1 - 2) \sum_{j=2}^n \frac{1}{2^{\alpha_j}} \\ &\quad + \frac{1}{2^{\alpha_1}} \left[(\alpha_2 - \alpha_1 - 2)x_1 + \frac{1}{2^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2 - \alpha_1}} T(x_2) \right] \\ &= \frac{\alpha_1}{2^{\alpha_1}} + \frac{\alpha_2 - 2}{2^{\alpha_2}} + (\alpha_2 - 4) \sum_{j=3}^n \frac{1}{2^{\alpha_j}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} T(x_2). \end{aligned}$$

Proponemos la validez de la siguiente fórmula, con $p \in \mathbb{Z}^+$:

$$T(x) = \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j - 2(j-1)}{2^{\alpha_j}} + (\alpha_p - 2p) \sum_{j=p+1}^n \frac{1}{2^{\alpha_j}} + \frac{1}{2^{\alpha_p}} T(x_p);$$

y lo demostramos para $p+1$. Razonando en x_p :

$$\begin{aligned} T(x_p) &= \sum_{k=0}^{\alpha_n - \alpha_p} \frac{d(2^k x_p)}{2^k} \\ &= (\alpha_{p+1} - \alpha_p - 2)x_p + \frac{1}{2^{\alpha_{p+1} - \alpha_p - 1}} + \frac{1}{2^{\alpha_{p+1} - \alpha_p}} T(x_{p+1}); \end{aligned}$$

donde

$$x_{p+1} := \frac{1}{2^{\alpha_{p+1} - \alpha_p}} + \frac{1}{2^{\alpha_{p+2} - \alpha_p}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_n - \alpha_p}}; \text{ i.e., } 2^{\alpha_{p+1}} x_p = 1 + x_{p+1}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j - 2(j-1)}{2^{\alpha_j}} + (\alpha_p - 2p) \sum_{j=p+1}^n \frac{1}{2^{\alpha_j}} + \\ &\quad + \frac{1}{2^{\alpha_p}} \left[(\alpha_{p+1} - \alpha_p - 2)x_p + \frac{1}{2^{\alpha_{p+1} - \alpha_p - 1}} + \frac{1}{2^{\alpha_{p+1} - \alpha_p}} T(x_{p+1}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j - 2(j-1)}{2^{\alpha_j}} + (\alpha_p - 2p) \sum_{j=p+1}^n \frac{1}{2^{\alpha_j}} + \\ &\quad + (\alpha_{p+1} - \alpha_p - 2) \sum_{j=p+1}^n \frac{1}{2^{\alpha_j}} + \frac{2}{2^{\alpha_{p+1}}} + \frac{1}{2^{\alpha_{p+1}}} T(x_{p+1}) \\ &= \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j - 2(j-1)}{2^{\alpha_j}} + \frac{\alpha_{p+1} - 2p}{2^{\alpha_{p+1}}} + \\ &\quad + (\alpha_{p+1} - 2(p+1)) \sum_{j=p+2}^n \frac{1}{2^{\alpha_j}} + \frac{1}{2^{\alpha_{p+1}}} T(x_{p+1}). \end{aligned}$$

Finalmente, con $p = n - 1$, concluimos:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j - 2(j-1)}{2^{\alpha_j}} + \frac{\alpha_{n-1} - 2(n-1)}{2^{\alpha_n}} + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{2^{\alpha_n}} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 2(j-1)}{2^{\alpha_j}}. \end{aligned}$$

■

Esta fórmula permite obtener resultados de un modo sencillo. El siguiente es un ejemplo de ello.

Proposición 1.4 *Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $T(x) \in \mathbb{Q}$. Además, $T(x)$ tiene desarrollo binario finito.*

Demostración. El caso de desarrollo finito es inmediato. En los demás tenemos periodicidad. Consideramos

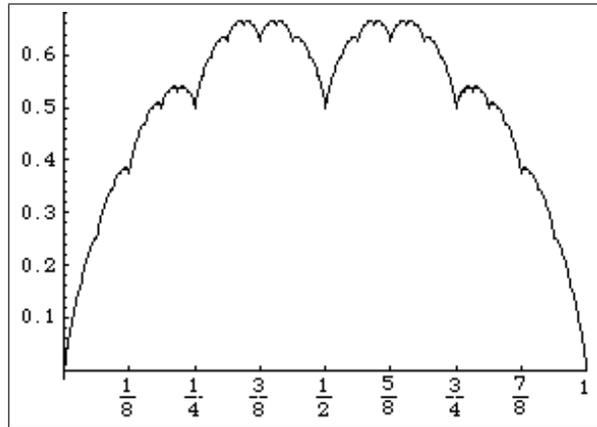
$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\alpha_n}} = \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_k}} + \frac{1}{2^{\beta_1}} + \frac{1}{2^{\beta_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\beta_s}} \\ &\quad + \frac{1}{2^r} \left(\frac{1}{2^{\beta_1}} + \frac{1}{2^{\beta_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\beta_s}} \right) + \dots \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula obtenida anteriormente, tenemos:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j - 2(j-1)}{2^{\alpha_j}} + \\ &\quad + \left(\frac{\beta_1 - 2k}{2^{\beta_1}} + \frac{\beta_2 - 2(k+1)}{2^{\beta_2}} + \dots + \frac{\beta_s - 2(k+s-1)}{2^{\beta_s}} \right) \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{tr}} + \\ &\quad + (r-2) \left(\frac{1}{2^{\beta_1}} + \frac{1}{2^{\beta_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\beta_s}} \right) \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{t}{2^{tr}}, \end{aligned}$$

donde la suma de cada serie tiene desarrollo binario finito, y por tanto es cierto para $T(x)$. ■

Esta es la gráfica de la función de Takagi.



Gráfica de T

Además, aparecen ventajas teóricas. El siguiente teorema, como una sencilla consecuencia de esta nueva fórmula para T , es equivalente a describir los coeficientes de la base de Schauder.

Teorema 1.5 *Para enteros positivos n y k , se tiene la identidad*

$$T\left(\frac{2n+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2} \left[T\left(\frac{n}{2^k}\right) + T\left(\frac{n+1}{2^k}\right) \right] + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Demostración. Si $n, k \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^k} &= \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_n}} \\ \frac{2n+1}{2^k} &= \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_n}} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ \frac{n+1}{2^k} &= \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_n}} + \frac{1}{2^k}, \end{aligned}$$

y calculando en la fórmula de T :

$$\begin{aligned} T\left(\frac{n}{2^k}\right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 2(j-1)}{2^{\alpha_j}} \\ T\left(\frac{2n+1}{2^k}\right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 2(j-1)}{2^{\alpha_j}} + \frac{k+1-2n}{2^{k+1}} \\ T\left(\frac{n+1}{2^k}\right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 2(j-1)}{2^{\alpha_j}} + \frac{k-2n}{2^k}. \end{aligned}$$

Quedando clara la igualdad. ■

1.3. Propiedades clásicas de T

A continuación demostramos la no derivabilidad de T en ningún punto.

Teorema 1.6 (*Véanse [158] y [29]*) *La función de Takagi no tiene derivada en ningún punto del intervalo unidad.*

Demostración. Inicialmente, suponemos que x tiene desarrollo finito; i.e., $x = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{\alpha_j}}$. (En este caso el número de unos o ceros en sus desarrollos binarios son finitos.) Consideramos

$$y := x + \frac{1}{2^{\alpha_n+k}} \quad (k \in \mathbb{Z}^+).$$

Por tanto, el cociente

$$\frac{T(x) - T(y)}{x - y} = \alpha_n + k - 2n$$

diverge cuando $k \rightarrow +\infty$, lo que implica que no existe la derivada $T'(x)$.

Consideramos el caso en que tanto el número de unos como ceros en el desarrollo binario de x son infinitos (por tanto, el conjunto

$$\{n \in \mathbb{Z}^+ : \alpha_{n+1} > \alpha_n + 1\}$$

es infinito). Escribimos $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\alpha_n}}$, y consideramos dos tipos de cadenas de desigualdades:

$$\begin{aligned} u_n &: = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{\alpha_k}} < x < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{\alpha_k}} + \frac{1}{2^{\alpha_n+1}} =: v_n \\ u_n &< x < v_n + \frac{1}{2^{\alpha_n+2}} =: \tilde{v}_n. \end{aligned}$$

Para cada uno de estos casos calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{T(u_n) - T(v_n)}{u_n - v_n} &= 1 + \alpha_n - 2n \\ \frac{T(u_n) - T(\tilde{v}_n)}{u_n - \tilde{v}_n} &= \frac{2}{3} + \alpha_n - 2n. \end{aligned}$$

Pero, si $n \rightarrow +\infty$, los dos límites son distintos por lo que el lema 0.3 garantiza que no hay derivada para $x \in]0, 1[$.

El caso $x \in \{0, 1\}$ tiene razonamiento análogo (para derivadas laterales). ■

Podemos tener más información si somos un poco más cuidadoso en los cálculos:

Teorema 1.7 (*Véase [35]*) *La función de Takagi no tiene derivada lateral izquierda ni derecha en ningún punto.*

Demostración. Sea $x \in [0, 1[$. Probaremos que $T'(x^+)$ la derivada lateral por la derecha de T en x no existe. Para la situación dual $T'(x^-)$, la demostración sigue análogamente (o, puede ser, considerando que $T(1-x) = T(x)$ para todo $x \in \mathbb{I}$).

La demostración del teorema anterior muestra que si x tiene desarrollo binario finito, entonces la derivada lateral de T en x no existe. Por tanto, será reducido al caso en que existen una infinidad de unos y ceros en el desarrollo binario de x . Por tanto

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\alpha_n}},$$

y el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}^+ : \alpha_n + 1 < \alpha_{n+1}\}$ es infinito.

Definimos

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{\alpha_k}} + \frac{1}{2^{\alpha_n-1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\alpha_k}}.$$

Sigue que $x_n > x$, y

$$\frac{T(x_n) - T(x)}{x_n - x} = \alpha_n - 2n.$$

Pero, si existe el límite $\alpha_n - 2n \rightarrow T'(x^+)$, entonces debe ser un entero; esto implica un desarrollo periódico para x de la forma

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^r \frac{1}{2^{\alpha_k}} + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+r}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{1}{2^{\alpha_k}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+m}}. \end{aligned}$$

Consideremos $n \geq r + 1$, y definamos

$$y_n := x - \left(\frac{1}{2^{\alpha_n+2}} - \frac{1}{2^{\alpha_n-1}} \right).$$

En este caso:

$$\frac{T(y_n) - T(x)}{y_n - x} = \alpha_n - 2n - 2/7,$$

y con esta contradicción se concluye la demostración. ■

Definición 1.8 (Condición de Lipschitz y de Lipschitz local) Sea f una función de un espacio métrico (X, d) en otro espacio métrico (X', d') . Decimos que f es Lipschitz si

$$\exists k > 0 : x, y \in X \implies d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Decimos que f es Lipschitz en $x \in X$ si

$$\exists k, \varepsilon > 0 : y \in X, d(x, y) < \varepsilon \implies d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Proposición 1.9 Existen puntos en que T no es Lipschitz; i.e., existe $x \in \mathbb{I}$ tal que

$$\forall k, \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \{y \in \mathbb{I} : d(x, y) < \varepsilon, |T(x) - T(y)| > k|x - y|\} \neq \emptyset.$$

Demostración. Para los puntos con desarrollo binario finito, la demostración está implícita en la del teorema 1.3. ■

Lema 1.10 Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión creciente de números enteros positivos tal que $\alpha_n - 2(n-1) \neq 0$, entonces

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha_k - 2(k-1)}{2^{\alpha_k}} \leq O\left(\frac{\alpha_n - 2(n-1)}{2^{\alpha_n}}\right).$$

Demostración. Una sencilla manipulación nos da

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n + s_j - 2(n+j-1)}{2^{\alpha_n + s_j}} &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n - 2(n-1)}{2^{\alpha_n}} \frac{1}{2^{s_j}} + \\ &+ \frac{1}{2^{\alpha_n}} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{s_j - 2j}{2^{s_j}} = O\left(\frac{\alpha_n - 2(n-1)}{2^{\alpha_n}}\right). \end{aligned}$$

■

Proposición 1.11 *T es Lipschitz en un subconjunto denso de \mathbb{I} .*

Demostración. Consideremos

$$x = \sum_{n=1}^r \frac{1}{2^{\alpha_n}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\alpha_r + 2n}},$$

y

$$y := \sum_{n=1}^r \frac{1}{2^{\alpha_n}} + \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^{\alpha_r + 2n}} + \frac{z}{2^{\alpha_r + 2m}}; \quad z \in [0, 1[.$$

En esta situación, existen números reales positivos A y B , tales que

$$A|x - y| \leq \frac{1}{2^{\alpha_r + 2m}} \leq B|x - y|$$

y

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &\leq \frac{|\alpha_{r+1} - 2r|}{2^{\alpha_{r+1}}} + \frac{|\alpha_{r+1} - 2r|}{2^{\alpha_{r+1} + 2}} + \frac{|\alpha_{r+1} - 2r|}{2^{\alpha_{r+1} + 4}} + \dots \\ &+ \frac{|\alpha'_t - 2(t-1)|}{2^{\alpha_t}} + \dots \end{aligned}$$

Por tanto, la serie en la primera fila es claramente $O\left(\frac{|\alpha_{r+1} - 2r|}{2^{\alpha_{r+1}}}\right)$; y la de la segunda también, por el lema anterior y el decrecimiento de $x/2^x$. ■

Con un poco de esfuerzo, tenemos más información. En primer lugar hacemos una definición.

Definición 1.12 *Una función f es Hölder-continua de grado β en x , si existen números reales positivos M y δ tales que $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < M|x - y|^\beta$. (Cuando $\beta = 1$, f es Lipschitz en x .)*

Teorema 1.13 (Véase [153]) *La función de Takagi T es Hölder-continua de grado β , para todo β de $]0, 1[$.*

Este resultado se sigue como una consecuencia de un resultado más general de Hata. Con la fórmula del teorema 1.3, podemos probar la siguiente propiedad de continuidad:

Teorema 1.14 (Véase [75]) *Para $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|T(x) - T(y)| \leq O(|x - y| \ln |x - y|).$$

Demostración. Considerados los números

$$x := \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{\alpha_k}} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \dots \text{ e } y := \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{\alpha_k}} + \frac{1}{2^{m'}} + \dots$$

tenemos que $m + 1 = m'$ o $m + 1 < m'$. En ambos casos, tenemos

$$\frac{1}{2^{m+2}} \leq |x - y| \leq \frac{1}{2^{m-1}},$$

y

$$\begin{aligned}
|T(x) - T(y)| &\leq \left| \frac{m-2n}{2^m} \right| + \left| \frac{\alpha_{n+2} - 2(n+1)}{2^{\alpha_{n+2}}} \right| + \dots \\
&\quad + \left| \frac{m'-2n}{2^{m'}} \right| + \left| \frac{\alpha_{n+2} - 2(n+1)}{2^{\alpha_{n+2}}} \right| + \dots \\
&= \frac{m}{2^m} + \frac{m'}{2^{m'}} + 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j+m}{2^{j+m}} \\
&= O\left(\frac{m}{2^m}\right) = O(|x-y| \ln|x-y|).
\end{aligned}$$

Por otra parte, si

$$\begin{aligned}
x &: = \sum_{k=1}^r \frac{1}{2^{\alpha_k}} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m_1}} + \dots \\
y &: = \sum_{k=1}^r \frac{1}{2^{\alpha_k}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m+n}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \dots,
\end{aligned}$$

consideramos $m'' := \min\{m_1, m+n\}$. Entonces, existen números reales positivos c_1 y c_2 , tales que

$$\frac{c_1}{2^{m''}} \leq |x-y| \leq \frac{c_2}{2^{m''}}.$$

Finalmente, el término correspondiente a $\frac{1}{2^m}$ en $T(x)$ opera con los correspondientes a $\frac{1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m+n}}$ en $T(y)$; y, procediendo como antes, obtenemos el resultado. ■

Proposición 1.15 *No es posible mejorar el resultado de Hata.*

$$\exists x \in \mathbb{R} : |T(x) - T(x+h)| \neq o(|h| \ln|h|).$$

Demostración. Si consideramos x e y con desarrollos finitos:

$$x = \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_{n-1}}} + \frac{1}{2^{\alpha_n}} \text{ e } y = x + \frac{1}{2^m},$$

entonces

$$h = |x-y| = \frac{1}{2^m} \text{ y } |T(x) - T(y)| = \left| \frac{m-2n}{2^n} \right|.$$

Por tanto, con $m \rightarrow +\infty$,

$$|T(x) - T(x+h)| \neq o(|h| \ln|h|).$$

■

1.4. Teorema de Kôno

Si $x = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/2^{\alpha_k}$, escribimos $b_k(x)$ para designar la longitud del k -ésimo grupo de unos en el desarrollo en serie. (Las dos formas en que puede definirse x no son importantes para nosotros, porque ocurre en un conjunto numerable de puntos.) Las b_k son variables aleatorias.

Lema 1.16 *Las variables aleatorias $\{b_k : k \in \mathbb{Z}^+\}$ son independientes y están idénticamente distribuidas, con $p(b_k = n) = 1/2^{n+1}$.*

Lema 1.17 *El conjunto de puntos en que ocurre $b_k \geq 2 \log_2 k$ una infinidad de veces, es de medida cero.*

Demostración. Es una consecuencia del lema de Borel-Cantelli. ■

Dado un número $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k/2^k$, estudiaremos las variables aleatorias a_k .

Lema 1.18 *Las variables aleatorias $\{a_k : k \in \mathbb{Z}^+\}$ son independientes y están idénticamente distribuidas con $p(a_k = 0) = p(a_k = 1) = 1/2$.*

Aplicando la Ley del Logaritmo Iterado obtenemos:

Corolario 1.19

$$\lambda \left(\left\{ x : \limsup_n \frac{2 \sum_{k=1}^n a_k - n}{\sqrt{n} \sqrt{2 \ln \ln n}} = 1 \right\} \right) = 1$$

y

$$\lambda \left(\left\{ x : \liminf_n \frac{2 \sum_{k=1}^n a_k - n}{\sqrt{n} \sqrt{2 \ln \ln n}} = -1 \right\} \right) = 1.$$

Ahora consideramos la subsucesión de los valores uno en (a_k) ; por tanto:

Corolario 1.20

$$\lambda \left(\left\{ x : \limsup_n \frac{\alpha_n - 2n}{\sqrt{2\alpha_n} \ln \ln \alpha_n} = 1 \right\} \right) = 1,$$

y

$$\lambda \left(\left\{ x : \liminf_n \frac{\alpha_n - 2n}{\sqrt{2\alpha_n} \ln \ln \alpha_n} = -1 \right\} \right) = 1.$$

Lema 1.21 Si $0 \leq y = \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_k}} + \dots \leq 1$ y $\frac{s}{2^r} = \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_k}}$, entonces

$$T \left(\frac{s+y}{2^r} \right) = T \left(\frac{s}{2^r} \right) + \frac{r-2k}{2^r} y + T(y).$$

Demostración. Las siguientes igualdades son ciertas

$$\begin{aligned} T(y) &= \frac{\alpha'_1}{2^{\alpha'_1}} + \frac{\alpha'_2-2}{2^{\alpha'_2}} + \dots + \frac{\alpha'_k-2(k-1)}{2^{\alpha'_k}} + \dots \\ T\left(\frac{s}{2^r}\right) &= \frac{\alpha_1}{2^{\alpha_1}} + \frac{\alpha_2-2}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{\alpha_k-2(k-1)}{2^{\alpha_k}} \\ \frac{s+y}{2^r} &= \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_k}} + \frac{\alpha_1}{2^{i+\alpha_1}} + \frac{\alpha_2-2}{2^{i+\alpha_2}} + \dots \\ T\left(\frac{s+y}{2^r}\right) &= \frac{\alpha_1}{2^{\alpha_1}} + \frac{\alpha_2-2}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{\alpha_k-2(k-1)}{2^{\alpha_k}} + \frac{r+\alpha_1-2k}{2^{r+\alpha_1}} + \frac{r+\alpha_2-2(k+1)}{2^{r+\alpha_2}} + \dots \end{aligned}$$

y, por tanto, se sigue el resultado. ■

Teorema 1.22 (Kono) En un conjunto de λ -medida 1,

$$\lambda \left(\left\{ x : \limsup_h \frac{T(x+h) - T(x)}{h \sqrt{2 \log_2 \left(\frac{1}{h}\right)} \ln \ln \log_2 \left(\frac{1}{h}\right)} = 1 \right\} \right) = 1.$$

Demostración. Consideramos puntos x con desarrollo binario infinito. Sea

$$x = \frac{s+y}{2^r}, x+h = \frac{s+y'}{2^r}; 0 \leq y < y' \leq 1.$$

Elegimos r el máximo para el que esta relación es válida. Por tanto, $y < \frac{1}{2} \leq y'$. El lema anterior nos da:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{s+y}{2^r}\right) &= T\left(\frac{s}{2^r}\right) + \frac{r-2k}{2^r} y + T(y) \\ T\left(\frac{s+y'}{2^r}\right) &= T\left(\frac{s}{2^r}\right) + \frac{r-2k}{2^r} y' + T(y'), \end{aligned}$$

donde $\alpha_k := r$. Así que

$$\frac{T(x+h) - T(x)}{h} = r - 2k + \frac{T(y') - T(y)}{y' - y}.$$

El último cociente está acotado, salvo cuando $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2} \leq y' < \frac{3}{4}$. Si este es el caso:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^R} + \frac{1}{2^{\beta_2}} + \dots, \\ y' &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\gamma_1}} + \frac{1}{2^{\gamma_2}} + \dots; \gamma_1 > R, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} T(y) &= \sum_{n=2}^R \frac{-n+4}{2^n} + \frac{\beta_2 - 2(R-2)}{2^{\beta_2}} + \dots, \\ T(y') &= \frac{1}{2} + \frac{\gamma_1 - 2}{2^{\gamma_1}} + \dots, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{T(y') - T(y)}{y' - y} &\leq \frac{\frac{1}{2} + O\left(\frac{\gamma_1}{2^{\gamma_1}}\right) - \frac{1}{2} - \frac{-4+2R}{2^{1+R}} + O\left(\frac{R}{2^R}\right)}{\frac{1}{2^R}} \\ &= O(R) = O(\ln \alpha_k) \end{aligned}$$

en un conjunto de medida cero. (La última desigualdad es consecuencia del lema previo.)

Si $y' := x + h$ e $y := x$, entonces $\frac{T(x+h)-T(x)}{h} = r - 2k + O(\ln \alpha_k)$. Por lo que, como consecuencia del último corolario

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(x+h) - T(x)}{h \sqrt{2 \log_2 \frac{1}{h} \ln \log_2 \frac{1}{h}}} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{r - 2k}{\sqrt{2\alpha_k \ln \ln \alpha_k}} = 1$$

en un conjunto de λ -medida uno.

La simetría con respecto a $1/2$ implica la validez del resultado para $h \rightarrow 0^-$. ■

Si aplicamos el Teorema Central del Límite, en lugar de la Ley del Logaritmo Iterado, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.23

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \lambda \left(\left\{ x \in]0, 1[: \frac{T(x+h) - T(x)}{h \sqrt{-\log_2 h}} < y \right\} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-z^2/2} dz.$$

1.5. Ecuaciones funcionales caracterizando a T y autoafinidad

Con la ayuda del Teorema del Punto Fijo de Banach, T esta caracterizado por ecuaciones funcionales. (Véase [145].)

Teorema 1.24 (Ecuaciones Funcionales) *La función de Takagi T es la única continua (y acotada) en \mathbb{I} que satisface las ecuaciones funcionales*

$$\begin{cases} T\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{T(x)}{2} \\ T\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{T(x)}{2}. \end{cases}$$

Demostración. Consideramos el espacio de Banach $\mathcal{B}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ de las funciones reales acotadas definidas \mathbb{I} que se anulan en cero y en uno, dotado con la norma del supremo. Definimos el funcional

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{B}(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{I}, \mathbb{R}); \\ g &\longrightarrow F(g) : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

dada esta nueva función por

$$F(g)(x) := \begin{cases} x + \frac{g(2x)}{2} \dots, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - x + \frac{g(2x-1)}{2} \dots, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$F(g)$ está bien definida, se trata de una contracción y aplicamos el Teorema del Punto Fijo de Banach: existe una, y sólo una, $g \in \mathcal{B}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ cumpliendo las anteriores ecuaciones funcionales.

Sencillas manipulaciones en las series que determinan T nos dicen que esta función las verifica. ■

Como una sencilla consecuencia, podemos calcular el área bajo T .

Corolario 1.25 $\int_0^1 T = \frac{1}{2}$.

Demostración. Las ecuaciones funcionales anteriores muestran que T es autoafín. El área total α es la de un triángulo de base 1, altura $1/2$ y dos replicas a escala $1/2$ de ella misma; es decir:

$$\alpha = \frac{1}{4} + 2\frac{\alpha}{4};$$

y, por tanto, el resultado sigue. ■

Teorema 1.26 (Véase [16]) *La función de Takagi T alcanza sus máximos absolutos en el conjunto de puntos A cuyo desarrollo en base cuatro únicamente contiene unos y doses. El valor del máximo (absoluto) de T en A es $2/3$; y la dimensión de Hausdorff de A es $1/2$.*

Demostración. Puesto que

$$A = \left(\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}A + \frac{1}{2}\right),$$

como consecuencia de la autosimilaridad de A , $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 1/2$.

Si $x \in A$, entonces $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{4^n}$, con $a_n \in \{1, 2\}$, y podemos reescribir x como sigue

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n-s_n}}; \quad s_n = \begin{cases} 1\dots, & a_n = 2 \\ 0\dots, & a_n = 1 \end{cases}$$

Aplicando la fórmula del teorema 1.3:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n - s_n - 2(n-1)}{2^{2n-s_n}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 - s_n}{2^{2n-s_n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(la penúltima igualdad no depende de s_n).

Consideremos un x con algún 0 o 3 entre sus dígitos. Demostraremos que en estos puntos no se alcanza el máximo de T . Sea

$$\begin{aligned} x &: = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{4^n} + \frac{3}{4^k} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{b_n}{4^n} \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{4^n} + \frac{3}{4^k} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n+c_n}}; \quad a_n \in \{1, 2\}, b_n \in \{0, 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

(para $a_k = 0$, el razonamiento será análogo.)

Entonces, con esta notación y el hecho que $\frac{3}{4^k} = \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{2^{2k}}$,

$$T(x) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{2k-2k}{2^{2k}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2k + c_n - 2(k+n)}{2^{2k+c_n}}.$$

Si consideramos

$$y := \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{4^k} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{b_n}{4^n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{2^{2k}} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n+c_n}},$$

entonces

$$T(y) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{2k-2k}{2^{2k}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2k + c_n - 2(k+n-1)}{2^{2k+c_n}}.$$

Por lo que $T(x) < T(y)$, y T no alcanza sus máximos en puntos de este tipo. ■

1.6. Fórmula de Trollope

En Teoría de Números, frecuentemente, se estudia el comportamiento asintótico de la suma de funciones aritméticas. Con la ayuda del teorema 1.3, obtendremos una fórmula exacta para una de estas expresiones: la suma del número de dígitos en desarrollo binario de los enteros positivos. (Véanse [160] y [43].)

Para $n \in \mathbb{Z}^+$, su desarrollo binario es $\sum_{k=0}^{+\infty} e_k(n) 2^k$, con $e_k(n) \in \{0, 1\}$. Definamos los números

$$s(n) := \sum_{k=0}^{+\infty} e_k(n) \text{ y } S(N) := \sum_{n=0}^{N-1} s(n).$$

Lema 1.27 *Si $1 \leq n \leq 2^m$, entonces*

$$T\left(\frac{n}{2^m}\right) - T\left(\frac{n}{2^m} - \frac{1}{2^m}\right) = \frac{m - 2s(n-1)}{2^m}.$$

Demostración. Cuando n es impar. Sea $n = 2^{\alpha_1^*} + 2^{\alpha_2^*} + \dots + 2^{\alpha_k^*}$, con $0 = \alpha_1^* < \alpha_2^* < \dots < \alpha_k^*$. Por tanto, podemos escribir

$$\frac{n}{2^m} = \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \dots + \frac{1}{2^{\alpha_{k-1}}} + \frac{1}{2^m}$$

(donde $m = \alpha_k$); e inmediatamente sigue

$$T\left(\frac{n}{2^m}\right) - T\left(\frac{n}{2^m} - \frac{1}{2^m}\right) = \frac{\alpha_k - 2(k-1)}{2^{\alpha_k}} = \frac{m - 2s(n-1)}{2^m}.$$

Cuando n es impar. Sea $n = 2^{t+\alpha_1^*} + 2^{t+\alpha_2^*} + \dots + 2^{t+\alpha_k^*}$, con $0 = \alpha_1^* < \alpha_2^* < \dots < \alpha_k^*$. Ahora,

$$\frac{n}{2^m} = \frac{1}{2^{m-t-\alpha_k^*}} + \frac{1}{2^{m-t-\alpha_{k-1}^*}} + \dots + \frac{1}{2^{m-t-\alpha_1^*}}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^m} - \frac{1}{2^m} &= \frac{1}{2^{m-t-\alpha_k^*}} + \frac{1}{2^{m-t-\alpha_{k-1}^*}} + \dots + \frac{1}{2^{m-t-\alpha_2^*}} + \\ &+ \frac{1}{2^{m-t-\alpha_1^*+1}} + \frac{1}{2^{m-t-\alpha_1^*+2}} + \dots + \frac{1}{2^m} \end{aligned}$$

obteniendo

$$\begin{aligned} T\left(\frac{n}{2^m}\right) - T\left(\frac{n}{2^m} - \frac{1}{2^m}\right) &= \frac{m-t-2(k-1)}{2^{m-t}} - \frac{m-t+1-2(k-1)}{2^{m-t+1}} - \\ &- \frac{m-t+2-2k}{2^{m-t+2}} - \dots - \frac{m-2(k+t-2)}{2^m} \\ &= \frac{m-2(k+t-1)}{2^m} = \frac{m-2s(n-1)}{2^m}. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.28 (Fórmula de Trollope generalizada) *Si $1 \leq n \leq 2^m$, entonces*

$$S(n) = \frac{nm}{2} - 2^{m-1}T\left(\frac{n}{2^m}\right).$$

Demostración. Por el lema,

$$T\left(\frac{n}{2^m}\right) = \frac{m-2s(n-1)}{2^m} + T\left(\frac{n}{2^m} - \frac{1}{2^m}\right);$$

y aplicándolo repetidamente:

$$T\left(\frac{n}{2^m}\right) = \frac{nm}{2^m} - \frac{s(1) + \dots + s(n-1)}{2^{m-1}} + T(0).$$

Puesto que, $T(0) = 0$, sigue el resultado. ■

Corolario 1.29 (Fórmula de Trollope)

$$S(n) = \frac{n \log_2 n}{2} + \frac{n(1 - \{\log_2 n\})}{2} - n2^{-\{\log_2 n\}} T\left(\frac{1}{2^{1-\{\log_2 n\}}}\right).$$

Demostración. Se logra tomando $m = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ en el teorema anterior. ■

1.7. Conjuntos de nivel

Se ha descrito anteriormente cómo es el conjunto de puntos A donde la función de Takagi alcanza su máximo. La autosimilaridad de este conjunto nos permite asegurar que su dimensión de Hausdorff y su dimensión por cajas son iguales a $1/2$. Recordamos que para una función f y un número real y , el y -conjunto de nivel de f , notado como L_y , es el conjunto

$$\{x : f(x) = y\}.$$

Por tanto, el enunciado anterior podemos expresarlo diciendo que la dimensión de Hausdorff del $2/3$ -conjunto de nivel $L_{2/3}$ para la función T de Takagi es igual a $1/2$.

Algunos casos especiales de conjuntos de nivel para T han sido estudiados en [101] y [110]. En [110], Maddock conjeturó que la dimensión de Hausdorff de $L_{2/3}$ de la función de Takagi es máxima; es decir,

$$\dim_{\mathcal{H}}(L_y) \leq \dim_{\mathcal{H}}(L_{2/3}) = 1/2,$$

para todo $y \in \mathbb{I}$. En el trabajo [111], por el mismo Maddock, se ha establecido, mediante laboriosas técnicas computacionales, el número $\alpha = 0,668$ como una cota superior para la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de nivel de la función de Takagi.

En esta sección demostraremos que la conjetura de Maddock es cierta.

1.7.1. Preliminares y notación

Expresamos la autoafinidad de T del siguiente modo:

Lema 1.30 *Para $k \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leq m \leq 2^k - 1$, $y x \in \mathbb{I}$, la función T de Takagi satisface la relación*

$$T\left(\frac{m}{2^k} + \frac{x}{2^k}\right) = p \frac{x}{2^k} + T\left(\frac{m}{2^k}\right) + \frac{T(x)}{2^k},$$

donde la pendiente $p = p_{k,m} = p(k, m) \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Para cada $x \in \mathbb{I}$, podemos escribir

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\alpha_n}},$$

y, por el teorema 1.3, tenemos que

$$T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n - 2(n-1)}{2^{\alpha_n}}.$$

Por tanto, si

$$\frac{m}{2^k} + \frac{x}{2^k} = \sum_{s=1}^r \frac{1}{2^{\alpha_s}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\alpha_n+k}}$$

(con r dependiendo de m), entonces

$$\begin{aligned} T\left(\frac{m}{2^k} + \frac{x}{2^k}\right) &= \sum_{s=1}^r \frac{\alpha_s - 2(s-1)}{2^{\alpha_s}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n + k - 2(r+n-1)}{2^{\alpha_n+k}} \\ &= T\left(\frac{m}{2^k}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k - 2r}{2^{\alpha_n+k}} + \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n - 2(n-1)}{2^{\alpha_n}} \\ &= T\left(\frac{m}{2^k}\right) + (k - 2r) \frac{x}{2^k} + \frac{1}{2^k} T(x), \end{aligned}$$

donde $p := k - 2r_m$; y tenemos así probada la afirmación del enunciado. ■

Como consecuencia, podemos escribir el siguiente resultado.

Lema 1.31 La función T de Takagi toma en los puntos de la forma $\frac{1}{2^{2s+2}}, \frac{2}{2^{2s+2}}, \frac{3}{2^{2s+2}}, \frac{1}{2^{2s}}$, los siguientes valores:

$$\begin{cases} T\left(\frac{1}{2^{2s+2}}\right) = \frac{2s+2}{2^{2s+2}}; \\ T\left(\frac{2}{2^{2s+2}}\right) = \frac{4s+2}{2^{2s+2}}; \\ T\left(\frac{3}{2^{2s+2}}\right) = \frac{6s+2}{2^{2s+2}}; \\ T\left(\frac{1}{2^{2s}}\right) = \frac{2s}{2^{2s}}; \end{cases} \quad (1.1)$$

y, además,

$$\text{máx} \left\{ T(x) : x \in \left[0, \frac{1}{2^{2s+2}}\right] \right\} \leq \frac{2s+8/3}{2^{2s+2}} \quad (1.2)$$

$$\text{máx} \left\{ T(x) : x \in \left[\frac{1}{2^{2s+2}}, \frac{2}{2^{2s+2}}\right] \right\} \leq (4s+8/3) \frac{1}{2^{2s+2}} \quad (1.3)$$

Demostración. Vamos a calcular $T\left(\frac{1}{2^k}\right)$. En el lema 1.30 tomamos $m=0$ y $x=1$. En este caso $r=0$ y $p=k$, por lo que obtenemos $T\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{k}{2^k}$.

Aplicado este resultado a $\frac{1}{2^{2s+2}}, \frac{1}{2^{2s+1}}, \frac{1}{2^{2s}}$ obtenemos

$$T\left(\frac{1}{2^{2s+2}}\right) = \frac{2s+2}{2^{2s+2}}, \quad T\left(\frac{2}{2^{2s+2}}\right) = \frac{4s+2}{2^{2s+2}}, \quad T\left(\frac{3}{2^{2s+2}}\right) = \frac{6s+2}{2^{2s+2}}.$$

Para $T\left(\frac{3}{2^{2s+2}}\right)$, utilizamos $k=2s+2, m=2$ y $x=1$; y el valor obtenido para $T\left(\frac{2}{2^{2s+2}}\right)$, y nos da como resultado $T\left(\frac{3}{2^{2s+2}}\right) = \frac{6s+2}{2^{2s+2}}$.

Para la acotación del valor máximo en los intervalos $\left[0, \frac{1}{2^{2s+2}}\right]$ y $\left[\frac{1}{2^{2s+2}}, \frac{2}{2^{2s+2}}\right]$ hemos de utilizar que el valor máximo que alcanza T es $2/3$. Existe $\alpha \in \mathbb{I}$ tal que

$$\begin{aligned} \text{máx} \left\{ T(x) : x \in \left[0, \frac{1}{2^{2s+2}}\right] \right\} &= T\left(\frac{\alpha}{2^{2s+2}}\right) \\ &= (2s+2) \frac{\alpha}{2^{2s+2}} + \frac{T(\alpha)}{2^{2s+2}} + T(0) \\ &\leq \frac{2s+2}{2^{2s+2}} + \frac{2}{3} \frac{1}{2^{2s+2}} \\ &= (2s+8/3) \frac{1}{2^{2s+2}}. \end{aligned}$$

Del mismo modo, obtenemos

$$\text{máx} \left\{ T(x) : x \in \left[\frac{1}{2^{2s+2}}, \frac{2}{2^{2s+2}}\right] \right\} \leq (4s+8/3) \frac{1}{2^{2s+2}}.$$

■

Introducimos ahora un poco de notación que utilizaremos a continuación.

Para un entero positivo k , definimos la k -ésima partición de \mathbb{I} como el conjunto

$$\pi_k \mathbb{I} := \left\{ 0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \dots, \frac{2^k-1}{2^k}, 1 \right\}.$$

Escribimos $x_{j,k} := j/2^k$ para $0 \leq j \leq 2^k$ (o simplemente x_j si no hay confusión). Diremos de $[x_j, x_{j+1}]$ que es un intervalo de la partición $\pi_k \mathbb{I}$. Para cada función

$$f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I},$$

la partición $\pi_k \mathbb{I}$ induce la k -ésima partición de nivel de f :

$$\pi_k(f) := \{f(x_j) : 0 \leq j \leq 2^k\} \cup \{1\}.$$

Notemos que los cardinales de $\pi_k \mathbb{I}$ y $\pi_k(f)$ son diferentes en general. Los elementos del último conjunto serán escrito como $y_{j,k}$; satisfaciendo que $y_{j,k} < y_{j+1,k}$, y el subíndice k será omitido si no hay confusión

Los intervalos de la forma $[a, b]$ de \mathbb{I} teniendo elementos consecutivos en $\pi_k(f)$ como puntos extremos son llamados intervalos de dicha k -ésima partición de nivel $\pi_k(f)$.

Ahora, para cada punto y de \mathbb{I} , introducimos los números $N_k(y)$ y $\overline{N}_k(y)$, como sigue:

Definición 1.32 Sea un punto y tal que no admite desarrollo diádico finito.

- a) $\bar{N}_k(y)$ es igual al número de intervalos $[x_j, x_{j+1}]$ de $\pi_k \mathbb{I}$ tales que $y \in f([x_j, x_{j+1}])$.
- b) $\bar{N}_k(y)$ es igual al número de intervalos $[x_j, x_{j+1}]$ de $\pi_k \mathbb{I}$ tales que la imagen de su interior mediante f tiene intersección no vacía con el intervalo de $\pi_k(f)$ que contiene a y .
- c) Si $y \in [y_{s,k}, y_{s+1,k}]$, definimos

$$\bar{\chi}_{[x_j, x_{j+1}], k}(y) := \begin{cases} 0, & \text{si } f([x_j, x_{j+1}[) \cap [y_{s,k}, y_{s+1,k}] = \emptyset \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, podemos escribir $\bar{N}_k(y) = \sum_j \bar{\chi}_{[x_j, x_{j+1}], k}(y)$.

Como $y \in f([x_j, x_{j+1}])$ implica intersección no vacía, resulta claro que

$$N_k(y) \leq \bar{N}_k(y).$$

1.7.2. El resultado principal

Los siguientes lemas son unos resultados técnicos necesarios para la mejor exposición de la demostración.

Lema 1.33 a) El número $p_{2k,m}$ es un entero par.

b) Si $p_{2k,m} = 0$, podemos construir parejas disjuntas de la forma

$$(p_{2k,m}, p_{2k,m+1}) = (0, -2) \text{ o } (p_{2k,m-1}, p_{2k,m}) = (2, 0).$$

El primer caso ocurre cuando m es par y el segundo cuando m es impar.

Demostración. a) Es inmediato, puesto que $p_{2k,m} = 2k - 2r_m$.

b) Consideraremos, a su vez, cuatro casos diferentes: cuando m es $4n, 4n+1, 4n+2$ o $4n+3$.

Recordamos que $p_{2k,4n} = 2k - 2r_{4n}$. Teniendo en cuenta que la expresión diádica de $\frac{4n}{2^{2k}}$ tiene r_{4n} términos se tiene que $\frac{4n}{2^{2k}} = \sum_{s=1}^{r_{4n}} \frac{1}{2^{\alpha_s}}$ y, por tanto, $\frac{4n+1}{2^{2k}} = \sum_{s=1}^{r_{4n}} \frac{1}{2^{\alpha_s}} + \frac{1}{2^{2k}}$; de donde deducimos que $r_{4n+1} = r_{4n} + 1$.

Del mismo modo obtenemos

$$\begin{cases} r_{4n+2} = r_{4n} + 1 \\ r_{4n+3} = r_{4n} + 2 \end{cases}$$

Por tanto, obtenemos

$$\begin{cases} p_{2k,4n} = 2k - 2r_{4n} \\ p_{2k,4n+1} = 2(k-1) - 2r_{4n} = p_{2k,4n} - 2 \\ p_{2k,4n+2} = 2(k-1) - 2r_{4n} = p_{2k,4n} - 2 \\ p_{2k,4n+3} = 2(k-2) - 2r_{4n} = p_{2k,4n} - 4 \end{cases}.$$

Consideremos los vectores $(p_{2k,4n}, p_{2k,4n+1}, p_{2k,4n+2}, p_{2k,4n+3})$.

Si $p_{2k,4n} = 0$, el correspondiente vector es $(0, -2, -2, -4)$; y, tomamos el par $(p_{2k,4n}, p_{2k,4n+1}) = (0, -2)$.

Si $p_{2k,4n+1} = p_{2k,4n+2} = 0$, entonces el vector es $(2, 0, 0, -2)$, y los pares serán $(p_{2k,4n}, p_{2k,4n+1}) = (2, 0)$ y $(p_{2k,4n+2}, p_{2k,4n+3}) = (0, -2)$.

Finalmente, si $p_{2k,4n+3} = 0$, el vector es $(4, 2, 2, 0)$. Por tanto, tomamos $(p_{2k,4n+2}, p_{2k,4n+3}) = (2, 0)$. ■

Lema 1.34 Sea $y \in \mathbb{I}$ sin expresión diádica finita.

a) Si j es impar y $p_{2k,j} = 0$ entonces

$$2 \left(\bar{\chi}_{[\frac{j-1}{2^{2k}}, \frac{j}{2^{2k}}], 2^k}(y) + \bar{\chi}_{[\frac{j}{2^{2k}}, \frac{j+1}{2^{2k}}], 2^k}(y) \right) = \sum_{d=-4}^3 \bar{\chi}_{[\frac{4j+d}{2^{2k+2}}, \frac{4j+d+1}{2^{2k+2}}], 2^{k+2}}(y). \quad (1.4)$$

b) Si j es par y $p_{2k,j} = 0$ entonces

$$2 \left(\bar{\chi}_{[\frac{j}{2^{2k}}, \frac{j+1}{2^{2k}}], 2^k}(y) + \bar{\chi}_{[\frac{j+1}{2^{2k}}, \frac{j+2}{2^{2k}}], 2^k}(y) \right) = \sum_{d=0}^7 \bar{\chi}_{[\frac{4j+d}{2^{2k+2}}, \frac{4j+d+1}{2^{2k+2}}], 2^{k+2}}(y). \quad (1.5)$$

Demostración. a) Si $p_{2k,j} = 0$ y j es impar, entonces, en virtud del lema anterior, en el intervalo $[\frac{j-1}{2^{2k}}, \frac{j}{2^{2k}}]$ tenemos que $p_{2k,j-1} = 2$.

La autoafinidad de T conduce a reducir el estudio a cuando $(p_{4,0}, p_{4,1}) = (2, 0)$, donde los intervalos a considerar son \mathbb{I} y $[1/4, 1/2]$. Notamos por y' la segunda coordenada de la imagen de $(0, y)$, vía la afinidad utilizada anteriormente. En esta situación, tenemos que se dan las igualdades

$$\begin{cases} \bar{\chi}_{[\frac{j-1}{2^{2k}}, \frac{j}{2^{2k}}], 2^k}(y) = \bar{\chi}_{[0, 1/4], 2}(y'), \\ \bar{\chi}_{[\frac{j}{2^{2k}}, \frac{j+1}{2^{2k}}], 2^k}(y) = \bar{\chi}_{[1/4, 1/2], 2}(y'), \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \bar{\chi}_{[\frac{4j+s}{2^{2k+2}}, \frac{4j+s+1}{2^{2k+2}}], 2^{k+2}}(y) = \bar{\chi}_{[\frac{s+4}{16}, \frac{s+5}{16}], 4}(y'), \\ \text{con } s \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}. \end{cases}$$

En este caso, ocurre que $\pi_2(T) = \{0, 1/2, 1\}$ e $y' \in [1/2, 1]$; y que $\pi_4(T) = \{0, 1/4, 3/8, 1/2, 5/8, 1\}$.

Si $y' \in [1/2, 1]$, entonces $\bar{\chi}_{\mathbb{I}, 2}(y') = \bar{\chi}_{[1/4, 1/2], 2}(y') = 1$.

Existen dos posibilidades. Para el primero, $y' \in [1/2, 5/8]$, sencillos cálculos conducen a

$$\bar{\chi}_{[1/8, 3/16], 4}(y') = \bar{\chi}_{[3/16, 1/4], 4}(y') = \bar{\chi}_{[1/4, 5/16], 4}(y') = \bar{\chi}_{[7/16, 1/2], 4}(y') = 1,$$

y cero en los otros cuatro intervalos.

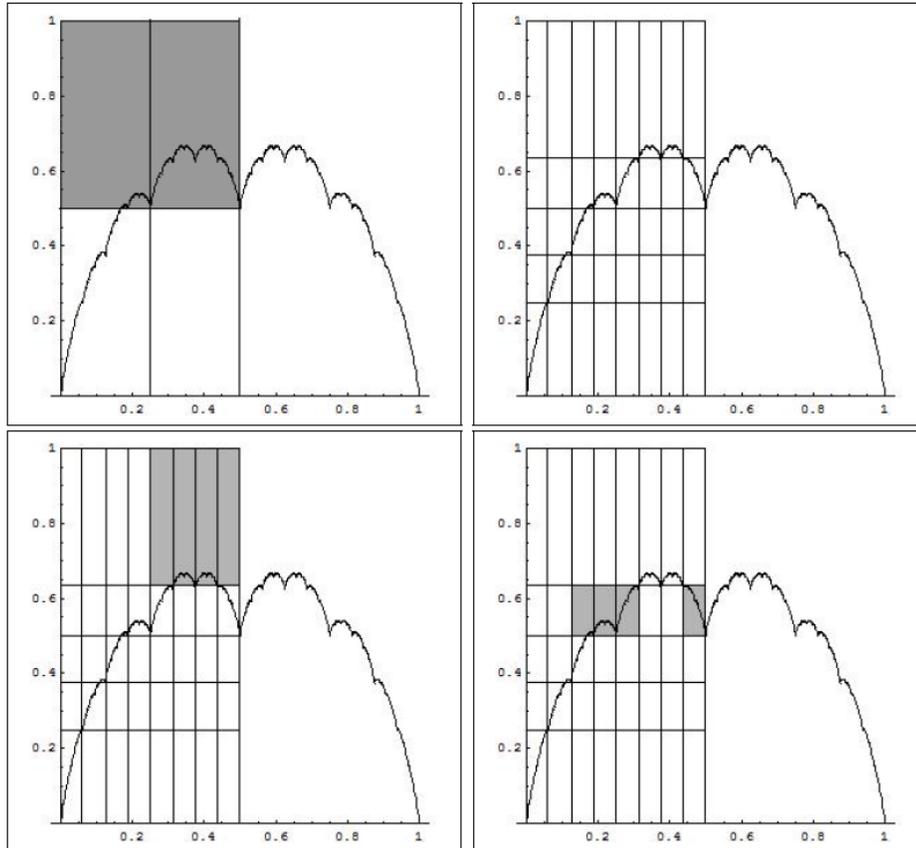
Para el segundo caso, $y' \in [5/8, 1]$, tenemos

$$\bar{\chi}_{[1/4, 5/16], 4}(y') = \bar{\chi}_{[5/16, 3/8], 4}(y') = \bar{\chi}_{[3/8, 7/16], 4}(y') = \bar{\chi}_{[7/16, 1/2], 4}(y') = 1,$$

e igual a cero en los otros cuatro intervalos.

b) La simetría de T con respecto a $x = 1/2$, nos permite deducir el caso en que $p_{2k,j} = 0$ y j es par. ■

El lema anterior queda ilustrado del siguiente modo:



Lema 1.35 Sea $y \in \mathbb{I}$ tal que no admite desarrollo un binario finito y ocurre que $\bar{\chi}_{[\frac{j}{2^{2k}}, \frac{j+1}{2^{2k}}], 2^k}(y) = 1$.

a) Si $p_{2k,j} = 2s > 0$ entonces

$$2 \geq \sum_{s=0}^3 \bar{\chi}_{[\frac{4j+s}{2^{2k+2}}, \frac{4j+s+1}{2^{2k+2}}], 2^{k+2}}(y). \quad (1.6)$$

b) El mismo resultado es cierto cuando $p_{2k,j} = 2s < 0$.

Demostración. Sea $p_{2k,j} = 2s > 0$. La autoafinidad de T implica que podemos hacer el estudio en el intervalo \mathbb{I} . De nuevo, y' es la segunda coordenada de la imagen de $(0, y)$, vía la afinidad previamente utilizada.

En esta situación tenemos que se dan las igualdades

$$\bar{\chi}_{[\frac{j}{2^{2k}}, \frac{j+1}{2^{2k}}], 2^k}(y) = \bar{\chi}_{[0, 1/2^{2s}], 2}(y') = 1,$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\chi}_{[\frac{4j+d}{2^{2k+2}}, \frac{4j+d+1}{2^{2k+2}}], 2^{k+2}}(y) = \bar{\chi}_{[\frac{d}{2^{2s+2}}, \frac{d+1}{2^{2s+2}}], 4}(y'), \\ \text{con } d \in \{0, 1, 2, 3\}. \end{array} \right.$$

Tenemos $\pi_{2^{2s}}(T) = \{0, \frac{2s}{2^{2s}}, \dots\}$ y $\bar{\chi}_{\mathbb{I}}(y') = 1$. Para la siguiente división, tenemos

$$\pi_{2^{2s+2}}(T) = \left\{ 0, \frac{2s+2}{2^{2s+2}}, \frac{4s+2}{2^{2s+2}}, \frac{6s+2}{2^{2s+2}}, \frac{2s}{2^s}, \dots \right\}.$$

Consideramos, a su vez, varios casos:

i) Si $y' \in [0, \frac{2s+2}{2^{2s+2}}]$, entonces $\bar{\chi}_{[0, \frac{1}{2^{2s+2}}], 4}(y') = 1$;

y $\bar{\chi}_{[\frac{1}{2^{2s+2}}, \frac{2}{2^{2s+2}}], 4}(y') = \bar{\chi}_{[\frac{2}{2^{2s+2}}, \frac{3}{2^{2s+2}}], 4}(y') = \bar{\chi}_{[\frac{3}{2^{2s+2}}, \frac{4}{2^{2s+2}}], 4}(y') = 0$. Por tanto, la desigualdad es cierta.

ii) Si $y' \in [\frac{2s+2}{2^{2s+2}}, \frac{4s+2}{2^{2s+2}}]$, entonces

$$\bar{\chi}_{[0, \frac{1}{2^{2s+2}}], 4}(y') = \bar{\chi}_{[\frac{1}{2^{2s+2}}, \frac{1}{2^{2s+1}}], 4}(y') = 1;$$

$$\bar{\chi}_{[\frac{2}{2^{2s+2}}, \frac{3}{2^{2s+1}}], 4}(y') = \bar{\chi}_{[\frac{3}{2^{2s+2}}, \frac{4}{2^{2s+1}}], 4}(y') = 0.$$

Se tiene la igualdad en (1.6).

iii) Si $y' \in [\frac{4s+2}{2^{2s+2}}, \frac{6s+2}{2^{2s+2}}]$, entonces la acotación (1.2) y el valor de $T(\frac{2}{2^{2s+2}})$, dadas en el lema 1.31, implican

$$\bar{\chi}_{[\frac{1}{2^{2s+2}}, \frac{1}{2^{2s+1}}], 4}(y') = \bar{\chi}_{[\frac{1}{2^{2s+1}}, \frac{3}{2^{2s+2}}], 4}(y') = 1,$$

$$\bar{\chi}_{[0, \frac{1}{2^{2s+2}}], 4}(y') = \bar{\chi}_{[\frac{3}{2^{2s+2}}, \frac{4}{2^{2s+2}}], 4}(y') = 0;$$

y de nuevo se tiene la igualdad en (1.6).

iv) Si $y' \in [\frac{6s+2}{2^{2s+2}}, \frac{2s}{2^s}]$, entonces las acotaciones (1.2) y (1.3), y el valor de $T(\frac{3}{2^{2s+2}})$, dadas en el lema 1.31, nos dan

$$\bar{\chi}_{[\frac{1}{2^{2s+1}}, \frac{3}{2^{2s+2}}], 4}(y') = \bar{\chi}_{[\frac{3}{2^{2s+2}}, \frac{2s}{2^s}], 4}(y') = 1$$

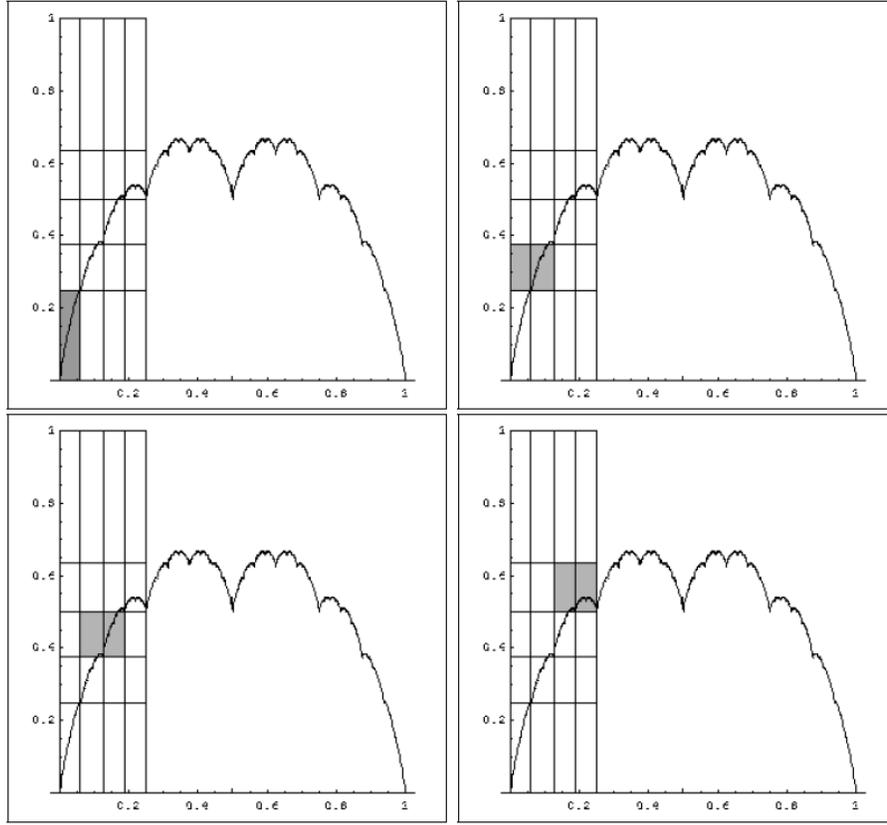
y

$$\bar{\chi}_{[0, \frac{1}{2^{2s+2}}], 4}(y') = \bar{\chi}_{[\frac{1}{2^{2s+2}}, \frac{2}{2^{2s+2}}], 4}(y') = 0.$$

Por tanto, (1.6) es cierto en los cuatro casos considerados.

b) Para el caso $p_{2k,j} = 2s < 0$ se procede como anteriormente cuando es positivo, por simetría. ■

La siguiente figura ilustra el resultado anterior.



Para la función T , los números $\bar{N}_k(y)$ dan la siguiente propiedad:

Lema 1.36 Si $n \in \mathbb{Z}^+$ e $y \in \mathbb{I}$ no tiene expresión diádica finita, entonces

$$\bar{N}_{2n+2}(y) \leq 2\bar{N}_{2n}(y).$$

Demostración. Comenzamos con el caso $n = 1$. Si $y \in [0, 1/2[$, entonces $\bar{N}_2(y) = 2$; y si $y \in [1/2, 1]$, entonces $\bar{N}_2(y) = 4$. Para $\bar{N}_4(y)$, consideramos los intervalos \mathbb{I} , $[1/4, 3/8]$, $[3/8, 1/2]$, $[1/2, 5/8]$ y $[5/8, 1]$ de $\pi_k(T)$. En cada uno de los casos tenemos: $\bar{N}_4(y) = 2$, $\bar{N}_4(y) = 2$, $\bar{N}_4(y) = 4$, $\bar{N}_4(y) = 8$ y $\bar{N}_4(y) = 8$. Por tanto, $\bar{N}_4(y) \leq 2\bar{N}_2(y)$.

Utilizamos las igualdades

$$\bar{N}_{2n+2}(y) = \sum_j \bar{\chi}_{[x_j, 2n+2, x_{j+1}, 2n+2], 2n+2}(y)$$

y

$$\bar{N}_{2n}(y) = \sum_j \bar{\chi}_{[x_j, 2n, x_{j+1}, 2n], 2n}(y).$$

Teniendo en cuenta, por un lado, que si $\bar{\chi}_{[x_j, x_{j+1}], 2k}(y) = 0$, entonces para los intervalos de $\pi_{2k+2}\mathbb{I}$ en los que se descompone $[x_j, x_{j+1}]$ tenemos $\bar{\chi}_{I, 2k+2}(y) = 0$; y, por otro lado, con las igualdades (1.4) y (1.5) del lema 1.34 y la desigualdad (1.6) del lema 1.35, obtenemos que $\bar{N}_{2n+2}(y) \leq 2\bar{N}_{2n}(y)$. ■

Y, como consecuencia, procediendo por inducción, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.37 Si $n \in \mathbb{Z}^+$ e $y \in \mathbb{I}$ no tiene desarrollo diádico finito, entonces

$$\bar{N}_{2n}(y) \leq 2^{n+1}.$$

El siguiente lema se obtiene sin dificultad para la función T de Takagi.

Lema 1.38 Si $y \in \mathbb{I}$ admite desarrollo diádico finito, entonces el conjunto de nivel L_y de la función T de Takagi es numerable.

Y, finalmente, tenemos el resultado central en esta sección.

Teorema 1.39 *Si $y \in \mathbb{I}$ no tiene desarrollo diádico finito, la dimensión por cajas de los conjuntos L_y de la función de Takagi es, como máximo, $1/2$.*

Demostración. Teniendo en cuenta las desigualdades

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B L_y &\leq \overline{\lim}_k \frac{\log N_k(y)}{k} \leq \overline{\lim}_k \frac{\log \overline{N}_k(y)}{k} \\ &= \overline{\lim}_k \frac{k/2 + O(1)}{k} = 1/2. \end{aligned}$$

■

En resumen, podemos dar respuesta positiva a la conjetura presentada en [110, Conjecture 6.1].

Teorema 1.40 *La dimensión de Hausdorff de los conjuntos de nivel de la función de Takagi es menor o igual que $1/2$.*

Demostración. Es una consecuencia de

$$\dim_{\mathcal{H}} L_y \leq \underline{\dim}_B L_y \leq \overline{\dim}_B L_y$$

y de la numerabilidad del conjunto de nivel en el caso de tener desarrollo finito. ■

1.7.3. Conclusiones

1. Si $y \in \mathbb{I}$, entonces $\dim_{\mathcal{H}}(L_y) \in \mathbb{I}$.
2. Para $x \in \mathbb{I}$,

$$T(x) = 2/3 \iff x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{4^n}, \text{ con } x_n \in \{1, 2\};$$

y por tanto, $\dim_{\mathcal{H}} L_y = 1/2$, si $y = 2/3$.

El inverso es falso: si y es un punto en el que la función tiene un máximo relativo, entonces $\dim_{\mathcal{H}} L_y = 1/2$. Por tanto, hay un conjunto de puntos densos satisfaciendo esta propiedad.

3. El resultado obtenido nos da una respuesta a una cuestión más general: ¿Cuál es la cota inferior de las dimensiones de Hausdorff de la intersección de los conjuntos de nivel de T con rectas de pendiente entera?

Podemos escribir la autoafinidad en la forma:

$$T(y) = p \left(y - \frac{m}{2^k} \right) \frac{x}{2^k} + T \left(\frac{m}{2^k} \right) + \frac{T(2^k y - m)}{2^k},$$

para $\frac{m}{2^k} \leq y \leq \frac{m+1}{2^k}$. Por tanto, el estudio de estas intersecciones se reduce a una recta horizontal intersectando una cantidad numerable de copias de la gráfica (o trozos de ella) de la función de Takagi, a diferentes escalas.

Puesto que estas funciones son afinidades y, por tanto, bi-Lipschitzianas, han de preservar la dimensión de Hausdorff. Por tanto, $1/2$ es una cota superior para el conjunto intersección de una recta de pendiente entera con T . Puesto que $L_{2/3}$ es $1/2$ tenemos que este número es la cota inferior de las dimensiones de Hausdorff de estas intersecciones.

1.8. La función de Takagi y los números de Bernoulli

Frecuentemente, en estudios relacionados con la Termodinámica, se hace uso de un operador conocido como Operador de Transferencia. La función de Takagi es una autofunción de ese operador en un caso particular que está relacionado con una función de la que haremos uso frecuentemente.

Si a $]0, 1[$ con la topología usual se le realiza la *compactificación por un punto* (de Alexandroff) tenemos una topología en $[0, 1[$ para la que es compacto. Dada una función $g : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ diferenciable (hemos de tener en cuenta que la compactificación por un punto equivale a la identificación de 0 y 1 en \mathbb{I}) y, suponiendo que la derivada

no es nula y que la imagen inversa de un punto es un conjunto finito o vacío, el operador de transferencia asociado con g aplicado a la función f actuará de esta forma:

$$L_g(f)(y) = \sum_{x:y=g(x)} \frac{f(x)}{|g'(x)|}$$

Para la función $F_{1/2} : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ definida por $F_{1/2}(x) := \begin{cases} 2x\dots, & x \in [0, 1/2[\\ 2x - 1\dots, & x \in [1/2, 1[\end{cases}$. Esta $F_{1/2}$ es una función derivable (hemos de tener en cuenta la identificación entre 0 y 1) y la imagen inversa de un elemento siempre es finito. El operador de Transferencia viene dado por

$$\mathcal{L}_{F_{1/2}}(f)(y) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$$

Las ecuaciones funcionales dadas en 1.24 garantizan que la función de Takagi es una autofunción de $L_{F_{1/2}}$ con autovalor $1/2$.

Vamos a demostrar que los polinomios de Bernoulli son autofunciones de $\mathcal{L}_{F_{1/2}}$. Además, estudiaremos dos identidades de Euler relacionadas con los valores de estos polinomios en cero, es decir: los números de Bernoulli.

Recordamos que los polinomios de Bernoulli son las funciones B_n que encontramos en el siguiente desarrollo en serie:

$$B(x, z) := \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} z^k.$$

Los primeros polinomios son:

$$B_0(x) = 1; \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}; \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}; \quad B_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}; \quad \dots\dots$$

Demostramos la propiedad que hemos anunciado anteriormente.

Proposición 1.41 *El polinomio de Bernoulli B_k es una autofunción de $\mathcal{L}_{F_{1/2}}$ correspondiente al autovalor $\frac{1}{2^k}$.*

Demostración. Si aplicamos $\mathcal{L}_{F_{1/2}}$ a la función $B(\cdot, z)$ que a x le hace corresponder $B(x, z)$, tenemos que

$$\mathcal{L}_{F_{1/2}}(B(\cdot, z))(x) = \frac{1}{2} \left(B\left(\frac{x}{2}, z\right) + B\left(\frac{x+1}{2}, z\right) \right) = B\left(x, \frac{z}{2}\right).$$

Por otra parte, la convergencia absoluta de las series nos permite escribir

$$\mathcal{L}_{F_{1/2}}(B(\cdot, z))(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_{F_{1/2}}(B_k)(x)}{n!} z^k$$

Igualando coeficientes en los dos desarrollos de $\mathcal{L}_{F_{1/2}}$, concluimos que $\mathcal{L}_{F_{1/2}}(B_k)(x) = B_k(x)$. ■

Otras propiedades, muy conocidas, que se pueden obtener con la manipulación de $B(x, z)$ son las siguientes:

Proposición 1.42 a) $B'_k(x) = kB_{k-1}(x)$.

b) $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$.

c) $B_k(0) = B_k(1) \quad k \neq 1$.

d) $\int_0^1 B_k(x) dx = 0 \quad k \neq 0$.

Asociados a estos polinomios hay unos números muy conocidos. Son los números de Bernoulli, que están dados por: $B_k := B_k(0)$.

Las siguientes propiedades de estos números pueden encontrarse, por ejemplo, en [1], [89]:

a. $B_p = -\frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} B_k$

b. Los primeros valores son:

$$B_0 = 1; \quad B_1 = -\frac{1}{2}; \quad B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_4 = -\frac{1}{30}; \quad B_6 = \frac{1}{42}; \quad B_8 = -\frac{1}{30}; \dots\dots$$

c. Salvo B_1 todos los impares son cero.

d. Se tiene $\zeta(-n) = \frac{-B_{n+1}}{n+1}$, donde ζ es la función zeta de Riemann, que para $\text{Re}(s) > 1$ está definida por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ y se extiende de manera holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

e. Fórmula de Stirling. $\Gamma(n) = n^{n-1} e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\sum_{m=2}^{\infty} \frac{B_m}{m(m-1)n^{m-1}}}$

f. Fórmula de Euler-Mclaurin. Si $g \in \mathcal{C}^{2m+2}(\mathbb{I})$, entonces

$$\int_0^1 g(t) dt = \frac{g(0)}{2} + \frac{g(1)}{2} + \sum_{l=1}^m \frac{B_{2l}}{(2l)!} (g^{2l-1}(0) - g^{2l-1}(1)) - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} g^{2m+2}(\xi), \quad \xi \in]0, 1[.$$

Pretendemos es este trabajo dar algunas identidades nuevas entre estos números; en particular, se presenta una generalización de la propiedad

$$B_{2p} = \frac{-\sum_{l=1}^{p-1} \binom{2p}{2l} B_{2l} B_{2p-2l}}{2p+1}$$

que Mordell en [120] atribuye a Euler y que también aparece como fórmula (5) en el trabajo de Ramanujan [131].

1.8.1. Identidad de Euler generalizada para los números de Bernoulli

Establecemos un resultado del que se hará uso.

Proposición 1.43 *Para enteros positivos n y m , se tiene*

$$\int_0^1 B_n(x) B_m(x) dx = (-1)^{n+1} \frac{m!n!}{(m+n)!} B_{n+m}.$$

Demostración. Mediante integración por partes

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_n(x) B_m(x) dx &= B_n(x) \left. \frac{B_{m+1}(x)}{n+1} \right|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 B_{m+1}(x) B_{n-1}(x) dx = \\ &= \frac{-n}{m+1} \int_0^1 B_{m+1}(x) B_{n-1}(x) dx \end{aligned}$$

Repetiendo el proceso, finalmente, tenemos

$$\int_0^1 B_n(x) B_m(x) dx = \frac{B_1(x) B_{m+n}(x) m!n!}{(m+n)!} - \int_0^1 B_{m+n}(x) dx$$

Puesto que la integral es nula, por la definición de $B_1(x)$ obtenemos el resultado deseado. ■

Teorema 1.44 *(Generalización de la identidad de Euler.) Cuando $n+m$ es par, entonces*

$$B_{n+m} = (n+m)! \frac{\frac{B_n}{n!} \frac{B_m}{m!} - \sum_{l=1}^{\frac{m+n}{2}-1} \frac{B_{2l}}{(2l)!} \frac{B_{m+n-2l}}{(m+n-2l)!} \left(\binom{2l-1}{n-1} + \binom{2l-1}{2l-m} \right)}{(-1)^{n-1} + \binom{m+n}{n}}.$$

Demostración. La principal herramienta de la prueba es la fórmula de Euler-MacLaurin. Para su aplicación será necesario hacer derivadas, buscando mayor comodidad utilizaremos los polinomios $f_m(x) = \frac{B_m(x)}{m!}$, que tienen la propiedad $f'_m(x) = f_{m-1}(x)$

Aplicando la fórmula de Euler-Mclaurin al producto de dos de las funciones anteriores $f_n(x)f_m(x)$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)f_m(x)dx &= \frac{f_n(0)f_m(0)}{2} + \frac{f_n(1)f_m(1)}{2} + \sum_{i=1}^m \frac{B_{2i}}{(2i)!} \left. \frac{d^{2i-1}f_n(x)f_m(x)}{dx^{2i-1}} \right|_1^0 \\ &= f_n(0)f_m(0) + \sum_{i=1}^m \frac{B_{2i}}{(2i)!} \sum_{k=0}^{2i-1} \binom{2i-1}{k} f_{n-k}(x)f_{m+k+1-2i}(x) \Big|_1^0 \end{aligned}$$

(si tenemos en cuenta que $f_k(0) = f_k(1)$ salvo para $k=1$)

$$= f_n(0)f_m(0) + \sum_{i=1}^{\frac{m+n}{2}} \frac{B_{2i}}{(2i)!} \left(\binom{2i-1}{n-1} f_1(x)f_{n+m-2i}(x) + \binom{2i-1}{2i-m} f_1(x)f_{n+m-2i}(x) \right) \Big|_1^0$$

(puesto que $f_1(0) = -f_1(1) = -\frac{1}{2}$; $f_{n+m-2i}(0) = f_{n+m-2i}(1)$)

$$\begin{aligned} &= f_n(0)f_m(0) - \sum_{i=1}^{\frac{m+n}{2}} \frac{B_{2i}}{(2i)!} f_{n+m-2i}(0) \left(\binom{2i-1}{n-1} + \binom{2i-1}{2i-m} \right) \\ &= f_n(0)f_m(0) - \sum_{i=1}^{\frac{m+n}{2}-1} \frac{B_{2i}}{(2i)!} f_{n+m-2i}(0) \left(\binom{2i-1}{n-1} + \binom{2i-1}{2i-m} \right) \\ &\quad - \frac{B_{n+m}}{(n+m)!} \left(\binom{m+n-1}{n-1} + \binom{m+n-1}{n} \right) \end{aligned}$$

Aplicando la definición de f y la última proposición tenemos

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} \frac{B_{n+m}}{(n+m)!} &= f_n(0)f_m(0) - \sum_{i=1}^{\frac{m+n}{2}-1} \frac{B_{2i}B_{n+m-2i}}{(2i)!(n+m-2i)!} \left(\binom{2i-1}{n-1} + \binom{2i-1}{2i-m} \right) \\ &\quad - \frac{B_{n+m}}{(n+m)!} \binom{m+n}{n} \end{aligned}$$

que nos conduce a la igualdad

$$\begin{aligned} &\left((-1)^{n-1} + \binom{m+n}{n} \right) \frac{B_{n+m}}{(n+m)!} = \\ &= f_n(0)f_m(0) - \sum_{i=1}^{\frac{m+n}{2}-1} \frac{B_{2i}B_{n+m-2i}}{(2i)!(n+m-2i)!} \left(\binom{2i-1}{n-1} + \binom{2i-1}{2i-m} \right), \end{aligned}$$

de donde, finalmente, despejando B_{n+m} , tenemos la identidad anunciada. ■

El siguiente corolario muestra cómo la identidad de Euler es un caso particular de esta última expresión.

Corolario 1.45 *Identidad 1*

$$B_{2p} = \frac{-\sum_{l=1}^{p-1} \binom{2p}{2l} B_{2l} B_{2p-2l}}{2p+1}$$

Demostración. Hacemos $n = 1$ y $m = 2p - 1$. ■

Corolario 1.46 *Identidad 2*

$$B_{2p} = \frac{\binom{2p}{2} (3-2p) B_2 B_{2p-2} - \sum_{l=1}^{p-2} \binom{2p}{2l} B_{2l} B_{2p-2l}}{-1 + p(2p-1)}$$

Demostración. Sustituimos $n = 2$ y $m = 2p - 2$. ■

Corolario 1.47 *Identidad 3*

$$B_{2p} = \frac{-\binom{2p}{2p-2} B_2 B_{2p-2} \left(\binom{2p-3}{2} + 1 \right) - \sum_{l=1}^{p-2} \binom{2p}{2l} B_{2l} B_{2p-2l} (2l-1)(l-1)}{1 + \binom{2p}{3}}.$$

Demostración. Sustituimos $n = 3$ y $m = 2p - 3$. ■

Corolario 1.48 *Identidad 4*

$$B_{2p} = \frac{\binom{2p}{p} B_p^2 - \sum_{l \geq \frac{p}{2}}^{p-1} \binom{2p}{2l} B_{2l} B_{2p-2l} 2 \binom{2i-1}{p-1}}{(-1)^{p-1} + \binom{2p}{p}}$$

Demostración. Ponemos $n = m = p$. ■

Estos resultados podemos trasladarlos a la función de zeta de Riemann, $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$. Aquí enunciamos dos identidades:

a. $\zeta(2p) = - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\zeta(2i)\zeta(2p-2i)}{2(2p+1)}.$

b. $\zeta(2p) = \frac{(3-2p)\zeta(2p-2)\zeta(2) - \sum_{i=1}^{p-2} \zeta(2i)\zeta(2p-2i)}{2(p(2p-1)-1)}.$

1.8.2. Demostración de la fórmula de Euler para $\zeta(2p)$

El problema de sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ se remonta al siglo XVII. (Es el conocido como problema de Basilea.) Incluso en 1691, James Bernoulli afirma haber calculado su valor. Pero la primera demostración de que el valor de la suma es $\pi^2/6$ fue publicada en 1734 por Euler. Posteriormente, en 1740, este gran matemático dio respuesta a un problema más general. Calculó la suma de $\zeta(z)$ para los enteros pares positivos, demostrando la igualdad

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{B_{2k} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} \quad (1.7)$$

Algunos detalles históricos pueden ser consultados en [15], [100].

Los valores B_n son números racionales conocidos como números de Bernoulli y son los coeficientes del desarrollo en serie

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi$$

La fórmula $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ ha sido demostrada por distintos métodos; la mayoría de ellos, elementales (no siempre sencillos). Una recopilación de catorce de estas demostraciones puede encontrarse en [38]; y otras, no recogidas allí, pueden encontrarse en [82], [80] y [133].

Tras la demostración de Euler la fórmula (1.7) han aparecido diferentes demostraciones. (Véanse [14], [61], [130], [161], [167] y [168].) El objetivo de esta subsección es dar una nueva demostración elemental de (1.7).

Para la demostración haremos uso del desarrollo en serie de Taylor la función tangente que, como es conocido, viene dado por:

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} (-4)^n (1 - 4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} \quad \text{cuando } |x| < \pi/2$$

Aplicamos ese desarrollo a la función $\tan xy$ con $|x| \leq \pi/2$ e $|y| < 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \tan xy \, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} (-4)^n (1 - 4^n)}{(2n)!} \int_0^{\pi/2} x^{2n-1} dx y^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} (-1)^n (1 - 4^n)}{(2n)!} \frac{\pi^{2n}}{2n} y^{2n-1} \end{aligned}$$

Es posible hacer el cambio de orden entre la integral y la suma gracias al teorema de Fubini.

Por otra parte integrando la función y haciendo uso del producto infinito de la función coseno y del desarrollo en serie de Taylor de $\ln(1+x)$ resulta

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \tan xy \, dx &= \frac{-\ln(\cos(xy))}{y} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{-\ln(\cos(\pi y/2))}{y} \\ &= \frac{-\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(\pi y/2)^2}{\pi^2(n-1/2)^2}\right)\right)}{y} = \frac{-\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{y}{2n-1}\right)^2\right)\right)}{y} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} \frac{y^{2k-1}}{(2n-1)^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}} y^{2k-1} \end{aligned}$$

Nuevamente, el teorema de Fubini nos permite cambiar el orden de las sumas. Identificando coeficientes en el desarrollo en serie tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}} = (-1)^k \frac{B_{2k}(1-4^k)}{(2k)!} \frac{\pi^{2k}}{2} \quad (1.8)$$

Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}},$$

resulta que

$$\zeta(2k) = \left(1 - \frac{1}{4^k}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}}.$$

Sustituyendo en (1.8), obtenemos la fórmula de Euler dada en (1.7).

Capítulo 2

Sistema de representación diádico generalizado

2.1. Introducción

Es bien conocido que, para un número natural $r \geq 2$, cualquier número real x de $]0, 1[$ tiene un único desarrollo en serie (su desarrollo en base r) de la forma $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r^n}$, donde los dígitos $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$. Además, este desarrollo es único, salvo para ciertos números racionales (aquellos $x = \frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$ y todos los factores primos de q dividen a r). Para estos números existen dos posibles desarrollos en serie de este tipo, uno de ellos finito.

Este tipo de desarrollos puede ser generalizado a bases no enteras. Es decir, para números reales $\beta > 1$ y $x \in]0, 1[$, es posible establecer (véase [40]):

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\beta^n}$$

con $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, [\beta] - 1\}$. Pero ahora, la situación es muy diferente, porque existe un conjunto de medida uno en el que sus puntos tienen una infinidad de desarrollos en serie de este tipo en base β . Por tanto, la unicidad para estas series desaparece.

Este inconveniente puede evitarse vía la expresión *greedy de Renyi* -es la representación dada por el sistema:

$$T_\beta :]0, 1[\longrightarrow]0, 1[; \quad T_\beta(x) := \beta x \pmod{\beta},$$

obteniendo los dígitos

$$a_n = \left[\beta T_\beta^{n-1}(x) \right].$$

Este sistema es ergódico y existe una, y sólo una, medida absolutamente λ -continua (λ es la medida de Lebesgue) que preserve la medida y densidad h_β . (Véase [143].)

Gel'fond (en [69]) y Parry (en [134]) mostraron que

$$h_\beta(x) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta^n} \chi_{[0, T^n(1)]}(x)}{\int_0^1 \sum_{x < T^n(1)} \frac{1}{\beta^n} dx}.$$

El caso $\beta < 2$ tiene especial interés: en esta ocasión, todos los dígitos son ceros y unos. Cuando β es menor que el número áureo, $\beta < \Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, para cada número de $]0, 1[$, el conjunto de β -desarrollos tiene la cardinalidad del continuo.

Si escribimos $a := 1/\beta$, las representaciones anteriores son de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a^{m_n},$$

con $m_n < m_{n+1}$ y $\frac{1}{2} < a < 1$.

El propósito de este Capítulo es introducir un nuevo sistema de representación para los números de $]0, 1[$, mediante desarrollos en serie, combinando las bases a y $1 - a$; concretamente, en la forma:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-a)^n a^{m_n}.$$

En esta situación, la representación es única (similar al desarrollo diádico), salvo para un conjunto numerable de números para los que existen dos representaciones; a saber, una finita y otra infinita.

Esta representación se obtiene mediante un sistema dinámico que es ergódico y preserva la medida de Lebesgue. Una ventaja a favor de este sistema de representación es su validez para todo $a \in]0, 1[$, sin la restricción $a > 1/2$.

En la literatura estudiada, esta representación diádica generalizada no aparece de forma explícita. Lo hace en un modo implícito, con algunas aplicaciones al estudio de ciertas funciones singulares. (Véanse al respecto, por ejemplo, [109, pg.268] y [90, pg.227].)

2.2. Sistema de numeración diádico generalizado (SNDG)

Definición 2.1 Sea $a \in]0, 1[$. Para cada $x \in]0, 1]$, existe un entero n_0 tal que

$$a^{n_0+1} \leq x \leq a^{n_0}.$$

Por tanto, $x = a^{n_0+1} + y_1$, con $0 \leq y_1 \leq a^{n_0} (1 - a)$; y podemos escribir

$$x = a^{n_0+1} + a^{n_0} (1 - a) x_1,$$

donde $x_1 \in \mathbb{I}$. Repitiendo el proceso, ahora con x_1 , obtenemos

$$x = a^{n_0+1} + a^{n_0+n_1+1} (1 - a) + a^{n_0+n_1} (1 - a)^2 x_2;$$

y, reiterando indefinidamente el algoritmo anterior, tenemos la igualdad formal:

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-a)^k a^{1+\sum_{j=0}^k n_j}.$$

A esta expresión la llamaremos la representación diádica generalizada de x .

La serie anterior converge a x , puesto que:

$$\left| x - \sum_{k=0}^m (1-a)^k a^{1+\sum_{j=0}^k n_j} \right| < (1-a)^{m+1},$$

y puede ser aplicado el M -test de Weierstrass. Resumimos todo lo anterior así:

Teorema 2.2 Sea $a \in]0, 1[$. Si $x \in]0, 1]$, entonces existe una sucesión creciente de números naturales $1 \leq m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq \dots$, tales que

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-a)^k a^{m_k}.$$

Proposición 2.3 El desarrollo de la anterior proposición es único, salvo que sea finito o estacionario (i.e., $m_k = m_j$ si $k \geq j$).

Demostración. Puesto que

$$1 = a + a(1-a) + a(1-a)^2 + a(1-a)^3 + \dots,$$

obtenemos que, para el caso finito o estacionario:

$$\sum_{k=0}^n (1-a)^k a^{m_k} = \sum_{k=0}^{n-1} (1-a)^k a^{m_k} + \sum_{k=n}^{+\infty} (1-a)^k a^{m_k+1}.$$

Por otra parte, si la sucesión (m_k) no está acotada (la expresión de x no es finita ni estacionaria), consideramos el desarrollo infinito para x e y :

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-a)^k a^{m_k}; \quad y = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-a)^k a^{m'_k},$$

con $0 \leq k \leq n-1$, lo que implica que $m_k = m'_k$, y $m_k < m'_k$ para $k \geq n$. Por tanto:

$$\begin{aligned} y &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (1-a)^k a^{m_k} + a^{m'_n} \sum_{k=n}^{+\infty} (1-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (1-a)^k a^{m_k} + a^{m'_n-1} (1-a)^n \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} (1-a)^k a^{m_k} + \sum_{k=n}^{+\infty} (1-a)^k a^{m_k} = x. \end{aligned}$$

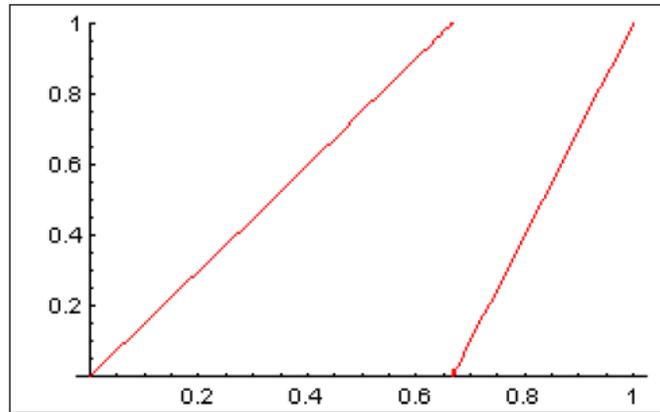
Como consecuencia, para un valor de x con sucesión (m_k) no acotada, x difiere de cualquier y con representación estacionario o no estacionaria. ■

2.3. Sistema dinámico asociado con el SNDG

En todo lo que sigue $a \in]0, 1[$.

Definición 2.4 $F_a(x) := \begin{cases} \frac{x}{a} \dots, & x \in [0, a] \\ \frac{x-a}{1-a} \dots, & x \in]a, 1] \end{cases}$.

Su representación gráfica es (para $a = 3/4$):



Teorema 2.5 La transformación F_a preserva la medida λ y es ergódica.

Para una demostración, puede verse [40, pg.68].

Si hacemos una "inversión.^{en} F_a , tenemos

$$x = \begin{cases} aF_a(x) \dots, & \text{si } 0 < x \leq a \\ (1-a)F_a(x) + a \dots, & \text{si } a < x \leq 1, \end{cases}$$

y, por iteración, resulta:

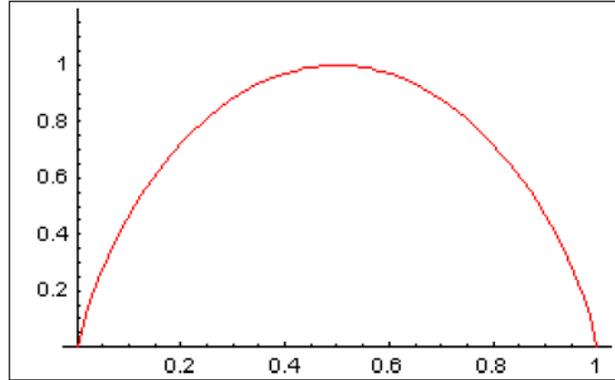
$$\begin{aligned} x &= a^{n_0+1} + (1-a)a^{n_0+n_1+1} + \dots + \\ &\quad + (1-a)^m a^{n_0+n_1+\dots+n_m+1} + (1-a)^{m+1} a^{n_0+n_1+\dots+n_m+1} F_a^r(x); \end{aligned}$$

y, por tanto, se obtiene el sistema diádico generalizado para x .

Proposición 2.6 La entropía h del sistema $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, \lambda, F_a)$ es

$$\ln \frac{1}{a^a (1-a)^{1-a}}.$$

Demostración. Es una consecuencia de la fórmula de Rholin. ■
Su representación gráfica es la siguiente:



Con la ayuda del teorema de Shannon-McMillan-Breiman, es inmediato el siguiente resultado.

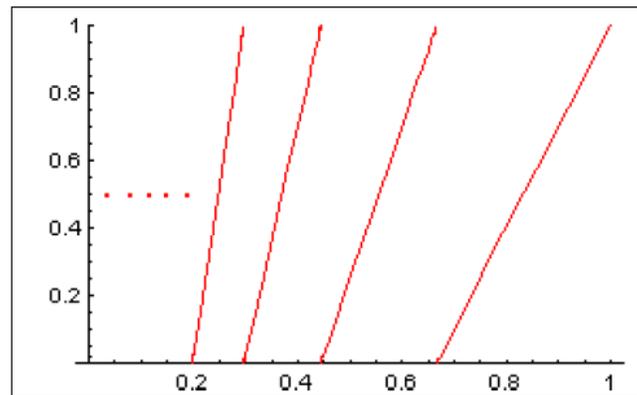
Corolario 2.7 Existe un conjunto de λ -medida uno, tal que

$$\lim_n \frac{\ln \lambda(\Delta_n)}{n} = \ln \frac{1}{a^a (1-a)^{1-a}}.$$

Sea ahora la función H_a dada por

$$H_a(x) := \begin{cases} \frac{x}{1-a} - \frac{a}{1-a} \dots, & a < x \leq 1 \\ \frac{x}{(1-a)a} - \frac{a}{1-a} \dots, & a < x \leq a^2 \\ \frac{x}{(1-a)a^2} - \frac{a}{1-a} \dots, & a^3 < x \leq a^2 \\ \frac{x}{(1-a)a^3} - \frac{a}{1-a} \dots, & a^4 < x \leq a^3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Su representación gráfica es de la forma:



Por "inversión", dependiendo de donde esté x , tendremos:

$$x = \begin{cases} a + (1-a) H_a(x) \dots, & a < x \leq 1 \\ a^2 + (1-a) a H_a(x) \dots, & a^2 < x \leq a \\ a^3 + (1-a) a^2 H_a(x) \dots, & a^3 < x \leq a^2 \\ a^4 + (1-a) a^3 H_a(x) \dots, & a^4 < x \leq a^3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Este desarrollo, nuevamente, da lugar a la serie diádica generalizada de x :

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-a)^k a^{m_k},$$

con $1 \leq m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq \dots$

Teorema 2.8 *La función H_a , arriba considerada, conserva la medida λ y es ergódica.*

Demostración. Véase [40, pg.68]. ■

Teorema 2.9 *En un conjunto de λ -medida 1, se tiene*

$$\lim_n \frac{m_n}{n} = \frac{a}{1-a}.$$

Demostración. Definimos

$$d(x) := \begin{cases} 0, \dots, & a < x \leq 1 \\ 1, \dots, & a^2 < x \leq a \\ 2, \dots, & a^3 < x \leq a^2 \\ 3, \dots, & a^4 < x \leq a^3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} m_0 &= d(x) + 1 \\ m_1 &= d(H_a(x)) + d(x) + 1 \\ m_2 &= d(H_a^2(x)) + d(H_a(x)) + d(x) + 1 \\ m_3 &= d(H_a^3(x)) + d(H_a^2(x)) + d(H_a(x)) + d(x) + 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema Ergódico a d :

$$\lim_n \frac{m_n}{n} = \lim_n \frac{1 + d(H_a(x)) + \dots + d(H_a^n(x))}{n},$$

existe en un conjunto de λ -medida uno; y, puesto que d es integrable:

$$\int_0^1 d(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (a^n - a^{n+1}) n = (1-a) \sum_{n=0}^{+\infty} a^n n = \frac{a}{1-a}.$$

■

Anticipando algunos resultados del siguiente Capítulo, enunciamos:

Teorema 2.10 *La dimensión de Hausdorff del conjunto donde $\lim_n \frac{m_n}{n} = d$, es*

$$\frac{d \ln d - (1+d) \ln(1+d)}{d \ln a + \ln(1-a)}.$$

Corolario 2.11 *La dimensión del conjunto de puntos donde $\lim_n \frac{m_n}{n} = 1$, es*

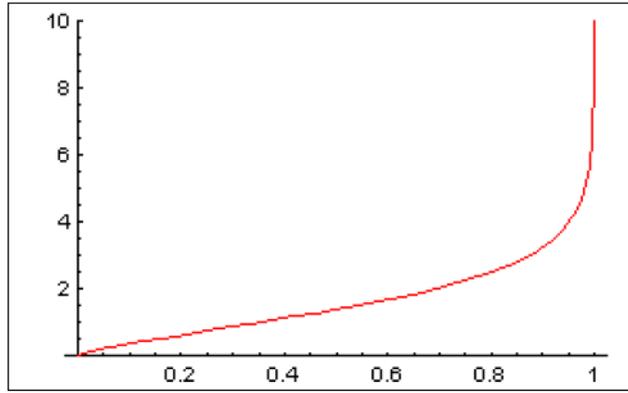
$$\frac{-2 \ln 2}{\ln a + \ln(1-a)}.$$

Proposición 2.12 *La entropía del sistema $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, \lambda, H_a)$ es*

$$\ln \frac{1}{a^{1-a} (1-a)}.$$

Demostración. Aplicando la Fórmula de Rholin y una suma como la que se hizo en la demostración del teorema 2.9, se sigue el resultado. ■

Su gráfica es la siguiente:



El teorema de Shannon-McMillan-Brieman implica:

Corolario 2.13 *Existe un conjunto de λ -medida 1 tal que*

$$\lim_n \frac{\ln \lambda(\Delta_n)}{n} = \ln \frac{1}{a^{\frac{1}{1-a}} (1-a)}.$$

Definición 2.14 *Si*

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-a)^k a^{m_k},$$

notamos por:

$$B_n := \sum_{k=0}^n (1-a)^k a^{m_k}; \quad C_n := B_n + a^{m_{n-1}-1} (1-a)^n.$$

Lema 2.15 *Para el cilindro n -ésimo Δ_n ,*

$$\frac{a\lambda(\Delta_n)}{1-a} \leq |x - B_{n-1}| \leq \lambda(\Delta_{n-1}).$$

Demostración. El cilindro Δ_n es ahora el intervalo $[B_n, C_n]$, y las siguientes identidades implican el resultado:

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_n) &= a^{m_{n-1}-1} (1-a)^n \\ B_n - B_{n-1} &= a^{m_{n-1}} (1-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

■

Tomando logaritmos en el lema anterior y aplicando el corolario previo:

Corolario 2.16 *En un conjunto de λ -medida uno,*

$$\lim_n \frac{-\ln(x - B_n)}{n} = \ln \frac{1}{(1-a) a^{\frac{1}{1-a}}}.$$

Corolario 2.17 (Tipo Loch) *Si n dígitos del desarrollo de x determinan los k primeros m_j , entonces existe un conjunto de λ -medida 1, tal que*

$$\lim_n \frac{n}{k} = \ln \frac{1}{(1-a) a^{\frac{1}{1-a}}} / \ln 10.$$

Demostración. Sea un valor x con desarrollo infinito no estacionario y sea $D_n(x)$ el cilindro decimal $[A_n, A'_n]$ conteniendo a x . Ahora, sea Δ_k el cilindro diádico conteniendo x y D_n , con k tan grande como sea necesario; esto es, $D_n \subset \Delta_k$ y $B_{k+1} \in D_n$ o $C_{k+1} \in D_n$. Consideramos dos casos:

a. Si $B_{k+1} \in D_n$, entonces $[B_{k+1}, B_{k+2}] \subset D_n$, y

$$\lambda(\Delta_{k+2}) \ll B_{k+2} - B_{k+1} = a^{m_{k+1}} (1-a)^{k+1}.$$

b. Si $C_{k+1} \in D_n$, entonces $[C_{k+2}, C_{k+1}] \subset D_n$, y

$$C_{k+1} - C_{k+2} \geq a^{m_k} (1-a)^{k+1} \gg \lambda(\Delta_{k+1}).$$

En ambos casos $\lambda(\Delta_{k+j}) \ll \lambda(D_n) \leq \lambda(\Delta_k)$ ($j \in \{1, 2\}$), y obtenemos

$$\frac{-\ln \lambda(\Delta_k)}{k} \leq \frac{-\ln \lambda(D_n)}{k} \leq \frac{-\ln \lambda(\Delta_{k+j})}{k} + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

con los términos de los extremos convergentes al valor

$$-\ln(1-a) - \frac{a}{1-a} \ln a;$$

por tanto, también lo hace el término central.

Finalmente, con la ayuda del teorema de Shannon-McMillan-Breiman, existe el límite $\lim_n \frac{s_n}{n}$ cuyo valor es

$$\frac{-\ln(1-a) - \frac{a}{1-a} \ln a}{\ln 10}$$

en un conjunto de λ -medida 1. ■

Proposición 2.18 *Notamos por s_n el número de elementos diferentes en $\{m_0, m_1, \dots, m_n\}$. Entonces, en un conjunto de λ -medida 1, es cierta la relación*

$$\lim_n \frac{s_n}{n} = a.$$

Demostración. Observando la definición de H_a , vemos que hay cambio en m si $H_a^k(x) \in [0, a[$ y no lo hay si $H_a^k(x) \in [a, 1]$. Por tanto, por integración de $\chi_{[0,a]}$, y el teorema Ergódico, se obtiene

$$\lim_n \frac{s_n}{n} = a.$$

■

2.4. Extensión natural y pares de Jager

El objetivo de esta sección se centra en el interés por conocer en que medida es buena la aproximación de $x \in \mathbb{I}$ por B_{n+1} . A este efecto se introducen los llamados pares de Jager.

Definición 2.19 (Coeficientes de aproximación) *Para todo x y n ,*

$$\theta_n(x) := \frac{|x - B_{n+1}|}{a^{m_n-1}(1-a)^n}.$$

Comentario 2.20 *Será $\theta_n = H_a^{n+1}$; puesto que*

$$H_a^n(x) = a^{-m_n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} a^{m_n+k} (1-a)^k.$$

Como consecuencia del Teorema Ergódico:

Teorema 2.21 *Existe un subconjunto de \mathbb{I} de λ -medida 1 en el que la sucesión (θ_n) está uniformemente distribuida.*

Corolario 2.22 *Hay un conjunto de λ -medida 1 en el que*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \theta_k = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \theta_k^2 = \frac{1}{3}.$$

Teorema 2.23 *Si notamos $\overline{H}_a(x, y) := (H_a(a), a^{m_0} + (1-a)a^{m_0-1}y)$, entonces el sistema dinámico $(\mathbb{I}^2, \mathcal{B}, \lambda, \overline{H}_a)$ es la extensión natural de $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, \lambda, H_a)$, donde m_0 depende de x .*

Demostración. a) La proyección

$$\pi : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}; (x, y) \rightarrow x$$

es medible.

b) La aplicación \overline{H}_a preserva λ . Si ahora nos restringimos al rectángulo $[a^m, a^{m-1}] \times \mathbb{I}$, la aplicación $\overline{H}_a : [a^m, a^{m-1}] \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I} \times [a^m, a^{m-1}]$ preserva la medida en los rectángulos $[c, d] \times [s, t]$. Pero, como esta familia genera la σ -álgebra total, y \overline{H}_a preserva λ en los rectángulos incluidos en $[a^m, a^{m-1}] \times \mathbb{I}$, con $m \in \mathbb{Z}^+$, por tanto (véase [30, pg.311]), \overline{H}_a preserva λ en los conjuntos de Borel de \mathbb{I}^2 .

c) Por argumentos similares a los anteriores, $\lambda(A \times \mathbb{I}) = \lambda(A)$, ya que esto es así en los intervalos de la forma $[a^m, a^{m-1}]$.

d) Para dos cilindros $(m_0, m_1, m_2, \dots, m_n) = (u, v)$ y $(\overline{m}_0, \overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots, \overline{m}_k) = (r, s)$, consideramos el nuevo cilindro

$$(c, d) : = (\overline{m}_n - \overline{m}_{n-1} + 1, \overline{m}_n - \overline{m}_{n-2} + 1, \dots, \\ \overline{m}_n, \overline{m}_n + \overline{m}_0 - 1, \overline{m}_n - \overline{m}_1 - 1, \dots, \overline{m}_n + \overline{m}_r - 1).$$

Por tanto, tenemos que:

$$\overline{H}_a^{-n}(c, d) = (u, v) \times (r, s);$$

y deducimos que \mathcal{B} está generada por imágenes inversas de cilindros (pues está generado por rectángulos que son productos de cilindros). ■

Proposición 2.24 *La aplicación \overline{H}_a^n es ergódica y mezclada.*

Demostración. El sistema $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, \lambda, H_a)$ tiene ambas propiedades; por tanto, como son propiedades hereditarias, su extensión natural también la tiene. ■

Y, como consecuencia del Teorema Ergódico:

Corolario 2.25 *Si C es un conjunto medible con $\lambda(\partial C) = 0$ (∂C es la frontera del conjunto C), entonces*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_C \left(\overline{H}_a^k(x, y) \right) = \lambda(C).$$

Corolario 2.26 (Tipo Jager) *Existe un conjunto de λ -medida 1 en \mathbb{I} , tal que λ es la función de distribución asintótica para $\left\{ \overline{H}_a^k(x, 0) \right\}$.*

Demostración. Consideramos un par (x, y) , de modo que la sucesión $\left(\overline{H}_a^k(x, y) \right)_k$ está uniformemente distribuida (*).

Para un valor $\varepsilon > 0$ dado, con n tal que $(1-a)^n < \varepsilon$, si $k \geq n$, entonces

$$\overline{H}_a^k(x, y) = (x_k, y_k) \text{ y } \overline{H}_a^k(x, 0) = (x_k, \overline{y}_k)$$

implica $|y_k - \overline{y}_k| < \varepsilon$.

Si $C := [a, b] \times [c, d]$, $C_{\varepsilon^-} := [a, b] \times [c + \varepsilon, d - \varepsilon]$, y $C_{\varepsilon^+} := [a, b] \times [c - \varepsilon, d + \varepsilon]$, entonces

$$\left. \begin{aligned} \overline{H}_a^k(x, y) \in C_{\varepsilon^-} &\implies \overline{H}_a^k(x, 0) \in C \\ \overline{H}_a^k(x, 0) \in C &\implies \overline{H}_a^k(x, y) \in C_{\varepsilon^+} \end{aligned} \right\}$$

lo que implica las dos cadenas de desigualdades siguientes:

$$\frac{\sum_{j=1}^k \chi_{C_{\varepsilon^-}} \circ \overline{H}_a^j(x, y)}{k} \leq \frac{\sum_{j=1}^k \chi_C \circ \overline{H}_a^j(x, 0)}{k} \leq \frac{\sum_{j=1}^k \chi_{C_{\varepsilon^+}} \circ \overline{H}_a^j(x, y)}{k}$$

y

$$\begin{aligned} \lambda(C) - 2\varepsilon &\leq \liminf_k \frac{\sum_{j=1}^k \chi_C \circ \overline{H}_a^j(x, 0)}{k} \\ &\leq \limsup_k \frac{\sum_{j=1}^k \chi_C \circ \overline{H}_a^j(x, 0)}{k} \leq \lambda(C) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

De acuerdo con ello, existe el límite

$$\lim_k \frac{\sum_{j=1}^k \chi_C \circ \overline{H}_a^j(x, 0)}{k} = \lambda(C).$$

Para casi todo x de \mathbb{I} , existe y (dependiente de x) verificando (*); y, por tanto, $\{\overline{H}_a^k(x, 0)\}$ está uniformemente distribuida. ■

Podemos considerar la identidad

$$H_a^n = a^{m_n - m_{n-1} + 1} + (1 - a) a^{m_n - m_{n-1}} H_a^{n+1},$$

y la reescribimos del modo:

$$\theta_{n-1} = a^{m_n - m_{n-1} + 1} + (1 - a) a^{m_n - m_{n-1}} \theta_n.$$

Es usual definir

$$\Psi(x, y) := \left(x, a^{m_0(y)} + (1 - a)^{m_0(y)+1} \right),$$

y, por tanto,

$$\Psi\left(\overline{H}_a^k(x, 0)\right) = (\theta_n(x), \theta_{n-1}(x)).$$

Definición 2.27 (Pares de Jager $(\theta_n(x), \theta_{n-1}(x))$) La imagen de $\overline{H}_a^k(x, 0)$ bajo la aplicación Ψ es llamado como un par de Jager.

Hemos de hacer notar que Ψ actúa aplicando el rectángulo $\mathbb{I} \times [a^r, a^{r+1}]$ en el segmento de extremos $(0, a^{r+1})$ y $(a^r, 1)$.

Puesto que $\left(\overline{H}_a^k(x, 0)\right)_k$ está uniformemente distribuido en \mathbb{I}^2 para casi todo x de \mathbb{I} , el par de Jager $(\theta_n(x), \theta_{n-1}(x))$ admite una función de distribución bidimensional correspondiendo a la superficie $\Psi^{-1}([0, z_1] \times [0, z_2])$. Esta función de distribución concentra homogéneamente la masa $(1 - a) a^r$ en cada segmento de extremos $(0, a^{r+1})$ y $(a^r, 1)$. Por tanto, existe una distribución singular: $F(\theta_n \leq t_1, \theta_{n-1} \leq t_2)$, dada por

$$\begin{cases} a^r t_1 \dots, & \text{si } \begin{cases} a^{r+1} \leq t_2 \leq a^r, \\ t_1 \leq \frac{t_2 - a^{r+1}}{(1-a)a^r} \end{cases} \\ a^{r+1} t_1 + (1-a) a^r (t_2 - a^{r+1}) \dots, & \text{si } \begin{cases} a^{r+1} \leq t_2 \leq a^r, \\ t_1 > \frac{t_2 - a^{r+1}}{(1-a)a^r} \end{cases} \end{cases}$$

Para estudiar los pares de Jager necesitamos algunas definiciones, que expresamos como límites (siempre que existan):

Definición 2.28 (Esperanza) $E(\theta_n) := \lim_k \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \theta_j$

Definición 2.29 $E(\theta_n^2) := \lim_k \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \theta_j^2$

Definición 2.30 $E(\theta_n \theta_{n-1}) := \lim_k \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \theta_j \theta_{j-1}$

Definición 2.31 (Varianza) $\sigma^2(\theta_n) := E(\theta_n^2) - E(\theta_n)^2$

Definición 2.32 (Coeficiente de correlación) $\rho(\theta_n, \theta_{n-1}) := \frac{E(\theta_n \theta_{n-1}) - E(\theta_{n-1})E(\theta_n)}{\sqrt{\sigma^2(\theta_n)}\sqrt{\sigma^2(\theta_{n-1})}} = \frac{E(\theta_n \theta_{n-1}) - E(\theta_n)^2}{\sigma^2(\theta_n)}$

Tras sencillas manipulaciones en $E(\theta_n \theta_{n-1})$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{+\infty} a^r (1-a) \int_0^1 x [a^{r+1} + (1-a) a^r x] dx &= \sum_{r=0}^{+\infty} a^{2r} \left[\frac{a(1-a)}{2} + \frac{(1-a)^2}{3} \right] \\ &= \frac{a+2}{6(1+a)}, \end{aligned}$$

que es lo que necesitamos para asegurar que

Teorema 2.33 $\rho(\theta_n, \theta_{n-1}) = \frac{1-a}{1+a}$.

El modo en que Ψ actúa, conduce a este resultado:

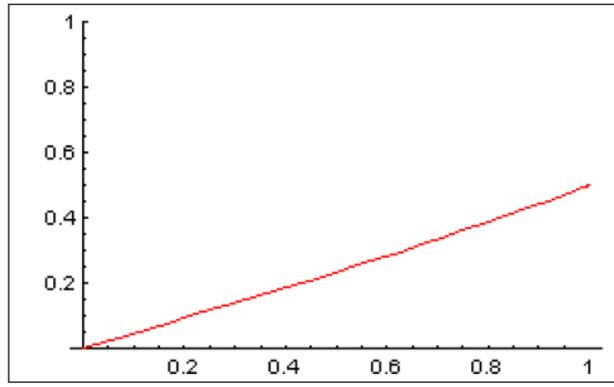
Teorema 2.34

$$\lim_n \frac{\text{Card}\{k; \theta_k < \theta_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n\}}{n} = a(1-a) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{2k}}{1 - (1-a)a^k}.$$

La serie del teorema anterior nos da un interesante resultado. Si definimos la función

$$f(a) := a(1-a) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{2k}}{1 - (1-a)a^k},$$

para todo a en \mathbb{I} , su gráfica, que aparece a continuación, muestra que la proporción de los valores k para los que $\theta_k > \theta_{k-1}$ es superior a $1/2$ en un conjunto de medida uno.



2.5. Teorema tipo Gauss-Kuzmin-Levy y resultados relacionados

Teorema 2.35 *El sistema dinámico $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, \lambda, H_a)$ es Bernoulli.*

Demstración. Notamos por $A := \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ al conjunto de los enteros no negativos, por $\mathcal{P}(A)$ a la σ -álgebra de las partes de A y la medida dada por $\mu(\{n\}) := (1-a)a^n$. Ahora, definimos la biyección del producto numerable de copias de $(A, \mathcal{P}(A), \mu)$ en \mathbb{I} , dada por

$$H((s_1, s_2, s_3, \dots)) := \sum_{k=0}^{+\infty} a^{1+\sum_{j=1}^{k+1} s_j} (1-a)^k.$$

Esta aplicación induce una σ -álgebra en \mathbb{I} (generada por los cilindros del desarrollo diádico generalizado), que es \mathcal{B} . Puesto que μ coincide con λ en los cilindros, implica que se trata de λ .

Introduciendo el operador

$$S((s_1, s_2, s_3, \dots)) := (s_2, s_3, s_4, \dots),$$

claramente S induce a H_a en \mathbb{I} . ■

Corolario 2.36 *Las variables $X_j := m_j - m_{j-1}$ son independientes y están idénticamente distribuidas, con probabilidad*

$$P(X_j = s) = (1-a)a^s.$$

Corolario 2.37 *Se tiene la relación*

$$P(m_j = r) = P(r)(1-a)^j a^r,$$

donde $P(r)$ es el número de veces para la que r se puede expresar como suma de j enteros positivos diferentes, teniendo en cuenta el orden.

Corolario 2.38 (Tipo Gauss-Kuzmin-Levy) *Sea m una probabilidad definida en el espacio $(\mathbb{I}, \mathcal{B})$. Si $m \ll \lambda$, entonces*

$$\lim_n m(\{x : H_a^n(x) \leq t\}) = t.$$

El resultado es cierto en el caso particular de que $dm = \frac{dx}{1+x}$ sea la medida de Gauss.

Demostración. Consideramos la derivada de Radon-Nikodym $h := \frac{dm}{d\lambda}$. Ahora, por el Teorema Ergódico:

$$\begin{aligned} \lim_n m(\{x; H_a^n(x) \leq t\}) &= \lim_n \int_0^1 (\chi_{[0,t]} \circ H_a^n)(x) dm \\ &= \lim_n \int_0^1 (\chi_{[0,t]} \circ H_a^n)(x) h(x) d\lambda \end{aligned}$$

por ser fuertemente mezclado,

$$= \lim_n \int_0^1 \chi_{[0,t]}(x) d\lambda \lim_n \int_0^1 h(x) d\lambda = t.$$

■

Definición 2.39 *Si x no tiene desarrollo finito y $\Delta i_0 i_1 \dots i_k$ es su k -ésimo cilindro, por $\varsigma_k := \varsigma_k(x)$ denotaremos el valor cuyo desarrollo finito está dado por los k índices dados en orden inverso; i.e., si*

$$x = a^{m_0} + (1-a)a^{m_1} + \dots$$

entonces

$$\varsigma_n = a^{m_k} + (1-a)a^{m_{k-1}} + \dots + (1-a)^k a^{m_0}.$$

Corolario 2.40 *Si $H_a^n(x)$ está uniformemente distribuido, entonces ς_n también lo está.*

Demostración. Consideramos los conjuntos

$$C := C_{s_1, s_2, \dots, s_n} = \{x : \text{sus primeros } X_k \text{ son } s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

y

$$C' := C_{s_n, \dots, s_2, s_1} = \{x : \text{sus primeros } X_k \text{ son } s_n, s_{n-1}, \dots, s_1\}.$$

Notemos que $\varsigma_n \in C \iff H_a^{k-n}(x) \in C'$; por tanto

$$\begin{aligned} &\lim_n \frac{\text{Card}\{\varsigma_n \in [0, t] : k = 0, 1, \dots, n\}}{n} \\ &= \lim_n \frac{\text{Card}\{H_a^{k-n}(x) \in C' : k = 0, 1, \dots, n\}}{n} \\ &= \lambda(C') = \lambda(C). \end{aligned}$$

Puesto que C y C' son cilindros y $[0, t]$ es unión de cilindros, concluimos que:

$$\lim_n \frac{\text{Card}\{\varsigma_k \in [0, t] : k = 0, 1, \dots, n\}}{n} = t,$$

y deducimos la distribución uniforme de la sucesión. ■

Corolario 2.41 (Tipo Levy) *Sea m una probabilidad en el espacio $(\mathbb{I}, \mathcal{B})$. Si $m \ll \lambda$, entonces*

$$\lim_n m(\{x : \varsigma_n \leq t\}) = t.$$

Demostración. Dado que $\lim_n m(\{x : H_a^n(x) \in J\}) = \lambda(J)$ para intervalos arbitrarios J , en los casos $J = C$ o $J = C'$,

$$\lim_n m(\{x : \varsigma_n \in C\}) = \lim_n m(\{x : H_a^n(x) \in J\}) = \lambda(J),$$

y del mismo modo que anteriormente, concluimos que

$$\lim_n m(\{x : \varsigma_n \leq t\}) = t.$$

■

Teorema 2.42 En un conjunto de λ -medida 1,

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{a}{1-a}.$$

Demostración. Es una consecuencia de la Ley Fuerte de los Grandes Números, puesto que $E(X_k) = \frac{a}{1-a}$. (Es una nueva demostración del teorema 2.9.) ■

Podemos añadir un término de error, aplicando la Ley del Logaritmo Iterado a las variables

$$Y_k := \frac{X_k - \frac{a}{1-a}}{\frac{\sqrt{a}}{1-a}},$$

es inmediato que:

Teorema 2.43 En un conjunto de λ -medida 1,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{a}{1-a} + O\left(\frac{\sqrt{\log \log n}}{\sqrt{n}}\right).$$

Del mismo modo, tenemos:

Teorema 2.44 Si (a_n) diverge positivamente y $a_n = o(\sqrt{n})$, entonces

$$P\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\frac{a}{1-a}}{\sqrt{n\frac{a}{(1-a)^2}}} \geq a_n\right) = e^{-\frac{a_n^2}{2}(1+o(1))}.$$

Teorema 2.45 Para las variables aleatorias X_k ,

$$\lim_n \lambda\left(a < \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\frac{a}{1-a}}{\sqrt{n\frac{a}{(1-a)^2}}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Demostración. Es una aplicación del Teorema Central del Límite con las condiciones de Lindeberg-Levy. ■

Teorema 2.46 Con la notación anterior, si

$$Z_n := \max_{1 \leq k \leq n} X_k \implies \lim_n P(Z_n \leq ny) = 1.$$

Demostración. Notemos que $Z_n \leq ny \iff X_k \leq ny, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, y por tanto

$$P(Z_n \leq ny) = \left(1 - a^{[ny]+1}\right)^n.$$

la sucesión de la derecha tiende a uno, por lo que también lo hace la de la izquierda. ■

Teorema 2.47 La sucesión

$$a_n := P\left(Z_n \leq \log_a \frac{1}{n}\right)$$

es densa en \mathbb{I} .

Demostración. Argumentando de modo similar a como se hizo anteriormente, y la densidad de $\{\log_a -n [\log_a n]\}$ en \mathbb{I} da el resultado. ■

Teorema 2.48

$$\begin{aligned} y < 1 &\implies \lim P\left(Z_n \leq \log_a \frac{1}{n^y}\right) = 0 \\ y > 1 &\implies \lim P\left(Z_n \leq \log_a \frac{1}{n^y}\right) = 1 \end{aligned}$$

Teorema 2.49 Son equivalentes las dos afirmaciones siguientes:

i. $P(X_n \geq r_n \text{ infinitamente a menudo}) = 1$

ii. la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{[r_n]+1}$ diverge.

Demostración. Consideramos las variables aleatorias

$$V_n := \begin{cases} 1\dots, & X_n \geq r_n \\ 0\dots, & X_n < r_n \end{cases}$$

Que se tenga $X_n \geq r_n$ en una infinidad de ocasiones es equivalente a que $\sum_n V_n$ diverja. Por el teorema de las tres series concluimos la demostración. ■

Corolario 2.50 *En un conjunto de λ -medida 1,*

$$\limsup_n -\frac{X_n \ln a + \ln n}{\ln(\ln n)} = 1.$$

Demostración. Si $r_n := -(\log_a n + \log_a \ln n)$, entonces

$$a^{[r_n]+1} \simeq \frac{1}{n \ln n},$$

y la serie diverge $\sum_{n \geq 1} a^{[r_n]+1}$. Por tanto, el conjunto

$$\{n \in \mathbb{Z}^+ : X_n \geq -(\log_a n + \log_a \ln n)\}$$

es infinito, y tenemos que

$$\limsup_n -\frac{X_n \ln a + \ln n}{\ln(\ln n)} \geq 1.$$

Realmente, se trata de una igualdad. Supongamos que

$$\limsup_n -\frac{X_n \ln a + \ln n}{\ln(\ln n)} \geq 1 + \varepsilon$$

para algún $\varepsilon > 0$. En este caso (y usando argumentos similares a los anteriores) la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}}$ diverge, lo que entra en contradicción con el teorema anterior. ■

Proposición 2.51 *En un conjunto de λ -medida 1*

$$\liminf_n -\frac{X_n \ln a + \ln n}{\ln(\ln n)} = -\infty.$$

Demostración. Es una consecuencia de que en un conjunto de λ -medida 1 $X_n = 1$ una infinidad de veces. ■

Capítulo 3

Funciones singulares y funciones de Takagi generalizadas

3.1. Introducción

La historia de las funciones singulares (ésto es, funciones monótonas crecientes con derivada nula en un conjunto de medida uno) tiene sus orígenes a finales del siglo XVIII (véase [32], [79] o [151]). Adquirieron una nueva dimensión con la publicación en 1904 del célebre libro de Lebesgue [107]. Ese año, Minkowski (véase [118]), con el fin de enumerar los números cuadráticos, dio un nuevo ejemplo de este tipo de funciones. (Además, es cuando establece una biyección entre los racionales y los números de \mathbb{I} cuya representación diádica es finita, vía la conocida como sucesión de Farey.) En [46], se muestra la relación que establece esta función entre la representación del sistema de Minkowski y la fracción continua simple.

En este Capítulo se describe una familia de funciones que relaciona el sistema de representación diádico y el sistema de representación diádico generalizado. Se calcularán las dimensiones de Hausdorff de algunos conjuntos relacionados con estas funciones. También se estudiarán varios tipos de funciones continuas que no son monótonas en ningún intervalo satisfaciendo que son:

- a) sin derivada en ningún punto;
- b) con derivada nula en un conjunto de medida uno.

Finalmente se estudian las funciones de agregación lineal y se da para ellas una expresión explícita, prestando especial atención a las k -negaciones.

3.2. La familia $\{S_a : a \in \mathbb{I}\}$

La familia S_a , con la que vamos a trabajar en esta sección, es una de las más conocidas y ha sido estudiada desde una amplia variedad de puntos de vista (por ejemplo, el geométrico, el aritmético, el probabilístico, o el de las ecuaciones funcionales), tal y como puede verse en [24], [30], [78], [146, pgs.48-49], [150], [157] o [165]. (Una curiosa aplicación a la deformación de materiales plásticos puede encontrarse en [23].) Otras referencias sobre estas funciones pueden encontrarse en [90].

En [150], el autor describe unas funciones h_a dadas como límite de poligonales. Para definir las, es conveniente introducir el operador π_a sobre un segmento \overline{AB} con extremos de coordenadas $A = (x, y)$, $B = (x + \Delta x, y + \Delta y)$. Si tomamos el punto $C = (x + \frac{\Delta x}{2}, y + a\Delta y)$, entonces $\pi_a(\overline{AB})$ es la poligonal \overline{ACB} dada por la unión de los segmentos \overline{AC} y \overline{CB} .

Definiremos las siguientes funciones: la gráfica de f_0 es el segmento que une $(0, 0)$ con $(1, 1)$; la de f_1 se obtiene aplicando π_a a la gráfica anterior. La de f_2 se obtiene tras la acción de π_a en los dos segmentos obtenidos para f_1 . Obtendremos la gráfica de f_3 aplicando π_a sobre los 2^2 segmentos que aparecen en f_2 ; y, repitiendo el proceso, podemos definir

$$h_a(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Estudiaremos h_a desde un punto de vista diferente al de los trabajos citados anteriormente. El estudio seguirá de una relación entre el sistema diádico y el diádico generalizado.

Definición 3.1 Para cada $x \in \mathbb{I}$, podemos escribir

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m_n}}.$$

Consideramos $a \in]0, 1[$, y definimos

$$S_a(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a^{m_n-n} (1-a)^n.$$

Proposición 3.2 La función S_a está bien definida para todo $a \in]0, 1[$.

Demostración. Consideremos el caso en que x tiene dos desarrollos diferentes:

a. $x = \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^{m_n}} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ con $s > m_k + 1$.

b. $x = \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^{m_n}} + \frac{1}{2^{s-1}}$.

a.

$$\begin{aligned} S_a(x) &= \sum_{n=0}^k a^{m_n-n} (1-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a^{s-1+n-k-n} (1-a)^{k+n} \\ &= \sum_{n=0}^k a^{m_n-n} (1-a)^n + a^{s-1-k} \sum_{n=1}^{\infty} (1-a)^{k+n} \\ &= \sum_{n=0}^k a^{m_n-n} (1-a)^n + a^{s-2-k} (1-a)^{k+1}. \end{aligned}$$

b.

$$S_a(x) = \sum_{n=0}^k a^{m_n-n} (1-a)^n + a^{s-2-k} (1-a)^{k+1}.$$

Como puede verse, los dos valores coinciden y, en consecuencia, la función está bien definida. ■

Proposición 3.3 La función S_a es estrictamente creciente, para todo $a \in]0, 1[$.

Demostración. Consideramos $x > y$. Entonces

$$x = \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^{m_n}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_n}}; \quad y = \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^{m_n}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m'_n}}$$

con $m'_{k+1} > m_{k+1}$. Los valores de la función en ellos son:

$$\begin{aligned} S_a(x) &= \sum_{n=0}^k a^{m_n-n} (1-a)^n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a^{m_n-n} (1-a)^n \\ S_a(y) &= \sum_{n=0}^k a^{m_n-n} (1-a)^n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a^{m'_n-n} (1-a)^n; \end{aligned}$$

lo que junto a las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+1}^{\infty} a^{m'_n-n} (1-a)^n &\leq a^{m'_{k+1}-(k+1)} \sum_{n=k+1}^{\infty} (1-a)^n \\ &= a^{m'_{k+1}-1-(k+1)} (1-a)^{k+1} \\ &\leq a^{m_{k+1}-1-(k+1)} (1-a)^{k+1} \\ &\Rightarrow S_a(x) > S_a(y), \end{aligned}$$

nos dan el resultado deseado. ■

Proposición 3.4 *La función S_a es continua, para todo $a \in]0, 1[$.*

Demostración. Nuevamente consideramos varios casos para facilitar el seguimiento de la demostración:

a. Si x no admite desarrollo finito, por tanto $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m_n}}$. Entonces, para una sucesión $\{x_k\}$ convergente a x , tenemos que (para $x_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m'_{n,k}}}$, y por simplicidad omitimos k como subíndice en la escritura que sigue):

$$\forall j, \exists k_0 : k > k_0 \implies m_n = m'_n, \forall n = 0, \dots, j.$$

Los valores de la función son:

$$S_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{m_n-n}(1-a)^n \quad \text{y} \quad S_a(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{m'_n-n}(1-a)^n;$$

y, por tanto, la diferencia

$$|S_a(x) - S_a(x_k)| \leq 2a^{m_{i+1}-i-1}(1-a)^{i+1} \frac{1}{a} \leq 2b^{m_{i+1}} \frac{1}{a}$$

(donde $b = \max\{a, 1-a\}$) tiende a cero, siendo $f(x)$ el límite de $f(x_k)$.

b. Si x admite un desarrollo finito, $x = \sum_{n=0}^j \frac{1}{2^{m_n}}$, consideramos dos tipos de sucesiones convergentes a este valor:

b.i. Por una parte, en una sucesión $\{x_k\}$ con $x_n \geq x$, y dada por

$$x_k = \sum_{n=0}^j \frac{1}{2^{m_n}} + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m'_n}},$$

hacemos $m'_{j+1} \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} |S_a(x) - S_a(x_k)| &= \sum_{n=j+1}^{\infty} a^{m'_n-n}(1-a)^n \\ &\leq a^{m'_{j+1}-j-1}(1-a)^{j+1} \frac{1}{a} \leq b^{m'_{j+1}} \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

lo cual tiende a cero cuando $k \rightarrow +\infty$.

b.ii. Por otra parte, $x_k < x$:

$$x_k = \sum_{n=0}^{j-1} \frac{1}{2^{m_n}} + \sum_{n=j}^{s_k} \frac{1}{2^{m_j+n-j+1}} + \sum_{n=s_k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m'_n}}$$

con $s_k \rightarrow +\infty$ si k lo hace. Entonces,

$$S_a(x) = \sum_{n=0}^{j-1} a^{m_n-n}(1-a)^n + a^{m_j-j}(1-a)^j$$

y

$$S_a(x_k) = \sum_{n=0}^{j-1} a^{m_n-n}(1-a)^n + \sum_{n=j}^{s_k} a^{m_j-j+1}(1-a)^n + \sum_{n=s_k+1}^{\infty} a^{m'_n-n}(1-a)^n.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} |S_a(x) - S_a(x_k)| &\leq a^{m_j-j}(1-a)^j(1-a - a(1-a)^1 - a(1-a)^2 - \dots \\ &\quad \dots - a(1-a)^{s_k-j}) + b^{m_{s_k}-1} \\ &\leq b^{m_j}(1-a)^{s_k-j+1} + b^{m_{s_k}-1} \end{aligned}$$

y el límite es, nuevamente, cero.

Uniendo estos resultados, para cualquier sucesión (x_k) convergente a x tenemos $f(x_k) \rightarrow f(x)$, obteniendo la continuidad de f . ■

Proposición 3.5 *El desarrollo en base de Schauder de S_a tiene los coeficientes*

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1 \text{ y } \alpha_{k,j} = a^m (1-a)^n \left(a - \frac{1}{2} \right),$$

donde n es el número de sumandos en el desarrollo binario de j , y $m = k - n$.

Demostración. a. Para n par:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^k} &= \sum_{j=0}^t \frac{1}{2^{m_j}}; \\ \frac{n+1}{2^k} &= \sum_{j=0}^t \frac{1}{2^{m_j}} + \frac{1}{2^k}; \\ \frac{2n+1}{2^{k+1}} &= \sum_{j=0}^t \frac{1}{2^{m_j}} + \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{2^k}\right) &= \sum_{j=0}^t a^{m_j-j} (1-a)^j; \\ f\left(\frac{n+1}{2^k}\right) &= \sum_{j=0}^t a^{m_j-j} (1-a)^j + a^{k-t-1} (1-a)^{t+1}; \\ f\left(\frac{2n+1}{2^{k+1}}\right) &= \sum_{j=0}^t a^{m_j-j} (1-a)^j + a^{k-t} (1-a)^{t+1}. \end{aligned}$$

Entonces, los coeficientes son:

$$\begin{aligned} \alpha_{k,n} &= f\left(\frac{2n+1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{n}{2^k}\right) + f\left(\frac{n+1}{2^k}\right) \right) \\ &= a^{k-t} (1-a)^{t+1} - \frac{1}{2} a^{k-t-1} (1-a)^{t+1} \\ &= \left(a - \frac{1}{2} \right) a^{k-t-1} (1-a)^{t+1} \end{aligned}$$

Si $\frac{n}{2^k} = \sum_{j=0}^t \frac{1}{2^{m_j}}$, tenemos $n = \sum_{j=0}^t 2^{k-m_j}$; i.e., el desarrollo binario de n tiene $t+1$ sumandos.

b. Supuesto n es impar. Tenemos,

$$\frac{n}{2^k} = \sum_{j=0}^p \frac{1}{2^{m_j}} + \frac{1}{2^{m_{p+1}}} + \text{términos consecutivos} + \frac{1}{2^k}$$

con $m_{p+1} > m_p + 1$, en este caso, $m_s = k$;

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2^k} &= \sum_{j=0}^p \frac{1}{2^{m_j}} + \frac{1}{2^{m_{p+1}-1}}; \\ \frac{2n+1}{2^k} &= \sum_{j=0}^p \frac{1}{2^{m_j}} + \frac{1}{2^{m_{p+1}}} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}, \end{aligned}$$

su imagen es

$$f\left(\frac{n}{2^k}\right) = \sum_{j=0}^p a^{m_j-j} (1-a)^j + a^{m_{p+1}-(p+1)} (1-a)^{p+1} + \cdots + a^{k-s} (1-a)^s;$$

y teniendo en cuenta que al aumentar de uno en uno la diferencia siempre es $k - s$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^p a^{m_j-j} (1-a)^j + a^{k-s} \left((1-a)^{p+1} + \dots + (1-a)^s \right) \\ &= \sum_{j=0}^p a^{m_j-j} (1-a)^j + a^{k-s} (1-a)^{p+1} \frac{1 - (1-a)^{s+1}}{a}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n+1}{2^k}\right) &= \sum_{j=0}^p a^{m_j-j} (1-a)^j + a^{m_{p+1}-(p+1)} (1-a)^{p+1} \\ f\left(\frac{2n+1}{2^k}\right) &= \sum_{j=0}^p a^{m_j-j} (1-a)^j + a^{k-s} (1-a)^{p+1} \frac{1 - (1-a)^{s-p+1}}{a}; \end{aligned}$$

y tenemos los coeficientes

$$\begin{aligned} \alpha_{k,n} &= f\left(\frac{2n+1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{n}{2^k}\right) + f\left(\frac{n+1}{2^k}\right) \right) \\ &= a^{k-s} (1-a)^{p+1} \left(1 - (1-a)^{s-p+1} - \frac{1}{2} \left(1 - (1-a)^{s-p} + 1 \right) \right) \\ &= a^{k-s} (1-a)^{p+1} \left(-(1-a)^{s-p+1} - \frac{(1-a)^{s-p}}{2} \right) \\ &= a^{k-s} (1-a)^{p+1} (1-a)^{s-p} \left(-(1-a) + \frac{1}{2} \right) \\ &= a^{k-s-1} (1-a)^{s+1} (1-a)^{s-p} \left(a - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

■

Proposición 3.6 La función S_a es singular para todo $a \in]0, 1[\setminus \{1/2\}$.

Demostración. Cuando $x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m_j}}$ es un número normal en base dos, podemos elegir m_k tal que $m_{k+1} > m_k + 1$

(puede encontrarse una infinidad de veces, y como consecuencia, $m_k \rightarrow +\infty$). Definimos las sucesiones $x_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^{m_j}}$

y $y_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^{m_j}} + \frac{1}{2^{m_{j+1}}}$. Sea $b = \max\left\{\frac{a}{1-a}, \frac{1-a}{a}\right\}$. entonces, $x_k < x < y_k$ y

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k} = \frac{a^{m_{k+1}-k-1} (1-a)^{k+1}}{\frac{1}{2^{m_{k+1}}}} \\ &= 2^{m_{k+1}} a^{m_k-k} (1-a)^{k+1} \leq 2^{m_{k+1}} a^{\frac{m_k}{2}} (1-a)^{\frac{m_k}{2}} b^{o(m_k)} \\ &= 2 \left(4a(1-a) \right)^{\frac{m_k}{2}} b^{o(m_k)} = 2 \left(4a(1-a) b^{o(1)} \right)^{\frac{m_k}{2}} \leq 2c^{\frac{m_k}{2}} \end{aligned}$$

Podemos tomar $c < 1$ cuando k es suficientemente grande. Esto garantiza que el último término tiende a cero cuando $k \rightarrow +\infty$. Como consecuencia, si la derivada existe, entonces ha de ser nula.

Como la función es continua, entonces es diferenciable en un conjunto de medida uno; por lo que tiene derivada con valor cero en un conjunto de medida uno. ■

3.2.1. Ecuaciones funcionales

Proposición 3.7 La función S_a es la única acotada satisfaciendo el sistema de ecuaciones funcionales

$$\begin{cases} S_a\left(\frac{x}{2}\right) = a S_a(x) \\ S_a\left(\frac{1+x}{2}\right) = a + (1-a) S_a(x). \end{cases}$$

Demostración. Si observamos los desarrollos de x y $\frac{x}{2}$:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m_n}}; \quad \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m_n+1}}.$$

Por lo que

$$S_a\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{m_n+1-n}(1-a)^n = aS_a(x).$$

Y, del mismo modo, para la segunda ecuación.

La unicidad sigue a partir del Teorema del Punto Fijo de Banach: definimos para ello el funcional

$$F : (\mathcal{B}(\mathbb{I}), \|\circ\|) \rightarrow (\mathcal{B}(\mathbb{I}), \|\circ\|)$$

dado por

$$F(g)(y) = \begin{cases} ag(2y), \dots & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ a + (1-a)g(2y-1), \dots & \text{si } \frac{1}{2} \leq y \leq 1; \end{cases}$$

y el resultado queda completamente probado. ■

Corolario 3.8 Las funciones S_a y h_a son, realmente, la misma función.

Comentario 3.9 Una segunda demostración de la unicidad de S_a , recordando su origen geométrico, se puede dar usando el espacio $\mathcal{K}(\mathbb{I}^2)$ de los conjuntos compactos en el cuadrado unidad dotado con la distancia de Hausdorff. Procediendo del siguiente modo:

$$\begin{aligned} C_1 & : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; \quad C_1((x, y)) := \left(\frac{x}{2}, ay\right) \\ C_2 & : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; \quad C_2((x, y)) := \left(\frac{x}{2}, a + (1-a)y\right); \end{aligned}$$

que da una nueva contracción:

$$C : \mathcal{K}(\mathbb{I}^2) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{I}^2); \quad C(T) := C_1(T) \cup C_2(T).$$

La gráfica de S_a es un compacto de \mathbb{I}^2 , que permanece fija por C . Para cualquier otra función continua satisfaciendo las ecuaciones anteriores, su gráfica sería un punto fijo para C . Puesto que la gráfica de una función continua es un compacto tendríamos un segundo punto fijo. Esto sería una contradicción con la unicidad del punto fijo, lo que garantiza la unicidad de S_a .

Proposición 3.10 La función S_a no admite derivada no nula si $a \in]0, 1[\setminus \{1/2\}$.

Demostración. La demostración se apoya en la idea anterior y en que el punto fijo es el límite de $C^n(T)$ para cualquier T . En este caso, tomamos como T el propio cuadrado unidad \mathbb{I}^2 . Ocurre que C fija el valor de $S_a\left(\frac{1}{2}\right)$; C^2 hace lo mismo con $S_a\left(\frac{1}{2^2}\right)$ y $S_a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)$; C^3 lo hace con $S_a\left(\frac{1}{2^3}\right)$, $S_a\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right)$, $S_a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}\right)$ y $S_a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)$; y así, sucesivamente, en las distintas iteraciones de C .

En cada iteración encontramos una división en el eje X y otra en el Y . Notaremos por u_n y v_n los extremos del intervalo que incluye a x en la n -ésima iteración de C . Mientras, su correspondiente intervalo en Y es $[S_a(u_n), S_a(v_n)]$, que incluye a $S_a(x)$. Si existe $S'_a(x) = \alpha \neq 0$, tendremos que para valores grandes de n :

$$\frac{S(v_n) - S(u_n)}{v_n - u_n} = \frac{a^k(1-a)^{n-k}}{\frac{1}{2^n}} \simeq \alpha$$

y según donde se encuentre el intervalo $n+1$,

$$\frac{S(v_{n+1}) - S(u_{n+1})}{v_{n+1} - u_{n+1}} = \begin{cases} \frac{a^{k+1}(1-a)^{n-k}}{\frac{1}{2^{n+1}}} \simeq 2a\alpha \\ \frac{a^k(1-a)^{n+1-k}}{\frac{1}{2^{n+1}}} \simeq 2(1-a)\alpha \end{cases}$$

Pero esto sólo puede ocurrir cuando $a = 1/2$. ■

3.2.2. Convoluciones y una demostración alternativa de la singularidad de S_a

Consideramos las funciones de distribución:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ a, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2^n} \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2^n} \leq x \end{cases}$$

(asociada a la probabilidad $\bar{P}_n(x) = \begin{cases} a, & \text{si } x = 0 \\ 1 - a, & \text{si } x = \frac{1}{2^n} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$) y las obtenidas como convoluciones $h_n(x) = F_1 * \cdots * F_n(x)$.

El estudio de S_a como un punto fijo del espacio de los compactos de \mathbb{I}^2 , facilita aplicarlo de diferentes modos. Anteriormente, hemos considerado \mathbb{I}^2 como conjunto inicial. Si el punto de partida hubiese sido la diagonal, habríamos obtenido la definición dada por Salem, que era descrita con la ayuda del operador π_a .

Si el punto inicial es el segmento $(0, 1)(1, 1)$, que notaremos por h_0 ; $h_1 = C(h_0)$; $h_2 = C(h_1), \dots$ y el límite sería, entonces, la gráfica de S_a , en todos los casos. Si probamos que $C(h_{n-1}) = h_n$, el siguiente resultado será cierto:

Proposición 3.11 *La función S_a es una convolución infinita de funciones escalonadas.*

Demostración. Procedemos por inducción. Para los primeros valores de n , es cierto por observación directa.

Suponemos que $C(h_{n-2}) = h_{n-1}$. (Llamamos la atención en el hecho de que esta definición a través de C y la obtenida vía convoluciones, no son idénticas, puesto que estas son funciones y vía C están duplicadas las imágenes para $\frac{m}{2^n}$ con $m = 1, \dots, 2^n - 1$).

Escribimos $m = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \cdots + a_{n-1} 2^{n-1}$. El número de unos en los dígitos a_0, a_1, \dots, a_{n-1} será notado por u ; mientras c lo hará para el número de ceros.

P_n notará la probabilidad asociada con $F_1 * \cdots * F_n$. En primer lugar, demostraremos (por inducción) que:

$$P_n\left(\frac{m}{2^n}\right) = a^c (1 - a)^u.$$

Para $n = 1$ es cierta; y lo suponemos válido para $n - 1$.

Para m par, $m = 2k$ con $k = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \cdots + a_{n-1} 2^{n-1}$ y $2k = 0 + a_0 2^1 + a_1 2^2 + \cdots + a_{n-1} 2^n$. Por tanto,

$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{m}{2^n}\right) &= P_n\left(\frac{2k}{2^n}\right) = P_{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) \bar{P}_n(0) \\ &= P_{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = a^c (1 - a)^u, \end{aligned}$$

donde hemos usado la hipótesis de inducción.

Si m es impar, $m = 2k + 1$; $k = a_0 + a_1 2^1 + \cdots + a_{n-1} 2^{n-1}$ y $2k + 1 = 1 + a_0 2^1 + a_1 2^2 + \cdots + a_{n-1} 2^n$. Entonces,

$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{m}{2^n}\right) &= P_n\left(\frac{2k + 1}{2^n}\right) = P_{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) \bar{P}_n\left(\frac{1}{2^n}\right) \\ &= (1 - a) P_{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = a^c (1 - a)^u, \end{aligned}$$

nuevamente, por la hipótesis de inducción.

Cuando $F_n\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^n}\right) = a$, la demostración seguirá por inducción y aplicando el razonamiento previo.

Por otra parte, sea $0 \leq m \leq 2^{n-1}$; entonces

$$F_n\left(\frac{m}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^m P_n\left(\frac{k}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^m a P_n\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = a F_{n-1}\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right).$$

(Tenemos en cuenta, para la segunda igualdad, que cuando pasamos de n a $n - 1$ añadimos un cero.)

También tenemos:

$$\begin{aligned} F_n\left(\frac{m + 2^{n-1}}{2^n}\right) &= \sum_{k=0}^m P_n\left(\frac{k + 2^{n-1}}{2^n}\right) + F_n\left(\frac{2^{n-1} - 1}{2^n}\right) \\ &= a + \sum_{k=0}^m (1 - a) P_n\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = a + (1 - a) F_{n-1}\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

(puesto que, en la segunda igualdad, pasamos de $k + 2^{n-1}$ con n dígitos a k en $n - 1$ dígitos, disminuye un uno).

Para el resto de valores es constante; y, con ello, se concluye el resultado $C(h_{n-1}) = h_n$. ■

Corolario 3.12 Si $a \in]0, 1[\setminus \{1/2\}$, la función característica de S_a viene dada por

$$u \longrightarrow \prod_{n=1}^{+\infty} (a + (1-a)e^{i\frac{u}{2^n}})$$

Demostración. Es una consecuencia de que $H = F * G$ implica $h = fg$ (las letras minúsculas se utilizan para las funciones características correspondientes funciones) y la convergencia débil: $F_1 * \dots * F_n \Rightarrow S_a$ en las distribuciones implica $h_n(x) \rightarrow s_a(x)$ la puntual de las características (por el teorema 0.19). ■

Comentario 3.13 Con la ayuda del último teorema podemos dar una nueva demostración de la singularidad de S_a utilizando únicamente técnicas probabilísticas. Y es que la convergencia del producto infinito puede ser deducida aplicando únicamente técnicas probabilísticas. En efecto, puede ser deducida del teorema 0.20, junto a las igualdades:

$$\begin{aligned} E(F_n) &= \frac{1-a}{2^n}; \\ M_2(F_n) &= \frac{(1-a)^2}{2^n}; \\ \sigma^2(F_n) &= \frac{(1-a)^2}{2^n} - \frac{(1-a)^2}{2^{2n}}. \end{aligned}$$

La igualdad anterior y el teorema 0.21 implican que S_a es atómica, singular, o bien absolutamente continua. Por el teorema de Levy deducimos la continuidad, puesto que los saltos son de longitud $1/2^n$. Finalmente, deducimos que no es absolutamente continua: $s_a(u)$ no converge a cero cuando $u \rightarrow +\infty$. Un modo de hacerlo es utilizar la desigualdad dada en [150, pg.430]:

$$s_a(2\pi 2^n) > r^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right) \dots$$

donde $r = |1 - 2a|$, y la función debe ser singular.

3.3. Resultados métricos relacionados con S_a

Se puede hacer un estudio similar al realizado en el capítulo anterior. En esta ocasión, utilizando la medida de Stieltjes dS_a asociada con la función S_a . Los detalles de las demostraciones siguen de modo parecido a como se hizo anteriormente. Únicamente escribimos aquellos resultados que nos parecen de mayor interés.

3.3.1. El sistema dinámico T

Consideremos la función "tienda de campaña" T , dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Teorema 3.14 La función T preserva dS_a y es ergódica.

Definición 3.15 Para cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}$ es el número x truncado en el lugar n -ésimo.

Extensión natural y pares de Jager

Definición 3.16 Para un número x , definimos el cociente (que notaremos θ_n si no existe confusión):

$$\theta_n^*(x) := |x - C_n|2^{-n}.$$

El valor de θ_n^* mide la proximidad de x por C_n , y surge de forma natural la pregunta de como esta distribuida la sucesión $\{\theta_n^*\}$. De acuerdo con la definición de θ_n^* y la expresión anterior, tenemos $\theta_n^* = T^n$.

Teorema 3.17 Hay un conjunto de dS_a -medida 1 en \mathbb{I} donde θ_n^* tiene dS_a como a.d.f.

Teorema 3.18 Para el sistema dinámico $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, dS_a, T)$, su extensión natural es $(\mathbb{I}^2, \mathcal{B}, dS_a^2, \bar{T})$, donde:

$$\bar{T}(x, y) := \left(T(x), \frac{a_1(x)}{2} + \frac{y}{2} \right).$$

Proposición 3.19 El sistema dinámico para \bar{T} es ergódico y fuertemente mezclado.

Corolario 3.20 Si C es un conjunto con frontera de dS_a^2 -medida cero, entonces existe un conjunto de dS_a^2 -medida 1 en el que ocurre que

$$\frac{\sum_{k=1}^n \chi_C(\bar{T}^k(x, y))}{n} \longrightarrow dS_a^2(C).$$

Teorema 3.21 Encontramos un conjunto de dS_a -medida 1 en el que

$$\rho(\theta_n, \theta_{n-1}) = \frac{1-a}{2-a}.$$

Teorema 3.22 Hay un conjunto de dS_a -medida 1 en el que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k; \theta_k > \theta_{k-1}, k = 1 \dots n\}}{n} = \frac{(1-a)^2}{2} \frac{6-2a}{3}.$$

Independencia de ciertas variables aleatorias

Teorema 3.23 El sistema dinámico $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, T, dS_a)$ es un sistema de Bernoulli.

Si escribimos $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$, tenemos los siguientes resultados:

Corolario 3.24 Las variables aleatorias $a_j(x)$ son independientes e idénticamente distribuidas con

$$P(a_j(x) = 0) = a.$$

Corolario 3.25 (Tipo Gauss-Kuzmin-Levy) Sea m una probabilidad en $(\mathbb{I}, \mathcal{B})$ con $m \ll dS_a$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x : T^n(x) \leq t\}) = S_a(t).$$

Teorema 3.26 En un conjunto de dS_a -medida 1, tenemos que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j = 1 - a + O\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\ln \ln n}}\right).$$

Teorema 3.27 Las variables aleatorias a_j cumplen que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} dS_a \left(b < \frac{\sum_{j=1}^n a_j - n(1-a)}{\sqrt{na(1-a)}} < c \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^c e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

3.3.2. El sistema dinámico H

Definición 3.28 En el intervalo $]0, 1]$ definimos la función:

$$H(x) := \begin{cases} 2x - 1, & \dots & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 2^2x - 1, & \dots & \frac{1}{2^2} < x \leq \frac{1}{2} \\ 2^3x - 1, & \dots & \frac{1}{2^3} < x \leq \frac{1}{2^2} \\ \vdots & & \vdots \end{cases}$$

Extensión natural y pares de Jager

Definición 3.29 Para $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$, a la serie truncada la llamamos $B_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}$; y para un número x , llamamos $\theta_n(x)$ (normalmente se omitirá la x) al cociente:

$$\theta_n = |x - B_n|2^{\alpha_n}.$$

θ_n es un valor que nos indica en qué medida es buena la aproximación de x por B_n , siempre está comprendido entre cero y uno. Ésto nos lleva a preguntarnos por cómo está distribuida la sucesión (θ_n) . De acuerdo con la definición de θ_n y la expresión anterior, tenemos la identidad $\theta_n = T^n$, donde T es el sistema dinámico de la tienda de campaña.

Teorema 3.30 θ_n tiene dS_a como a.d.f. en \mathbb{I} en un conjunto de medida uno (para dS_a)

Teorema 3.31 Para $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, dS_a, H)$, la extensión natural es $(\mathbb{I}^2, \mathcal{B}, dS_a^2, \bar{T})$ donde:

$$\bar{T}(x, y) = (T(x), a_1(x)/2 + y/2).$$

Proposición 3.32 La aplicación \bar{T} es ergódica y mezclada.

Corolario 3.33 (Tipo Jager) En un conjunto de dS_a -medida uno en \mathbb{I} , $\bar{H}^k(x, 0)$ tiene a dS_a^2 como a.d.f.

Teorema 3.34 Para cualquier entero positivo n ,

$$\rho(\theta_n, \theta_{n-1}) = 1/2.$$

Del mismo modo, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.35 En el contexto anterior,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : \theta_{k-1} > \theta_k, k = 1, \dots, n\}}{n} = (1 - a).$$

Independencia de ciertas variables aleatorias (teorema tipo Gauss-Kuzmin-Levy y otros resultados)

Teorema 3.36 El sistema $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, T, dS_a)$ es de Bernoulli.

Corolario 3.37 Las variables aleatorias $a_j(x)$ son independientes e idénticamente distribuidas con $P(a_j(x) = 0) = a$.

Corolario 3.38 (Tipo Gauss-Kuzmin-Levy) Sea m una probabilidad en $(\mathbb{I}, \mathcal{B})$ con $m \ll dS_a$; en estas condiciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x : T^n(x) \leq t\}) = dS_a(t).$$

Teorema 3.39 En un conjunto de medida uno es cierta la igualdad

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n} = 1 - a + O\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\ln \ln n}}\right).$$

Teorema 3.40 Para las variables aleatorias a_j tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} dS_a \left(b < \frac{\sum_{j=1}^n a_j - n(1-a)}{\sqrt{na(1-a)}} < c \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^c e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

3.4. Aplicación a dimensiones de Hausdorff

Teorema 3.41 *Notemos por N al conjunto de los números normales en base dos. Si $a \neq 1/2$, entonces $S_a(N)$ es un conjunto de medida de Lebesgue cero.*

Demostración. Para $x \in N$, tenemos $m_n = 2n + o(n)$ y, consecuentemente, $\frac{m_n}{n} \rightarrow 2$. Aplicando la función S_a :

$$S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{m_n - n} (1-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{m'_n} (1-a)^n,$$

donde $\frac{m'_n}{n} \rightarrow 1$. Pero, para el sistema diádico generalizado, este límite debe ser igual a $\frac{a}{1-a}$; y, por tanto, $a = 1/2$.

Si $a \neq \frac{1}{2}$, el conjunto N (de λ -medida 1) se aplica mediante S_a en un conjunto de medida cero para la medida de Lebesgue (puesto que $\frac{a}{1-a} \neq 1$ y

$$\lambda \left(\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m_n}} : \frac{m'_n}{n} \rightarrow \frac{a}{1-a} \right\} \right) = 1).$$

■

Lema 3.42 *Si $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{m_n} (1-a)^n$, entonces su imagen inversa bajo S_a^{-1} ,*

$$S_a^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m'_n}},$$

verifica que, en su desarrollo binario, entre los k primeros dígitos, el número de ceros es, aproximadamente, ak ; y el de unos es, aproximadamente, $(1-a)k$, cuando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m_n}{n} = \frac{a}{1-a}.$$

Demostración. Tenemos

$$\frac{m'_n}{n} = \frac{m_n + n}{n} \rightarrow \frac{a}{1-a} + 1 = \frac{1}{1-a}$$

(donde m'_n es el índice correspondiente a los n primeros unos de $S_a^{-1}(x)$). Para k , con $'_n \leq k \leq m'_{n+1}$, tenemos que

$$\frac{n}{m_{n+1}} \leq \frac{n}{k} \leq \frac{n}{m_n},$$

lo que nos da el resultado. ■

Corolario 3.43 *Para λ la medida de Lebesgue en \mathbb{I} tenemos que*

$$\lambda \left[S_a \left(\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} : \frac{\sum_{k=0}^n a_k}{n} \rightarrow 1-a \right\} \right) \right] = 1.$$

Demostración. El conjunto

$$\left\{ x = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{m_n} (1-a)^n : \frac{m_n}{n} \rightarrow \frac{a}{1-a} \right\}$$

es de λ -medida 1; y, bajo la acción de S_a^{-1} , está incluido en el conjunto con una proporción de unos igual a $1-a$. ■

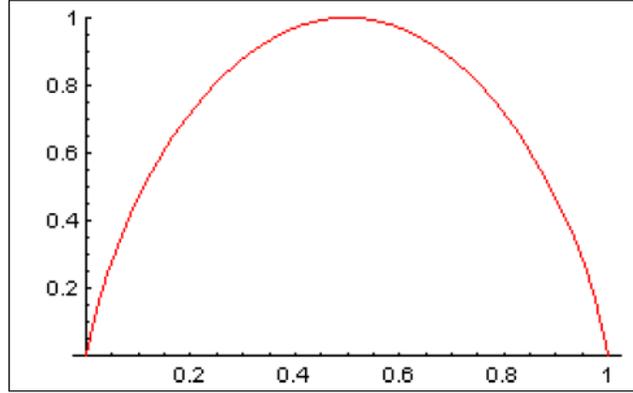
La medida de Stieltjes asociada con S_a , será notada como dS_a ; tiene la masa concentrada en un conjunto λ -nulo. Además, tenemos el siguiente resultado de Besicovitch (véase [25]):

Teorema 3.44 *La medida dS_a concentra su masa en un conjunto de dimensión de Hausdorff igual a*

$$\log_2 \left[\frac{1}{a^a} \frac{1}{(1-a)^{1-a}} \right].$$

Demostración. Véase [62, lemma 10.1]. ■

La dimensión tiende a 0 en 0 y 1; y a 1, si $a \rightarrow 1/2$ (como era de esperar, ya que $dS_{1/2}$ es la medida de Lebesgue).



Este resultado de Besicovitch, junto al teorema de Fubini sobre derivación término a término de series de funciones monótonas, nos permite obtener una función singular que concentra su masa en un conjunto de medida cero y dimensión fractal igual a uno:

Corolario 3.45 *La función*

$$f(x) := \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} S_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}(x)$$

es singular y concentra la masa en un conjunto de λ -medida cero con dimensión fractal igual a uno.

Teorema 3.46 *La dimensión fractal de $S_a(N)$ es igual a $\frac{\ln \frac{1}{4}}{\ln a(1-a)}$.*

Demostración. Lo hacemos con la ayuda de S_a^{-1} : para $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{m_n} (1-a)^n$ consideramos los intervalos

$$\left[\sum_{k=0}^n a^{m_k} (1-a)^k, \sum_{k=0}^n a^{m_k} (1-a)^k + a^{m_{n-1}} (1-a)^{n+1} \right];$$

y la correspondiente imagen bajo S_a^{-1} es el intervalo:

$$\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m_k+k}}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m_k+k}} + \frac{1}{2^{m_n+n}} \right]$$

con longitudes dadas por $a^{m_{n-1}} (1-a)^{n+1}$ y $\frac{1}{2^{m_n+n}}$ respectivamente.

La dimensión fractal será dada por el número

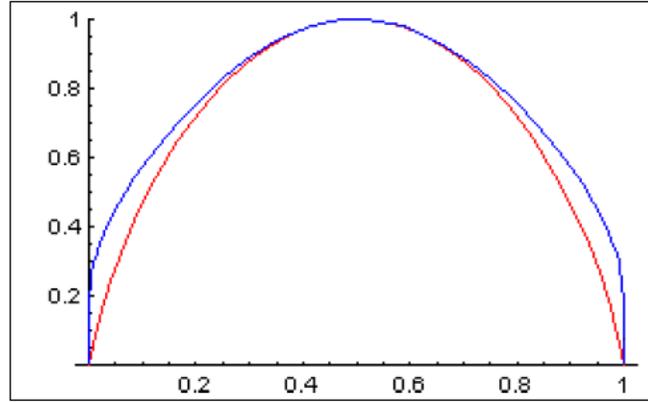
$$\sup \left\{ \beta > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{m_n+n}}}{\left[a^{m_{n-1}} (1-a)^{n+1} \right]^\beta} < +\infty \right\}.$$

Tomando logaritmos, como debe ser finito:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-(m_n - n) \ln 2 - \beta (m_n - 1) \ln a - \beta (n + 1) \ln (1 - a)}{n} < +\infty,$$

y teniendo en cuenta $\frac{m_n}{n} \rightarrow 1$, ello conduce a que $\frac{-\ln 4}{\ln a(1-a)}$ es la dimensión anunciada. ■

La gráfica es, como muestra la figura, muy similar a la anterior: siempre es un poco mayor que aquélla y coinciden cuando $a \in \{0, 1/2, 1\}$.



Los resultados obtenidos para la función S_a puede ser generalizado del siguiente modo. Consideramos la clase $\{S_{b,a} := S_a \circ S_b^{-1} : a, b \in \mathbb{I}\}$. Cada elemento $S_{b,a}$ de la clase aplica el número $x = \sum_{n=0}^{+\infty} b^{m_n} (1-b)^n$ en el número $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{m_n} (1-a)^n$.

Prestamos atención al caso $b := 1 - a$. Esta función, $S_{a,1-a}$, que actúa del modo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^{m_n} (1-a)^n \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (1-a)^{m_n} a^n,$$

es singular. La forma más sencilla de demostrarlo es notar que el límite

$$\lim_n \frac{m_n}{n}$$

es $\frac{a}{1-a}$ en uno de los de los sistemas y $\frac{1-a}{a}$ en el otro. Por tanto, $S_{a,1-a}$ aplica un conjunto de medida uno en otro de medida 0; y viceversa.

Enunciamos, sin demostración:

Teorema 3.47 *La función $S_{a,1-a}$ es la única acotada que cumple el sistema de ecuaciones funcionales*

$$\begin{cases} S_{a,1-a}(ax) = (1-a)S_{a,1-a}(x) \\ S_{a,1-a}(a + (1-a)x) = (1-a) + aS_{a,1-a}(x) \end{cases}$$

Corolario 3.48 *La función $S_{a,1-a}$ aplica un conjunto de λ -medida 0 en un conjunto de λ -medida 1. El conjunto inicial tiene dimensión igual a*

$$\frac{\ln [a^a (1-a)^{1-a}]}{\ln [a^{1-a} (1-a)^a]}.$$

Demostración. El conjunto de λ -medida 0 es aquel en que los cocientes $\frac{m_n}{n}$ tienen por límite $\frac{1-a}{a}$.

Para obtener la dimensión fractal, si $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{m_n} (1-a)^n$, consideramos el intervalo

$$\left[\sum_{k=0}^n a^{m_k} (1-a)^k, \sum_{k=0}^n a^{m_k} (1-a)^k + a^{m_{n-1}} (1-a)^{n+1} \right].$$

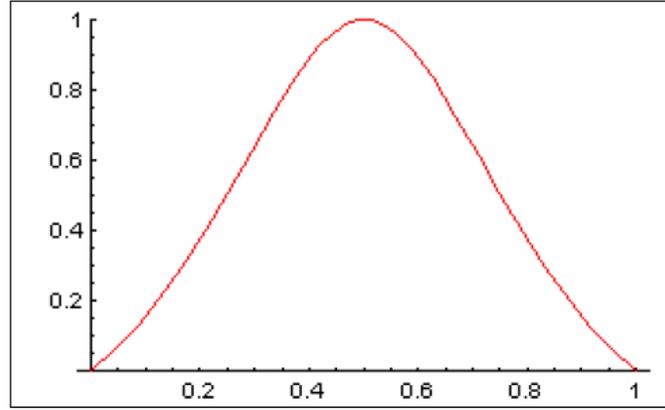
La imagen de este intervalo bajo $S_{a,1-a}$ es:

$$\left[\sum_{k=0}^n a^{m_k} (1-a)^k, \sum_{k=0}^n a^{m_k} (1-a)^k + (1-a)^{m_{n-1}} a^{n+1} \right].$$

Sus respectivas longitudes son $a^{m_{n-1}} (1-a)^{n+1}$ y $(1-a)^{m_{n-1}} a^{n+1}$.

Por tanto, la dimensión fractal está dada por

$$\sup \left\{ \beta > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a)^{m_{n-1}} a^{n+1}}{[a^{m_{n-1}} (1-a)^{n+1}]^\beta} < +\infty \right\}.$$



Si procedemos como anteriormente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[m_n - 1 - \beta(n+1)] \ln(1-a) + [(n+1) - \beta(m_n - 1)] \ln a}{n} < +\infty.$$

Finalmente, el hecho de que $\frac{m_n}{n} \rightarrow \frac{a}{1-a}$, conduce a que:

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \frac{a \ln a + (1-a) \ln(1-a)}{(1-a) \ln a + a \ln(1-a)}.$$

■

La representación gráfica la podemos ver a continuación:

Podemos generalizar este resultado para los demás miembros de la clase.

Teorema 3.49 *La medida $dS_{b,a}$ concentra su masa en un conjunto de dimensión de Hausdorff igual a*

$$\frac{b \ln b + (1-b) \ln(1-b)}{b \ln a + (1-b) \ln(1-a)}.$$

3.5. Una generalización de la función de Takagi

Hasta ahora, hemos considerado S_a dependiendo de x en \mathbb{I} (para a fijo):

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m_n}} \longrightarrow S_a(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a^{m_n - n} (1-a)^n.$$

Se trata, realmente, de funciones dependientes de dos variables x y a . Intercambiando los papeles, las consideraremos, ahora, dependientes del parámetro a ; y estudiaremos su derivada respecto de esta variable.

Definición 3.50 *Definimos $T_a : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ como la función*

$$\begin{aligned} T_a(x) &: = \frac{\partial S_a}{\partial a}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(m_n - n) a^{m_n - n - 1} (1-a)^n - n a^{m_n - n} (1-a)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Proposición 3.51 *La función T_a está bien definida para todo $a \in]0, 1[$.*

Demostración. Estudiaremos su validez para x con dos desarrollos binarios

$$x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{m_k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{m_k}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{m_n+k}}.$$

Para la primera expresión de $x \in]0, 1[$, tenemos

$$T_a(x) = m_0 a^{m_0-1} + (m_1 - 1) a^{m_1-2} (1-a) - a^{m_1-1} + \dots \\ \dots + (m_n - n) a^{m_n-n-1} (1-a)^n - n a^{m_n-n} (1-a)^{n-1}.$$

Por otra parte, para la segunda expresión, su correspondiente valor es

$$T_a(x) = m_0 a^{m_0-1} + (m_1 - 1) a^{m_1-2} (1-a) - a^{m_1-1} + \dots \\ \dots + (m_{n-1} - n + 1) a^{m_n-n} (1-a)^{n-1} - \\ - (n-1) a^{m_{n-1}-n+1} (1-a)^{n-2} + \\ + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^{n+k} - \right. \\ \left. - (n+k) a^{m_n+1-n} (1-a)^{n-1+k} \right].$$

Estudiamos la última suma en la expresión anterior:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[(m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^{n+k} - (n+k) a^{m_n+1-n} (1-a)^{n-1+k} \right] \\ = (m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1-a)^k - \\ - n a^{m_n+1-n} (1-a)^{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (1-a)^k - \\ - a^{m_n+1-n} (1-a)^{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} k (1-a)^k \\ = (m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^n \frac{1}{a} - n a^{m_n+1-n} (1-a)^{n-1} \frac{1}{a} - \\ - a^{m_n+1-n} (1-a)^{n-1} \frac{1-a}{a^2} \\ = (m_n - n) a^{m_n-n-1} (1-a)^n - n a^{m_n-n} (1-a)^{n-1}.$$

Finalmente, demostraremos que $T_a(0) = T_a(1) = 0$, por estrategias diferentes.

Unos cálculos sencillos nos dan

$$T_a(1) = 1 + (1-a) - a + (1-a)^2 - 2a(1-a) + (1-a)^3 - 3a(1-a)^2 + \dots \\ = \frac{1}{a} - a \frac{1}{a} = 0.$$

Para estudiar en 0, sea $b := \max\{a, 1-a\}$. Consideramos el número

$$x := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m_k}} T_a(x) \leq \frac{1}{b} \sum_{k=m_0}^{+\infty} k b^k = \frac{1}{b} \left(\frac{b}{(1-b)^2} + \frac{m_0}{1-b} \right) b^{m_0},$$

donde el miembro de la derecha tiende a 0 si $m_0 \rightarrow +\infty$; por lo que la demostración está terminada. ■

El siguiente resultado generaliza el obtenido para el desarrollo en base de Schauder para la función de Takagi (que corresponde para $a = 1/2$).

Proposición 3.52 (Identidades para T_a) Sean $k \in \mathbb{Z}^+$ y el conjunto de puntos de la forma $\frac{n}{2^k} = \frac{a_k}{2^k} + \frac{a_{k-1}}{2^{k-1}} + \dots + \frac{a_1}{2^1}$, $a_j \in \{0, 1\}$. Si d es el número de ceros entre los a_j y r el correspondiente de unos, entonces

$$T_a\left(\frac{2n+1}{2^{k+1}}\right) - \left((1-a) T_a\left(\frac{n}{2^k}\right) + a T_a\left(\frac{n+1}{2^k}\right) \right) = a^r (1-a)^d.$$

Demostración. Consideramos cuatro casos:

I) Para n par, consideramos $n = 2^c \alpha$ con α impar, $1 < c$ y $0 < n < 2^k - 1$. Haciendo cálculos:

$$\frac{n}{2^k} = \frac{0}{2^k} + \frac{0}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{0}{2^{k-c+1}} + \frac{1}{2^{k-c}} + \cdots = \sum_{j=0}^{d-1} \frac{1}{2^j},$$

con $m_{d-1} = k - c$;

$$\frac{n+1}{2^k} = \frac{1}{2^k} + \frac{0}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{0}{2^{k-c+1}} + \frac{1}{2^{k-c}} + \cdots = \sum_{j=0}^{d-1} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{m_{d-1}+c}};$$

y

$$\frac{2n+1}{2^k} = \frac{1}{2^k} + \frac{0}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{0}{2^{k-c+1}} + \frac{1}{2^{k-c}} + \cdots = \sum_{j=0}^{d-1} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{m_{d-1}+c+1}};$$

por tanto:

$$\begin{aligned} T_a \left(\frac{n}{2^k} \right) &= m_0 a^{m_0-1} + (m_1 - 1) a^{m_1-2} (1-a) - a^{m_1-1} + \\ &\quad + (m_2 - 2) a^{m_2-3} (1-a)^2 - 2(1-a) a^{m_2-2} + \cdots \\ &\quad \cdots + (m_{d-1} - d + 1) a^{m_{d-1}-d} (1-a)^{d-1} - \\ &\quad - (d-1) (1-a)^{d-2} a^{m_{d-1}-d+1}, \end{aligned}$$

y concluimos que

$$\begin{aligned} T_a \left(\frac{2n+1}{2^{k+1}} \right) - \left((1-a) T_a \left(\frac{n}{2^k} \right) + a T_a \left(\frac{n+1}{2^k} \right) \right) &= a^{m_{d-1}+c-d} (1-a)^d \\ &= a^{k-d} (1-a)^d \\ &= a^r (1-a)^d \end{aligned}$$

II) n impar; $n+1 = 2^c \alpha$ con α impar; $c > 1$; y $0 < n < 2^k - 1$. Entonces,

$$\frac{n+1}{2^k} = \frac{0}{2^k} + \frac{0}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{0}{2^{k-c+1}} + \frac{1}{2^{k-c}} + \cdots = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{m_j}},$$

donde $m_n = k - c$;

$$\frac{n}{2^k} = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k-c+1}} + \frac{0}{2^{k-c}} + \cdots = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^{m_j}} + \sum_{j=1}^c \frac{1}{2^{m_n+j}},$$

donde $d = n + c$, y

$$\frac{2n+1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k-c+1}} + \frac{0}{2^{k-c}} + \cdots = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^{m_j}} + \sum_{j=1}^{c+1} \frac{1}{2^{m_n+j}}.$$

Los respectivos valores para T_a son ahora:

$$\begin{aligned} T_a \left(\frac{n+1}{2^k} \right) &= m_0 a^{m_0-1} + \cdots + (m_{n-1} - n + 1) a^{m_{n-1}-n} (1-a)^{n-1} - \\ &\quad - (n-1) (1-a)^{n-2} a^{m_{n-1}-n+1} + \\ &\quad + (m_n - n) a^{m_n-n-1} (1-a)^n - n (1-a)^{n-1} a^{m_n-n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_a \left(\frac{i}{2^k} \right) &= m_0 a^{m_0-1} + \cdots + (m_{n-1} - n + 1) a^{m_{n-1}-n} (1-a)^{n-1} - \\ &\quad - (n-1) (1-a)^{n-2} a^{m_{n-1}-n+1} + \\ &\quad + (m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^n - n (1-a)^{n-1} a^{m_n+1-n} + \\ &\quad + (m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^{n+1} - \\ &\quad - (n+1) (1-a)^n a^{m_n+1-n} + \cdots \\ &\quad \cdots + (m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^{n+c-1} - \\ &\quad - (n+c-1) (1-a)^{n+c-2} a^{m_n+1-n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_a \left(\frac{2n+1}{2^{k+1}} \right) &= m_0 a^{m_0-1} + \cdots + (m_{n-1} - n + 1) a^{m_{n-1}-n} (1-a)^{n-1} - \\
&\quad -(n-1)(1-a)^{n-2} a^{m_{n-1}-n+1} + \\
&\quad + (m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^n - \\
&\quad - n(1-a)^{n-1} a^{m_n+1-n} + \\
&\quad + (m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^{n+1} - \\
&\quad -(n+1)(1-a)^n a^{m_n+1-n} + \\
&\quad + (m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^{n+1} - \\
&\quad -(n+1)(1-a)^n a^{m_n+1-n} + \dots \\
&\quad \dots + (m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^{n+c-1} - \\
&\quad -(n+c-1)(1-a)^{n+c-2} a^{m_n+1-n} + \\
&\quad + (m_n + 1 - n) a^{m_n-n} (1-a)^{n+c} - \\
&\quad -(n+c)(1-a)^{n+c-1} a^{m_n+1-n},
\end{aligned}$$

de donde se sigue la relación:

$$\begin{aligned}
&T \left(\frac{2n+1}{2^{k+1}} \right) - \left((1-a)T \left(\frac{n}{2^k} \right) + aT \left(\frac{n+1}{2^k} \right) \right) = \\
&= a^{m_n-n} (1-a)^n - (1-a)^n a^{m_n+1-n} - \dots \\
&\quad \dots - (1-a)^{n+c-2} a^{m_n-n+1} - (1-a)^{n+c-1} a^{m_n-n+1} \\
&= a^{m_n-n} (1-a)^{n+c} = a^r (1-a)^d.
\end{aligned}$$

III) Si $n = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2^k} &= \frac{0}{2^k} + \frac{0}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{0}{2} \\
\frac{n+1}{2^k} &= \frac{1}{2^k} + \frac{0}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{0}{2} \\
\frac{2n+1}{2^k} &= \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{0}{2^k} + \frac{0}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{0}{2}
\end{aligned}$$

con imágenes:

$$T \left(\frac{2n+1}{2^{k+1}} \right) = (k+1)a^k; \quad T \left(\frac{n+1}{2^{k+1}} \right) = ka^{k-1}; \quad T \left(\frac{n}{2^k} \right) = 0;$$

y, por tanto,

$$T \left(\frac{2n+1}{2^{k+1}} \right) - \left((1-a)T \left(\frac{n}{2^k} \right) + aT \left(\frac{n+1}{2^k} \right) \right) = a^k = a^r,$$

pues, en este caso, $d = 0$ y $r = k$.

IV) Para $n = 2^k - 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2^k} &= \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2} \\
\frac{2n+1}{2^k} &= \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2} \\
\frac{n+1}{2^k} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1, \quad d = k; \quad b = 0.
\end{aligned}$$

Los valores de la función están dados por:

$$T_a(1) = 0;$$

$$\begin{aligned}
T_a \left(\frac{n}{2^k} \right) &= 1 + (1-a) - a + (1-a)^2 - 2(1-a)a + \cdots \\
&\quad \cdots + (1-a)^{k-1} - (k-1)(1-a)^{k-2}a;
\end{aligned}$$

$$T_a \left(\frac{2n+1}{2^{k+1}} \right) = 1 + (1-a) - a + (1-a)^2 - 2(1-a)a + \dots \\ \dots + (1-a)^k - k(1-a)^{k-1}a;$$

y nuevamente se tiene la igualdad anunciada:

$$T \left(\frac{2n+1}{2^{k+1}} \right) - \left((1-a)T \left(\frac{n}{2^k} \right) + aT \left(\frac{n+1}{2^k} \right) \right) = 1 - a - a(1-a) - \dots \\ \dots - a(1-a)^{k-1} \\ = (1-a)^k = (1-a)^d.$$

■

El valor $a = 1/2$ en el resultado anterior conduce a la igualdad

$$T \left(\frac{2n+1}{2^{k+1}} \right) - \frac{1}{2} \left(T \left(\frac{n}{2^k} \right) + T \left(\frac{n+1}{2^k} \right) \right) = \frac{1}{2^{k+1}};$$

y, por tanto, es válido el siguiente

Corolario 3.53 $2T = T_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 3.54 (Una base de Schauder diferente de la usual (${}^a S$)) *La familia dada por las funciones*

$$g_1(x) := S_a(x) \\ g_2(x) := 1 - S_a(x) \\ g_{k,j}(x) := \begin{cases} S_a(2^{k+1}(x - j/2^k)), \dots x \in [j/2^k, \frac{2j+1}{2^{k+1}}] \\ 1 - S_a(2^{k+1}(x - \frac{2j+1}{2^{k+1}})), \dots x \in [\frac{2j+1}{2^{k+1}}, \frac{j+1}{2^k}] \\ 0, \dots \text{ otro caso} \end{cases} \\ \text{para } k = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1, 2, \dots, 2^{k-1}$$

es una base de Schauder para el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}(\mathbb{I})$, con la norma uniforme.

La demostración es similar a la dada en [137] para la base usual.

Teorema 3.55 *La función T_a es la única para la que es cierto*

$$\begin{cases} G(x/2) = aG(x) + S_a(x) \\ G(\frac{1+x}{2}) = (1-a)G(x) + 1 - S_a(x). \end{cases}$$

Demostración. Es una consecuencia del teorema del punto fijo y una aplicación de las ecuaciones funcionales de S_a . ■

Por inducción, estas ecuaciones funcionales conducen al siguiente resultado.

Teorema 3.56 *Los coeficientes en el desarrollo en serie de T_a en la base (${}^a S$) están dados por*

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_{k,j} = a^{k-n} (1-a)^n,$$

donde n denota el número de unos en el desarrollo binario de j .

Proposición 3.57 *Si $a \neq \frac{1}{2}$, entonces existe la derivada $T'_a(x)$ y es igual a cero para casi todo x en \mathbb{I}*

Demostración. Demostraremos que es cierto para los números normales, lo que junto al teorema de Borel dará el resultado. Dado un número normal en base 2, $x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{m_i}} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m'_j}}$, consideramos $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{m_i}} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m'_j}}$, con $m_{n+1} \neq m'_{n+1}$. Por tanto,

$$|T_a(x) - T_a(x_n)| \leq a^{m_n - n - 1} (1-a)^n \cdot \left(|(m_{n+1} - (n+1)) a^{m_{n+1} - m_n - 1} (1-a) - (n+1) a^{m_{n+1} - m_n} + \dots| + \right. \\ \left. + \left| (m'_{n+1} - (n+1)) a^{m'_{n+1}} (1-a) - (n+1) a^{m'_{n+1} - m_n} + \dots \right| \right).$$

Necesitamos acotar los términos finales:

$$\begin{aligned} & \left| (m_{n+1} - (n+1)) a^{m_{n+1}-m_n-1} (1-a) - (n+1) a^{m_{n+1}-m_n} + \right. \\ & \left. (m_2 - (n+2)) a^{m_{n+2}-m_n-2} (1-a)^2 - (n+2) a^{m_{n+2}-m_n-2} + \dots \right| \\ & \leq \left[(m_{n+1} - (n+1)) a^{m_{n+1}-m_n-1} (1-a) + \right. \\ & \left. + (m_2 - (n+2)) a^{m_{n+2}-m_n-2} (1-a)^2 + \dots \right] + \\ & + \left| (n+1) a^{m_{n+1}-m_n} + (n+2) a^{m_{n+2}-m_n-2} + \dots \right| \leq \end{aligned}$$

introducimos la nueva notación, $b_1 = m_{n+1} - m_n - 1$, $b_2 = m_{n+1} - (n+1)$, $c_j = m_j - m_{n+1} - (j-1) + n$, escribimos la desigualdad:

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} (b_2 + c_j) a^{b_1+c_j} (1-a)^{j-n} + nk_1 + k_2 \leq \\ & \leq b_2 a^{b_1} k_3 + a^{b_1} \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j a^{c_j} (1-a)^{j-n+1} + nk_4 \leq b_2 a^{b_1} k_3 + a^{b_1} k_5 + nk_6 \leq \\ & \leq m_{n+1} a^{m_{n+1}-m_n} k_7 + nk_6 = O(m_{n+1} a^{m_{n+1}-m_n} + nk), \end{aligned}$$

donde k_5 aparece, puesto que xa^x está acotada.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |T_a(x) - T_a(x_n)| &= O(a^{m_n-n-1} (1-a)^n (m_{n+1} a^{m_{n+1}-m_n} + nk)) \\ &= O(a^{m_n-n-1} (1-a)^n m_n^2), \end{aligned}$$

la última igualdad es cierta puesto que $xa^{x-y} < 1$ si $x^2 > y$ para un valor suficientemente grande. La constante implícita en O depende de a . Entonces,

$$\begin{aligned} |T_a(x) - T_a(x_n)| &= O(a^{m_n-n-1} (1-a)^n m_n^2) \\ &= O\left(a^{\frac{m_n}{2}} (1-a)^{\frac{m_n}{2}} a^{\frac{m_n}{2}-n} (1-a)^{n-\frac{m_n}{2}} m_n^2\right) \\ &= O\left(a^{\frac{m_n}{2}} (1-a)^{\frac{m_n}{2}} C^{\left|\frac{m_n}{2}-n\right|} m_n^2\right) \\ &= O\left(a^{\frac{m_n}{2}} (1-a)^{\frac{m_n}{2}} C^{\alpha m_n} m_n^2\right) \end{aligned}$$

donde $C \in \left\{ \frac{a}{1-a}, \frac{1-a}{a} \right\}$, y α aparece puesto que x es normal, y $m_n = 2n + o(n)$, si tomamos $m_n > m(\alpha)$.

Al final, tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{T_a(x) - T_a(x_n)}{x - x_n} \right| &= O\left(\frac{(a(1-a))^{\frac{m_n}{2}} C^{\alpha m_n} m_n^2}{\frac{1}{2^{m_n+o(m_n)}}}\right) \\ &= O\left(2^{m_n+o(m_n)} (a(1-a) C^{2\alpha})^{\frac{m_n}{2}} m_n^2\right) \\ &= O\left((4a(1-a) C^{2\alpha} 2^\beta)^{\frac{m_n}{2}} m_n^2\right). \end{aligned}$$

Como anteriormente, tomamos $m_n > m(\beta)$. La última expresión tiende a cero cuando α y β satisfacen que $4a(1-a) C^{2\alpha} 2^\beta < 1$. Todo esto es posible ya que $4a(1-a) < 1$ si $a \neq 1/2$. Como x es un número normal, los valores α y β pueden ser tomados tan pequeños como sea necesario. Si una sucesión y_k converge a x , entonces tomamos k suficientemente grande para asegurar que el primer valor $m_i \neq m'_i$ sea mayor que m_n . Ahora, si $n \rightarrow +\infty$, entonces el cociente tiende a 0 y, por tanto, existe $T'_a(x)$ con valor igual a cero. ■

Proposición 3.58 Si $a \neq \frac{1}{2}$, entonces T_a no es monótona en ningún intervalo.

Demostración. Tomamos un intervalo arbitrario $J \subset \mathbb{I}$. Existe n y k tal que

$$\alpha := \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{m_k}} < \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{m_j}} + \frac{1}{2^{m_n+k}} =: \beta$$

con $\alpha, \beta \in J$; y

$$\begin{aligned} T_a(\beta) - T_a(\alpha) &= (m_n + k - n - 1) a^{m_n+k-n-2} (1-a)^{n+1} \\ &\quad - (n+1) a^{m_n+k-n-1} (1-a)^n \\ &= a^{m_n+k-n-2} [(m_n + k - n - 1) (1-a)^{n+1} - \\ &\quad - (n+1) a (1-a)^n], \end{aligned}$$

que es positivo para un k adecuado. Sin embargo, para:

$$\begin{aligned} \gamma &: = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{m_j}} + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^{m_n+j}} \\ &< \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{m_j}} + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^{m_n+j}} + \frac{1}{2^{m_n+k+1}} =: \delta, \end{aligned}$$

con $\gamma, \delta \in J$, se tiene que

$$T_a(\delta) - T_a(\gamma) = a^{m_n-n-1} (1-a)^{n+k} [(m_n - n) (1-a) - (n+k+1) a],$$

siendo negativa para valores convenientes de k . Lo que garantiza la no monotonía de T_a en J . ■

Comentario 3.59 Observamos que podemos obtener un resultado más fuerte: T_a es de tipo no monótono en ningún intervalo (MTNI); i.e., para cada x, m existe un intervalo I en el que la función

$$I \ni x \longrightarrow T_a(x) + mx$$

no es monótona.

Definición 3.60 Para todo entero positivo k , definimos

$${}_k T_a(x) := \frac{\partial^k S_a}{\partial a^k}(x)$$

con $a, x \in \mathbb{I}$.

Teorema 3.61 Se tiene la relación ${}_k T'_a(x) = 0$ en un conjunto de λ -medida uno.

Teorema 3.62 Si k es impar, entonces ${}_k T_a$ es una función de tipo MTNI.

Finalmente, y con la ayuda de las funciones $S_{a,b}$, damos una última generalización que conduce a una familia biparamétrica de funciones sin derivada en ningún punto.

Definición 3.63 Para a y b dados,

$$T_{a,b} := \frac{\partial S_{a,b}}{\partial b}.$$

Teorema 3.64 La función $T_{a,b}$ es la única acotada para la que son ciertas las ecuaciones

$$\begin{cases} G(ax) = bG(x) + S_{a,b}(x) \\ G(a + (1-a)x) = (1-b)G(x) + 1 - S_{a,b}(x). \end{cases}$$

Teorema 3.65 La función $T_{a,a}$ no tiene derivada en ningún punto.

Demostración. Si x tiene desarrollo finito (con n términos), consideramos $y_m := x + a^m (1-a)^{n+1}$. Por tanto,

$$\frac{T_{aa}(y_m) - T_{aa}(x)}{y_m - x} \longrightarrow \infty$$

cuando $m \rightarrow +\infty$.

Por otra parte, si x no admite desarrollo finito, tomamos n tal que $m_{n+1} > m_n$. Definimos

$$x_1 := a^{m_0} + \dots + a^{m_n} (1 - a)^n$$

(el desarrollo truncado de x), y

$$\bar{x}_1 := x + a^{m_n} (1 - a)^{n+1};$$

lo que implica $x_1 < x < \bar{x}_1$. Ahora, el lema 0.3 da el resultado, puesto que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_{aa}(\bar{x}_1) - T_{aa}(x_1)}{\bar{x}_1 - x_1} = \infty.$$

Para $x \in \{0, 1\}$, el uso de la derivada lateral completa la demostración. ■

Comentario 3.66 *Esta propiedad es cierta para una clase más amplia de funciones;*

$${}_k T_{a,a} := \frac{\partial^k S_{a,b}}{\partial b^k} \Big|_{b=a}.$$

Teorema 3.67 *Si $a \neq b$, entonces $T_{a,b}$ es una función MTNI.*

Teorema 3.68 *Si $a \neq b$, existe un conjunto de medida uno donde $T_{a,b}$ tiene derivada en todos sus puntos con valor cero; ésto es, $T'_{a,b}(x) = 0$.*

3.6. Funciones de agregación lineal y k-negaciones

En [113] se estudian unas relaciones de dualidad para pares de clases de operaciones binarias en el intervalo unidad \mathbb{I} . Concretamente, se trata de miembros del conjunto FAL de los operadores de agregación que satisfacen ciertas condiciones de frontera.

En estas secciones damos un expresión explícita de una negación $N_{k,k'}$ y estudiamos varias de sus propiedades. En particular, $N_{k,k'}$ es una función estrictamente decreciente con derivada cero en un conjunto de medida uno, es decir, es una función singular. Un caso particular es el de las k -negaciones.

Las funciones de agregación son objetos matemáticos que tienen el fin de obtener un único número a partir un conjunto de ellos.

Definición 3.69 *Una función de agregación es una función $F : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ que satisface (i) $F(0, 0) = 0$ y $F(1, 1) = 1$; y (ii) $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$ si $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$.*

Uno de los ejemplos más comunes de estas funciones es el de las t -normas. Una t -norma (o norma triangular) T se define como una función de agregación asociativa ($T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$) y conmutativa $T : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ satisfaciendo $T(1, x) = x$ para todo $x \in \mathbb{I}$. Una t -conorma S se define como una función de agregación $S : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ asociativa, conmutativa y que, además, satisface $S(0, x) = x$ para todo $x \in \mathbb{I}$. Una negación N es una función $N : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ no creciente con las condiciones de frontera $N(0) = 1, N(1) = 0$. Si N es involutiva, i.e., $N^2(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{I}$, se dice que N es una negación fuerte.

Las t -normas y sus operaciones duales, las t -conormas, han sido utilizadas para definir la intersección de conjuntos difusos y para modelar el operador "and" de estos conjuntos, como una generalización de los conectores de la lógica Booleana o de la lógica multivaluada.

También, algunas familias de cópulas (objeto de nuestro estudio en la tercera parte de esta Memoria) son t -normas (véanse, por ejemplo, [2], [72] y [122]). En [159, Teorema 2.1], se caracterizan las funciones de negación fuerte en el contexto de la teoría de conjuntos difusos.

Definición 3.70 *Dada una t -conorma S y una negación N la función $N(S(N(x), N(y)))$ para todo $x, y \in \mathbb{I}$ es una t -norma, llamada la t -norma N -dual de S .*

Ya hemos hablado más arriba de un subconjunto muy interesante de los operadores de agregación: los FAL , es el de las operadores de agregación lineales. Son operadores de agregación conmutativos tales que

$$F(x, 0) = F(1, 0)x \quad \text{y} \quad F(x, 1) = (1 - F(1, 0))x + F(1, 0)$$

para todo $x \in \mathbb{I}$.

Observemos que todas las t -normas y t -conormas pertenecen a FAL . La combinación lineal convexa de dos miembros de FAL también pertenece a FAL .

Definición 3.71 Si T, S pertenecen a FAL y N es una negación, decimos que N es una función de dualidad para el par (T, S) , o que el par (T, S) es N -dual, si, y sólo si, $N(T(x, y)) = S(N(x), N(y))$ para todo $x, y \in \mathbb{I}$.

En [113] se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.72 ([113, Theorem 2]) Sea $F \in FAL$ con $F(1, 0) = k \in (0, 1)$. Para cada $0 < k' < 1$, existe una única $G_{F, k'} \in FAL$ con $G_{F, k'}(1, 0) = k'$ y una única $N_{k, k'} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ tal que $(F, G_{F, k'})$ es $N_{k, k'}$ -dual.

Además, es posible dar una expresión para $N_{k, k'}$ y $G_{F, k'}$. Están relacionadas con la solución del siguiente sistema de ecuaciones funcionales

$$\begin{cases} S\left(\frac{x}{2}\right) = kS(x) \\ S\left(\frac{x+1}{2}\right) = (1-k)S(x) + k, \end{cases}$$

que ha sido estudiado con anterioridad.

Podemos obtener las igualdades $N_{k, k'} = S_{k'}(1 - S_k^{-1})$ y $G_{F, k'}(x, y) = N_{k, k'}F\left(N_{k, k'}^{-1}(x), N_{k, k'}^{-1}(y)\right)$, donde S_k y $S_{k'}$ son las soluciones del sistema anterior para $k, k' \in]0, 1[$.

A su vez, la función $N_{k, k'}$ está caracterizada por ser la única solución en \mathbb{I} de un sistema de ecuaciones funcionales que está relacionado con el sistema anterior:

$$\begin{cases} f(kx) = k' + (1 - k')f(x) \\ f(k + (1 - k)x) = k'f(x). \end{cases}$$

(Los detalles pueden consultarse en [113].)

Por tanto, el conocimiento de $N_{k, k'}$ y de sus propiedades es básico en el estudio de la dualidad en las funciones de FAL . Aunque es conocida (vease [157] o la definición 3.1) una expresión explícita para $S_k(x)$ en función de la expresión diádica de x , no es conocida una expresión explícita de $N_{k, k'}(x)$. El mejor resultado obtenido en este sentido ha sido el dado en [113, Teorema 3], donde se da una expresión explícita para un conjunto numerable de puntos. Es conocido que $N_{k, k'}$ es una biyección continua y decreciente in \mathbb{I} , pero no han sido estudiadas otras propiedades.

3.7. La función $N_{k, k'}$

En primer lugar, introducimos una clase de funciones dependientes de dos parámetros.

Definición 3.73 Para cada $k, k' \in]0, 1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$ definimos la función $f_{k, k'} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ dada del siguiente modo: para x tal que no admite desarrollo finito (i.e., existen $1 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_d < \dots$, tal que

$$\begin{aligned} x &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0}(1-k)^{s_0} + \\ &+ k^{t_1}(1-k)^{s_0+1} + \dots + k^{t_1}(1-k)^{s_1} + \dots \\ &+ k^{t_d}(1-k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d}(1-k)^{s_d} + \dots \end{aligned}$$

se aplica en

$$\begin{aligned} f_{k, k'}(x) &: = k' + k'(1-k') + \dots + k'(1-k')^{t_0-2} + \\ &+ k'^{s_0+2}(1-k')^{t_0-1} + \dots + k'^{s_0+2}(1-k')^{t_1-2} + \\ &+ k'^{s_1+2}(1-k')^{t_1-1} + \dots + k'^{s_1+2}(1-k')^{t_2-2} + \dots \\ &+ k'^{s_{d-1}+2}(1-k')^{t_{d-1}-1} + \dots + k'^{s_{d-1}+2}(1-k')^{t_d-2} + \dots \end{aligned}$$

Si $t_0 := 1$, entonces $k + k(1-k) + \dots + k(1-k)^{t_0-2}$ no existe. En el caso en el que hay desarrollo finito,

$$\begin{aligned} x &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0}(1-k)^{s_0} + \dots \\ &+ k^{t_d}(1-k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d}(1-k)^{s_d}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f_{k, k'}(x) &: = k' + k'(1-k') + \dots + k'(1-k')^{t_0-2} + \dots \\ &+ k'^{s_{d-1}+2}(1-k')^{t_{d-1}-1} + \dots \\ &+ k'^{s_{d-1}+2}(1-k')^{t_d-2} + k'^{s_d+1}(1-k')^{t_d-1}. \end{aligned}$$

Comentario 3.74 Si vemos a x como un número dado por una infinidad de cadenas de la forma

$$k^{t_d} (1 - k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d} (1 - k)^{s_d},$$

la imagen será una suma infinita de cadenas de la forma

$$k'^{s_{d-1}+2} (1 - k')^{t_{d-1}-1} + \dots + k'^{s_{d-1}+2} (1 - k')^{t_d-2}.$$

Si el número de cadenas es finito, el resultado es análogo, pero añadiendo

$$k'^{s_{d+1}} (1 - k')^{t_d-1}.$$

Describamos algunas propiedades de $f_{k,k'}$.

Proposición 3.75 La función $f_{k,k'}$ es estrictamente decreciente.

Demostración. Consideramos cuatro casos diferentes.

a. Sea $y < x$, donde

$$\begin{aligned} x &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1 - k)^{s_0} + \\ &+ k^{t_1} (1 - k)^{s_0+1} + \dots + k^{t_1} (1 - k)^{s_1} + \dots \\ &+ k^{t_d} (1 - k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d} (1 - k)^{s_d} + \\ &+ k^{t_{d+1}} (1 - k)^{s_{d+1}} + \dots + k^{t_{d+1}} (1 - k)^{s'_{d+1}} + \dots \\ &+ k^{t_{d+1}} (1 - k)^{s_{d+1}} + \dots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1 - k)^{s_0} + \\ &+ k^{t_1} (1 - k)^{s_0+1} + \dots + k^{t_1} (1 - k)^{s_1} + \dots \\ &+ k^{t_d} (1 - k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d} (1 - k)^{s_d} + \\ &+ k^{t_{d+1}} (1 - k)^{s_{d+1}} + \dots + k^{t_{d+1}} (1 - k)^{s'_{d+1}} + \\ &+ k^{t'_{d+2}} (1 - k)^{s'_{d+1}+1} + \dots \end{aligned}$$

(notemos que $s'_{d+1} < s_{d+1}$), y por tanto

$$\begin{aligned} f_{k,k'}(x) &: = k' + k' (1 - k') + \dots + k' (1 - k')^{t_0-2} + \dots \\ &+ k'^{s_{d-1}+2} (1 - k')^{t_{d-1}-1} + \dots \\ &+ k'^{s_{d-1}+2} (1 - k')^{t_d-2} + k'^{s_{d+2}} (1 - k')^{t_d-1} + \dots \\ &+ k'^{s_{d+2}} (1 - k')^{t_{d+1}-2} + k'^{s_{d+1}+2} (1 - k')^{t_{d+1}-1} + \dots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_{k,k'}(y) &: = k' + k' (1 - k') + \dots \\ &+ k' (1 - k')^{t_0-2} + \dots + k'^{s_{d-1}+2} (1 - k')^{t_{d-1}-1} + \dots \\ &+ k'^{s_{d-1}+2} (1 - k')^{t_d-2} + k'^{s_{d+2}} (1 - k')^{t_d-1} + \dots \\ &+ k'^{s_{d+2}} (1 - k')^{t_{d+1}-2} + k'^{s'_{d+1}+2} (1 - k')^{t_{d+1}-1} + \dots; \end{aligned}$$

que conduce a $f_{k'}(x) < f_{k'}(y)$.

b. Ahora, consideramos x e y , $y < x$, de la forma:

$$\begin{aligned} x &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1 - k)^{s_0} + \\ &+ k^{t_1} (1 - k)^{s_0+1} + \dots + k^{t_1} (1 - k)^{s_1} + \dots \\ &+ k^{t_d} (1 - k)^{s_{d-1}+1} + \dots \\ &+ k^{t_d} (1 - k)^{s_d} + \dots + k^{t_{d+1}} (1 - k)^{s_{d+1}} + \dots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1-k)^{s_0} + \\
&\quad + k^{t_1} (1-k)^{s_0+1} + \dots + k^{t_1} (1-k)^{s_1} + \dots \\
&\quad + k^{t_d} (1-k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t'_{d+1}} (1-k)^{s_{d+1}} + \dots \\
&\quad + k^{t_{d+1}} (1-k)^{s'_{d+1}+1} + k^{t'_{d+1}} (1-k)^{s'_{d+1}+1} + \dots
\end{aligned}$$

(Notemos que $t_{d+1} < t'_{d+1}$). Por tanto,

$$\begin{aligned}
f_{k,k'}(x) &: = k' + k' (1-k') + \dots + k' (1-k')^{t_0-2} + \dots \\
&\quad + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_{d-1}-1} + \dots + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_d-2} + \\
&\quad + k'^{s_d+2} (1-k')^{t_d-1} + \dots + k'^{s_d+2} (1-k')^{t_{d+1}-2} + \dots
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
f_{k,k'}(y) &: = k' + k' (1-k') + \dots + k' (1-k')^{t_0-2} + \dots \\
&\quad + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_{d-1}-1} + \dots + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_d-2} + \\
&\quad + k'^{s_d+2} (1-k')^{t_d-1} + \dots + k'^{s_d+2} (1-k')^{t'_{d+1}-2} + \dots ;
\end{aligned}$$

que, de nuevo, implica $f_{k,k'}(x) < f_{k,k'}(y)$.

c. Cuando x tiene desarrollo finito e y no lo tiene, con $x < y$.

d. Si x e y tienen desarrollo finito.

Los casos *c.* y *d.* completan el resto de posibilidades y las demostraciones son similares a las dadas en *a.* y *b.* ■

Proposición 3.76 *La función $f_{k,k'}$ es continua.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{I}$; consideremos dos casos:

a. Si x tiene desarrollo finito:

$$\begin{aligned}
x &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1-k)^{s_0} + \dots \\
&\quad + k^{t_d} (1-k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d} (1-k)^{s_d} + \dots
\end{aligned}$$

Si la sucesión (x_n) converge a x , entonces existe m tal que $n \geq m$ implica

$$\begin{aligned}
x_n &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1-k)^{s_0} + \dots \\
&\quad + k^{t_d} (1-k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d} (1-k)^{s_d} + \\
&\quad + k^{t'_{d+1}} (1-k)^{s_{d+1}} + \dots + k^{t'_{d+1}} (1-k)^{s'_{d+1}} + \dots ,
\end{aligned}$$

i.e., x_n y x coinciden en los primeros d bloques si $n \geq m$. Entonces $f_{k,k'}(x)$ y $f_{k,k'}(x_n)$ tienen desarrollos que coinciden en la forma

$$\begin{aligned}
&k' + k' (1-k') + \dots + k' (1-k')^{t_0-2} + \dots \\
&+ k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_{d-1}-1} + \dots + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_d-2} + \\
&+ k'^{s_d+2} (1-k')^{t_d-1} + \dots ,
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}
|f_{k,k'}(x) - f_{k,k'}(x_n)| &\leq 2k'^{s_d+2} \left[(1-k')^{t_d-1} + (1-k')^{t_d} + \dots \right] = \\
&= 2k'^{s_d+1} (1-k')^{t_d-1} .
\end{aligned}$$

Pero, si $n \rightarrow +\infty$ entonces, d, t_d y $s_d \rightarrow +\infty$. Por tanto, $f_{k,k'}(x_n) \rightarrow f_{k,k'}(x)$.

b. Si x tiene desarrollo finito, entonces consideramos las sucesiones (x_n) convergiendo a x por la izquierda o por la derecha. En primer lugar, sea $x_n \searrow x$. Puesto que

$$\begin{aligned}
x &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1-k)^{s_0} + \dots \\
&\quad + k^{t_d} (1-k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d} (1-k)^{s_d} ,
\end{aligned}$$

entonces

$$x_n = k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1-k)^{s_0} + \dots + k^{t_d} (1-k)^{s_{d-1}+1} + \dots \\ + k^{t_d} (1-k)^{s_d} + k^{t_{d+1}} (1-k)^{s_{d+1}} + \dots$$

(donde $t'_{d+j} = t'_{d+j}(n)$ para todo j y $t'_{d+j} \rightarrow +\infty$ cuando n lo hace). Aplicando f_k :

$$f_{k,k'}(x) = k' + k'(1-k') + \dots + k'(1-k')^{t_0-2} + \dots \\ + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_{d-1}-1} + \dots + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_d-2} + \\ + k'^{s_{d+1}} (1-k')^{t_{d+1}-1};$$

y

$$f_{k,k'}(x_n) = k' + k'(1-k') + \dots + k'(1-k')^{t_0-2} + \dots \\ + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_{d-1}-1} + \dots + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_d-2} + \\ + k'^{s_{d+2}} (1-k')^{t_{d+1}-1} + \dots + k'^{s_{d+2}} (1-k')^{t_{d+1}-2} + \dots$$

Pero, si $t'_{d+j} \rightarrow +\infty$, entonces

$$k'^{s_{d+2}} (1-k')^{t_{d+1}-1} + \dots + k'^{s_{d+2}} (1-k')^{t_{d+1}-2} + \dots = k'^{s_{d+1}} (1-k')^{t_{d+1}-1};$$

i.e., $f_{k,k'}(x_n) \rightarrow f_{k,k'}(x)$.

Por otro lado, cuando $x_n \nearrow x$, el razonamiento es análogo.

Los dos casos anteriores garantizan la convergencia de $f_k(x_n) \rightarrow f_k(x)$, si $n \rightarrow +\infty$. ■

Teorema 3.77 *Cuando $k \neq k'$, existe un conjunto de medida 1 en el que la función $f_{k,k'}$ tiene derivada cero en cada punto.*

Demostración. Consideramos un número normal x en el sistema diádico generalizado. Necesariamente tiene un desarrollo infinito:

$$x = k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1-k)^{s_0} + \dots \\ + k^{t_d} (1-k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d} (1-k)^{s_d} + \dots;$$

y definimos sucesiones (x_n) e (y_n) :

$$x_n = k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1-k)^{s_0} + \dots \\ + k^{t_d} (1-k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d} (1-k)^{s_d},$$

y

$$y_n = k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1-k)^{s_0} + \dots + k^{t_d} (1-k)^{s_{d-1}+1} + \dots \\ + k^{t_d} (1-k)^{s_d} + k^{t_d} (1-k)^{s_{d+1}},$$

tal que $x_n \leq x \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. La función f_k actúa del siguiente modo:

$$f_{k,k'}(x_n) = k' + k'(1-k') + \dots + k'(1-k')^{t_0-2} + \dots \\ + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_{d-1}-1} + \dots + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_d-2} + \\ + k'^{s_{d+1}} (1-k')^{t_{d+1}-1};$$

y

$$f_{k,k'}(y_n) = k' + k'(1-k') + \dots + k'(1-k')^{t_0-2} + \dots \\ + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_{d-1}-1} + \dots + k'^{s_{d-1}+2} (1-k')^{t_d-2} + \\ + k'^{s_{d+2}} (1-k')^{t_{d+1}-1}.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{f_{k,k'}(y_n) - f_{k,k'}(x_n)}{y_n - x_n} = \\ & = \frac{k'^{s_d+2}(1-k')^{t_d-1} - k'^{s_d+2}(1-k')^{t_d-1}}{k^{t_d}(1-k)^{s_d+1}} \\ & = \frac{-k'^{s_d+1}(1-k')^{t_d}}{k^{t_d}(1-k)^{s_d+1}} \ll \left(\frac{-k'(1-k')^{\frac{k}{1-k} + o(1)}}{k^{\frac{k}{1-k} + o(1)}(1-k)} \right)^{s_d}, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $t_d \simeq \frac{k}{1-k} s_d$ para los números normales.

Ahora, $\frac{k'(1-k')^{\frac{k}{1-k} +}}{k^{\frac{k}{1-k}}(1-k)}$ toma su valor máximo cuando $k' = 1 - k$ y vale uno, y

$$\lim \frac{f_{k,k'}(y_n) - f_{k,k'}(x_n)}{y_n - x_n} = 0.$$

Por tanto, la existencia de $f'_{k,k'}(x)$ implica que es nula.

Pero la monotonía de f conlleva su derivabilidad en un conjunto de medida 1; y por tanto, $f'_{k,k'}(x) = 0$ en un conjunto de medida uno 1. ■

Proposición 3.78 Cuando $k \neq k'$, la función $f_{k,k'}$ no admite derivada diferente de cero.

Demostración. Consideramos x con desarrollo finito:

$$x = k^{t_0} + \dots + k^{t_d} (1 - k)^{s_d},$$

y

$$x_n^* = k^{t_0} + \dots + k^{t_d} (1 - k)^{s_d} + k^n (1 - k)^{s_d+1}.$$

Para cada n :

$$\begin{aligned} \frac{f_{k,k'}(x_n^*) - f_{k,k'}(x)}{x_n^* - x} &= \frac{-k'^{s_d+1} (1 - k')^n}{k^n (1 - k)^{s_d+1}} \\ &= - \left(\frac{k'}{1 - k} \right)^{s_d+1} \left(\frac{1 - k'}{k} \right)^n, \end{aligned}$$

y cuando $n \rightarrow +\infty$, esta sucesión converge a 0 o a $-\infty$, dependiendo del valor de $\frac{1-k'}{k}$. Por tanto, si existe el límite, debe ser cero.

Por otra parte, si x no tiene desarrollo finito, consideramos las sucesiones (x_n) e (y_n) , como en el teorema anterior. Además, sea

$$\begin{aligned} y_n' &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1 - k)^{s_0} + \dots \\ &+ k^{t_d} (1 - k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d} (1 - k)^{s_d} + \\ &+ k^{t_d} (1 - k)^{s_d+1} + k^{t_d} (1 - k)^{s_d+2}. \end{aligned}$$

Para estos números:

$$\frac{f_k(y_d) - f_k(x_d)}{y_d - x_d} = - \frac{-k'^{s_d+1} (1 - k')^{t_d}}{k^{t_d} (1 - k)^{s_d+1}},$$

y

$$\frac{f_k(y_d') - f_k(x_d)}{y_d' - x_d} = - \frac{1 + k' - k'^{s_d+1} (1 - k')^{t_d}}{2 - k} \frac{1 - k')^{t_d}}{k^{t_d} (1 - k)^{s_d+1}}.$$

En el caso de existir derivada, el cociente de ambos límites $-\frac{1+k'}{2-k}$ debe ser igual a 1; pero esto no ocurre cuando $k \neq 1 - k'$. Por tanto, cuando la derivada existe, debe ser 0. ■

Teorema 3.79 La función $f_{k,k'}$ es solución del sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} f(kx) = k' + (1 - k') f(x) \\ f(k + (1 - k)x) = k' f(x). \end{cases}$$

Demostración. Demostraremos que $f_{k,k'}$ verifica el sistema de ecuaciones funcionales. Consideremos el caso en que no admite un desarrollo finito (el caso finito será similar). Si

$$x = k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1-k)^{s_0} + k^{t_1} (1-k)^{s_0+1} + \dots \\ + k^{t_d} (1-k)^{s_d} + \dots,$$

entonces

$$f_{k,k'}(x) : = k' + k' (1-k') + \dots + k' (1-k')^{t_0-2} + \\ + k'^{s_0+2} (1-k')^{t_0-1} + \dots + k'^{s_0+2} (1-k')^{t_1-2} + \\ + k'^{s_1+2} (1-k')^{t_1-1} + \dots + k'^{s_1+2} (1-k')^{t_2-2} + \dots$$

En estas fórmulas, sustituyendo por kx , observamos que para $f_k(kx)$, es cierta la primera de las ecuaciones.

Para el segundo caso tenemos: si $t_0 \neq 1$, entonces

$$k + (1-k)x = k + k^{t_0} (1-k) + \dots + k^{t_0} (1-k)^{s_0+1} + \\ + k^{t_1} (1-k)^{s_0+2} + \dots + k^{t_1} (1-k)^{s_1+1} + \dots$$

y

$$f_{k,k'}(k + (1-k)x) = k'^2 + k'^2 (1-k') + \dots \\ + k'^2 (1-k')^{t_0-2} + k'^{s_0+3} (1-k')^{t_0-1} + \dots \\ + k'^{s_0+3} (1-k')^{t_1-2} + \dots$$

y si $t_0 = 1$, entonces

$$f_{k,k'}(x) = k'^{s_0+2} (1-k')^{t_0-1} + \dots + k'^{s_0+2} (1-k')^{t_1-2} + \dots$$

y

$$f_{k,k'}(k + (1-k)x) = k'^{s_0+3} (1-k')^{t_0-1} + \dots \\ + k'^{s_0+3} (1-k')^{t_1-2} + \dots$$

En ambos casos, se cumple la segunda de las ecuaciones. ■

Corolario 3.80 *La función $N_{k,k'}$ y $f_{k,k'}$ son la misma función.*

Corolario 3.81 *La inversa de $N_{k,k'}$ es $N_{k',k}$.*

Para estudiar algunas dimensiones fractales haremos uso del lema de Frostman. En este caso utilizamos los cilindros del sistema de representación en lugar de bolas.

Teorema 3.82 *Cuando $k' \neq 1-k$, la función $N_{k,k'}$ aplica un conjunto de λ -medida 0 en otro de λ -medida 1. El*

primero de los conjuntos tiene dimensión de Hausdorff $\frac{\ln [k'^{k'} (1-k')^{1-k'}]}{\ln [k^{1-k'} (1-k)^{k'}]}$.

Demostración. El conjunto de puntos para el que su representación diádica generalizada con k cumple que $\lim_n \frac{m_n}{n} = \frac{1-k'}{k'}$ es un conjunto de medida cero. Este conjunto se aplica en otro de medida uno, ya que los puntos cuya representación diádica generalizada con k' satisfacen que $\lim_n \frac{m_n}{n} = \frac{1-k'}{k'}$ es un conjunto de medida uno. La expresión explícita de la función nos muestra que el conjunto

$$\left[\sum_{i=0}^n k^{m_i} (1-k)^i, \sum_{i=0}^n k^{m_i} (1-k)^i + k^{m_n-1} (1-k)^{n+1} \right]$$

se aplica en otro de longitud $(1-k')^{m_n-1} k'^{n+1}$. La dimensión de Hausdorff será el número

$$\sup \left\{ \beta > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-k')^{m_n-1} k'^{n+1}}{\left[k^{m_n-1} (1-k)^{n+1} \right]^\beta} < +\infty \right\}.$$

Tomando logaritmos, puesto que debe ser finito:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(m_n - 1) \ln(1 - k') + (n + 1) \ln k' - \beta (m_n - 1) \ln k - \beta (n + 1) \ln(1 - k)}{n} < +\infty,$$

y como $\frac{m_n}{n} \rightarrow \frac{1-k'}{k'}$, obtenemos que $\frac{\ln[k'^{k'}(1-k')^{1-k'}]}{\ln[k^{1-k'}(1-k)^{k'}]}$ es la dimensión deseada. ■

Puesto que la inversa de $N_{k,k'}$ es $N_{k',k}$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.83 *La función $N_{k,k'}$ aplica un conjunto de λ -medida 1 en otro de λ -medida 0 con dimensión de Hausdorff igual a $\frac{\ln[k^k(1-k)^{1-k}]}{\ln[k'^{1-k}(1-k')^k]}$.*

3.7.1. K -negaciones

El subconjunto de las t -normas arquimedianas (y t -conormas) es particularmente interesante puesto que pueden ser representadas por medio de la función llamada el generador aditivo. Es conocido que H es una t -norma arquimediana si, y sólo si, existe una función continua y estrictamente decreciente h tal que $H(x, y) = h^{[-1]}(h(x) + h(y))$ con $h : \mathbb{I} \rightarrow [0, +\infty]$ satisfaciendo $h(1) = 0$ y $h^{[-1]}$ es la pseudo inversa de h , definida por $h^{[-1]}(t) = h^{-1}(t)$ si $t \in [0, h(0)]$ y $h^{[-1]}(t) = 0$ si $t \in]f(0), +\infty]$. Un teorema equivalente existe para las t -conormas.

Llamamos negación asociada a H a la función $N_H : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ definida por $N(x) = h^{-1}(h(0) - h(x))$ y la t -conorma $H^*(x, y) = NH(N(x), N(y))$ es la t -conorma dual de H .

Evidentemente, $F = (1 - k)H + kH^* \in \text{FAL}$. Es conocido que F es idempotente; i.e.: $F(x, x) = x$, $\forall x \in \mathbb{I}$ si, y sólo si, $f = 1 - S_k^{-1}$.

Por tanto, N_H es una de las funciones $N_{k,k'}$; concretamente, aquella en que $k' = 1 - k$ (las representaremos por N_k). Estas funciones reciben el nombre de k -negaciones.

N_k está caracterizada, por ser la única función definida en \mathbb{I} y acotada para la que son ciertas las ecuaciones funcionales

$$\begin{cases} g(kx) = k + (1 - k)g(x) \\ g^2(x) = x. \end{cases}$$

Para más detalles en k -negaciones, véase el trabajo de Alsina et al. [2].

Los resultados previos nos permiten escribir los siguientes:

Teorema 3.84 *Para cada $k \in]0, 1[$ definimos la función $N_k : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ dada de la siguiente forma: cada x sin desarrollo finito (i.e., existe $1 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_d < \dots$, tal que*

$$\begin{aligned} x &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1 - k)^{s_0} + \\ &+ k^{t_1} (1 - k)^{s_0+1} + \dots + k^{t_1} (1 - k)^{s_1} + \dots \\ &+ k^{t_d} (1 - k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d} (1 - k)^{s_d} + \dots \end{aligned}$$

es aplicado en

$$\begin{aligned} N_k(x) &: = k + k(1 - k) + \dots + k(1 - k)^{t_0-2} + \\ &+ k^{s_0+2} (1 - k)^{t_0-1} + \dots + k^{s_0+2} (1 - k)^{t_1-2} + \\ &+ k^{s_1+2} (1 - k)^{t_1-1} + \dots + k^{s_1+2} (1 - k)^{t_2-2} + \dots \\ &+ k^{s_{d-1}+2} (1 - k)^{t_{d-1}-1} + \dots + k^{s_{d-1}+2} (1 - k)^{t_d-2} + \dots \end{aligned}$$

Si $t_0 := 1$, entonces $k + k(1 - k) + \dots + k(1 - k)^{t_0-2}$ no aparece. En el caso de admitir desarrollo finito

$$\begin{aligned} x &= k^{t_0} + \dots + k^{t_0} (1 - k)^{s_0} + \dots \\ &+ k^{t_d} (1 - k)^{s_{d-1}+1} + \dots + k^{t_d} (1 - k)^{s_d}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} N_k(x) &: = k + k(1 - k) + \dots + k(1 - k)^{t_0-2} + \dots \\ &+ k^{s_{d-1}+2} (1 - k)^{t_{d-1}-1} + \dots \\ &+ k^{s_{d-1}+2} (1 - k)^{t_d-2} + k^{s_d+1} (1 - k)^{t_d-1}. \end{aligned}$$

Proposición 3.85 *La negación N_k es una función continua.*

Teorema 3.86 *Para cada $k \in]0, 1[\setminus 1/2$, existe un conjunto de medida 1 donde la negación N_k tiene derivada nula en cada punto.*

Proposición 3.87 *Si $k \in]0, 1[\setminus 1/2$, la negación N_k no admite derivada distinta de cero.*

Teorema 3.88 *La negación N_k es la única solución acotada del sistema de ecuaciones funcionales dado por*

$$\begin{cases} f(kx) = k + (1-k)f(x) \\ f(k + (1-k)x) = kf(x) \end{cases}$$

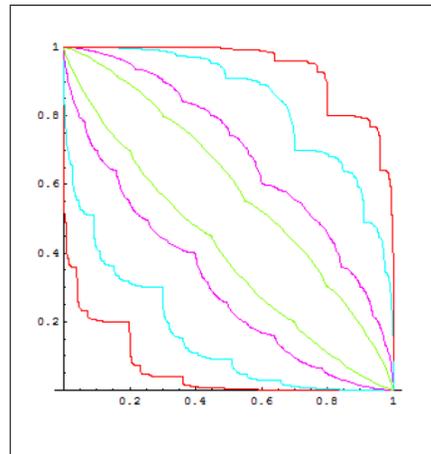
Teorema 3.89 *La k -negación N_k aplica un conjunto de λ -medida 0 en un conjunto de λ -medida 1. El primero de ellos tiene dimensión de Hausdorff*

$$\frac{\ln \left[k^k (1-k)^{1-k} \right]}{\ln \left[k^{1-k} (1-k)^k \right]}.$$

Teorema 3.90 *La k -negación N_k aplica un conjunto de λ -medida 1 en un conjunto de λ -medida 0 con dimensión de Hausdorff igual a*

$$\frac{\ln \left[k^k (1-k)^{1-k} \right]}{\ln \left[k^{1-k} (1-k)^k \right]}.$$

Ejemplos de varias gráficas de k -negaciones son:



Capítulo 4

Una función de Salem generalizada

4.1. Introducción

En el Capítulo anterior hemos descrito el método geométrico que permite crear las funciones S_a . Recordemos que se introduce el operador π_a en un segmento \overline{AB} cuyos extremos tienen coordenadas $A = (x, y)$, $B = (x + \Delta x, y + \Delta y)$; y consideramos el punto $C = \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}\right)$ en $\pi_a(\overline{AB})$, y \overline{ACB} es la poligonal formada por los segmentos \overline{AC} y \overline{CB} .

Designemos f_0 al segmento que une $(0,0)$ con $(1,1)$; f_1 se obtiene aplicando π_a al segmento anterior; f_2 lo obtenemos operando π_a a los dos segmentos de que consta; para f_3 aplicamos π_a a los 2^2 segmentos de f_2 y así repetida y sucesivamente

$$f^a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

En [150] el autor generaliza esta construcción. El proceso es similar al utilizado para f^a , pero en esta ocasión π_a no será siempre la misma, utilizaremos un valor b_n , que pueden ser iguales o diferentes, en cada uno de los pasos. De este modo: f_0 es el segmento que une $(0,0)$ con $(1,1)$; pero ahora f_1 se obtiene aplicando π_{b_1} al segmento anterior; f_2 lo obtenemos operando con π_{b_2} sobre los dos segmentos de que consta f_1 ; para f_3 aplicamos π_{b_3} a los 2^2 segmentos de f_2 ; y así, sucesivamente,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

En este Capítulo se estudia un caso particular de esta última construcción, concretamente aquel en que $a_k = \frac{1}{k+1}$. La función inversa había sido estudiada en [92]. Se obtiene estableciendo una función que relaciona los puntos del intervalo \mathbb{I} expresado en el sistema de representación binario con estos mismos puntos representados en el sistema que llamaremos de Engel modificado. Se obtiene, con facilidad, que la función, a la que llamaremos G , es singular; i.e., es continua, monótona creciente y tiene derivada nula en un conjunto de medida (Lebesgue) uno. También se demuestra que tanto dG , la medida de Stieltjes asociada con G , como dG^{-1} , la asociada con su inversa, concentran su masa en conjuntos de dimensión fractal cero y se calcula su dimensión de Hausdorff exacta.

En el apartado final se describe una función c definida en \mathbb{I} con la propiedad de que para cualquier punto x de ese intervalo, la sucesión tiene a SG^{-1} como a.d.f.

4.2. Relación entre sistemas de representación y dimensiones de Hausdorff

Para cada $x \in]0, 1]$ existe un único natural n tal que

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}.$$

Consideremos el algoritmo

$$x = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \frac{x'}{n+1}.$$

Entonces, con el número $\frac{x'}{n+1}$, podemos realizar un proceso iterativo que queda reflejado en este resultado:

Teorema 4.1 (Representación de Engel modificada) Para cada número real $x \in]0, 1]$, existe una sucesión de números naturales, estrictamente creciente, $(a_n)_{n \geq 1}$, tal que

$$x = \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_1(a_2 + 1)} + \frac{1}{a_1 a_2(a_3 + 1)} + \dots$$

A tal sucesión se le llama representación modificada de Engel del número real dado.

Teorema 4.2 Para cada número irracional existe una única representación modificada de Engel. Sin embargo, para cada racional existe dos representaciones modificadas de Engel; a saber, una finita y la otra infinita.

Otra propiedad de interés para nosotros concernientes a la representación modificada de Engel, involucra al famoso número e . (Para una demostración de tal hecho pueden consultarse [68] or [132].) La podemos enunciar así:

Teorema 4.3 Existe un conjunto medible en el sentido de Lebesgue con medida 1 tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e$$

para cada una de las representaciones de sus elementos.

Definición 4.4 Para $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_i}}$ (escrito en el sistema diádico) tenemos el valor

$$SG(x) = \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_1(a_2 + 1)} + \frac{1}{a_1 a_2(a_3 + 1)} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3(a_4 + 1)} + \dots$$

(Escrito en el sistema de Engel modificado.)

El siguiente lema se obtiene sin dificultad por inducción.

Lema 4.5 Se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} - \frac{1}{(m+1)(m+3)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+4)} - \dots \\ & - \frac{1}{(m+1)(m+2) \dots (k-2)k} - \frac{1}{(m+1)(m+2) \dots (k-1)(k+1)} \\ & = \frac{1}{(m+1)(m+2) \dots k(k+1)} \end{aligned}$$

La función SG tiene, entre otras, las siguiente propiedades.

Proposición 4.6 La función SG está bien definida.

Demostración. Para un punto con dos representaciones

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{a_i}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{a_i}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_n+i}}$$

Para cada una de las expresiones SG toma la forma

$$\begin{aligned} SG(x) &= \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_1(a_2 + 1)} + \frac{1}{a_1 a_2(a_3 + 1)} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n + 1)} \\ SG(x) &= \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_1(a_2 + 1)} + \frac{1}{a_1 a_2(a_3 + 1)} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n + 2)} + \\ & \quad + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n + 1)(a_n + 3)} + \\ & \quad + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n + 1)(a_n + 2)(a_n + 4)} + \dots \end{aligned}$$

por el lema anterior, tomando límites,

$$\frac{1}{a_n + 1} = \frac{1}{a_n + 2} + \frac{1}{(a_n + 1)(a_n + 3)} + \frac{1}{(a_n + 1)(a_n + 2)(a_n + 4)} + \dots$$

y la función tiene el mismo valor para las dos expresiones de x . ■

Proposición 4.7 *La función SG es monótona creciente.*

Demostración. Consideremos los valores

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{a_i}} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_j}}; \quad y = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{a_i}} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{a'_j}}$$

con $a_{n+1} > a'_{n+1}$ que implica $x < y$ y las imágenes son

$$\begin{aligned} SG(x) &= \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_1(a_2 + 1)} + \frac{1}{a_1 a_2 (a_3 + 1)} + \dots \\ &+ \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n + 1)} + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} \left(\frac{1}{a_{n+1} + 1} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{a_{n+1} (a_{n+2} + 1)} + \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} (a_{n+3} + 1)} + \dots \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} SG(y) &= \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_1(a_2 + 1)} + \frac{1}{a_1 a_2 (a_3 + 1)} + \dots \\ &+ \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n + 1)} + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} \left(\frac{1}{a'_{n+1} + 1} + \frac{1}{a'_{n+1} (a'_{n+2} + 1)} \right. \\ &\left. + \frac{1}{a'_{n+1} a'_{n+2} (a'_{n+3} + 1)} + \dots \right) \end{aligned}$$

Como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a_{n+1}+1} < \frac{1}{a_{n+1}+1} + \frac{1}{a_{n+1}(a_{n+2}+1)} + \dots \leq \frac{1}{a_{n+1}} \\ \frac{1}{a'_{n+1}+1} \leq \frac{1}{a'_{n+1}+1} + \frac{1}{a'_{n+1}(a'_{n+2}+1)} < \frac{1}{a'_{n+1}+1} + \frac{1}{a'_{n+1}(a'_{n+2}+1)} \dots \end{array} \right.$$

teniendo en cuenta que $\frac{1}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{a'_{n+1}+1}$, concluimos que $SG(x) < SG(y)$. ■

Teorema 4.8 *La función SG es continua.*

Demostración. Si x tiene desarrollo finito $x = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{a_i}}$ y tenemos una sucesión convergente a x cuyos términos son todos mayores que x , a partir de cierto valor n_r el coeficiente a_{k+1} de x_m es mayor que r y

$$|SG(x) - SG(x_m)| < \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k r}.$$

Si los valores de la sucesión son menores que x , a partir de cierto valor son de la forma

$$x_m = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^{a_i}} + \sum_{i=a_{k-1}+1}^{r+1} \frac{1}{2^i} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_j}}$$

y

$$|SG(x) - SG(x_m)| < \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{k-1} (a_{k-1} + 1) \dots r}.$$

Como cualquier sucesión convergente a x puede descomponerse en dos sucesiones de este tipo, concluimos que $SG(x_n) \rightarrow SG(x)$.

Si x no tiene desarrollo finito y (x_n) tiende a x a partir de cierto valor de n_k , los primeros k valores de a_i son iguales, por tanto $SG(x)$ y $SG(x_n)$ tienen en común esos valores, así que

$$|SG(x) - SG(x_n)| < 2 \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k}$$

teniendo que $SG(x_n) \rightarrow SG(x)$ y SG es continua. ■

Teorema 4.9 *La función SG es singular.*

Demostración. Consideremos un número $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_i}}$ normal en el sistema diádico, por tanto, en su desarrollo binario existirán infinitas cuaternas de la forma 1010, el primer uno correspondería a $a_{n_{k-1}}$ y el segundo a a_{n_k} . Definimos

$$x_k = \sum_{i=1}^{n_k-1} \frac{1}{2^{a_i}}; \quad y_k = x_k + \frac{1}{2^{a_{n_{k-1}+1}}}$$

$$x'_k = \sum_{i=1}^{n_k-1} \frac{1}{2^{a_i}}; \quad y'_k = x'_k + \frac{1}{2^{a_{n_k+1}}}$$

En ambas parejas tenemos las desigualdades $x_k < x < y_k$, $x'_k < x < y'_k$. Si existe $SG'(x)$, por el lema 0.3:

$$SG'(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{SG(y_k) - SG(x_k)}{y_k - x_k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{SG(y'_k) - SG(x'_k)}{y'_k - x'_k}.$$

Por tanto, si $SG'(x) \neq 0$ el límite de los cocientes incrementales ha de ser uno.

Pero,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n_k} (a_{n_k} + 2)}}{\frac{1}{2^{a_{n_k} + 1}}} : \frac{\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n_{k-1}} (a_{n_{k-1}} + 2)}}{\frac{1}{2^{a_{n_{k-1}} + 1}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_{n_k} - a_{n_{k-1}}} (a_{n_{k-1}} + 2)}{a_{n_k} (a_{n_k} + 2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 (a_{n_{k-1}} + 2)}{a_{n_k} (a_{n_k} + 2)} = 0,$$

y al no ser uno, de existir $SG'(x)$ ha de ser cero para los números normales. Como es monótona, es derivable en un conjunto de medida uno; y como los números normales también son de medida uno. Concluimos que $SG'(x) = 0$ en un conjunto de este tipo. ■

Teorema 4.10 *La función SG es una función de Salem generalizada con $a_k = 1 - \frac{1}{k+1}$.*

Demostración. Para comprobarlo basta fijarnos en los valores de la forma $\frac{m}{2^k}$, que es donde se aplican las sucesivas transformaciones i . Estudiemos los tres valores

$$x' = \frac{l}{2^k}; \quad x'' = \frac{l+1}{2^k}; \quad x''' = \frac{2l+1}{2^{k+1}}.$$

a) Cuando l es par

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{2^{a_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}}; \quad SG(x') = \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_1(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} (a_n+1)} \\ x'' = x' + \frac{1}{2^k}; \quad SG(x'') = SG(x') + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n (k+1)} \\ x''' = x' + \frac{1}{2^k}; \quad SG(x''') = SG(x') + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n (k+2)} \end{array} \right.$$

Con estos valores tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} SG(x'') - SG(x') = \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n (k+1)} = \Delta y \\ SG(x''') - SG(x') = \frac{k+1}{a_1 a_2 \cdots a_n (k+1)(k+2)} = \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \Delta y \end{array} \right.$$

b) Si $l+1$ es par, consideramos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{2^{a_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_{n-1}}} + \frac{1}{2^{a_n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\ x'' = \frac{1}{2^{a_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \\ x''' = \frac{1}{2^{a_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_{n-1}}} + \frac{1}{2^{a_n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \end{array} \right.$$

Sus imágenes mediante SG son:

$$\begin{cases} SG(x') = \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_1(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-2}(a_{n-1}+1)} + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n+2)} + \\ \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n+1)(a_n+3)} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n+1) \dots (k-1)(k+1)} \\ SG(x'') = \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_1(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n+1)} \\ SG(x''') = SG(x') + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n+1) \dots (k)(k+2)} \end{cases}$$

En esta ocasión:

$$\begin{aligned} \Delta y &= SG(x'') - SG(x') \\ &= \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n+1)} - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-2}(a_{n-1}+1)} - \cdots \\ &\quad - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n+1) \dots (k-1)(k+1)} \\ &= \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \left(\frac{1}{(a_n+1)} - \frac{1}{(a_n+2)} - \frac{1}{(a_n+1)(a_n+3)} \cdots \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(a_n+1)(a_n+2) \dots (k-1)(k+1)} \right) \\ &= \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \frac{1}{(a_n+1) \dots (k+1)} \\ &= \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n+1) \dots (k+2)}. \end{aligned}$$

(La penúltima igualdad es consecuencia del lema anterior.)

Por otro lado,

$$\begin{aligned} SG(x''') - SG(x') &= \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n+1) \dots k(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n+1) \dots k(k+1)(k+2)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{k+2} \right) \Delta y. \end{aligned}$$

Como el primer caso corresponde a $k = 0$, obtenemos $a_1 = 1 - \frac{1}{2}$; el segundo para $k = 1$ con $a_2 = 1 - \frac{1}{3}$ y, en general, $a_m = 1 - \frac{1}{m+1}$. Teniendo que, efectivamente, SG es una función de Salem generalizada con estos coeficientes. ■

Teorema 4.11 *La función de Salem generalizada con $b_k = \frac{1}{k+1}$ es $G(x) = 1 - SG(1-x)$.*

Demostración. Como anteriormente estudiamos la función para puntos distinguidos $\frac{l}{2^k}$; $\frac{2l+1}{2^{k+1}}$; $\frac{l+1}{2^k}$:

$$\begin{aligned} G\left(\frac{2l+1}{2^{k+1}}\right) - G\left(\frac{l}{2^k}\right) &= SG\left(1 - \frac{l}{2^k}\right) - SG\left(1 - \frac{2l+1}{2^{k+1}}\right) \\ &= SG\left(\frac{2^k-l}{2^k}\right) - SG\left(\frac{2^{k+1}-2l-1}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{k+2} \left(SG\left(\frac{2^k-l}{2^k}\right) - SG\left(\frac{2^k-l-1}{2^k}\right) \right) \\ &= \frac{1}{k+2} \left(SG\left(1 - \frac{l}{2^k}\right) - SG\left(1 - \frac{l+1}{2^k}\right) \right) \\ &= \frac{1}{k+2} \left(G\left(\frac{l+1}{2^k}\right) - G\left(\frac{l}{2^k}\right) \right). \end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia del teorema anterior. Observamos que la función verifica el enunciado. ■

De este modo hemos podido relacionar la función de Salem con coeficientes $\frac{1}{m+1}$ con dos sistemas de numeración. Los siguientes resultados son ciertos para SG o G , pero, para una mayor facilidad, las demostraciones se harán con SG .

Corolario 4.12 Si existe $G'(x)$, ha de ser cero.

Teorema 4.13 Las funciones SG y G aplican un conjunto de medida cero en uno de medida uno y la dimensión fractal del primero es cero.

Demostración. El conjunto de puntos en los que los coeficientes a_n en el desarrollo de Engel modificado cumplen que $\sqrt[n]{a_n}$ converge a e , es de medida uno. Por ello, el conjunto de valores con desarrollo diádico $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_n}}$ con $a_n = e^{n+o(n)}$ se aplica en este conjunto (de medida uno). Pero como en casi todos los números de \mathbb{I} se tiene que en su desarrollo diádico $a_n = 2n + o(n)$, el conjunto anterior es de medida cero. Para estudiar su dimensión fractal, en esta ocasión para los puntos x con esa propiedad en los coeficientes, tomamos $\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{a_i}}, \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{a_i}} + \frac{1}{2^{a_n}} \right]$. Su imagen mediante SG es el intervalo de extremos

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_1(a_2 + 1)} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n + 1)}$$

y

$$\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_1(a_2 + 1)} + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}(a_n + 1)} + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n(a_n + 1)},$$

cuyas longitudes son $\frac{1}{2^{a_n}}$ y $\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n(a_n + 1)}$.

Siendo la dimensión de Hausdorff

$$\sup \left\{ \beta \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_n \beta}}{a_1 a_2 \dots a_n (a_n + 1)} < \infty \right\},$$

si tomamos logaritmos,

$$\frac{a_n \beta \ln 2 - (\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n + \ln(a_n + 1))}{e^n} e^n < \infty;$$

y para β tenemos:

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n + \ln(a_n + 1)}{e^n \ln 2} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(a_n + 1)}{e^n \ln 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+o(n))}{e^n \ln 2} = 0. \end{aligned}$$

Como β no es negativo, ha de ser cero. ■

Teorema 4.14 La imagen del conjunto de números normales en el sistema diádico mediante SG es un conjunto de medida cero y de dimensión fractal también cero.

Demostración. Un elemento del conjunto de números normales diádicos es aplicable en un valor cuyo n -ésimo coeficiente de Engel modificado es $a_n = O(n)$ y este conjunto es de medida cero. Para ver su dimensión fractal procedemos como en el teorema anterior. En esta ocasión la función a utilizar será SG y los intervalos los cilindros del sistema de representación de Engel modificado. La dimensión fractal será

$$\sup \left\{ \beta \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 a_2 \dots a_n (a_n + 1))^\beta}{2^{a_n}} < \infty \right\}$$

tomando logaritmos

$$\frac{\beta (\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n + \ln(a_n + 1)) - a_n \ln 2}{2n} 2n < \infty$$

y β será (en la segunda igualdad tenemos en cuenta que al ser los números normales para los coeficientes diádicos $a_n = 2n + o(n)$):

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n} \frac{2n \ln 2}{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n + \ln(a_n + 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \ln 2}{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n + \ln(a_n + 1)}, \end{aligned}$$

donde volvemos a hacer uso de $a_n = 2n + o(n)$. Podemos tomar n suficientemente grande, de modo que $a_i > \sqrt[4]{n}$ para $i = \sqrt{n}, \dots, n$; y el último límite es menor o igual que

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \ln 2}{(n - \sqrt{n}) \ln \sqrt[4]{n}} = 0.$$

Como anteriormente, también ahora, la dimensión fractal es cero. ■

4.3. Unas cuestiones sobre la derivada

Teorema 4.15 Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_n}}$ es un punto irracional para el que existe $0 < \alpha < 1$ tal que $a_n < n \ln^{\alpha} n$ a partir de cierto valor, y existe la derivada generalizada, entonces $SG'(x) = 0$.

Demostración. Encontramos una infinidad de ocasiones en las que $a_{n+1} > a_n + 1$. Tomemos $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{a_i}}$ y $x'_n = x_n + \frac{1}{2^{a_n+1}}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{SG(x'_n) - SG(x_n)}{x'_n - x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_n+1}}{a_1 a_2 \dots a_n (a_n + 2)} \\ &\ll \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_n+1}}{n!} \\ &= 2^{a_n+1 - (n+1) \lg_2 a_n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln^{\alpha} n \ln 2 - n \ln n + O(n)} = 0, \end{aligned}$$

de modo que se concluye la prueba. ■

Teorema 4.16 Si x es un número simplemente normal en base dos entonces existe derivada y es cero.

Demostración. Sean $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_n}}$ y x' un número menor que x con $a_i = a'_i$ desde 1 hasta n , pero $a_{n+1} \neq a'_{n+1}$. Entonces,

$$0 \leq \frac{SG(x') - SG(x)}{x' - x} \ll \frac{2^{a_{n+2}}}{a_1 a_2 \dots a_n} \ll \frac{2^{a_{n+2}}}{n!} = \frac{2^{2n+o(n)}}{n!};$$

por lo que existe

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' < x}} \frac{SG(x') - SG(x)}{x' - x} = 0.$$

Si tomamos x' mayor que x con $a_i = a'_i$ desde 1 hasta n , pero $a_{n+1} \neq a'_{n+1}$ con $a_{n+1} = a_n + 1; \dots; a_{n+k} = a_n + k$; entonces el valor máximo en esa serie de igualdades (k depende de n), al ser simplemente normal, obtenemos que $k = o(n)$ y

$$0 \leq \frac{SG(x') - SG(x)}{x' - x} \ll \frac{2^{a_n+k}}{a_1 a_2 \dots a_n} \ll \frac{2^{2n+o(n)}}{n!}$$

por lo que existe

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' > x}} \frac{SG(x') - SG(x)}{x' - x} = 0$$

■

Teorema 4.17 Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_n}}$ es un punto en el que existe $\alpha > 1$ tal que $a_n > n \ln^{\alpha} n$ a partir de cierto valor; y existe derivada generalizada, entonces $SG'(x) = +\infty$

Demostración. Encontramos una infinidad de ocasiones en que $a_{n+1} > a_n + 1$. Tomemos $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{a_i}}$ y $x'_n = x_n + \frac{1}{2^{a_n+1}}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{SG(x'_n) - SG(x_n)}{x'_n - x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_n+1}}{a_1 a_2 \dots a_n (a_n + 2)} \\ &\gg \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_n+1}}{a_n^{n+1}} \\ &= 2^{a_n+1 - (n+1) \lg_2 a_n}. \end{aligned}$$

Si $a_n + 1 = n \ln^\beta n$, donde β depende de n , la última expresión es $2^{n \ln^\beta n - (n+1)(\ln n + \beta \ln \ln n) / \ln 2}$ que tiende a infinito al ser $\beta \geq \alpha > 1$. ■

Corolario 4.18 *En el conjunto de valores tales que $a_n = e^{n+o(n)}$ concentra la masa de dG , si hay derivada extendida, ha de ser con valor $+\infty$*

4.4. Una función que genera a SG^{-1} como a.d.f.

Recordamos que la sucesión (a_n) tiene a F (función de distribución) como a.d.f. (función de distribución asintótica), si existe el límite y se da la igualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{a_k < x : k = 1, \dots, n\}}{n} = F(x).$$

Definición 4.19 *Una sucesión (a_n) de términos de $]0, 1[$ tiene a g como a.d.f. si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : a_k \leq x \text{ y } k \leq n\}}{n} = g(x)$$

para todo x de \mathbb{I} .

Atendiendo al siguiente resultado, podemos encontrar una ordenación de los racionales que nos dé las funciones estudiadas anteriormente como a.d.f. (por la forma de construirlas realmente habrían de ser estudiadas únicamente dos).

Teorema 4.20 ([127, pág. 140.]) *Sea g una función no decreciente definida en \mathbb{I} , continua por la derecha con $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$. Entonces, toda sucesión densa en $]0, 1[$ puede ser reordenada de modo que se obtiene una nueva función que tiene a g como a.d.f.*

Parece complicado encontrar una ordenación de estos números para obtener la función f como a.d.f., pero no resulta complicado hacerlo para f^{-1} .

Notación 4.21 *Tomando prestada la notación de fracciones continuas notaremos por $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ al número $\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_1(a_2+1)} + \dots + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{k-1}(a_k+1)}$; y del mismo modo, para el desarrollo infinito.*

Definición 4.22 *Sea $b : \mathbb{Z}^+ \rightarrow]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ donde $b(n) = b_n = [a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_k + 1]$ y los valores a_i corresponden al desarrollo en base dos de $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}$.*

Teorema 4.23 *La sucesión (b_n) tiene a f^{-1} como a.d.f.*

Demostración. Es consecuencia de la distribución uniforme de $x_n = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_k}}$ donde $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}$. ■

Proposición 4.24 *a) Para $b_n = [1, 2, 3, \dots, s, a_{s+1}, \dots, a_k]$, con $a_{s+1} > s+1$, se tiene $c(b_n) = [s+1, a_{s+1}, \dots, a_k]$, lo que incluye el caso $s = 0$.*

b) Si

$$\begin{cases} b_r = [a_1, a_2, \dots, a_s, d_1, \dots, d_l], & n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_s} \\ b_{r'} = [a'_1, a'_2, \dots, a'_{s'}, d_1, \dots, d_l], & n = 2^{a'_1} + 2^{a'_2} + \dots + 2^{a'_{s'}}, \end{cases}$$

con $n' > n$, $n'' = n' - n$; entonces, $c^{n'-n}(b_{r'}) = b_r$.

c) Podemos extender c a \mathbb{I} obteniendo una biyección $c : \mathbb{I} \rightarrow [0, 1[$, cuya expresión restringida a ciertos intervalos son trozos de recta

$$\left[1 - \frac{1}{n!}, 1 - \frac{1}{(n+1)!}\right] \longrightarrow \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$$

$$c(x) = \frac{(n-1)!}{n}x - \frac{n!-1}{n^2} + \frac{1}{n+1}$$

y $c(1) = 0$.

También podemos utilizar una expresión similar a la del primer punto: para $x = [1, 2, 3, \dots, s, a_{s+1}, \dots]$, con $a_{s+1} > s + 1$, se tiene $c(x) = [s + 1, a_{s+1}, \dots]$.

d) La transformación c respeta la naturaleza aritmética de x ; es decir:

i. $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow c(x) \in \mathbb{Q}$.

ii. x es algebraico de orden $n \Leftrightarrow$ lo es $c(x)$.

iii. x es trascendente \Leftrightarrow también lo es $c(x)$.

Lema 4.25 Dada una sucesión (s_n) que tiene una función g continua como a.d.f. y otra (t_n) convergente a cero entonces la sucesión $(s_n + t_n)$ tiene a g como a.d.f.

Teorema 4.26 Si c^n es la composición de c con ella misma n veces, para cualquier punto x de \mathbb{I} la sucesión $(c^n(x))$ tiene a f^{-1} como a.d.f.

Para terminar mostraremos que la función c nos permite dar un ejemplo, similar al que se muestra en [147, pág. 52], de un conjunto que no es medible Lebesgue.

Definición 4.27 Decimos que dos puntos x, y de \mathbb{I} son equivalentes si existe un entero positivo n para el que $c^n(x) = y$ o $c^n(y) = x$.

Claramente se trata de una relación de equivalencia. Definimos un conjunto S formado por un elemento de cada una de las clases de equivalencia descrita anteriormente con la condición adicional de que pertenezca a $[0, 1/2[$.

Teorema 4.28 El conjunto S no es medible.

Demostración. Supongamos que S sea Lebesgue medible. La demostración se basa en los dos puntos siguientes:

a. Los conjuntos $S, c(S), c^2(S), \dots$ son disjuntos.

b. Si A es un conjunto medible tal que $c(A)$ y $c^2(A)$ son disjuntos, entonces $\lambda(c(A) \cup c^2(A)) \geq \lambda(A)$.

La primera afirmación es cierta debido a la definición de c . Para la segunda, necesitamos observar la acción de c en el intervalo \mathbb{I} . Se trata de trozos de funciones afines sobre ciertos subintervalos. Por tanto, la medida de sus correspondientes imágenes es la medida del conjunto inicial multiplicado por la pendiente correspondiente a cada subintervalo. Como el mínimo de ellas es $1/2$, entonces 1 corresponde al intervalo $]0, 1/2[$; y aplica los subintervalos $]0, 1/2[$ y $]1/2, 1[$, uno en el otro. Obtenemos la desigualdad anunciada.

Aplicando estos resultados al caso que nos ocupa:

i) $\lambda(c(S) \cup c^2(S)) \geq \lambda(S)$.

ii) $\lambda(c^3(S) \cup c^4(S) \cup c^5(S) \cup c^6(S)) \geq \lambda(c(c(S) \cup c^2(S)) \cup c^2(c(S) \cup c^2(S)))$
 $\geq \lambda(c(S) \cup c^2(S)) \geq \lambda(S)$.

iii) $\lambda(c^7(S) \cup c^8(S) \cup c^9(S) \cup c^{10}(S) \cup c^{11}(S) \cup c^{12}(S) \cup c^{13}(S) \cup c^{14}(S))$
 $\geq \lambda(S)$.

En general, $\lambda(\cup_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} c^j(S)) \geq \lambda(S)$; y, por tanto,

$$1 = \lambda(\mathbb{I}) \geq \lambda\left(\cup_{j=0}^{2^{n+1}-1} c^j(S)\right) = (n+1)\lambda(S),$$

para todo n , lo que implica que $\lambda(S) = 0$.

Por otra parte, siendo S un conjunto medible de medida nula, y puesto que c es afín a trozos, tenemos $\lambda(c^k(S)) = 0$ para todo entero positivo k . Como, c^{-1} es también afín a trozos, de la misma forma, tenemos que $\lambda(c^{-k}(S)) = 0$ para todo entero positivo k . Pero esto contradice que $\lambda(c^k(S)) > 0$, para algún k . (Notemos que $\mathbb{I} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(c^k(S))$.)

■

Capítulo 5

Interpolación y funciones singulares en fractales

5.1. Introducción

Una cuestión planteada durante mucho tiempo en el Análisis Matemático en Fractales es la existencia de un operador de Laplace en un conjunto autosimilar. Durante las últimas décadas han tenido lugar varias aproximaciones que han sido desarrolladas con la finalidad de crear una Teoría del Potencial. El principal impulso se debe a varios trabajos de Kigami (véanse [95] y [96]) de los que surge una teoría general del análisis en los conjuntos autosimilares p.c.f. (*post critically finite*). Se desarrolla bajo la hipótesis de la existencia de una estructura armónica y de un operador de Laplace autosimilar.

Basado en el trabajo de Hutchinson [81] y usando los sistemas de funciones iterados (IFS), Barnsley introduce en [20] el método de interpolación fractal por el que se construyen funciones, con cierta propiedad, que interpolan una serie de datos.

Este Capítulo tiene dos objetivos. En primer lugar, se intenta generalizar los resultados de Barnsley en un intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} a los conjuntos de tipo p.c.f. (en un problema que llamaremos interpolación de Barnsley generalizado), utilizando para su solución funciones armónicas.

El segundo de los objetivos es estudiar la restricción a \mathbb{I} de ciertas funciones armónicas en un caso particular de conjuntos autosimilares (a saber, el triángulo de Sierpiński); y dar una respuesta positiva a una conjetura planteada por Demir et al. [45].

5.2. Notaciones y definiciones

En esta sección recordamos algunas de las definiciones y propiedades relacionadas con la interpolación fractal y las funciones armónicas. Para una información detallada, véanse [97, sec. 1-3] y [21, Chap. 6].

Anteriormente se señaló que un *sistema de funciones iterado* (IFS, por sus siglas en inglés) es un conjunto finito de contracciones $\{F_1, \dots, F_m\}$ definidas en un espacio métrico (X, d) dado (sobre sí mismo); y que el principal resultado consiste en que para un IFS dado por $\{F_1, \dots, F_m\}$, existe un único compacto K , tal que $K = \cup_i F_i(K)$.

5.2.1. Funciones de Interpolación Fractal

Supongamos que se conoce un conjunto de puntos (datos)

$$\Gamma := \{(x_i, u_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, 1, 2, \dots, N; N \geq 2\},$$

con $x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i-1} < \dots < x_N$. Una *función de interpolación* para este conjunto de puntos es una función continua $h : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x_i) = u_i$ para cada $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Diremos que h interpola los datos (x_i, u_i) ; y que la gráfica de h pasa por los puntos de interpolación. En [21, Chap. 6] se muestra cómo se puede construir un IFS (en \mathbb{R}^2) tal que su atractor, que notaremos por G , sea la gráfica de la función h que interpola los datos.

Notaremos $[N] := \{1, 2, 3, \dots, N\}$. Sean $F_i : [x_0, x_N] \rightarrow [x_{i-1}, x_i]$ las similaridades dadas por $F_i(x) = m_i x + n_i$ donde $m_i = \frac{x_{i-1} - x_i}{x_0 - x_N}$ y $n_i = \frac{x_0 x_i - x_N x_{i-1}}{x_0 - x_N}$ para $i \in [N]$. Sea $M_i : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua satisfaciendo $M_i(x_0) = 0$, $M_i(x_N) = 1$ para $i \in [N]$ y para la que existe $c > 0$ tal que $|M_i(x) - M_i(y)| \leq c|x - y|$.

A continuación, definimos en $[x_0, x_N]$ las funciones $r_i(x) = m'_i M_i(x) + n'_i$, donde $m'_i = u_i - u_{i-1} + \rho_i(u_0 - u_N)$ y $n'_i = u_{i-1} - \rho_i u_0$.

Finalmente, para $i \in [N]$ sea $P_i : [x_0, x_N] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación definida por $P_i(x, y) = (F_i(x), \rho_i y + r_i(x))$, donde $|\rho_i| < 1$.

En [21, Chap. 6]., el autor demuestra un teorema de interpolación fractal, cuya versión damos utilizando la terminología anterior.

Teorema 5.1 Sean Γ un conjunto de datos y P_i las funciones definidas anteriormente. Entonces, existe una única función continua $h : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ que interpola el conjunto de datos Γ , satisfaciendo $h(F_i(x)) = \rho_i h(x) + r_i(x)$ para $x \in [x_0, x_N]$, $i \in [N]$ y tal que su gráfica G es el atractor del IFS determinado por las funciones P_i . Es decir, $G = \cup_{i \in [N]} P_i(G)$.

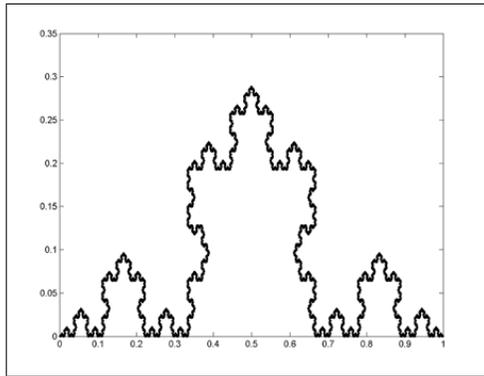
La función h cuya gráfica es el atractor de un IFS como se describe en el teorema 5.1 es llamada la *función de interpolación fractal* (abreviadamente FIF).

Ejemplo 5.2 La función de Takagi, que fue estudiada en el capítulo 1, es un ejemplo de FIF con $\Gamma = \{(0, 0), (1/2, 1/2), (1, 0)\}$. Nótese que no necesariamente la función ha de tener falta de regularidad para la derivada. Por ejemplo, la parábola $y = x(x - 1)$ es la gráfica de la función correspondiente a $\Gamma = \{(0, 0), (1/2, 1/4), (1, 0)\}$.

El intervalo unidad \mathbb{I} puede verse como un caso particular de conjunto autosimilar. Es el caso "límite" de distintas familias, por ejemplo:

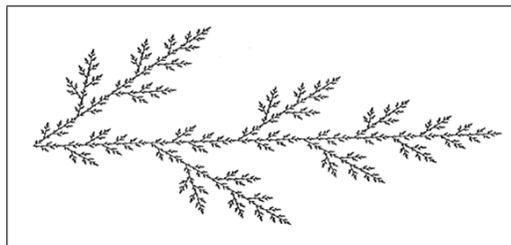
a) Familia de funciones tipo Von Koch, $0 < \text{Im}(\rho) \leq \sqrt{3}/6$ ([138]).

$$G_\rho(t) = \begin{cases} \rho \overline{G}(2t), & \text{si } 0 \leq y \leq 1/2 \\ (1 - \rho) \overline{G}(2t - 1) + \rho, & \text{si } 1/2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



Curva de Von Koch

b) El árbol de Hata (véase [97, ejemplo 1.2.9]). Sea $X = \mathbb{C}$; para las funciones $F_1(z) = c\bar{z}$, y $F_2(z) = (1 - |c|^2)\bar{z} + |c|^2$, donde $|c|, |c - 1| \in]0, 1[$. Resulta el conjunto autosimilar con respecto a $\{F_1, F_2\}$ llamado como árbol de Hata.



Árbol de Hata

Los elementos de la primera familia son todos homeomorfos a \mathbb{I} ; y, sin embargo, no lo es con los de la segunda.

Puesto que los elementos de la familia a) son homeomorfos con \mathbb{I} es posible extender el teorema 5.1 a esos conjuntos. Nos preguntamos si también puede hacerse con los elementos de la familia b).

5.2.2. Estructuras autosimilares p.c.f.

Las propiedades básicas de estructuras autosimilares p.c.f. pueden encontrarse en [97, sec. 1-3] y [95].

Sea $\Sigma := [N]^{\mathbb{Z}^+} = \{w_1 w_2 w_3 \dots : w_i \in [N] \text{ con } i \in \mathbb{Z}^+\}$ la colección de sucesiones con elementos de $\{1, 2, 3, \dots, N\}$. Para $i \in [N]$, definimos $\sigma_i : \Sigma \rightarrow \Sigma$ por $\sigma_i(w_1 w_2 w_3 \dots) = i w_1 w_2 w_3 \dots$; y también el operador *avance* (o *desplazamiento* o *shift*, en inglés) $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$, dado por $\sigma(w_1 w_2 w_3 \dots) = w_2 w_3 \dots$.

Para $w, \tau \in \Sigma$, con $w \neq \tau$, definimos $s(w, \tau) = \text{mín} \{m : w_m \neq \tau_m\} - 1$ y $\delta_r(w, \tau) = r^{s(w, \tau)}$. Cuando $w = \tau$ será $\delta_r(w, \tau) = 0$. Tenemos que σ_i es una similaridad y Σ es el conjunto autosimilar con respecto $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$.

Ahora, sea (K, d) un espacio métrico compacto y conexo y, para cada $i \in [N]$, sea $F_i : K \rightarrow K$ una inyección continua. Entonces, la terna $L := \left(K, [N], \{F_i\}_{i \in [N]}\right)$ es llamada una *estructura autosimilar* de K si existe una aplicación continua y sobreyectiva $\pi : \Sigma \rightarrow K$ tal que $F_i \circ \pi = \pi \circ \sigma_i$ para cada $i \in [N]$.

Notamos por $W_m := [N]^m$ al conjunto de las palabras de longitud $m \in \mathbb{Z}^+$ y $W_* = \bigcup_{m \geq 0} W_m$. Cada palabra $w = w_1 \dots w_m \in W_m$ define una inyección continua $F_w : K \rightarrow K$ por $F_w := F_{w_1} \circ \dots \circ F_{w_m}$ cuya imagen $F_w(K)$ se representa por K_w .

Sea L una estructura autosimilar de K . El *conjunto crítico* $C_L \subset \Sigma$ esta definido por

$$C_L = \pi^{-1} \left(\bigcup_{\substack{i, j \in [N] \\ i \neq j}} (F_i(K) \cap F_j(K)) \right)$$

y el *conjunto p.c.s.* (siglas en inglés de post critical set) $P_L \subset \Sigma$ es de la forma

$$P_L = \bigcup_{n \geq 1} \sigma^n(C_L).$$

Una estructura autosimilar L es llamada *estructura autosimilar p.c.f.* (o simplemente, p.c.f.) si P_L es un conjunto finito. Definimos la frontera de K de la forma $V_0 := \pi(P_L)$. El cardinal de V_0 lo notamos v y a sus elementos p_i con $i \in [v]$. Definimos otros dos conjuntos:

$$V_m = \bigcup_{i \in [N]^m} F_i(V_0) \text{ y } V_* = \bigcup_{m \geq 0} V_m.$$

Ejemplo 5.3 Los conjuntos G_ρ y el árbol de Hata admiten estructuras autosimilares p.c.f.

Otro ejemplo es el de un segmento cerrado dividido en N segmentos. Dado $[x_0, x_N]$ y los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N$ con las funciones

$$F_i : [x_0, x_N] \rightarrow [x_{i-1}, x_i]$$

definidas anteriormente. En este caso, tenemos

$$P_L = \{1111 \dots, NNNN \dots\}.$$

5.2.3. Funciones armónicas

Una exposición muy completa de las estructuras armónicas y funciones armónicas en una estructura autosimilar p.c.f. $L = \left(K, [N], \{F_i\}_{i \in [N]}\right)$ puede consultarse en [97]. En ese mismo libro pueden encontrarse ejemplos de esas estructuras para varios casos; dos de ellos son el árbol de Hata y el triángulo de Sierpiński. Aquí, únicamente recogemos dos resultados:

1. Para L una estructura autosimilar p.c.f. con una estructura armónica y para un conjunto

$$\{(p_i, u_i) \in V_0 \times \mathbb{R}; i = 0, 1, 2, \dots, v\},$$

existe una única función armónica u^* en L cumpliendo que $u^*(p_i) = u_i$.

2. Si L es una estructura autosimilar p.c.f. con una estructura armónica y u^* una función armónica en L , entonces existe una única función continua $u : K \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo que $u(x) = u^*(x)$ para todo $x \in V_*$. Al conjunto de funciones u con esa propiedad lo representamos por $A(L)$.

5.3. Resultados

5.3.1. Interpolación fractal generalizada

En toda esta sección, $K \subset \mathbb{R}^n$ denotará a un compacto y $L := \left(K, [N], \{F_i\}_{i \in [N]} \right)$ a una estructura autosimilar p.c.f. A los elementos de V_0 los seguimos representando por p_1, \dots, p_v y a los de V_1 por t_1, \dots, t_A , con la condición $p_1 = t_1, \dots, p_v = t_v$. También utilizamos la notación $t_{i,k} = F_i(p_k)$.

En el caso del intervalo $[x_0, x_n]$ descrito en la subsección 5.2.1, se tiene que $t_1 = p_1 = x_0, t_2 = p_2 = x_N, t_i = x_{i-2}$ con $i = 3, \dots, N+1$.

Definición 5.4 Sea $L = \left(K, [N], \{F_i\}_{i \in [N]} \right)$ una estructura autosimilar p.c.f., un vector $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)$ y un conjunto S de funciones definidas en K . Llamamos problema de interpolación de Barnsley generalizado (brevemente, problema de Barnsley) a encontrar N funciones $r_i \in S$ y una función h definida en K para la que

$$h(F_i(x)) = \rho_i h(x) + r_i(x) \text{ para todo } x \in K$$

Estamos interesados en poner condiciones para lograr que el problema de Barnsley tenga solución y sea única. Cuando haya solución única escribiremos $h_{\mathbf{u}}$ y $r_{i,\mathbf{u}}$.

Proposición 5.5 Para una estructura autosimilar p.c.f. $L := \left(K, [N], \{F_i\}_{i \in [N]} \right)$ y un conjunto de N funciones acotadas en $K \setminus \cup V_m$, notadas r_i . Entonces, existe una única función acotada h en $K \setminus \cup V_m$ que satisface las relaciones funcionales

$$h(F_i(x)) = \rho_i h(x) + r_i(x) \text{ con } x \in K \setminus \cup V_m. \quad (5.1)$$

Demostración. La demostración está basada en el teorema del punto fijo de Banach.

Observamos que, para una función, verificar las ecuaciones (5.1) es equivalente a cumplir la relación

$$h(x) = \rho_i h(F_i^{-1}(x)) + r_i(F_i^{-1}(x))$$

cuando $x \in F_i(K) \setminus \cup V_m$. Sea $B(K \setminus \cup V_m)$ el conjunto de las funciones acotadas definidas en $K \setminus \cup V_m$ dotado de la norma del supremo $\|\circ\|$.

Definimos el operador

$$G : B(K \setminus \cup V_m) \rightarrow B(K \setminus \cup V_m)$$

que a la función f le hace corresponder la función $G(f)$ que actúa del siguiente modo para cada $x \in F_i(K) \setminus \cup V_m$:

$$G(f)(x) = \rho_i f(F_i^{-1}(x)) + r_i(F_i^{-1}(x))$$

Cuando $x \in F_i(K) \setminus \cup V_m$, se tiene que

$$|G(f)(x) - G(g)(x)| = |\rho_i| |f(F_i^{-1}(x)) - g(F_i^{-1}(x))| \leq |\rho_i| \|f - g\|;$$

por tanto, $\|G(f) - G(g)\| \leq |\rho| \|f - g\|$ donde $\rho = \max\{|\rho_i| : i \in [N]\} < 1$.

Luego se trata de una contracción, lo que garantiza la existencia y unicidad de una función acotada h que satisface las ecuaciones (5.1) y, por tanto, el enunciado. ■

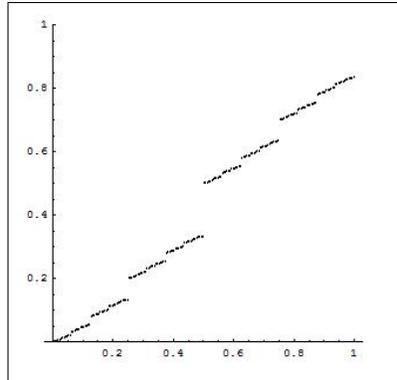
Ejemplo 5.6 En [24] se estudia el sistema de ecuaciones funcionales

$$\begin{cases} f\left(\frac{t}{2}\right) = af(t) \\ f\left(\frac{t+1}{2}\right) = b + cf(t) \end{cases}$$

Cuando $0 < |a| < 1$ y $|c| < 1$, tiene una única solución continua por la izquierda en $0 < t \leq 1$. La gráfica de esta función, en el conjunto de puntos que no admite desarrollo diádico finito, coincide con la que se obtiene en la proposición 5.5 para el caso en que $K = \mathbb{I}$, $N = 2$, $F_1(x) = x/2$, $F_2(x) = \frac{x+1}{2}$, $r_1(x) = 0$, $r_2(x) = b$, $\rho_1 = a$ y $\rho_2 = c$. En los puntos con desarrollo diádico finito se obtiene mediante extensión continua por la izquierda.

Podemos plantearnos si es posible definir la función del ejemplo 5.6 en los puntos con desarrollo diádico finito de forma diferente, de modo que la función obtenida en \mathbb{I} mediante una extensión de la proposición 5.5. Para ello es necesario que $f(0) = 0$, lo que implica que cuando $0 < a = b = 1 - c$ o $b = 0$ se tiene respuesta positiva, pero no ocurre así en el resto de casos.

La siguiente gráfica muestra el caso en el que se trata de los parámetros $a = 0,4, b = 0,5$ y $c = 0,4$:



Pretendemos poner condiciones en la proposición 5.5 que permitan extenderla a todo K . Para ello es necesario poner condiciones que solventen problemas en los puntos de $\cup V_n$.

Proposición 5.7 Sea $L := \left(K, [N], \{F_i\}_{i \in [N]} \right)$ una estructura autosimilar p.c.f. Supongamos que existen N funciones $(r_i, i = 1, 2, \dots, N)$ acotadas en $\cup V_n$. Entonces, si existe una función acotada en $\cup V_n$ tal que

$$h(F_i(x)) = \rho_i h(x) + r_i(x) \text{ con } x \in \cup V_n, \quad (5.2)$$

es necesario que $r_i(x) = h(F_i(x)) - \rho_i h(x)$ cuando $x \in V_0$.

En el sentido inverso tenemos que dadas las funciones r_i acotadas en $\cup V_n$ y una función h^* definida en V_1 tal que

$$r_i(x) = h^*(F_i(x)) - \rho_i h^*(x)$$

cuando $x \in V_0$, entonces existe una única función h definida en $\cup V_n$ verificando (5.2) que extiende a h^* .

Demostración. La primera de las afirmaciones es inmediata. Para la segunda, cuando $x \in V_0$, las condiciones impuestas aseguran que se cumplen las ecuaciones (5.2); y cuando $x \in V_n \setminus V_0$, entonces sólo existe un i tal que $x \in F_i(K)$ y $h(x) = \rho_i h(F_i^{-1}(x)) + r_i(F_i^{-1}(x))$. ■

Lo anterior, podemos resumirlo en el siguiente resultado.

Teorema 5.8 Si $L := \left(K, [N], \{F_i\}_{i \in [N]} \right)$ es una estructura autosimilar p.c.f. y, además, supongamos que las funciones r_i están acotadas en K . Entonces, para $V_1 = \{t_1, \dots, t_A\}$ y para A valores reales, $\{u_j\}_{j \in [A]}$, se tiene que existe una única función acotada h en K tal que $h(t_j) = u_j$ y

$$h(F_i(x)) = \rho_i h(x) + r_i(x), \text{ con } i = 1, 2, \dots, n$$

si, y sólo si, se cumple que cuando $t_j = t_{i,k}$, se tiene $u_j = \rho_i u_k + r_i(p_k)$.

Si las funciones r_i son continuas, entonces h también lo es.

5.3.2. Interpolación FIF en p.c.f.

Los resultados anteriores nos permiten estudiar el problema de interpolación en estructuras autosimilares p.c.f. cuando $K \subset \mathbb{R}^n$. En el caso de que las funciones F_i verifiquen la existencia de constantes $0 < s_i < 1$ para las que $\|F_i(x) - F_i(y)\| < s_i \|x - y\|$, con $(x, y) \in K^2$, decimos que $L = \left(K, [N], \{F_i\}_{i \in [N]} \right)$ es una estructura autosimilar p.c.f. contráctil.

Teorema 5.9 Sea $L = \left(K, [N], \{F_i\}_{i \in [N]} \right)$ una estructura autosimilar p.c.f. contráctil. Supongamos que S es un subconjunto de $\mathcal{C}(K)$ (familia de las funciones continuas en K) tal que para cualesquiera valores $u_i \in \mathbb{R}$, con $i \in [v]$, existe una única función f de S para la que $f(p_i) = u_i$ y, además, existe una constante k que depende de f tal que

$$|f(r) - f(s)| \leq k \|r - s\|, \text{ para } r, s \in K.$$

Entonces, dado un conjunto $\{\rho_i\}_{i \in [N]}$ de números reales cumpliendo que $0 < |\rho_i| < 1$, existe una única función continua en K para la que $h(t_j) = u_j$ con $t_j \in V_1$ y $h(F_i(x)) = \rho_i h(x) + r_i(x)$, con $i \in [N]$, donde r_i es la única función de S tal que $r_i(p_k) = u_j - \rho_i u_k$, donde el índice j corresponde a $t_j = t_{i,k}$, y su gráfica G coincide con el atractor del IFS en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ determinado por las aplicaciones $P_i(x, y) = (F_i(x), \rho_i y + r_i(x))$, con $i \in [N]$; es decir, $G = \cup_{i \in [N]} P_i(G)$.

Demostración. Para cada $i \in [N]$ tenemos una constante k_i para la que

$$|r_i(x) - r_i(y)| \leq k_i \|x - y\|.$$

Sea β una constante satisfaciendo que $s_i^2 + \frac{4k_i^2}{\beta^2} < 1$ y $\frac{2\rho_i}{\beta} < 1$, para todo i .

El teorema 5.8 garantiza que existe una única función continua f tal que $f(t_j) = \frac{u_j}{\beta}$ con $t_j \in V_1$ y $f(F_i(x)) = \rho_i f(x) + r'_i(x)$ con $i \in [N]$, donde r'_i es la única función de S cumpliendo $r'_i(p_k) = \frac{u_j}{\beta} - \rho_i \frac{u_k}{\beta}$ y el índice j corresponde a $t_j = F_i(p_k)$.

La gráfica de f es un punto fijo del IFS dado por las aplicaciones

$$P_i^*(x, y) = (F_i(x), \frac{\rho_i y + r_i(x)}{\beta}), i \in [N].$$

Puesto que cada una de ellas es una contracción, entonces

$$P^*(G) := \cup_{i \in [N]} P_i^*(G)$$

es una nueva contracción en el espacio de los compactos de \mathbb{R}^n dotado de la métrica de Hausdorff.

Si la gráfica de f es el atractor de P^* , entonces la gráfica de $h = \beta f$ es un atractor de $P(G) := \cup_{i \in [N]} P_i(G)$. ■

Notación 5.10 Dada una estructura autosimilar p.c.f. contráctil L y los conjuntos $\{\rho_i\}_{i \in [N]}$ y S como antes, al conjunto de funciones h dadas en el teorema 5.9 lo notamos por $FIF(L, \{\rho_i\}, S)$.

Para un subespacio vectorial V de polinomios de n variables. Dado

$$\Gamma = \{(x_i, u_i) \in \mathbb{R}^n; i = 0, 1, 2, \dots, m; m \geq 2\},$$

llamamos problema de interpolación lagrangiano al que consiste en encontrar los elementos $q \in V$ tal que $q(x_i) = u_i$. Notamos Π_n el conjunto de polinomios de dos variables con grado menor o igual que n .

Corolario 5.11 Sea $L = (K, [N], \{F_i\}_{i \in [N]})$ una estructura autosimilar p.c.f. contráctil con $K \subset \mathbb{R}^2$ y los puntos de V_0 verificando que el problema de interpolación lagrangiana en ellos tiene solución única en Π_n .

En estas condiciones, existe una única función continua $h \in FIF(L, \{\rho_i\}, \Pi_n)$ para la que $h(x_i) = u_i$ con $p_i \in V_0$ y $h(F_i(x)) = \rho_i h(x) + r_i(x)$ con $i \in [N]$ donde r_i es la única función de Π_n satisfaciendo $r_i(p_k) = u_j - \rho_i u_k$ donde el índice j es el de $t_j = t_{i,k}$.

Ejemplo 5.12 En el árbol de Hata se tiene $V_0 = \{0, 1, c\}$ y el resultado anterior es cierto para Π_1 . Esta situación es similar a la del teorema 5.1 donde se sustituyen rectas por planos.

Proposición 5.13 Sea $L = (K, [N], \{F_i\}_{i \in [N]})$ una estructura autosimilar p.c.f. contractil. Si S es un espacio vectorial, entonces $FIF(L, \{\rho_i\}, S)$ también lo es y su dimensión es igual al cardinal de V_1 .

Demostración. a) Multiplicación por escalares. Sea $h_{\mathbf{u}} \in FIF(L, \{\rho_i\}, S)$ y $r_{i, \mathbf{u}}$ son sus funciones asociadas. Entonces, se tiene que $\lambda h_{\mathbf{u}} = h_{\lambda \mathbf{u}}$ y sus funciones asociadas $\lambda r_{i, \mathbf{u}} = r_{i, \lambda \mathbf{u}}$.

b) Suma de funciones. Sean $h_{\mathbf{u}}, h_{\mathbf{v}} \in FIF(L, \{\rho_i\}, S)$ y $r_{i, \mathbf{u}}, r_{i, \mathbf{v}}$ son sus funciones asociadas. Entonces, $h_{\mathbf{u}} + h_{\mathbf{v}} = h_{\mathbf{u} + \mathbf{v}}$ y $r_{i, \mathbf{u}} + r_{i, \mathbf{v}} = r_{i, \mathbf{u} + \mathbf{v}}$.

Una base de este espacio vectorial es la formada por $\{h_{\mathbf{u}_i} : i \in [T]\}$ donde \mathbf{u}_i es el vector con todos sus elementos cero menos el de la i -ésima posición que es uno. ■

5.3.3. Interpolación armónica en estructuras p.c.f.

Nótese que el corolario 5.11 parece una extensión natural del teorema 5.1 al utilizar polinomios; pero requiere de una condición que puede no darse al exigir que la interpolación lagrangiana tenga solución única en V_0 . Un ejemplo de esto sería el conjunto conocido como copo de nieve (véase [97, p. 54], 3.8.), que viene dado por contracciones (utilizando la identificación natural de \mathbb{C} y \mathbb{R}^2) $F_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por $F_i(z) = \frac{z+2p_i}{3}$, con $i \in [7]$ y $p_i = e^{\frac{2\pi i\sqrt{-1}}{6}}$, para $i \in [6]$ y $p_7 = 0$. En este caso $V_0 = \{p_i\}_{i \in [6]}$ y la interpolación lagrangiana puede no tener solución o que no sea única en Π_2 .

Por tanto, se tiene el inconveniente de que la aplicación del corolario 5.11 depende del modo en que están situados los puntos en \mathbb{R}^2 . Hay otros conjuntos de funciones que garantizan la existencia de una única función para la que $h(p_i) = u_i$. Se trata de las funciones armónicas en L .

Por otra parte, para las funciones armónicas se tiene el inconveniente de que no se puede asegurar que exista k tal que $|f(r) - f(s)| \leq k \|r - s\|$ para todo $r, s \in K$, y, por este motivo, no es posible generalizar el resultado del teorema 5.9.

Ejemplo 5.14 *Es inmediato que el intervalo unidad \mathbb{I} es un conjunto autosimilar para el par de funciones $F_1(x) = x/2$ y $F_2(x) = x/2 + 1/2$. Por tanto, tenemos una estructura autosimilar que es p.c.f. Siguiendo la ideas dadas en [97, example 3.1.4], las funciones armónicas correspondientes a ese ejemplo, son las funciones del ejemplo 5.6 cuando $a = b = 1 - c$. Estas funciones no cumplen que exista k para la que $|f(r) - f(s)| \leq k \|r - s\|$ para $r, s \in K$.*

En esta situación, aplicando el teorema 5.8 a estructuras autosimilares p.c.f., se sigue directamente la demostración del siguientes resultado.

Teorema 5.15 *Sea $L = (K, S, \{F_i\}_{i \in [N]})$ una estructura autosimilar p.c.f. con una estructura armónica y consideremos el conjunto $A(L)$. Entonces existe una única función acotada h en K tal que $h(p_i) = u_i$ para $x_i \in V_1$ y*

$$h(F_i(x)) = \rho_i h(x) + r_i(x) \text{ con } i \in [N]$$

donde $r_i : F_i(K) \rightarrow \mathbb{R}$ es la única función de $A(L)$ tal que

$$r_i(p_k) = u_j - \rho_i u_k,$$

donde el índice j corresponde a $t_j = t_{i,k}$.

El conjunto de las funciones h que verifican la conclusión del teorema anterior lo representamos por $H(L, \{\rho_i\})$.

Puesto que $A(L)$ es un espacio vectorial, procediendo como en la proposición 5.13, el siguiente resultado es cierto.

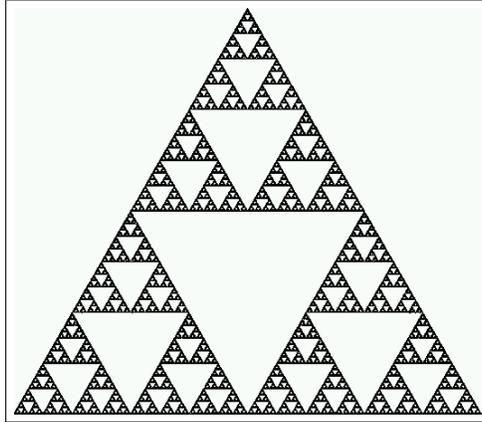
Proposición 5.16 *Sea $L = (K, S, \{F_i\}_{i \in [N]})$ una estructura autosimilar p.c.f. con una estructura armónica. Entonces, $H(L, \{\rho_i\})$ es un espacio vectorial y su dimensión es igual al cardinal de V_1 .*

5.4. Funciones armónicas en el triángulo de Sierpiński

El triángulo de Sierpiński S es un objeto fractal autosimilar. Fue estudiado desde una perspectiva matemática por primera vez en 1915 ([154]), aunque puede encontrarse ya en el arte italiano del siglo XIII. Como es conocido, dado un triángulo de vértices $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ y $p_2 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, S es el único compacto de \mathbb{R}^2 que queda fijo bajo la acción de las funciones $F_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 0, 1, 2$) definida por

$$\begin{aligned} F_0(x) &= z/2; \\ F_1(x) &= 1 + (z - 1)/2; \\ F_2(x) &= 1/2 + i\sqrt{3}/2 + (z - 1/2 + i\sqrt{3}/2)/2; \end{aligned}$$

es decir, $S = F_0(S) \cup F_1(S) \cup F_2(S)$. Se trata de un conjunto fractal de dimensión $\ln 3 / \ln 2$.



Triángulo de Sierpinski

La aplicación de este tipo de objetos en fenómenos físicos presentes en la naturaleza ha motivado que en los últimos veinte años se hayan desarrollado técnicas de análisis en ellos, en particular el estudio de funciones armónicas. Una buena introducción a este campo de estudio puede encontrarse en [97]. Para las necesidades de esta Memoria únicamente diremos que una función H es armónica en S si dado un triángulo equilátero, de vértices p'_0 , p'_1 , p'_2 , incluido en S , ocurre que dados unos valores para los vértices, digamos

$$H(p'_0) = \alpha; H(p'_1) = \alpha; H(p'_2) = \alpha'_2,$$

en los puntos medios $p''_0 = \frac{p'_1 + p'_2}{2}$, $p''_1 = \frac{p'_0 + p'_2}{2}$, $p''_2 = \frac{p'_0 + p'_1}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned} H(p''_0) &= \frac{\alpha'_2 + 2\alpha'_0 + 2\alpha'_1}{5}, \\ H(p''_1) &= \frac{2\alpha'_2 + \alpha'_0 + 2\alpha'_1}{5}, \\ H(p''_2) &= \frac{2\alpha'_2 + 2\alpha'_0 + \alpha'_1}{5}. \end{aligned}$$

Por tanto, dadas unas condiciones iniciales para los vértices, podemos obtener los valores que han de corresponder a los puntos medios de los lados; y así, sucesivamente en los triángulos menores que van apareciendo. Finalmente, extendiendo por continuidad obtenemos que, para cualesquiera tres valores iniciales, existe una única función armónica con esos valores en la "frontera".

Notación 5.17 *La función armónica con $H(0) = \alpha$, $H(1) = \beta$, $H(1/2 + i\sqrt{3}/2) = \gamma$ será representada por $H_{\alpha,\beta,\gamma}$ y la restricción a \mathbb{I} será notada por $h_{\alpha,\beta,\gamma}$.*

Los primeros resultados de la restricción de H a los segmentos que forman los lados del triángulo de vértices p_0, p_1, p_2 fueron obtenidos en 1999 en [41]. Concretamente, allí obtienen el siguiente teorema.

Teorema 5.18 *Si ordenamos los lados del triángulo que forman el borde de acuerdo con los valores $|H(p_i) - H(p_j)|$ notando por l_1 el de mayor longitud, como l_2 el de longitud intermedia y por l_3 al de menor longitud, tendremos que H es monótona en l_1 y l_2 y que en l_3 tiene dos posibilidades: a) ser monótona, o b) tener un único extremo.*

El siguiente avance en el estudio de esas restricciones ha sido dado recientemente y aparece en los artículos [44] y [45]. En ellos, los autores demuestran que para cualquier terna (α, β, γ) se tiene que $h_{\alpha,\beta,\gamma}$ es derivable en $1/3$ y el valor de la derivada es cero, también encuentran que esa función admite derivada generalizada igual a ∞ en $1/2$ y con la ayuda de la autosimilaridad de S y la forma de construir las funciones armónicas encuentran dos conjuntos infinito numerables; en el primero, la derivada es cero; y en el segundo, tiene derivada generalizada infinita.

En este estudio pretendemos seguir analizando las funciones armónicas en \mathbb{I} , como principal resultado obtenemos que la función $h_{\alpha,\beta,\gamma}$ no admite derivada no nula y, como consecuencia, al ser monótona se trata de una función singular.

También, encontramos dos conjuntos no numerables en los que, respectivamente, la derivada es nula o infinito y se generalizan estas funciones como elementos de grupos más amplios que vienen determinados por ciertas relaciones funcionales. En estos grupos se encuentran otras funciones singulares muy conocidas y estudiadas.

5.5. Resultados

Para evitar tener que repetirlo en cada caso, partir de ahora siempre consideraremos $\alpha < \beta < \gamma$.

5.5.1. El lado l_1

El intervalo \mathbb{I} es el lado l_1 si la función armónica es $H_{\alpha,\beta,\gamma}$.

La siguiente proposición nos permite hacer el estudio suponiendo que los valores en los extremos son 0 y 1; y, por tanto, la función únicamente depende del parámetro central. Notaremos a $f_{0,\alpha,1}$ como f_α , por economía de símbolos.

Proposición 5.19 *Se tiene, con la notación de más arriba, la siguiente relación:*

$$h_{\alpha,\beta,\gamma} = \alpha + (\gamma - \alpha) f_{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}.$$

Vamos a establecer unas relaciones funcionales entre f_α y otros elementos de la familia que serán las principales herramientas utilizadas para obtener los resultados de este estudio. Nos referiremos a las funciones f_α como funciones de clase f .

Proposición 5.20 *(Relaciones funcionales) Para $x \in \mathbb{I}$, se cumplen:*

$$\begin{cases} f_\beta\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2+\beta}{5} f_{\frac{1+2\beta}{2+\beta}}(x) \\ f_\beta\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{3-\beta}{5} f_{\frac{\beta}{3-\beta}}(x) + \frac{2+\beta}{5} \end{cases}$$

Las ecuaciones anteriores permiten determinar el valor de f_β en los números con representación diádica finita; y, de este modo, se puede obtener una aproximación de la función mediante poligonales.

Notación 5.21

i.

$$\begin{aligned} h_0(\beta) &= \frac{2+\beta}{5}; & h_1(\beta) &= \frac{3-\beta}{5} \\ r_0(\beta) &= \frac{1+2\beta}{2+\beta}; & r_1(\beta) &= \frac{\beta}{3-\beta} \end{aligned}$$

ii.

$$\beta_i(x) = r_{d(T^i(x))}(\beta_{i-1}(x))$$

con $\alpha_0 = \alpha$, y donde las funciones T y d son:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \quad d(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Comentario 5.22 *Los resultados no sufren variación si definimos $d\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.*

Enunciamos a continuación dos resultados conocidos que nos ayudan a demostrar el próximo teorema.

Teorema 5.23 *La función f_β es singular.*

Demostración. Dado un punto x que no admite desarrollo finito, para $k \in \mathbb{Z}^+$ buscamos el número m tal que $\frac{m}{2^k} \leq x < \frac{m+1}{2^k}$. Estudiaremos el cociente

$$\frac{f_\beta\left(\frac{m+1}{2^k}\right) - f_\beta\left(\frac{m}{2^k}\right)}{\frac{1}{2^k}}.$$

Ayudándonos de las poligonales que hemos creado anteriormente tenemos que ese cociente es

$$2^k \prod_{i=1}^k \left((1 - d(T^i(x))) h_0(\beta_i(x)) + d(T^i(x)) h_1(\beta_i(x)) \right).$$

Este producto converge a un valor no nulo si, y sólo si, la serie

$$\sum_{i \geq 1} (1 - 2(1 - d(T^i(x))) h_0(\beta_i(x)) - 2d(T^i(x))h_1(\beta_i(x)))$$

es convergente. Para ello es necesario que

$$2(1 - d(T^i(x))) h_0(\beta_i(x)) + 2d(T^i(x))h_1(\beta_i(x)) \longrightarrow 1$$

tienda a la unidad. Dada la definición de h_j para que

$$2(1 - d(T^i(x))) h_0(\beta_i(x)) + 2d(T^i(x))h_1(\beta_i(x))$$

esté próximo a uno es necesario que $\beta_i(x)$ lo esté a $1/2$. Si ésto es así, entonces $\beta_{i+1}(x)$ no lo estará, por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo i , al menos, uno de los valores

$$2(1 - d(T^i(x))) h_0(\beta_i(x)) + 2d(T^i(x))h_1(\beta_i(x))$$

o

$$2(1 - d(T^{i+1}(x))) h_0(\beta_{i+1}(x)) + 2d(T^{i+1}(x))h_1(\beta_{i+1}(x)),$$

es menor de $1 - \varepsilon$. Por tanto el cociente anterior no puede tender a ningún valor real distinto de cero. El lema 0.3 nos dice que si existe derivada en algún punto, ésta ha de ser igual a cero. Uniendo este resultado con que una función monótona es derivable en un conjunto de medida uno obtenemos que la función es derivable en un conjunto de esta medida; y en él la derivada es cero. ■

Teorema 5.24 *La función f_β no admite derivada no nula.*

Demostración. Está implícita en la demostración anterior. ■

Consideramos ahora los casos en que no ocurren las desigualdades $\alpha < \beta < \gamma$. El caso $\alpha = \beta = \gamma$ es trivial. Por tanto, consideramos dos casos, divididos (a su vez) en subcasos (para facilitar el seguimiento de la demostración).

Tras haber estudiado el lado l_1 , vamos a considerar funciones en las que no ocurre que $\alpha < \beta < \gamma$. Puesto que el caso $\alpha = \beta = \gamma$ es trivial al tratarse de una función constante, consideramos dos posibilidades:

a) $\alpha = \beta < \gamma$.

i) Estudiar $H_{\alpha\gamma\beta}$ es equivalente a estudiar H_{010} . La restricción a \mathbb{I} , notada por h_{010} , se descompone en dos funciones, la primera en $[0, 1/2]$ y la segunda en $[1/2, 1]$, de modo que en $[0, 1/2]$ tiene las mismas propiedades que $h_{1,0,1/2}$ y en $[1/2, 1]$ tiene las mismas que $h_{1/2,0,1}$. Puesto que $h_{1,0,1/2}(x) = h_{1/2,0,1}(1 - x)$ el estudio se limita al de $h_{1/2,0,1}$.

ii) Para $H_{\alpha\beta\gamma}$ es equivalente estudiar H_{001} . Se vuelve a tener una descomposición en los intervalos $[0, 1/2]$ y $[1/2, 1]$; en esta ocasión en el primer intervalo se tiene una función equivalente a $f_{1/2}$ y en el segundo lo es a $h_{0,0,1}$. Repitiendo esta idea obtenemos que esta función en los intervalos de la forma

$$\left[\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right]$$

es equivalente a $f_{1/2}$; pero esta función ya ha sido estudiada.

b) $\alpha < \beta = \gamma$.

i) Estudiar $H_{\beta\alpha\gamma}$ es equivalente a estudiar H_{101} . De modo similar a a.i) se obtiene que su estudio es equivalente al de $h_{1/2,0,1}$.

ii) Estudiar $H_{\alpha\beta\gamma}$ es equivalente a estudiar H_{011} . De modo similar a a.ii) se obtiene que en los intervalos $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right]$ es equivalente al comportamiento de $f_{1/2}$.

Nos resta estudiar $h_{1/2,0,1}$. Esta función se descompone en los intervalos $[0, 1/2]$ y $[1/2, 1]$ en funciones equivalentes a $h_{1/2,0,1}$ y $h_{1/5,0,1}$, respectivamente, por lo que es suficiente estudiar esta última.

La función $h_{1/5,0,1}$ se descompone en $[0, 1/2]$ y $[1/2, 1]$ en funciones equivalentes a $h_{1/14,0,1}$ y $f_{\beta(5)}$, respectivamente, donde $\beta(n) = \frac{2n-3}{5n}$. Repitiendo este argumento, estudiar $h_{1/2,0,1}$ en $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right]$ es equivalente a estudiar $f_{\beta(n_i)}$ con $n_1 = 5$ y $n_i = 3n_{i-1} - 1$.

Las propiedades de las funciones armónicas en las que dos de los valores que se tienen en los vértices son iguales y el otro diferente son las mismas que las que tiene la familia de funciones f_β .

Por todo lo anterior, en el estudio de funciones armónicas siempre consideraremos que nunca ocurre que se repiten dos valores en los vértices, ni en la función que inicialmente se estudia ni en aquellas que aparecen ligadas con ella en las relaciones funcionales, pues, de no ser así, se aplicarían las propiedades de la familia de funciones f_β .

5.5.2. El lado l_2

Para que \mathbb{I} sea el lado l_2 tenemos dos posibilidades que consideramos a continuación.

a) La función armónica es de la forma $H_{\beta,\alpha,\gamma}$ con $\gamma - \beta > \beta - \alpha$.

Cuando $\beta \leq 1/2$ la restricción de $H_{\beta,0,1}$ será notada como g_β . Nos referiremos a las funciones g_β como funciones de clase g . El siguiente resultado nos dice que podemos estudiar únicamente funciones de esta forma sin pérdida de generalidad en los resultados que se obtengan.

Proposición 5.25 *Con la notación anterior,*

$$h_{\beta,\alpha,\gamma} = \alpha + (\gamma - \alpha) g_{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}.$$

Ahora, estableceremos relaciones entre g_β y los otros elementos de la familia. Serán las principales herramientas que utilizaremos a continuación.

Proposición 5.26 (Relaciones funcionales) *Cuando $\beta \leq 1/2$ el intervalo \mathbb{I} es l_2 , en este caso*

$$\begin{cases} g_\beta\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \beta + \frac{2-3\beta}{5} f_{\frac{1-3\beta}{2-3\beta}}(x) & \text{si } \beta < 1/3 \\ \frac{2\beta+1}{5} + \frac{1}{5} g_{3\beta-1}(x) & \text{si } 1/3 < \beta \end{cases} \\ g_\beta\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{3-\beta}{5} g_{\frac{\beta}{3-\beta}}(x) + \frac{2+\beta}{5}, \end{cases} \quad (5.3)$$

donde f_γ son las funciones antes definidas.

b) La función armónica es de la forma $H_{\alpha,\gamma,\beta}$ con $\gamma - \beta < \beta - \alpha$.

Cuando $\beta > 1/2$ notaremos la restricción de $H_{0,1,\beta}$ por g_β^* .

Proposición 5.27 *Con la notación anterior,*

$$h_{\beta,\gamma,\beta} = \beta + (\gamma - \alpha) g_{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}^*.$$

Ahora, estableceremos relaciones funcionales entre g_β^* y otros elementos de la familia.

Proposición 5.28 (Relaciones funcionales) *Cuando $\beta > 1/2$ el intervalo \mathbb{I} es l_2 , en este caso*

$$\begin{cases} g_\beta^*\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\beta+2}{5} g_{\frac{1+2\beta}{\beta+2}}^*(x) \\ g_\beta^*\left(\frac{1+x}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1+2\beta}{5} + \frac{3\beta-1}{5} f_{\frac{1}{3\beta-1}}(x) & \text{si } \beta > 2/3 \\ \frac{2\beta+1}{5} + \frac{1}{5} g_{3\beta-1}^*(x) & \text{si } 2/3 > \beta, \end{cases} \end{cases} \quad (5.4)$$

donde f_γ son las funciones antes definidas.

Con la ayuda de las relaciones anteriores y un razonamiento similar al realizado en el caso anterior nos está permitido obtener el siguiente teorema.

Teorema 5.29 *Toda función g_β o g_β^* es singular y no admite derivada distinta de cero.*

5.5.3. El lado l_3

Si observamos el comportamiento de la función armónica $H_{\alpha,\gamma,\beta}$ en el lado l_3 , vemos que este lado se divide (por la mitad) en dos que corresponderían a uno del tipo l_2 y otro del tipo l_1 (no necesariamente en ese orden), de funciones armónicas en los subtriángulos de S que se forman utilizando los vértices y los puntos medios. Por tanto, la función armónica, $H_{\alpha,\gamma,\beta}$, en los lados l_3 heredará la propiedad de no admitir derivada no nula. La posible excepción estaría, si existe, en el punto interior donde puede alcanzar el máximo; y en ese punto, evidentemente, si tiene derivada, habrá de ser cero.

5.6. Propiedades en el caso del lado l_1

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, sería interesante encontrar un conjunto de puntos donde la derivada existe y vale cero. Además, buscaremos otro conjunto en el que la derivada generalizada exista y tome el valor infinito. A continuación nos centraremos en el lado l_1 .

Para este objetivo es necesario analizar el comportamiento de la sucesión

$$(1 - d(T^i(x))) h_0(\beta_i(x)) + d(T^i(x)) h_1(\beta_i(x)).$$

Cada término depende de β y todos los $d(T^j(x))$, con $j \leq i$. Si únicamente consideramos $T^i(x)$ y $T^{i-1}(x)$, independientemente de β , y si

$$d(T^i(x)) = d(T^{i-1}(x)) = \dots = d(T^{i-k}(x)) = 1$$

o

$$d(T^i(x)) = d(T^{i-1}(x)) = \dots = d(T^{i-k}(x)) = 0,$$

entonces

$$1/2 < \beta(k) < (1 - d(T^i(x))) h_0(\beta_i(x)) + d(T^i(x)) h_1(\beta_i(x)) < 3/5,$$

con $\beta(k) \rightarrow 3/5$ para $k \rightarrow +\infty$.

Proposición 5.30 *El conjunto de puntos cuyo desarrollo diádico está dado por cadenas de ceros y unos con longitud k o $k+1$ (el valor de k se fijará en la demostración) es no numerable con derivada generalizada igual a infinito.*

Demostración. Sea k tal que $d(T^i(x)) = d(T^{i-1}(x)) = \dots = d(T^{i-k}(x)) = 1$ o $d(T^i(x)) = d(T^{i-1}(x)) = \dots = d(T^{i-k}(x)) = 0$, implica

$$2^k \prod_{i=1}^k ((1 - d(T^i(x))) h_0(\beta_i(x)) + d(T^i(x)) h_1(\beta_i(x))) > \gamma > 1.$$

Con x en el conjunto descrito y $\delta > 0$, tomamos los números $x_\delta = \frac{x}{2^t}$, $x'_\delta = \frac{x+\delta}{2^t}$ verificando que $x \leq x_\delta \leq x'_\delta \leq x + \delta$, que $x'_\delta - x_\delta \asymp \delta$ y

$$\frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} \geq \frac{f(x'_\delta) - f(x_\delta)}{\delta} \geq C \frac{f(x'_\delta) - f(x_\delta)}{x'_\delta - x_\delta} \geq C' \gamma^n;$$

donde C y C' depende de k , y n lo hace de x y δ , además, tiende a infinito cuando $\delta \rightarrow 0$.

Procedemos de un modo similar para δ negativo.

Para demostrar que se trata de un conjunto no numerable, es suficiente comprobar que el subconjunto de esos puntos que comienzan por cero es biyectivo con las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ con $a_{2j} \in \{\sigma, \tau\}$ y $a_{2j+1} \in \{\sigma^*, \tau^*\}$. ■

Comentario 5.31 *No es necesario que todas las cadenas sean de la forma descrita: es suficiente que lo sea su final; los valores iniciales pueden ser de cualquier forma.*

Comentario 5.32 *No es difícil observar que este razonamiento puede trasladarse al caso $x = 1/3$. Este es el resultado recogido en [44, Lemma 6] para el caso de l_1 .*

Proposición 5.33 *El conjunto de puntos con desarrollo diádico finalizado en cadenas de dieces (10) de longitud mayor que s (el cual será determinado durante la demostración), seguido por una cadena repitiendo la forma cien (100), es un conjunto no numerable donde existe la derivada y es cero.*

Demostración. Sea x un elemento de ese conjunto. Para un valor δ positivo, consideramos los valores $x_\delta = \frac{x}{2^t}$, $x'_\delta = \frac{x+\delta}{2^t}$ para los que $x \leq x_\delta \leq x'_\delta \leq x + \delta$, con $x'_\delta - x_\delta \asymp \delta$ y

$$\frac{f(x) - f(x + \delta)}{\delta} = O\left(\frac{f(x_\delta) - f(x'_\delta)}{x'_\delta - x_\delta}\right).$$

En estos puntos,

$$\begin{aligned} \frac{f_\beta\left(\frac{k+1}{2^t}\right) - f_\beta\left(\frac{k}{2^t}\right)}{\frac{1}{2^t}} &= 2^t \prod_{i=1}^t [(1 - d(T_i(x_h))) h_0(\beta_i(x_\delta)) \\ &\quad + d(T_i(x_h)) h_1(\beta_i(x_\delta))]. \end{aligned}$$

Estudiando el comportamiento de

$$\prod 2 \left((1 - d(T^i(x))) h_0(\beta_i(x)) + d(T^i(x)) h_1(\beta_i(x)) \right)$$

para cadenas de pares 10. Puesto que los unos y ceros se alternan, lo mismo ocurre para $2h_1$ y $2h_0$ en el interior del producto. Lo mismo ocurre para g_0 y g_1 en la definición de β_i . Si la longitud de las cadenas crece, entonces $\beta_i \rightarrow \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ para los valores asociados con 0 y converge a $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ para los unos. Para estos valores, tenemos:

$$2h_1 \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right) = 2h_0 \left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right) = \frac{1 + \sqrt{13}}{5}.$$

Para la segunda pareja de la forma 10, tanto $2h_0$ como $2h_1$ son menores que $\mu < 1$; y, para el último término, la terna 100, tenemos como cota superior el valor $2\frac{3}{5}$. Por tanto, tomamos s tal que $\mu^{s-2} 2\frac{3}{5} = \delta < 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x + \delta)}{\delta} &= O \left(\frac{f(x_\delta) - f(x'_\delta)}{x'_\delta - x_\delta} \right) \\ &= 2^t \prod_{i=1}^t [(1 - d(T_i(x_\delta))) h_0(\beta_i(x_\delta)) \\ &\quad + d(T_i(x_\delta)) h_1(\beta_i(x_\delta))] \\ &= O(\delta^n), \end{aligned}$$

donde n depende de x y δ . Este cociente tiende a infinito cuando $h \rightarrow 0$. Lo que nos da el resultado buscado.

Se procede del mismo modo cuando δ es negativo.

Que el conjunto no es numerable es consecuencia de que sea biyectivo con $\{s, s + 1, s + 2, \dots\}^{\mathbb{Z}^+}$. ■

Comentario 5.34 No es difícil observar que este razonamiento puede trasladarse al caso en que $x = 1/3$ para todo i a partir de k . Este es el resultado recogido en [44, Teorema 7], para el caso de l_1 .

Comentario 5.35 Es sencillo comprobar que el resultado sigue siendo cierto si intercambiamos ceros y unos entre sí. Este comentario es necesario puesto que en el lado l_3 no se tiene monotonía.

Proposición 5.36 La proposición anterior sigue siendo cierta para las caras l_2 y l_3 .

Demostración. El caso de la cara l_2 puede reducirse al anterior (para l_1) a través de las relaciones funcionales 5.3 cuando $d(T^i(x)) = 0$, $d(T^{i-1}(x)) = 1$. Podemos encontrar un intervalo conteniendo a x donde la función sea una réplica de una de la clase f . Por tanto, cualquier propiedad de la última proposición es cierta. Las condiciones $d(T^i(x)) = 0$ y $d(T^{i-1}(x)) = 1$ se satisfacen para todos los puntos, salvo el origen.

Cuando las relaciones funcionales están dadas por 5.4, consideraciones similares conducen al mismo resultado.

■

Con respecto a l_3 , se ha señalado que puede descomponerse en réplicas de las funciones de clase f o g ; por tanto, el resultado es cierto.

Teorema 5.37 La función m_x , dada por $m_x(\alpha) = f_\alpha(x)$, es una función continua.

Demostración. Para $x = \frac{n}{2^k}$, el valor $m_x(\alpha)$ queda determinado, con la ayuda de las ecuaciones funcionales, en k pasos. Su expresión es una fracción algebraica en α , cuyos coeficientes dependen únicamente de $n/2^k$. Cuando α' tiende a α , ocurre que $m_{\frac{n}{2^k}}(\alpha')$ lo hace a $m_{\frac{n}{2^k}}(\alpha)$; y para ese valor de x , la función m_x es continua. Para un valor cualquiera de x , la continuidad viene dada por lo demostrado anteriormente y la desigualdad

$$\begin{aligned} |m_x(\alpha) - m_x(\alpha')| &= |f_\alpha(x) - f_{\alpha'}(x)| \\ &\leq \left| f_\alpha(x) - f_\alpha\left(\frac{n}{2^k}\right) \right| + \left| f_\alpha\left(\frac{n}{2^k}\right) - f_{\alpha'}\left(\frac{n}{2^k}\right) \right| + \left| f_{\alpha'}\left(\frac{n}{2^k}\right) - f_{\alpha'}(x) \right|. \end{aligned}$$

■

Teorema 5.38 La función m_x , definida como arriba, es monótona creciente.

Demostración. Para $x = n/2^k$, la monotonía es consecuencia de que también lo son las funciones g_0, g_1, h_0 y h_1 . Para un valor cualquiera, lo es a causa de la monotonía en los valores indicados y de la continuidad probada anteriormente. ■

Teorema 5.39 *Las gráficas de las funciones f_α llena una superficie del cuadrado unidad limitada por la gráfica de funciones singulares.*

Demostración. La función m_x es continua y monótona creciente; por lo tanto $m_x(]0, 1[)$ es un intervalo abierto. Notamos por $S(x)$ a $\lim_{\alpha \rightarrow 1} m_x(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} f_\alpha(x)$. Ayudándonos de las ecuaciones funcionales

$$\begin{cases} f_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2+\alpha}{5} f_{\frac{1+2\alpha}{2+\alpha}}(x) \\ f_\alpha\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{3-\alpha}{5} f_{\frac{\alpha}{3-\alpha}}(x) + \frac{2+\alpha}{5}, \end{cases}$$

al tomar límite cuando α tiende a 1, obtenemos nuevas ecuaciones para S :

$$\begin{cases} S\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3}{5} S(x) \\ S\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{2}{5} f_{\frac{1}{2}}(x) + \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Del mismo modo, escribimos $I(x)$ en vez de $\lim_{\alpha \rightarrow 0} m_x(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(x)$, y las ecuaciones obtenidas son:

$$\begin{cases} I\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{5} f_{\frac{1}{2}}(x) \\ I\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{3}{5} I(x) + \frac{2}{5}. \end{cases}$$

■

5.7. Generalización

En esta sección damos una generalización de los resultados obtenidos en las secciones anteriores para una familia de funciones que satisfacen unas relaciones funcionales que incluyen, como caso particular, las de las funciones de clase f . Las demostraciones se obtienen de un modo similar a como se ha hecho para esa clase.

Teorema 5.40 *Sean funciones continuas $h_0, g_0, g_1 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ tales que $h_0(\mathbb{I}) \subset]0, 1[$. Supongamos que si hay un valor α tal que $h_0(\alpha) = 1/2$, entonces ha de ocurrir que $h_0(g_0(\beta)) \neq 1/2 \neq h_0(g_1(\beta))$. Existe una familia de funciones continuas tales que:*

$$f_\alpha(0) = 0; f_\alpha(1) = 1; \quad \left. \begin{aligned} f_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) &= h_0(\alpha) f_{g_0(\alpha)}(x) \\ f_\alpha\left(\frac{1+x}{2}\right) &= (1 - h_0(\alpha)) f_{g_1(\alpha)}(x) + h_0(\alpha) \end{aligned} \right\}$$

Proposición 5.41 *La función f_α es monótona, singular y no admite derivada no nula.*

Proposición 5.42 *Dada la relación $m_x(\alpha) = f_\alpha(x)$; la función m_x (así definida) es continua.*

Proposición 5.43 *Si g_0, g_1 son funciones monótonas crecientes, tenemos que m_x también lo es.*

Proposición 5.44 *Si h_0 no es constante, el grafo de f_α llena una superficie en el cuadrado unidad limitada por la gráfica de funciones singulares.*

En el caso en que $g_0(0) = 0; g_0(1) = 1; g_1(0) = 0; g_1(1) = 1$ corresponde al de elementos de una familia de funciones singulares muy conocida y estudiada. Véase el Capítulo 3 o [150]. Esta familia está caracterizada por cumplir

$$\begin{cases} S_a\left(\frac{x}{2}\right) = a S_a(x) \\ S_a\left(\frac{1+x}{2}\right) = (1-a) S_a(x) + a. \end{cases}$$

La superficie cubierta es la comprendida entre las gráficas de $S_{h_0(0)}$ y $S_{h_0(1)}$.

Ejemplo 5.45 *a) i. Cuando $h_0(\alpha) = a, \forall \alpha$, todas las funciones $f_\alpha(x)$ son la misma función. Se trata de la comentada anteriormente.*

ii. El mismo resultado se obtiene si $g_0(\alpha) = g_1(\alpha) = \alpha$.

b) En [150] el autor generaliza la construcción de S_a y caracteriza el caso en que las funciones son singulares. El estudio de un ejemplo de un caso particular ha sido realizado en el Capítulo 5.6. Cuando $g_0(\alpha) = g_1(\alpha)$, todos los elementos de la familia f_α son miembros de las generalizaciones realizadas por Salem.

Capítulo 6

La función de Cantor y funciones peculiares

6.1. Introducción

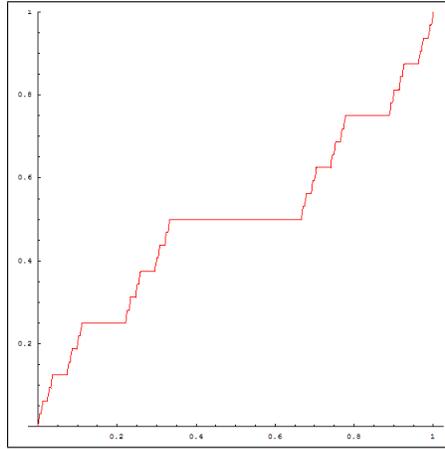
En el estudio realizado en el capítulo 3 nos encontramos con una familia de funciones reales, definidas en \mathbb{I} , que llamamos T_{ab} . Estas funciones tienen las siguientes propiedades: son continuas, en un conjunto de medida uno tienen derivada nula y no existe ningún intervalo de monotonía; no se ha establecido si los elementos de esta familia son de variación acotada. Ante esta situación, en este capítulo se pretende buscar ejemplos sencillos de funciones que tengan las mismas propiedades que T_{ab} y, además, son de variación acotada. Con las ideas que se desarrollan con el fin de crear estas funciones se han podido crear ejemplos de funciones de los siguientes tipos:

- a) Monótonas singulares que concentran la masa en un conjunto de dimensión de Hausdorff igual a un valor de \mathbb{I} previamente fijado.
- b) Sin derivada en ningún punto.
- c) De variación acotada y existe un conjunto de medida uno en el que la función es derivable; y el valor de su derivada es cero.
- d) No son monótonas en ningún intervalo (esto es, son de tipo MNI o MNTI).

El principal instrumento en la construcción de la primera función es la conocida función de Cantor C . Recordamos que el conjunto de Cantor c , está formado por aquellos números de \mathbb{I} cuyo desarrollo en base tres contiene únicamente ceros y doses. Puede ser construido a partir de \mathbb{I} dividiéndolo en tres intervalos de igual longitud y eliminando el interior del central. Repitiendo el proceso con los dos intervalos cerrados que quedan obtenemos otros cuatro intervalos; y continuando con este proceso hasta el infinito, el conjunto que queda es el de Cantor.

La función puede ser descrita como aquella que a un elemento $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, del conjunto c , le hace corresponder $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n/2}{2^n}$. Para un elemento del complementario de c escrito como $x = \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{y}{3^{k+2}}$ (donde $a_n \in \{0, 2\}$, $y \in \mathbb{I}$), su imagen es: $\sum_{n=1}^k \frac{a_n/2}{2^n} + \frac{1}{2^{k+1}}$.

Se trata de una función monótona creciente con $C(0) = 0$ y $C(1) = 1$. La definición en los puntos del complementario de c nos muestra que en cada uno de los intervalos eliminados en los sucesivos pasos que han dado lugar a la construcción de c la función es constante.



6.2. Funciones singulares estrictamente crecientes

Anteriormente hemos creado y estudiado funciones singulares que son estrictamente crecientes, para ello se han utilizado sistemas de representación de los números reales en \mathbb{I} . Pretendemos hacer lo mismo de un modo sensiblemente diferente. Para ello, definimos la función C_α , con $\alpha \in]0, 1[$. Procedemos como en la construcción de C , pero el segmento eliminado tendrá una proporción α de los anteriores (véase [147, pág.168, ejemplo 8.20]). Esta función tiene las siguientes propiedades:

- i. Es monótona creciente y tiene una infinidad de intervalos en los que es constante. La suma de las longitudes de esos intervalos es 1.
- ii. La medida de Stieltjes asociada dC_α , concentra su masa en un conjunto autosimilar con dimensión de Hausdorff $\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln(1-\alpha)}$.
- iii. Si $\alpha \in]0, y - x[$, entonces $C_\alpha(x) < C_\alpha(y)$.

El primer ejemplo es una aplicación del teorema 0.7 (Fubini).

Proposición 6.1 *La función*

$$F := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} C_{\frac{1}{n+1}}$$

es estrictamente positiva, con medida de Stieltjes asociada dF , que concentra su masa en un conjunto de medida cero, pero con una dimensión de Hausdorff 1.

Para el segundo de los ejemplos hemos de definir previamente un conjunto no numerable de medida nula. Procedemos del siguiente modo: en el primer paso eliminamos el intervalo abierto central de longitud $1/3$ (del mismo modo que para el conjunto ternario de Cantor). En el segundo paso, en cada uno de los dos intervalos que han quedado eliminamos el intervalo central de longitud $(3^3 - 2)/3^3$: quedan cuatro intervalos, cada uno de longitud $1/3^3$. De modo similar en el tercer paso se obtienen ocho intervalos de longitud $1/3^6$ cada uno. Procediendo de este modo, en el n -ésimo paso, tenemos 2^n intervalos cerrados de longitud $1/3^{(n^2+n)/2}$ cada uno.

El conjunto que obtenemos como límite de este proceso lo representamos por c_* .

Lema 6.2 *La dimensión de Hausdorff de c_* es cero.*

Demostración. La desigualdad dada en la proposición 0.52 nos permite escribir:

$$\dim_H c_* \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln n_k}{-\ln \delta_k}.$$

En nuestro caso tenemos que $n_k = 2^k$ y $\delta_k = 3^{-\frac{n^2+n}{2}}$. Por tanto, concluimos que:

$$\dim_H c_* \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{\frac{n^2+n}{2} \ln 3} = 0.$$

■

Por simplicidad, introducimos la siguiente notación.

Notación 6.3 Sea $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Para $a, b \in \mathbb{I}, a < b$, definimos dos nuevas funciones:

$${}^{ab}f(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ f\left(\frac{x-a}{b-a}\right), & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{si } x > b \end{cases} ; \text{ y } \bar{f}(x) := \sum_{a,b \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{I}} \frac{{}^{ab}f(x)}{2^{n_{a,b}}}$$

donde $n_{a,b}$ da una numeración de $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}) \times (\mathbb{Q} \cap \mathbb{I})$.

De modo inmediato tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.4 Sea $C_* : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ la función construida del mismo modo que la función C_α . Entonces, i) C_* es una función singular que concentra su masa en el conjunto c_* , y ii) la función \bar{C}_* es estrictamente creciente y singular cuya medida de Stieltjes asociada $d\bar{C}_*$, concentra su masa en un conjunto de dimensión de Hausdorff cero.

Comentario 6.5 Puesto que dC_α concentra su masa en un conjunto de dimensión de Hausdorff $\frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln(1-\alpha)}$, la medida $d\bar{C}_\alpha$ concentra su masa en un conjunto de la misma dimensión de Hausdorff.

Si unimos este hecho con los resultados anteriores, entonces concluimos que para todo $\beta \in \mathbb{I}$ es posible construir funciones estrictamente crecientes y singulares cuyas medidas de Stieltjes asociadas concentran la masa en un conjunto de dimensión de Hausdorff β . Este proceso comienza con funciones que son constantes en un conjunto de subintervalos cuya suma de sus longitudes es 1.

6.3. Una función MTNI y de variación acotada con derivada nula en casi todo punto

Recordemos la definición de función tipo MNI y MTNI. Las funciones de tipo MNI (del inglés MNI *monotone on no interval*) son aquellas que pertenecen a $\mathcal{C}(\mathbb{I})$ y no existe ningún intervalo abierto en el que la función es monótona. Un subconjunto especial de estas funciones son las de tipo MNTI (del inglés *monotonic type on no interval*). La función continua f es de tipo MNTI si para todo $m \in \mathbb{R}$ ocurre que la función dada por $f(x) + mx$ es de tipo MNI.

En primer lugar definimos una función con dos copias de C .

Definición 6.6

$$D_0 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I} \\ D_0(x) = \begin{cases} C(2x), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ C(2-2x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Destacamos un conjunto $M_c = c/2 \cup (1/2 + c/2)$, es el conjunto de puntos x para los que no existe un intervalo, conteniendo a x , donde D_0 sea constante.

Definición 6.7 Dada una función f definida en \mathbb{I} y acotada, para $a, b \in \mathbb{I}$ escribimos

$$f^{ab}(x) = \begin{cases} f\left(\frac{x-a}{b-a}\right), & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función D_0 tiene una infinidad de intervalos, que escribiremos de forma numerada $\{[a_{0,n}, b_{0,n}] : n \in \mathbb{N}\}$ en los que la función es constante; y la longitud total de esos intervalos es uno. Crearemos una función

$$D_1(x) = D_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_{0,n} - a_{0,n})}{2} D_0^{a_{0,n}b_{0,n}}(x)$$

Esta función tiene las mismas propiedades que D_0 , los intervalos en los que es constante son notados como $[a_{1,n}, b_{1,n}]$; procediendo como antes se tiene:

$$D_2(x) = D_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_{1,n} - a_{1,n})}{2^2} D_0^{a_{1,n}b_{1,n}}(x)$$

En general tenemos una sucesión de funciones obtenidas de este modo

$$D_{k+1}(x) = D_k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_{k,n} - a_{k,n})}{2^{k+1}} D_0^{a_{k,n}b_{k,n}}(x)$$

La función $D : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ está definida por

$$D(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} D_k(x) = D_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_{k,n} - a_{k,n})}{2^{k+1}} D_0^{a_{k,n}b_{k,n}}(x).$$

D es la función con las propiedades enunciadas anteriormente. La continuidad es consecuencia de la convergencia uniforme de las D_k . Para estudiar la derivabilidad es necesario un resultado previo. (Por Tf denotaremos, como es acostumbrado, a la variación total de una función de variación acotada f .)

Teorema 6.8 D es una función de variación acotada y tiene derivada cero en un conjunto de medida uno.

Demostración. Con la ayuda del teorema 0.8 es suficiente demostrar que la serie doble

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_{k,n} - a_{k,n})}{2^{k+1}} T D_0^{a_{k,n}b_{k,n}},$$

existe.

Para una función f de variación acotada, sepamos que f y f^{ab} (para cualesquiera a y b) verifican $Tf = Tf^{ab}$. Pero,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_{k,n} - a_{k,n})}{2^{k+1}} T D_0^{a_{k,n}b_{k,n}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_{k,n} - a_{k,n})}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1,$$

por lo que D es de variación acotada. Como cada D_0^{ab} tiene derivada cero en un conjunto de medida uno, existe un conjunto de medida uno en el que todas las $C^{a_{k,n}b_{k,n}}$ son derivables con derivada nula, por lo que hay un conjunto de medida uno en el que la derivada de D es cero. ■

Teorema 6.9 El conjunto de puntos donde se alcanzan máximos relativos de D es un subconjunto de racionales, denso en \mathbb{I} .

Demostración. El modo en que ha sido definida $D_1(x)$ garantiza que $D_1(x) < D_0(1/2) = D(1/2)$ para cualquier valor de $x \neq 1/2$. Del mismo modo, para un intervalo $[a_{0,n}, b_{0,n}]$, se tiene

$$D_2(x) < D_1\left(\frac{a_{0,n} + b_{0,n}}{2}\right) = D\left(\frac{a_{0,n} + b_{0,n}}{2}\right)$$

para cualquier $x \in [a_{0,n}, b_{0,n}]$ y $x \neq \frac{a_{0,n} + b_{0,n}}{2}$. En general,

$$D_{k+1}(x) < D_k\left(\frac{a_{k-1,n} + b_{k-1,n}}{2}\right) = D\left(\frac{a_{k-1,n} + b_{k-1,n}}{2}\right)$$

para los puntos $x \in [a_{k-1,n}, b_{k-1,n}]$ y $x \neq \frac{a_{k-1,n} + b_{k-1,n}}{2}$. Lo que hemos descrito nos garantiza que D alcanza su máximo absoluto en $1/2$. Como en $[a_{k,n}, b_{k,n}]$ se tiene una réplica de D (la escala depende de cada intervalo), podemos deducir que D tiene un máximo relativo en $\frac{a_{k,n} + b_{k,n}}{2}$. Todos estos puntos son racionales.

Quedan dos casos:

i) Existe un intervalo $[a_{k,n}, b_{k,n}]$, de modo que para un elemento $y \in M_c$ se tiene que $x = \frac{y - a_{k,n}}{b_{k,n} - a_{k,n}}$, por lo que la función no puede tener un máximo.

ii) Existe una infinidad de intervalos $[a_{k,n}, b_{k,n}]$ que contienen a x . Por lo que para cualquier intervalo $]m, n[\ni x$, encontramos $x \in [a_{k,n}, b_{k,n}] \subset]m, n[$. En este intervalo $D(x) < D\left(\frac{a_{k,n} + b_{k,n}}{2}\right)$, por lo que la función no puede tener un máximo en x . ■

Teorema 6.10 El conjunto de mínimos de D es un subconjunto de racionales, denso en \mathbb{I} .

Demostración. El razonamiento es similar al anterior, los mínimos se alcanzan en uno de los dos extremos de cada intervalo $[a_{k,n}, b_{k,n}]$. Se trata de $a_{k,n}$ si $[a_{k,n}, b_{k,n}]$ está incluido en un intervalo abierto en que D_k es monótona decreciente y $b_{k,n}$ si en el intervalo encontrado D_k es monótona creciente. ■

Proposición 6.11 *La función D es de tipo MTNI.*

Demostración. La función de Cantor C satisface que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-C(1-\frac{2}{3^n})}{2/3^n} = +\infty$; por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_0\left(\frac{1}{2}\right) - D_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^n}\right)}{1/3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{D_0\left(\frac{1}{2}\right) - D_0\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3^n}\right)}{1/3^n} = +\infty.$$

Pero en los puntos de la forma $1/2, 1/2 - 1/3^n$ y $1/2 + 1/3^n$, las funciones D y D_0 coinciden. Los límites anteriores son ciertos para D . En particular, para cualquier intervalo abierto que contenga a $1/2$, es imposible encontrar un número natural m satisfaciendo

$$\begin{aligned} D_0\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^n}\right) + m\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^n}\right) &\leq D_0\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{m}{2} \\ &\leq D_0\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3^n}\right) + m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3^n}\right) \end{aligned}$$

para todo n tal que $1/2 - 1/3^n$ y $1/2 + 1/3^n$ pertenecientes al intervalo. Por tanto, D es MTNI en estos intervalos.

La forma en que hemos definido D asegura que, para un intervalo abierto I , existe un subintervalo cerrado J con interior no vacío, donde D y $D|_J$ se obtienen de la misma forma (multiplicado por alguna constante). Por tanto, el razonamiento anterior puede aplicarse en J para concluir que D es MTNI. ■

6.4. Una función continua que no admite derivada en ningún punto

Definición 6.12 *Si el intervalo $[a_{k,n}, b_{k,n}]$ tiene longitud $3^{-r_{k,n}}$. La función será:*

$$h(x) = D_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r_{k,n}}} D_0^{a_{k,n} b_{k,n}}(x).$$

Pero, en lugar de estudiar esta h , lo haremos con $f(x) = h(x/2)$. La forma en que se construye la función muestra que satisface las ecuaciones:

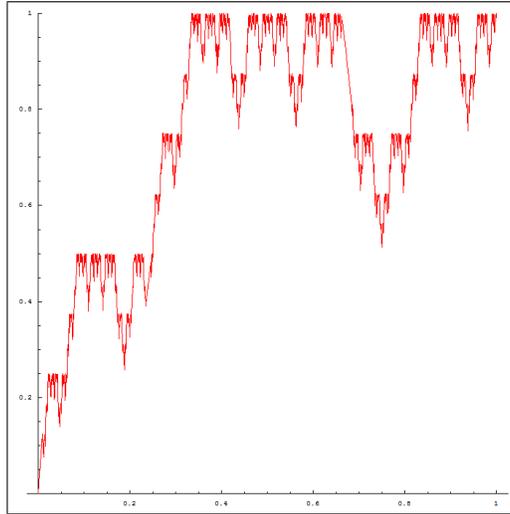
$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{f(x)}{2} \\ f\left(\frac{x+2}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{f(x)}{2} \\ f\left(\frac{x+3}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{f(1-x)}{2} \\ f\left(\frac{x+2}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{f(x)}{2} \end{cases}$$

El teorema del punto fijo de Banach nos garantiza que es la única que las cumple.

Con el fin de obtener una representación relativamente sencilla y manejable estudiaremos la función continua que satisface las ecuaciones:

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{f(x)}{2} \\ f\left(\frac{x+1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{f(x)}{2} \\ f\left(\frac{x+2}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{f(1-x)}{2} \\ f\left(\frac{x+3}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{f(x)}{2} \end{cases}$$

Esta función es semejante a la anterior, pero cuando se crea el conjunto de Cantor los intervalos eliminados tienen longitud $1/2$ del anterior en vez de $1/3$. Esto nos permite ayudarnos de la representación en base cuatro para dar una expresión de la función. Su gráfica es la que vemos a continuación.



Necesitamos una breve introducción sobre máquinas y funciones secuenciales (véanse [59, Chap.XI] o [139]).

Sea S^* el monoide libre generado por el alfabeto S (los elementos de S^* son llamadas palabras), y su elemento unidad es la palabra vacía representada por θ . Notamos por $[m]$ el alfabeto $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. Una *máquina secuencial* (o *transductor*) $M = (Q, A, B, \sigma, \tau)$ consiste en un conjunto finito de estados Q , un alfabeto de entrada A , y otro de salida B , una función de transición $\sigma : Q \times A \rightarrow Q$, y una función de salida $\tau : Q \times A \rightarrow B$.

Las funciones de transición y salida pueden ser extendidas de forma única a $\sigma : Q \times A^* \rightarrow Q$ y $\tau : Q \times A^* \rightarrow B^*$, respectivamente, satisfaciendo que $\sigma(q, \theta) = q$, para todo $q \in Q$, y para todas las palabras $v, w \in A^*$ y todo $q \in Q$ ocurre que

$$\begin{aligned}\sigma(q; vw) &= \sigma(\sigma(q, v), w), \\ \tau(q, vw) &= \tau(q, v)\tau(\sigma(q, v), w).\end{aligned}$$

Para cada $q \in Q$, la máquina secuencial $M = (Q, A, B, \sigma, \tau)$ define una función $f_q^* : A^* \rightarrow B^*$ que es llamada la función secuencial correspondiente a M y q . Definida por

$$f_q^*(a_1, \dots, a_n) = \tau(q, a_1, \dots, a_n).$$

Si $A = [n]$ y $B = [m]$, entonces cada función secuencial f_q^* generalmente conduce a funciones multivaluadas $f_q : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ del siguiente modo: para $x \in \mathbb{I}$, sea $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k n^{-k}$, $x_k \in [m]$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, y $f_q^*(x_1 \dots x_r) = b_1 \dots b_r$ para todo $r \in \mathbb{Z}^+$. Entonces

$$f_q(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{m^j}.$$

Teorema 6.13 Sea $M = (Q, A, B, \sigma, \tau)$ una máquina secuencial con,

$$Q = \{\alpha, \beta\}, \quad A = \{0, 1, 2, 3\}, \quad \text{y } B = \{0, 1\};$$

$$\tau : Q \times A \rightarrow Q$$

tal que

$$\begin{aligned}(\alpha, 0) &\rightarrow 0; & (\beta, 0) &\rightarrow 1 \\ (\alpha, 1) &\rightarrow 1; & (\beta, 1) &\rightarrow 1 \\ (\alpha, 2) &\rightarrow 1; & (\beta, 2) &\rightarrow 1 \\ (\alpha, 3) &\rightarrow 1; & (\beta, 3) &\rightarrow 0\end{aligned}$$

y

$$\sigma : Q \times A \rightarrow B$$

tal que

$$\begin{aligned}(\alpha, 0) &\rightarrow \alpha; & (\beta, 0) &\rightarrow \beta \\ (\alpha, 1) &\rightarrow \alpha; & (\beta, 1) &\rightarrow \alpha \\ (\alpha, 2) &\rightarrow \beta; & (\beta, 2) &\rightarrow \beta \\ (\alpha, 3) &\rightarrow \alpha; & (\beta, 3) &\rightarrow \beta\end{aligned}$$

Entonces, la función f coincide con f_α . (Notemos que $f_\beta(x) = f(1-x)$.)

Demostración. Como g está bien definida en los puntos de doble definición de la representación diádica, basta comprobarlo para $1/4, 1/2, 3/4$. Pero, para verificar que son la misma función es suficiente observar que satisface las ecuaciones funcionales. ■

Teorema 6.14 *La función f es continua y no admite derivada en ningún punto.*

Demostración. Fijado $x \in \mathbb{I}$. Para cualquier intervalo abierto conteniendo x , es posible encontrar x' satisfaciendo que $|x - x'| \asymp \frac{1}{4^n}$ y $|f(x) - f(x')| \asymp \frac{1}{2^n}$. Por tanto, si existe derivada, debe ser infinita y la afirmación es cierta. ■

Observemos que, la función f no es una función de Besicovitch (i.e., una función continua que no tiene derivada finita o infinita en ningún punto). Efectivamente, existen puntos para los que podemos encontrar una derivada lateral infinita, por ejemplo el origen. Pero, como veremos ahora, son un conjunto excepcional.

Proposición 6.15 *Existe un conjunto de medida uno donde la función f no admite derivada lateral, finita o infinita, en ninguno de sus puntos.*

Demostración. Si el punto $x \in \mathbb{I}$ tiene una infinidad de dígitos igual a uno en su desarrollo en base cuatro entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, es posible encontrar $x_{1,\varepsilon} > x$ tal que $|x - x_{1,\varepsilon}| < \varepsilon$ y $f(x) = f(x')$. Por tanto, de existir derivada lateral derecha debe ser igual a cero.

Si el punto $x \in \mathbb{I}$ tiene una infinidad de dígitos igual a dos en su desarrollo en base cuatro entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, es posible encontrar $x_{2,\varepsilon} < x$ cumpliendo que $|x - x_{2,\varepsilon}| < \varepsilon$ y $f(x) = f(x')$. Por tanto, de existir derivada lateral izquierda, debe ser igual a cero.

Si el punto $x \in \mathbb{I}$ tiene una infinidad de dígitos igual a cero en su desarrollo en base cuatro entonces, para una infinidad de valores n , es posible encontrar $x_{1,n} > x$ verificando que $|x - x_{1,n}| \asymp \frac{1}{4^n}$ y $|f(x) - f(x_{1,n})| \asymp \frac{1}{2^n}$. Por tanto, de existir derivada lateral derecha, no puede ser finita.

Si el punto $x \in \mathbb{I}$ tiene una infinidad de dígitos igual a tres en su desarrollo en base cuatro entonces, para una infinidad de valores n , es posible encontrar $x_{2,n} < x$ para el que $|x - x_{2,n}| \asymp \frac{1}{4^n}$ y $|f(x) - f(x_{2,n})| \asymp \frac{1}{2^n}$. Por tanto, de existir derivada lateral izquierda, no puede ser finita.

Como es conocido por Teoría de Números, el conjunto de puntos cuyo desarrollo en base cuatro toma cada uno de los cuatro dígitos en una infinidad de ocasiones es de medida uno (véanse [74] y [128]). Por tanto, ninguno de los puntos de este conjunto admite derivada lateral (finita o infinita). ■

Proposición 6.16 *i. Para cada $x \in \mathbb{I}$, la función f satisface la condición de Hölder para el índice $1/2$; i.e., $|f(x) - f(y)| = O(|x - y|^{1/2})$ para y próximo a x .*

ii. No existe ningún punto tal que la propiedad anterior sea cierta para $1/2 - \varepsilon$.

Demostración. i. Si $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k}$, e $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{4^k}$, entonces consideramos dos casos.

i.a) $x = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{4^k} + \frac{1}{4^{n+1}} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{4^k}$, e $y = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{4^k} + \sum_{k=n+2}^{m-1} \frac{3}{4^k} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a'_k}{4^k}$, para $a_m \neq 0$. En este caso, $|x - y| \asymp \frac{1}{4^m}$ y $|f(x) - f(y)| = O\left(\frac{1}{2^m}\right)$. Por tanto, la afirmación es cierta.

i.b) $x = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{4^k} + \frac{1}{4^{n+1}} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{4^k}$, e $y = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{4^k} + \sum_{k=n+2}^{p-1} \frac{3}{4^k} + \sum_{k=p}^{\infty} \frac{a'_k}{4^k}$, para $a_p \neq 3$ y $p < m$. En este caso, $|x - y| \asymp \frac{1}{4^p}$ y $|f(x) - f(y)| = O\left(\frac{1}{2^p}\right)$. Por tanto, la afirmación es cierta.

i.c) En otro caso, si $a_k = a'_k$ para los primeros n términos, entonces $|x - y| \asymp \frac{1}{4^n}$ y $|f(x) - f(y)| = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$; y se obtiene nuevamente el resultado.

ii. La segunda parte está implícita en el último teorema puesto que hemos encontrado un valor y , para un x , dado tal que $|x - y| \asymp \frac{1}{4^n}$ y $|f(x) - f(y)| \asymp \frac{1}{2^n}$. Entonces, el índice no puede cambiarse por $1/2 - \varepsilon$. ■

Corolario 6.17 *La gráfica de la función f tiene dimensión por cajas $1/2$.*

Ahora, demostraremos que f no admite derivada aproximada en ningún punto. Es necesario un poco de notación. Recordamos que x es un *punto de densidad* en un conjunto medible A (véase [166]) si ocurre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(A \cap [x - h, x + h])}{2h} = 1.$$

Casi todos los puntos de un conjunto medible A son densos en él. Una función f se dice que es *aproximadamente derivable* en un punto x si existe un conjunto A para el que x es un punto de densidad y existe el límite $\lim_{A \ni a \rightarrow x} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$. No es difícil demostrar que, en caso de existir, el límite no depende de A . Este límite es la *derivada aproximada* de f en x .

Teorema 6.18 *La función f no tiene derivada aproximada en ningún punto.*

Demostración. Para todo intervalo $[x - \frac{1}{4^{n-1}}, x + \frac{1}{4^{n-1}}]$, podemos encontrar subintervalos de la forma

$$\left[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n} \right] \supset \left[\frac{t}{4^{n+1}}, \frac{t+1}{4^{n+1}} \right] \ni x.$$

Si $t \equiv 0$, entonces consideramos $\left[\frac{4(t+1)+1}{4^{n+2}}, \frac{4(t+1)+2}{4^{n+2}} \right] =: B_n$. En otro caso, tomamos $\left[\frac{4t}{4^{n+2}}, \frac{4t+1}{4^{n+2}} \right] =: B_n$.

En los dos casos, si $y \in B_n$, entonces $|x - y| \leq \frac{1}{4^n}$ y $|f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{2^{n+2}}$; por tanto $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \geq 2^{n-2}$.

Si x es un punto de densidad en A , existe una infinidad de valores n para los que $A \cap B_n \neq \emptyset$. Si no ocurre esto, entonces

$$\lambda \left(A \cap \left[x - \frac{1}{4^{n-1}}, x + \frac{1}{4^{n-1}} \right] \right) \leq 2 \frac{1}{4^{n-1}} - \frac{1}{4^{n+1}},$$

lo que contradice el hecho de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda \left(A \cap \left[x - \frac{1}{4^{n-1}}, x + \frac{1}{4^{n-1}} \right] \right)}{2 \frac{1}{4^{n-1}}} = 1.$$

Sea (n_k) la sucesión de los índices para los que $A \cap B_{n_k} \neq \emptyset$. Podemos elegir $y_k \in A \cap B_{n_k}$. Para cada uno de ellos, tenemos $\left| \frac{f(x)-f(y_k)}{x-y_k} \right| \geq 2^{n_k-2}$. Por tanto, no puede ser aproximadamente derivable. ■

Argumentos de autosimilaridad conducen al siguiente resultado.

Proposición 6.19

$$\int_0^1 f(x) dx = 3/4$$

Proposición 6.20 *El conjunto de puntos en que $f(x) = 1$ tiene dimensión de Hausdorff $\ln 3 / \ln 4$.*

Demostración. El conjunto es autosimilar y responde a estas tres contracciones de \mathbb{I} :

$$\begin{cases} T_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \\ T_2(x) = \frac{1}{4}(1-x) + \frac{1}{2} \\ T_3(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \end{cases}$$

■

Esta función está relacionada con la familia S_a que ya estudiamos anteriormente. Son funciones definidas en el intervalo unidad \mathbb{I} satisfaciendo las ecuaciones:

$$\begin{cases} S_a\left(\frac{x}{2}\right) = aS_a(x) \\ S_a\left(\frac{1+x}{2}\right) = a + (1-a)S_a(x). \end{cases}$$

La relación se establece mediante la medida de capacidad. Recordamos que, para una función dada g , v_g está dada por

$$v_g(A) = \lambda(\{x : g(x) \in A\}).$$

Proposición 6.21 *La función f cumple:*

$$v_f([0, x]) = S_{1/4}(x).$$

Demostración. La función $k(x) := v_f([0, x])$ satisface las ecuaciones funcionales de arriba. Esta igualdad se obtiene gracias a la autosimilaridad de f . ■

Corolario 6.22 *Existen dos conjuntos, que llamamos A y B , tales que A es de medida de Lebesgue 1 y $f^{-1}(A)$ es de medida nula. Por otra parte, B es nulo, mientras que $f^{-1}(B)$ es de medida 1.*

Comentario 6.23 *Es posible una descripción explícita para los conjuntos dados arriba con la ayuda del sistema diádico generalizado que se desarrolla en [5]. En particular, A es el conjunto de puntos cuyo desarrollo en serie dado por*

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{1}{4^{m_k}},$$

con $1 \leq m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k \leq \dots$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{n} = 1$. Además, es posible obtener su dimensión de Hausdorff como

$$\frac{\frac{3}{4} \ln \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{1}{4}}{\ln 2}.$$

6.5. El caso absolutamente continuo

Siguiendo las ideas anteriores se creará una función absolutamente continua que no es monótona en ningún intervalo. Para ello, en primer lugar, construiremos un conjunto de tipo Cantor. En el intervalo \mathbb{I} , eliminamos un intervalo central de longitud $1/2^2$ (es decir $[3/8, 5/8]$), posteriormente en cada uno de los dos intervalos que quedan hacemos lo mismo, pero los intervalos eliminados serán de longitud $1/2^4$; repitiendo el proceso con los intervalos eliminados de longitud $1/2^6, 1/2^8, \dots, 1/2^{2n}, \dots$. El resultado después de este proceso es un conjunto de medida $1/2$, al que notaremos por k .

La función auxiliar K podemos crearla mediante sucesivas aproximaciones por polinomios, de modo que sea constante en los intervalos eliminados. Sin embargo, optamos por un método que parece más adecuado para nuestros intereses.

Definición 6.24 $K(x) = 2 \int_0^x \chi_k(t) dt$, (donde χ_k es la función característica del conjunto k).

Evidentemente esta función es absolutamente continua, monótona creciente, tiene un conjunto denso de intervalos en los que es constante y $K(0) = 0$ y $K(1) = 1$. Procedemos como en el caso anterior.

Definición 6.25

$$K_0 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$$

$$K_0(x) = \begin{cases} K(2x), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ K(2-2x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La función K_0 tiene una infinidad de intervalos, que escribiremos numerada, $[c_{0,n}, d_{0,n}]$ en los que la función es constante. Crearemos una función

$$K_1(x) = K_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_{0,n} - c_{0,n})}{2} K^{c_{0,n}d_{0,n}}(x).$$

Los intervalos en los que K_0 es constante son notados como $[c_{1,n}, d_{1,n}]$. Ahora,

$$K_2(x) = K_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_{1,n} - c_{1,n})}{2^2} K^{c_{1,n}d_{1,n}}(x);$$

y en general:

$$K_{s+1}(x) = K_s(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_{s,n} - c_{s,n})}{2^{s+1}} K^{c_{s,n}d_{s,n}}(x)$$

Definición 6.26 Definamos

$$K(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} K_s(x) = K_0(x) + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_{s,n} - c_{s,n})}{2^{s+1}} K^{c_{s,n}d_{s,n}}(x)$$

Comentario 6.27 La longitud de los intervalos hace que, ahora, la situación sea distinta al caso anterior y no es necesario multiplicar por $1/2^{s+1}$. Podíamos haber definido

$$K^*(x) = K_0(x) + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (d_{s,n} - c_{s,n}) K^{c_{s,n}d_{s,n}}(x)$$

y la función seguiría teniendo las mismas propiedades.

Razonando como anteriormente:

Teorema 6.28 K es una función absolutamente que no ningún intervalo de monotonía. Sus máximos y mínimos relativos son un conjunto de números racionales denso en \mathbb{I} .

Demostración. Lo único que hemos de demostrar es que la función es absolutamente continua, las demás afirmaciones siguen como se hizo para D . Considerando

$$K(x) = K_0(x) + \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^r \frac{1}{2^{s+1}} \int_0^x R_{c_{s,n}d_{s,n}}(t) dt.$$

Las funciones $R_{c_{s,n}d_{s,n}}$ están acotadas, por lo que el teorema de la convergencia dominada nos permite intercambiar límite e integración. De este modo obtenemos que la función es absolutamente monótona. ■

6.5.1. Particiones de \mathbb{I} y funciones MNI

Encontrar una función absolutamente continua que no sea monótona en ningún punto está garantizado si encontramos una descomposición de \mathbb{I} en dos conjuntos medibles A y B tales que para cualquier intervalo abierto J se tiene que $\lambda(J \cap A) > 0$ y $\lambda(J \cap B) > 0$. La función a definir sería

$$G(x) = \int_0^x \chi_A(x) - \chi_B(x) dx$$

Estos conjunto A y B no pueden estar distribuidos "homogéneamente", por ejemplo: no puede ocurrir que exista un valor α verificando que $\lambda(J \cap A) = \alpha\lambda(J)$ y $\lambda(J \cap B) = (1 - \alpha)\lambda(J)$. Si así fuese la función $G(x) = \int_0^x \chi_A(x) dx = \alpha x$ debería ocurrir que en un conjunto de medida $\lambda(B)$ su derivada fuese nula, lo que evidentemente no es posible.

a) Para construir A y B creamos, mediante el método de eliminación de intervalos centrales, un conjunto de medida positiva. Los elementos de éste menores que $1/2$ pertenecerán a A y los mayores a B . Repetimos el proceso, con los puntos centrales, en cada intervalo (evidentemente, se puede elegir la pertenencia a A o B en cada ocasión como se quiera). El único cuidado que hay que tener es el que en el resultado final, la unión de A y B tenga medida uno. Con estos conjuntos tenemos la función G . K^* es el caso en que siempre se toman como conjuntos de medida la mitad del anterior.

b) Otro modo de crear A y B es ayudarnos de funciones singulares estrictamente crecientes. Sea $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ una de estas funciones (con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$), A^* un conjunto de medida cero que concentra la masa y B^* su complementario, i.e., $df(A^*) = 1$, $dx(A^*) = 0$, $df(B^*) = 1$, $dx(B^*) = 0$.

Por otra parte, tomamos una función absolutamente continua estrictamente creciente $g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, con $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Definimos $h = \frac{f+g}{2}$, nuestros conjuntos serán $A = h(A^*)$ y $B = h(B^*)$. Dado un intervalo J , escribimos $J^* = h^{-1}(J)$, entonces

$$\lambda(J \cap A) = dh(J^* \cap A^*) = \frac{df(J^*) + dg(J^* \cap A^*)}{2} = \frac{df(J^*)}{2} > 0.$$

(La última igualdad es consecuencia del teorema de Banach-Zaretski [93, pág. 167].) Para B se procede del mismo modo.

Comentario 6.29 Para los casos particulares de $f = S_a$ y $g = \text{identidad}$, ¿la función $G(x) = \int_0^x [\chi_A(t) - \chi_B(t)] dt$ es derivable en todos los puntos?

Comentario 6.30 (Relación con funciones absolutamente continuas cuya inversa no lo es) Es conocido que una función de distribución es singular en \mathbb{I} , si y sólo si, aplica un conjunto de medida uno en otro de medida cero y, al contrario, un conjunto de medida cero en otro de medida uno. Evidentemente, si f es singular y estrictamente creciente entonces f^{-1} también ha de serlo. Este no es el caso de las funciones absolutamente continuas, podemos encontrar funciones f creciente y absolutamente continuas con inversa que no es. La clave de la propuesta que se hace a continuación está en el teorema de Banach-Zaretski, ya que únicamente pide que aplique conjuntos de medida cero en otros de la misma medida; buscaremos una función a.c. y creciente que aplica un conjunto de medida positiva en uno de medida cero. Un método sencillo nos lo da una descomposición de las anteriores. La función $G(x) = \frac{1}{\lambda(A)} \int_0^x \chi_A(t) dt$, evidentemente, es una función de distribución absolutamente continua. En un conjunto de medida $\lambda(A)$ se tiene $G'(x) = \frac{1}{\lambda(A)}$ y en otro de medida $\lambda(B) = 1 - \lambda(A)$ se tiene $G'(x) = 0$.

Necesitamos ayuda del siguiente resultado: Si f es creciente y en todos los puntos de un conjunto E , la función tiene derivada y el valor de ésta es α , entonces $\lambda(f(E)) = \alpha\lambda(E)$, se deduce de [93, pág. 22].

Un subconjunto B_0 de B , de medida positiva, se aplica, mediante f , en uno de medida nula. La inversa f^{-1} , aplica el conjunto $f(B_0)$, de medida nula, en otro de medida positiva, por lo que no puede ser absolutamente continua. (Notemos que tampoco puede ser singular pura.)

Parte III

Teoría de Cópulas

Capítulo 7

Funciones que conservan la medida y cópulas

7.1. Introducción

La relación entre cópulas y funciones que conservan la medida en el intervalo unidad es un campo de investigación relativamente nuevo. La existencia de una relación entre ellas ha sido establecida en 1996 en [129] y [163] del siguiente modo: si f_1, f_2, \dots, f_n son funciones que conservan la medida, la función $C_{f_1, f_2, \dots, f_n} : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ definida por

$$C_{f_1, f_2, \dots, f_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \lambda(f_1^{-1}([0, x_1]) \cap f_2^{-1}([0, x_2]) \cap \dots \cap f_n^{-1}([0, x_n]))$$

es una cópula. Inversamente, toda cópula puede expresarse de la forma C_{f_1, f_2, \dots, f_n} .

Recientemente, en [102], los autores plantean el problema de caracterizar los pares de funciones (f, g) que conservan la medida y tales que la cópula asociada es la llamada cópula producto o cópula independiente; es decir, $\Pi = C_{f, g}$. En este Capítulo damos respuesta a ese problema; y se da un método que, para una cópula C , permite encontrar funciones (f, g) que preservan la medida para las que $C = C_{f, g}$. El resultado también es válido para n dimensiones.

En el caso de la cópula independiente Π se dan algunos ejemplos de estas funciones. Se trata de funciones bien conocidas pues fueron descubiertas a finales del siglo XIX y principios del siglo XX; son debidas a Cantor, Hilbert y Peano.

Recientemente, Fredricks et al. en [67], utilizando un sistema iterado de funciones, construyen una familia de cópulas $\{C_{T_r} : r \in]0, 1/2[\}$ cuyo soporte es un conjunto fractal. Utilizando dos sistemas de representación de los números del intervalo \mathbb{I} , describimos dos funciones f_r y g_r que preservan la medida para las que C_{f_r, g_r} es la cópula C_{T_r} .

También, utilizando técnicas relacionadas con fractales, probabilidad y Teoría Ergódica (véanse, por ejemplo, [30], [63], [64]), se estudian algunas propiedades de estos sistemas de representación.

Mediante la caracterización de las funciones cuya gráfica concentra una medida doblemente estocástica y, por tanto, origina una cópula, podemos estudiar un caso particular de funciones. Se trata de las funciones autoafines. Kamae, en [91], usando una generalización de la dada por Kôno, en [103], para funciones autoafines, da una caracterización de éstas como funciones generadas por autómatas. Urbanski, en [162], ha dado condiciones para determinar la dimensión de la gráfica de una función autoafín en el sentido introducido por Kôno.

En [104], Kono obtiene las dimensiones de Hausdorff y por cajas de la gráfica de una función autoafín bajo algunas condiciones. En [22] y [141] se encuentran resultados que siguen esta línea de investigación.

En este Capítulo vamos a dar una definición de función autosimilar, en el sentido de Kamae, adaptada al intervalo \mathbb{I} , y condiciones para que la gráfica de una de estas funciones pueda soportar una medida doblemente estocástica y, por tanto, tenga asociada una cópula. Esta condición nos permitirá calcular la dimensión de Hausdorff de las funciones autoafines.

7.2. Resultado general

Proposición 7.1 *Sea $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ una función medible Borel. Entonces, existe una cópula C cuya medida asociada μ_C tiene su masa concentrada en la gráfica de f (con $\mu_C(G(f)) = 1$) si, y sólo si, la función f preserva la medida de Lebesgue λ .*

Demostración. La condición es necesaria: sea C una cópula satisfaciendo que $\mu_C(G(f)) = 1$.

Representamos por $\mathcal{B}(G(f))$ la σ -álgebra formada por los conjuntos de $\mathcal{B}(\mathbb{I}^2)$ que están incluidos en $G(f)$; y, en ella, la restricción de μ_C que notaremos μ_f . La biyección $f^* : \mathbb{I} \rightarrow G(f)$; dada por $x \rightarrow (x, f(x))$, permite establecer un isomorfismo entre los espacios de medida $(\mathbb{I}, \lambda, \mathcal{B}(\mathbb{I}))$ y $(G(f), \mathcal{B}(G(f)), \mu_C)$. La función f^* induce una biyección entre las σ -álgebras; y, para un subintervalo $[a, b] \subset \mathbb{I}$, ocurre que

$$\lambda([a, b]) = \mu_C([a, b] \times \mathbb{I}) = \mu_C([a, b] \times \mathbb{I} \cap G(f)) = \mu_f([a, b] \times \mathbb{I} \cap G(f)).$$

Como estos conjuntos generan la σ -álgebra, entonces el teorema de extensión (véase, [30]) garantiza que, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{I}^2)$,

$$\mu_C(A) = \lambda(\{t : (t, f(t)) \in A\}).$$

Por tanto, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{I})$, tenemos

$$\lambda(f^{-1}(B)) = \lambda(\{t : (t, f(t)) \in \mathbb{I} \times B\}) = \mu_C(\mathbb{I} \times B) = \lambda(B);$$

esto es, f conserva la medida.

Por otra parte, si μ es una medida tal que

$$\mu(A) = \lambda(\{t : (t, f(t)) \in A\})$$

para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{I}^2)$, entonces es doblemente estocástica. Y, por tanto, está concentrada en la gráfica de f . Concluimos que la condición es también suficiente. ■

Vamos a considerar ahora cuatro aplicaciones de \mathbb{I}^2 en sí mismo:

$$\begin{cases} f_0 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (x/2, y/2) \\ f_1 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (x/2, y/2 + 1/2) \\ f_2 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (x/2 + 1/2, y/2 + 1/2) \\ f_3 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (x/2 + 1/2, y/2). \end{cases}$$

Representaremos por A_i al conjunto $f_i(\mathbb{I}^2)$, con $i \in \{0, 1, 2, 3\}$; por A_{ij} a $f_i \circ f_j(\mathbb{I}^2)$, con $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. En general, $A_{i_1 i_2 \dots i_n} = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_n}(\mathbb{I}^2)$, con $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Para n fijo, la unión de los conjuntos $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$, donde $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0, 1, 2, 3\}$, es el cuadrado unidad. Los interiores de estos cuadrados son disjuntos; y sus intersecciones son vacías o bien se trata de segmentos verticales u horizontales de longitud $1/2^n$.

Para la siguiente demostración necesitamos introducir unas definiciones. Para evitar complicar la notación, en las definiciones y el teorema nos limitaremos a considerar dimensión dos; pero, fácilmente, se puede extender a más dimensiones.

Definición 7.2 Al conjunto $\{A_{i_1 i_2 \dots i_n} : i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ lo llamaremos *división n -ésima de \mathbb{I}^2* .

Dado un entero $0 \leq m < 4^n$ le asociamos un índice, $i_1 i_2 \dots i_n$, obtenido de la representación de m en base 4, $m = 4^{i_1} + 4^{i_2} + \dots + 4^{i_n}$. Al conjunto $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ lo representamos por $A_{m,n}$; y al valor $\mu_C(A_{m,n})$, por $\lambda_{m,n}$.

Definición 7.3 (División del intervalo \mathbb{I} asociada a la cópula C) El intervalo m de orden n es de la forma

$$B_{m,n} = \left[\sum_{s=0}^{m-1} \lambda_{s,n}, \sum_{s=0}^m \lambda_{s,n} \right].$$

Puede ocurrir que haya intervalos de longitud nula; y también puede ocurrir que estén repetidos.

Resulta inmediato que $B_{m,n-1} = B_{4m,n} \cup B_{4m+1,n} \cup B_{4m+2,n} \cup B_{4m+3,n}$. Por tanto, si el primero se reduce a un punto, los otros también.

Dadas las definiciones anteriores, una sucesión de cuadrados (D_n) , tales que D_n pertenece a la división n -ésima y que $D_n \subset D_{n-1}$, determina un único punto del cuadrado unidad.

Lema 7.4 Una sucesión de intervalos (E_n) , verificando que E_n pertenece a la división n -ésima y que $E_n \subset E_{n-1}$, determina un único punto del intervalo unidad.

Demostración. Es consecuencia de que las medidas asociadas a las cópulas no tienen átomos; y, por tanto, $\lambda(E_n)$ tiende a cero. ■

Teorema 7.5 Si f_1, f_2, \dots, f_n son funciones que conservan la medida, la función $C_{f_1, f_2, \dots, f_n} : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ definida por

$$C_{f_1, f_2, \dots, f_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \lambda(f_1^{-1}([0, x_1]) \cap f_2^{-1}([0, x_2]) \cap \dots \cap f_n^{-1}([0, x_n]))$$

es una cópula. Inversamente, toda cópula puede expresarse de la forma C_{f_1, f_2, \dots, f_n} .

Demostración. Por simplicidad, la demostración se hará en dimensión dos. Vamos a establecer una correspondencia entre \mathbb{I} y \mathbb{I}^2 . Dado $x \in \mathbb{I}$, definimos como A_x al conjunto de sucesiones de intervalos (E_n) tales que E_n pertenece a la división n -ésima, $E_n \subset E_{n-1}$ y $x \in E_n$, $\forall n$. Dada una sucesión de $(E_n) \in A_x$, para E_n hay un único valor m cumpliendo que $E_n = B_{m,n}$. Por tanto, la sucesión (E_n) tiene asociada de forma natural otra sucesión de cuadrados (D_n) , de modo que D_n pertenece a la división n -ésima y que $D_n \subset D_{n-1}$. El modo de hacerlo consiste en tomar $D_n = A_{m,n}$. Cada una de las sucesiones (D_n) anteriores determina un único punto. Definimos la correspondencia $c' : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}^2$ de modo que $c'(x)$ es el conjunto de puntos determinados por las distintas sucesiones (D_n) asociadas con los elementos de A_x .

La correspondencia c' determina, a su vez, otras dos:

$$c'_1 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I} \text{ y } c'_2 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I},$$

donde $c'_1(x)$ es la proyección de $c'(x)$ en la primera coordenada y $c'_2(x)$ lo es en la segunda.

Las funciones que vamos a estudiar son las definidas mediante:

$$c_1(x) = \inf c'_1(x) \text{ y } c_2(x) = \inf c'_2(x).$$

Hemos de comprobar que ambos preservan la medida de Lebesgue en los conjuntos de Borel, para ello es suficiente con comprobarlo en los intervalos de la forma $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$.

En primer lugar, demostraremos que $\lambda(c_1^{-1}\left(\frac{l}{2^k}\right))$ tiene medida nula. Evidentemente,

$$\begin{aligned} c_1^{-1}\left(\frac{l}{2^k}\right) &\subseteq c_1^{-1}\left(\left[\frac{2^s l - 1}{2^{k+s}}, \frac{2^s l + 1}{2^{k+s}}\right]\right) \\ &\subseteq c'^{-1}\left(\left[\frac{2^s l - 1}{2^{k+s}}, \frac{2^s l + 1}{2^{k+s}}\right] \times \mathbb{I}\right). \end{aligned}$$

Por el modo en que se definió c' tenemos que

$$\lambda\left(c_1^{-1}\left(\frac{l}{2^k}\right)\right) \leq \lambda\left(c'^{-1}\left(\left[\frac{2^s l - 1}{2^{k+s}}, \frac{2^s l + 1}{2^{k+s}}\right] \times \mathbb{I}\right)\right) \leq \frac{1}{2^{k+s-1}}.$$

(La última desigualdad es una consecuencia de que C es una cópula.) Si s tiende a infinito, queda demostrada la afirmación.

La forma de definir c' , junto a la afirmación anterior, nos permite escribir

$$\lambda\left(c_1^{-1}\left(\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]\right)\right) = c'^{-1}\left(\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \times \mathbb{I}\right) = \frac{1}{2^k}.$$

■

Comentario 7.6 La definición de $c_1(x)$ y $c_2(x)$ no era necesaria ya que en un conjunto de medida uno $c'_1(x)$ y $c'_2(x)$ constan de un único punto; no es así en un conjunto numerable, por lo que la definición que se ha hecho no tiene influencia y podía haber sido cualquier otra.

7.3. El caso de la cópula producto II

En [102] los autores plantean el siguiente problema sobre la representación de la cópula producto (o cópula independiente) II:

Problema 7.7 Encontrar un par de funciones f y g para las que $C_{f,g}$ es II.

Ocurre que el método de construcción anterior nos permite encontrar esas funciones. Posteriormente, daremos una expresión utilizándolo; pero ahora vamos a dar una respuesta general al problema.

Teorema 7.8 Para que la cópula $C_{f,g}$ sea la cópula producto Π es necesario y suficiente que f y g sean variables aleatorias independientes.

Demostración. Si las funciones f y g consideradas como variables aleatorias en \mathbb{I} son independientes tenemos que

$$\begin{aligned} C_{f,g}((x, y)) &= \lambda(f^{-1}([0, x] \cap g^{-1}([0, y])) \\ &= \lambda(f^{-1}([0, x])) \lambda(g^{-1}([0, y])) = xy = \Pi(x, y). \end{aligned}$$

Por el contrario, si

$$\Pi(x, y) = xy = C_{f,g}((x, y)) = \lambda(f^{-1}([0, x] \cap g^{-1}([0, y])),$$

y entonces

$$\lambda(f^{-1}([0, x] \cap g^{-1}([0, y])) = xy = \lambda(f^{-1}([0, x])) \lambda(g^{-1}([0, y]));$$

y, por tanto, se sigue la independencia de f y g . ■

Corolario 7.9 Si $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es una función biyectiva que conserva la medida entonces no existe ninguna otra función g que preserve la medida de modo que f y g (vistas como variables aleatorias) sean independientes.

Demostración. Lo demostraremos, en primer lugar, para la identidad; i.e. $f(x) = i(x) = x$. Si existe g independiente con f , tomaremos el conjunto $A = g^{-1}([0, 1/2])$. La independencia garantiza que

$$\begin{aligned} \lambda(A \cap [0, t]) &= \lambda(g^{-1}([0, 1/2]) \cap i^{-1}([0, t])) \\ &= \lambda(g^{-1}([0, 1/2])) \lambda(i^{-1}([0, t])) = t/2. \end{aligned}$$

Definimos ahora la función $h(t) = \int_0^t \chi_A(x) dx$. Puesto que

$$\lambda(A \cap [0, t]) = \int_0^t \chi_A(x) dx$$

tenemos que, para cualquier valor de t , es $h'(t) = 1/2$.

Por otra parte, en un conjunto de medida uno, es cierto que $h'(t) = \chi_A(t)$. Esta contradicción nos permite concluir que no existe tal función g .

En general, si f es una biyección que conserva la medida y otra función g que también preserve la medida y es independiente con f , se tiene que

$$\Pi((x, y)) = C_{f,g} = C_{id, g \circ f^{-1}}.$$

Puesto que $g \circ f^{-1}$ preserva la medida, tenemos que hemos encontrado una función que es independiente con la identidad y preserva la medida, lo que es una contradicción. ■

A continuación se muestran tres ejemplos de pares de funciones para los que $C_{f,g}$ es Π .

7.3.1. Ejemplo de Cantor

En este caso, la cópula cumple que para cualquier rectángulo con interior no vacío, se tiene que la medida asociada con ella es positiva; en particular, los de la forma $[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}] \times [\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]$ tienen medida $\frac{1}{2^{2k}}$. Esto garantiza que la correspondencia definida en el teorema 7.5, asocia un único punto a los puntos de \mathbb{I} que no admiten desarrollo finito en base cuatro; y a los que admiten desarrollo finito, les hace corresponder dos puntos.

Para Π las divisiones inducidas en \mathbb{I} son intervalos de longitud $1/4^n$, por lo que parecería adecuado utilizar la representación en base cuatro pero no es así. Para describir las funciones f y g utilizamos la representación en base dos. Sea $x = \sum \frac{a_n}{2^n}$ un punto con representación única en base dos, las funciones son:

$$\begin{cases} f(x) = \sum \frac{a_{2n-1}}{2^n} \\ g(x) = \sum \frac{a_{2n}}{2^n} \end{cases}$$

En el resto de puntos podemos optar por una de las dos representaciones de x y asociarle un valor siguiendo estas reglas; o por cualquier valor: no influirá ya que se trata de un conjunto de medida nula.

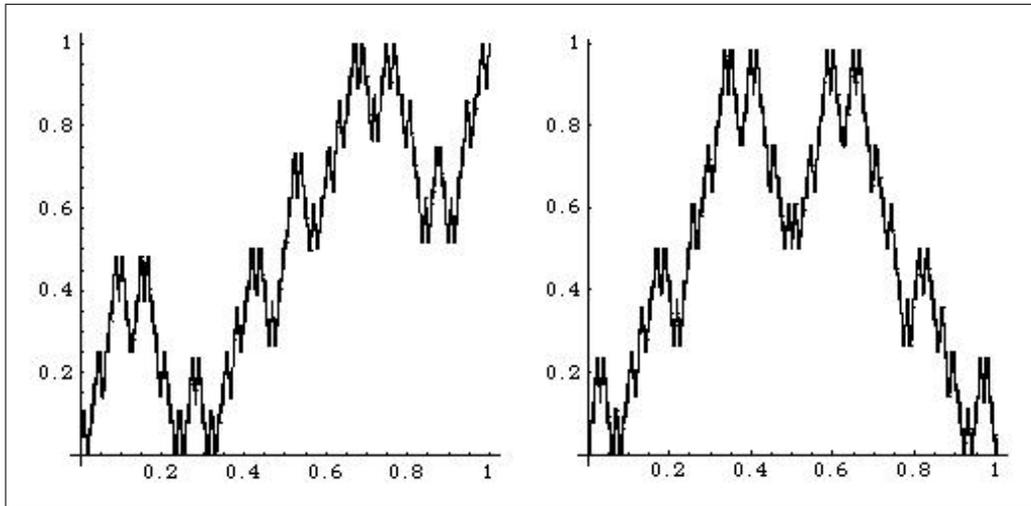
Este ejemplo puede extenderse a otras dimensiones sin ninguna dificultad.

7.3.2. Ejemplo de Hilbert

Las funciones anteriores son discontinuas. Podríamos introducir una modificación que nos dé como resultado funciones continuas. Para ello cambiamos la definición de las funciones f_i ; y, por tanto, de las divisiones. Las nuevas funciones serían:

$$\begin{cases} f_0 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (y/2, x/2) \\ f_1 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (x/2, y/2 + 1/2) \\ f_2 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (x/2 + 1/2, y/2 + 1/2) \\ f_3 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (1 - y/2, x/2 + 1/2) \end{cases}$$

En este caso no hay doble definición en ningún punto; y la correspondencia es una función. Las gráficas de f y g son:



Coordenadas de la curva de Hilbert.

Proposición 7.10 *Las coordenadas de la curva de Hilbert conservan la medida y son variables aleatorias independientes.*

7.3.3. Ejemplo de Peano

La división que se hizo del intervalo \mathbb{I}^2 no es esencial en la demostración del teorema 7.5 y podría haberse hecho otra diferente. Un ejemplo puede ser utilizar una división en nueve cuadrados y las funciones

$$\begin{cases} f_0 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (y/3, x/3) \\ f_1 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (-x/3 + 1/3, y/3 + 1/3) \\ f_2 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (x/3, y/3 + 2/3) \\ f_3 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (x/3 + 1/3, -y/3 + 1) \\ f_4 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (-x/3 + 2/3, -y/3 + 2/3) \\ f_5 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (x/3 + 1/3, -y/3 + 1/3) \\ f_6 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (x/3 + 2/3, y/3) \\ f_7 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (-x/3 + 1, y/3 + 1/3) \\ f_8 : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2; (x, y) \rightarrow (x/3 + 2/3, y/3 + 2/3) \end{cases}$$

El resultado nos da las coordenadas de la curva de Peano, que cubre el cuadrado unidad.

Proposición 7.11 *Las coordenadas de la curva de Peano conservan la medida y son variables aleatorias independientes.*

Para ver la extensión a más dimensiones de las dos últimas curvas puede consultarse [149].

7.4. Cópulas autosimilares

El método general, descrito anteriormente, no siempre es el más adecuado para intentar encontrar una expresión explícita de las funciones f y g . Concretamente, en el caso de cópulas autosimilares podemos utilizar otros más adecuados. En el siguiente Capítulo puede encontrarse un conjunto de estas cópulas a las que se pueden aplicar ideas similares a las que utilizaremos a continuación. Vamos a centrarnos en las medidas definidas en el trabajo de Fredricks et al. [67].

Estas cópulas vienen determinadas por medidas autosimilares tales que en los cuadrados:

- C_0 , que tiene por vértices a $(0, 0), (0, r), (r, 0), (r, r)$;
- C_1 , que tiene por vértices a $(0, 1 - r), (0, 1), (r, 1 - r), (r, 1)$;
- C_2 , que tiene por vértices a $(1 - r, 0), (0, 1), (1 - r, r), (1 - r, 1)$;
- C_3 , que tiene por vértices a $(1 - r, 1 - r), (1 - r, r), (1 - r, 1), (1, 1)$;
- C_4 , que tiene por vértices a $(r, r), (1 - r, r), (r, 1 - r), (1 - r, 1 - r)$;

tienen, respectivamente, masas $r/2, r/2, 1 - 2r, r/2, r/2$, y cero, fuera de ellos. Todo lo anterior lo podemos expresar matricialmente mediante

$$T_r = \begin{bmatrix} r/2 & 0 & r/2 \\ 0 & 1 - 2r & 0 \\ r/2 & 0 & r/2 \end{bmatrix}$$

Para encontrar una expresión de f y de g no son adecuados los sistemas de representación usuales; y por este motivo, describiremos dos nuevos sistemas de representación que, para este ejemplo, son más adecuados.

Proposición 7.12 (Sistema A) *Todo punto del intervalo $]0, 1]$ puede expresarse de la forma*

$$\alpha_0 + \delta_1 \alpha_1 + \delta_2 \alpha_2 + \cdots + \delta_i \alpha_i + \cdots$$

con $\alpha_i \in \{0, r/2, r, 1 - r, 1 - r/2\}$ y δ_i definido a partir de δ_{i-1} de la forma

$$\delta_i = \begin{cases} \delta_{i-1} r/2, & \text{si } \alpha_{i-1} = 0 \\ \delta_{i-1} r/2, & \text{si } \alpha_{i-1} = r/2 \\ \delta_{i-1} (1 - 2r), & \text{si } \alpha_{i-1} = r \\ \delta_{i-1} r/2, & \text{si } \alpha_{i-1} = 1 - r \\ \delta_{i-1} r/2, & \text{si } \alpha_{i-1} = 1 - r/2 \end{cases}$$

Esta representación es única, salvo en un conjunto numerable de puntos en los que admite dos representaciones, una finita y otra estacionaria.

Proposición 7.13 (Sistema B) *Todo punto del intervalo $]0, 1]$ puede expresarse de la forma*

$$a_0 + d_1 a_1 + d_2 a_2 + \cdots + d_i a_i + \cdots$$

con $a_i \in \{0, r, 1 - r\}$ y d_i definido a partir de d_{i-1} de la forma

$$d_i = \begin{cases} d_{i-1} r, & \text{si } a_{i-1} = 0 \\ d_{i-1} (1 - r), & \text{si } a_{i-1} = r \\ d_{i-1} r, & \text{si } a_{i-1} = 1 - r \end{cases}$$

Esta representación es única, salvo en un conjunto numerable de puntos en los que se admiten dos representaciones, una finita y otra estacionaria.

Teorema 7.14 *La cópula C dada por la matriz T_r es igual a $C_{f,g}$, donde la función f se obtienen mediante una relación entre los sistemas **A** y **B** del siguiente modo. Sea un punto con representación única*

$$x = \alpha_0 + \delta_1 \alpha_1 + \delta_2 \alpha_2 + \cdots + \delta_i \alpha_i + \cdots$$

en el sistema **A**, entonces

$$f(x) = d_0 + d_1 a_1 + d_2 a_2 + \cdots + d_i a_i + \cdots$$

donde los coeficientes a_i están determinados por los α_i :

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{si } a_{i-1} = 0 \text{ ó } r/2 \\ r, & \text{si } a_{i-1} = r \\ 1 - r, & \text{si } a_{i-1} = 1 - r \text{ ó } 1 - r/2 \end{cases}$$

Para g ocurre igual, pero la relación viene dada por

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{si } a_{i-1} = 0 \text{ ó } 1 - r \\ r, & \text{si } a_{i-1} = r \\ 1 - r, & \text{si } a_{i-1} = r/2 \text{ ó } 1 - r/2 \end{cases}$$

En el caso de los puntos con doble representación se puede tomar cualquiera de las dos.

Demostración. La demostración es idéntica a la general, pero utilizando el hecho de que la cópula es autosimilar y singular; y que su soporte está determinado por cinco contracciones. ■

7.5. Propiedades de los sistemas de representación

Con la ayuda de herramientas probabilísticas y técnicas propias de fractales, que pueden consultarse en [30], [63], o en [64], no es difícil obtener los siguientes resultados:

Teorema 7.15 *Los sistemas \mathbf{A} y \mathbf{B} son de Bernoulli. Además:*

- En el sistema de representación \mathbf{A} , $\alpha_i(x)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.
- En el sistema de representación \mathbf{B} , $a_i(x)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Proposición 7.16 *Hay un conjunto de medida uno en el que ocurre:*

- Para el sistema \mathbf{A} , existen los siguientes límites

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{\alpha_i = 0 : 0 \leq i \leq n\}}{n} &= r/2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{\alpha_i = r/2 : 0 \leq i \leq n\}}{n} &= r/2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{\alpha_i = r : 0 \leq i \leq n\}}{n} &= 1 - 2r \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{\alpha_i = 1 - r : 0 \leq i \leq n\}}{n} &= r/2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{\alpha_i = 1 - r/2 : 0 \leq i \leq n\}}{n} &= r/2 \end{aligned}$$

- Para el sistema \mathbf{B} , existen los siguientes límites

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{\alpha_i = 0 : 0 \leq i \leq n\}}{n} &= r \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{\alpha_i = r : 0 \leq i \leq n\}}{n} &= 1 - 2r \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{\alpha_i = 1 - r : 0 \leq i \leq n\}}{n} &= r \end{aligned}$$

Hay un conjunto de medida uno en el que ocurre:

- Para el sistema \mathbf{A} , existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{n} = 2r - \frac{5}{2}r^2.$$

d. Para el sistema \mathbf{B} , existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = 2r - 3r^2$$

Y aún podemos precisar un poco más:

Proposición 7.17 Hay un conjunto de medida uno en el que ocurre:

a. Para el sistema \mathbf{A} , existe el límite

$$\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{n} = 2r - \frac{5}{2}r^2 + O\left(\frac{\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{n}}\right)$$

b. Para el sistema \mathbf{B} , existe el límite

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = 2r - 3r^2 + O\left(\frac{\sqrt{\ln \ln n}}{\sqrt{n}}\right)$$

Proposición 7.18 Hay un conjunto de medida uno en el que ocurre:

a. Para el sistema \mathbf{A} , existe el límite

$$\lim_n \lambda \left(a < \frac{2 \sum_{i=1}^n \alpha_i - n(2r - \frac{5}{2}r^2)}{\sqrt{n(4r - 18r^2 + 35r^3 - 25r^4)}} < b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx;$$

b. Para el sistema \mathbf{B} , existe el límite

$$\lim_n \lambda \left(a < \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i - n(2r - 3r^2)}{\sqrt{n((r - 5r^2 + 11r^3 - 9r^4))}} < b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Si tenemos dos valores reales r y r' comprendidos entre 0 y 1/2, podemos definir una función h_1 que a un punto x con representación en el sistema \mathbf{A} (con parámetro r)

$$x = \alpha_0 + \delta_1 \alpha_1 + \delta_2 \alpha_2 + \cdots + \delta_i \alpha_i + \cdots,$$

le hacemos corresponder

$$h_1(x) = \alpha'_0 + \delta'_1 \alpha'_1 + \delta'_2 \alpha'_2 + \cdots + \delta'_i \alpha'_i + \cdots.$$

(La tilde indica que en esta representación sustituimos r por r' .)

Proposición 7.19 La función h_1 está bien definida; i.e., la función no depende de la representación elegida para aquellos puntos con doble representación.

Además, es continua, estrictamente monótona creciente y en un conjunto de medida uno es derivable con derivada igual a cero. En particular, h_1 no admite derivada no nula en ningún punto.

Proposición 7.20 La función h_1 aplica un conjunto de medida cero y dimensión fractal

$$\frac{2r \ln \frac{r'}{2} + (1 - 2r) \ln(1 - 2r')}{2r \ln \frac{r}{2} + (1 - 2r) \ln(1 - 2r)},$$

en otro de medida uno.

Proposición 7.21 La función h_1 aplica un conjunto de medida uno en otro de medida cero y la dimensión fractal del último es

$$\frac{2r' \ln \frac{r}{2} + (1 - 2r') \ln(1 - 2r)}{2r' \ln \frac{r'}{2} + (1 - 2r') \ln(1 - 2r')}.$$

Si hacemos lo mismo con el sistema de representación \mathbf{B} , tenemos una función h_2 con las mismas propiedades que h_1 ; pero, en este caso, las dimensiones de Hausdorff de los conjuntos obtenidos son

$$\frac{2r \ln r' + (1 - 2r) \ln(1 - 2r')}{2r \ln r + (1 - 2r) \ln(1 - 2r)} \text{ y } \frac{2r' \ln r + (1 - 2r') \ln(1 - 2r)}{2r' \ln r' + (1 - 2r') \ln(1 - 2r')}$$

respectivamente.

7.6. Cópulas y funciones autoafines

Enunciamos, para el caso continuo la proposición 7.1.

Proposición 7.22 *Dada una función continua $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, la condición necesaria y suficiente, para poder definir una cópula cuyo soporte sea la gráfica de f es que la función preserve la medida de Lebesgue.*

Para $k \in \mathbb{Z}^+$, notamos por

$$[k] = \{0, 1, 2, \dots, k-1\};$$

y por

$$[k]^* = \{a_1 \dots a_k : k \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq j \leq k\}.$$

Daremos una definición de función autoafín que, al estar adaptada a las funciones de \mathbb{I} en sí mismo, es ligeramente diferente a la de Kamae (véase [91]) y a la de Peitgen et al. (véase [139]).

Definición 7.23 *Una familia de funciones $x_0, x_1, \dots, x_{N-1} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es llamada autoafín de orden $\alpha \in \mathbb{I}$ y base $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$, si satisface las siguientes condiciones:*

- $x_j(0), x_j(1) \in \{0, 1\}$ para todo $j \in [N]$
- Hay una aplicación $\theta : [N] \rightarrow [N]^*$, de longitud constante m , tal que para todo $(j, h) \in [N] \times [m]$ y para $t \in \mathbb{I}$ tenemos

$$x_j\left(\frac{h+t}{m}\right) - x_j\left(\frac{h}{m}\right) = \frac{x_{\theta_h(j)}(t) - x_j(0)}{m^\alpha}$$

donde $\theta_h(j)$ es el elemento de $[k]$ que ocupa el lugar h -ésimo en $\theta(j)$.

Decimos que cada una de las x_j es autoafín.

Ejemplo 7.24 *Recordamos que las coordenadas de la curva de Peano vienen dadas de la siguiente forma: definido el operador $k(\beta) = 2 - \beta$, con $\beta \in \{0, 1, 2\}$, si $t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}$, entonces*

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t_1}{3} + \frac{k^{t_2}(t_1)}{3^2} + \frac{k^{t_2+t_4}(t_5)}{3^3} + \dots \\ y(t) = \frac{k^{t_1}(t_2)}{3} + \frac{k^{t_1+t_3}(t_4)}{3^2} + \frac{k^{t_1+t_3+t_5}(t_6)}{3^3} + \dots \end{cases}$$

La coordenada x de la curva de Peano es autoafín con:

- $N = 2; m = 9; \alpha = 1/2$
- $x_0(t) = x(t), x_1(t) = 1 - x(t)$
- $\theta(0) = 010010010; \theta(1) = 101101101$

Para caracterizar las funciones autoafines cuya gráfica puede soportar una cópula, vamos a utilizar el conjunto $\mathbb{I}^2 \times [N]$. En él podemos definir la siguiente métrica:

$$d((x, y, j), (x', y', j')) = \begin{cases} 10, & \text{si } j \neq j' \\ \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, & \text{si } j = j' \end{cases}$$

Proposición 7.25 *Toda función autoafín es continua.*

Demostración. Es consecuencia de que $|z - z'| < m^{-n} \Rightarrow |x_j(z) - x_j(z')| < 2m^{-n\alpha}$. ■

Proposición 7.26 *Una función es autofín si, y sólo si, la gráfica de la función x_j es la intersección del cuadrado $\mathbb{I}^2 \times \{j\}$ con el compacto fijo, en el espacio de los compactos de $\mathbb{I}^2 \times [N]$ (notado $\kappa(\mathbb{I}^2 \times [N])$) dotado con la métrica de Hausdorff asociada con d , de la contracción que definiremos a continuación.*

Dadas las funciones

$$\begin{aligned} \tau_{jh} &: \mathbb{I}^2 \times \{\theta_h(j)\} \\ &\rightarrow \left[\frac{h}{m}, \frac{h+1}{m} \right] \times \left[x_j\left(\frac{h}{m}\right) - \frac{x_j(0)}{m^\alpha}, x_j\left(\frac{h}{m}\right) + \frac{-x_j(0)+1}{m^\alpha} \right] \times \{j\} \end{aligned}$$

y

$$(x, y) \times \{\theta_h(j)\} \rightarrow \left(\frac{h+x}{m}, x_j \left(\frac{h}{m} \right) + c_{jh} + \frac{y - x_j(0)}{m^\alpha} \right) \times \{j\},$$

definimos

$$\tau : \kappa(\mathbb{I}^2 \times [N]) \rightarrow \kappa(\mathbb{I}^2 \times [N])$$

de modo que

$$C \rightarrow \bigcup_{jh} \tau_{jh}(C \cap \mathbb{I}^2 \times \{\theta_h(j)\}).$$

Demostración. Es sencillo comprobar que se trata de una contracción.

Representamos por F el compacto fijo por τ . En general, tenemos las dos igualdades:

$$\tau(C) \cap \mathbb{I}^2 \times \{j\} = \bigcup_j \tau_{jh}(C \cap \mathbb{I}^2 \times \{\theta_h(j)\})$$

y

$$\tau(C) \cap \left[\frac{h}{m}, \frac{h+1}{m} \right] \times \mathbb{I} \times \{j\} = \tau_{jh}(C \cap \mathbb{I}^2 \times \{\theta_h(j)\}).$$

Pero, esta última igualdad es equivalente a condición:

$$x_j \left(\frac{h+t}{m} \right) - x_j \left(\frac{h}{m} \right) = \frac{x_{\theta_h(j)}(t) - x_j(0)}{m^\alpha}.$$

■

Teorema 7.27 Una familia de funciones autoafines que pueden soportar una cópula si, y sólo si, $m^{1-\alpha} \in \mathbb{Z}^+$ y para cada $j \in [N]$ y $r \in [m^\alpha]$ se tiene que

$$\text{Card} \left\{ h : 0 \leq h \leq m-1; x_j \left(\frac{h}{m} \right) - \frac{x_j(0)}{m^\alpha} = \frac{r}{m^\alpha} \right\} = m^{1-\alpha}.$$

Demostración. Si las funciones son autoafines y pueden soportar una cópula ha de ocurrir que su recorrido sea el intervalo \mathbb{I} . Como $x_j(0), x_j(1) \in \{0, 1\}$ para todo j , las imágenes de los intervalos $[\frac{h}{m}, \frac{h+1}{m}]$ son intervalos de la forma $[\frac{r}{m^\alpha}, \frac{r+1}{m^\alpha}]$ con $r \in \mathbb{Z}^+$ y $r < m^\alpha$. Unido ésto a la afirmación previa conduce a que $m^\alpha \in \mathbb{Z}^+$. Si x_j soporta una cópula, ha de preservar la medida de Lebesgue. Por ello,

$$\frac{1}{m^\alpha} = \lambda \left(\left[\frac{r}{m^\alpha}, \frac{r+1}{m^\alpha} \right] \right) = \lambda \left(x_j^{-1} \left(\left[\frac{r}{m^\alpha}, \frac{r+1}{m^\alpha} \right] \right) \right);$$

y puesto que $x_j^{-1} \left(\left[\frac{r}{m^\alpha}, \frac{r+1}{m^\alpha} \right] \right)$ es la unión de intervalos de longitud $1/m$, obtenemos que $m^{1-\alpha} \in \mathbb{Z}^+$.

El razonamiento anterior también nos conduce a que

$$\text{Card} \left\{ h : 0 \leq h \leq m-1; x_j \left(\frac{h}{m} \right) - \frac{x_j(0)}{m^\alpha} = \frac{r}{m^\alpha} \right\} = m^{1-\alpha}.$$

Para demostrar la suficiencia, gracias al teorema de extensión, basta con demostrar que

$$\frac{1}{m^{n\alpha}} = \lambda \left(x_j^{-1} \left(\left[\frac{r}{m^{n\alpha}}, \frac{r+1}{m^{n\alpha}} \right] \right) \right).$$

Como hemos visto, es cierto para $n = 1$. Para los demás valores se obtiene por inducción. ■

7.7. Aplicación al cálculo de dimensiones fractales

Si tenemos una familia de funciones autoafines cuyas gráficas pueden soportar una cópula podemos utilizar esta propiedad para calcular su dimensión de Hausdorff.

Lema 7.28 La dimensión superior por cajas de las gráficas de una función autoafín que puede soportar una cópula es menor o igual que $2 - \alpha$.

Demostración. Para establecer esta acotación vamos a buscar un recubrimiento de la gráfica mediante cuadrados de la red de lado $1/m^n$. Utilizando la aplicación τ tenemos que $\tau^m(\mathbb{I}^2 \times [N])$ es un recubrimiento de las gráficas. En cada conjunto $\mathbb{I}^2 \times \{j\}$, la gráfica de x_j está recubierta por m^n rectángulos de dimensiones $\frac{1}{m^n} \times \frac{1}{m^{\alpha n}}$. Por tanto, dividiéndolos, encontramos un recubrimiento formado por $m^n m^{(1-\alpha)n}$ cuadrados con lado de longitud $1/m^n$.

A partir de este recubrimiento deducimos que

$$\overline{\dim}_B \Gamma(x_j) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{\ln m^n m^{(1-\alpha)n}}{\ln 1/m^n} = 2 - \alpha$$

donde $\Gamma(x_j)$ representa la gráfica de x_j . ■

Para dar una acotación inferior nos ayudamos de la siguiente forma del lema de Frostman.

Lema 7.29 *Sea μ una medida definida en $A \subset \mathbb{R}^2$. Si existen constantes $c > 0$ y $\delta > 0$ tales que, para todo cuadrado m -ádico $Q \subset \mathbb{R}^2$ con $\lambda(\text{lado}(Q)) \leq \delta$,*

$$\mu(Q) = O(\text{lado}(Q)^s),$$

entonces

$$s \leq \dim_{\mathcal{H}}(A).$$

Proposición 7.30 *Las gráficas de una familia de funciones autoafines que pueden soportar una cópula tienen una dimensión de Hausdorff mayor o igual que $2 - \alpha$.*

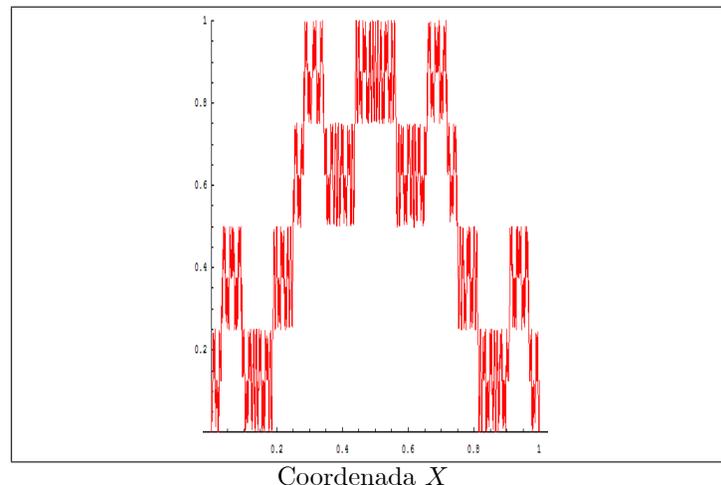
Demostración. Vamos a aplicar el lema anterior a los cuadrados m -ádicos. Como la gráfica soporta una cópula, C , tenemos que los cuadrados fuera de los rectángulos utilizados en el lema 7.28 tienen masa nula. Un cuadrado c de lado $1/m^n$ y masa positiva estará incluido en un rectángulo R de los utilizados en el lema 7.28. Como $\mu_C(R) = 1/m^n$ y R contiene una copia (deformada) de alguna de las $\Gamma(x_j)$, entonces la distribución vertical de la masa es uniforme, por lo que la μ_C -medida del cuadrado es $\frac{1}{m^n m^{(1-\alpha)n}}$. Esto nos permite escribir que $\mu_C(c) = \text{lado}(Q)^{2-\alpha}$; y deducir el resultado. ■

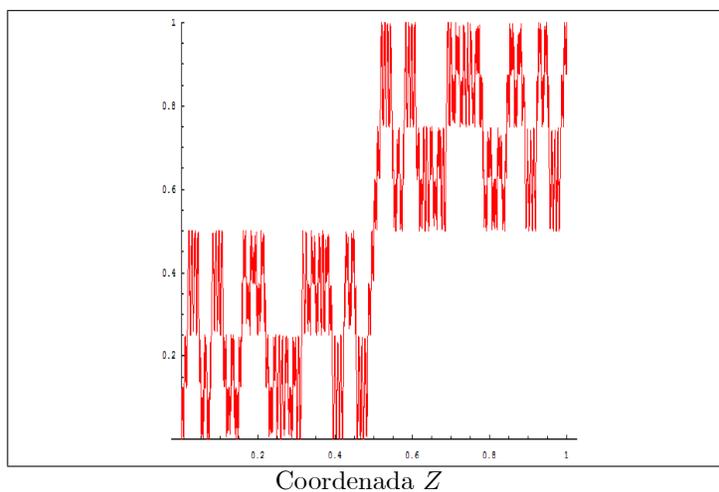
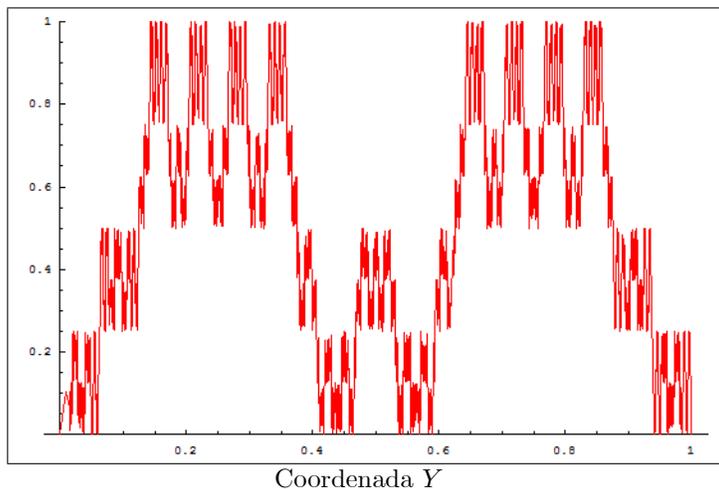
Corolario 7.31 *Las dimensiones de Hausdorff y por cajas de una función autoafín capaz de soportar cópulas es $2 - \alpha$.*

Ejemplo 7.32 *En [149, pag. 26], el autor propone una generalización de la curva de Hilbert a tres dimensiones; es decir, una curva que cubre el cubo unidad. Las coordenadas $x(t), y(t), z(t)$ son autoafines de orden $1/3$ respondiendo al esquema:*

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t), x_1(t) = y(t), x_2(t) = z(t), \\ x_3(t) &= 1 - x(t), x_4(t) = 1 - y(t), x_5(t) = 1 - z(t). \\ \theta(0) &= 02025050, \theta(1) = 21133115, \theta(2) = 10241234, \\ \theta(3) &= 35352323, \theta(4) = 54400442, \theta(5) = 43514501 \end{aligned}$$

y sus gráficas son las siguientes:





Ejemplo 7.33 Se trata de funciones que pueden soportar cópulas. Esto es consecuencia de la proposición 7.27 ya que al observar la matriz

$$\left(x_j \left(\frac{h}{8} \right) - \frac{x_j(0)}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde vemos que

$$\begin{aligned} & \text{Card} \left\{ h : 0 \leq h \leq 7, x_j \left(\frac{h}{8} \right) - \frac{x_j(0)}{2} = 0 \right\} \\ &= \text{Card} \left\{ h : 0 \leq h \leq 7, x_j \left(\frac{h}{8} \right) - \frac{x_j(0)}{2} = 1/2 \right\} = 4 = 8^{1-1/3} \end{aligned}$$

independientemente de j .

Por todo lo cual, podemos concluir que las gráficas de estas funciones coordenadas tienen dimensiones fractales iguales a $5/3$.

Comentario 7.34 Esta técnica es aplicable a otras funciones que ya han sido estudiadas por otros autores. Es posible obtener, en particular, que la dimensión de las coordenadas de la curva de Peano o la de Hilbert es de $3/2$.

7.8. El caso no continuo

Las condiciones impuestas en la definición de una familia de funciones autoafines conducen a la continuidad de dichas funciones. Podemos, no obstante, dar otra definición que nos permita estudiar casos de funciones con discontinuidades. Por ejemplo, si cambiamos la condición b) por la siguiente:

b') Hay una aplicación $\theta : [N] \rightarrow [N]^*$ de longitud constante m tal que para todo $(j, h) \in [N] \times [m]$ y para $t \in [0, 1)$ tenemos

$$x_j \left(\frac{h+t}{m} \right) - x_j \left(\frac{h}{m} \right) = \frac{x_{\theta_h(j)}(t)}{m^\alpha}$$

donde $\theta_h(j)$ es el elemento de $[k]$ que ocupa el lugar h -ésimo en $\theta(j)$.

Es entonces posible obtener resultados similares a los anteriores.

Proposición 7.35 *Las funciones x_j son continuas en los números con representación m -ádica infinita, en particular los irracionales; y en aquellos que admiten representación finita tiene límites laterales y, al menos, uno de ellos coincide con el valor de la función en el punto.*

Proposición 7.36 *Los elementos de una familia de estas funciones pueden soportar una cópula si, y sólo si, $m^{1-\alpha} \in \mathbb{Z}^+$ y para cada $j \in [N]$ y $r \in [m^\alpha]$ se tiene que*

$$\text{Card} \left\{ h : 0 \leq h \leq m-1; x_j \left(\frac{h}{m} \right) = \frac{r}{m^\alpha} \right\} = m^{1-\alpha}.$$

Proposición 7.37 *La dimensión de Hausdorff y por cajas de las gráficas de estas funciones capaces de soportar cópulas es $2 - \alpha$.*

Ejemplo 7.38 (Coordenadas de la función de Cantor) *Consideremos las coordenadas de la aplicación de \mathbb{I} en \mathbb{I}^2 dada por: si $t = \sum \frac{t_n}{2^n}$, entonces*

$$\begin{cases} x(t) = \sum \frac{t_{2n-1}}{2^n} \\ y(t) = \sum \frac{t_{2n}}{2^n} \end{cases}$$

Para el resto de puntos (un conjunto numerable de puntos en los que hay doble representación), podemos elegir cualquiera de los dos desarrollos de t y definir su imagen siguiendo una de estas reglas.

La proposición anterior puede ser utilizada para obtener las dimensiones de Hausdorff y por cajas para las gráficas de estas funciones. En este caso es $3/2$.

El resultado final del ejemplo anterior es un caso particular del obtenido en [115], ya que la gráfica de la función x y el conjunto

$$\bar{R}_x = \left\{ \left(\sum \frac{a_n}{4^n}, \sum \frac{b_n}{4^n} \right) : (a_n, b_n) \in \{(0,0), (1,0), (2,1), (3,1)\} \right\}$$

difieren en un conjunto numerable. Lo mismo ocurre para la gráfica de y y el conjunto

$$\bar{R}_y = \left\{ \left(\sum \frac{a_n}{4^n}, \sum \frac{b_n}{4^n} \right) : (a_n, b_n) \in \{(0,0), (1,1), (2,0), (3,1)\} \right\}.$$

El resultado obtenido en [115], permite obtener otros que no pueden ser obtenidos por los métodos utilizados aquí. Por otra parte, cuando N es mayor que 1, es posible aplicar los resultados obtenidos aquí, mientras que no pueden aplicarse los de [115].

A lo largo del Capítulo se ha utilizado la autoafinidad de las funciones, pero el resultado principal es posible extenderlo a funciones que no son autoafines. Este hecho lo recogemos en el siguiente teorema. Primero, necesitamos una definición.

Definición 7.39 *Dados los rectángulos*

$$R = [r, t] \times [r', t']$$

y

$$R_{ij} = \left[\frac{t-r}{a}i + r, \frac{t-r}{a}(i+1) + r \right] \times \left[\frac{t'-r'}{b}j + r', \frac{t'-r'}{b}(j+1) + r' \right]$$

con $a, b, \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}^+$, decimos que R' es un C_{ab} -subconjunto de R si $R' = \bigcup_{(i,j) \in A} R_{ij}$, donde $A \subset [a] \times [b]$, verificandose:

$$\text{Card} \{ h : 0 \leq h \leq a-1 : (h, j) \in A \} = \frac{a}{b} \text{ independientemente de } j.$$

Teorema 7.40 Sean dos enteros mayores que uno m y m^α tales que el primero es múltiplo del segundo. Partimos del cuadrado unidad $R_1 := \mathbb{I}^2$; y R_2 será un C_{ab} -subconjunto de R_1 ; R_3 es, a su vez, un subconjunto de R_2 cumpliendo que la intersección de R_3 con uno de los rectángulos que forman R_2 es un C_{ab} -subconjunto de ese rectángulo; y, en general, R_{n+1} se obtiene a partir de R_n del mismo modo que R_3 a partir de R_2 . Entonces:

- a. El conjunto $C = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} R_i$ puede soportar una cópula.
- b. El conjunto C difiere de la gráfica de una función en un conjunto numerable de puntos.
- c. La función correspondiente al apartado anterior es continua en los puntos que no admiten desarrollo m -ádico finito; en particular, los irracionales; y en aquellos que admiten representación finita tiene límites laterales y, al menos, uno de ellos coincide con el valor de la función en el punto.
- d. La dimensión de C , y por tanto la de la gráfica de la función de los dos apartados anteriores, es $2 - \alpha$.

Capítulo 8

Copulas con soporte fractal

8.1. Introducción

En el Capítulo anterior se ha encontrado una expresión de las cópulas C_{T_r} asociadas con la matriz

$$T_r = \begin{pmatrix} r/2 & 0 & r/2 \\ 0 & 1 - 2r & 0 \\ r/2 & 0 & r/2 \end{pmatrix}$$

con la ayuda de dos funciones que preservan la medida f_r y g_r para las que $C_{f_r, g_r} = C_{T_r}$.

Estas cópulas son el primer ejemplo, explícito, conocido de cópula con soporte fractal.

Pretendemos, en este Capítulo, hacer un estudio sobre las propiedades de estas cópulas y su generalización a otros conjuntos más amplios. Entre otros resultados, se obtendrán:

a) Ejemplos de cópula cuya medida doblemente estocástica asociada está concentrada en un conjunto de dimensión de Hausdorff menor que el de su soporte.

b) Ejemplos de cópulas con el mismo soporte y mutuamente singulares.

c) Cópulas cuyo soporte es totalmente disconexo y su intersección con cualquier línea vertical (u horizontal) es un punto, salvo en un conjunto numerable en el que tiene dos puntos de intersección.

Como consecuencia de ser una cópula discreta soportada en un conjunto fractal, los cálculos que están relacionados con la integración de funciones integrables con respecto a la medida asociada a la cópula son difíciles de hacer. Hay algunas integrales que son de especial interés. Se trata de los momentos de la medida asociada a la cópula y medidas de asociación.

Como es conocido, dada una medida positiva finita μ en \mathbb{C} , es posible encontrar de forma única polinomios $p_n(z) = p_n(z, \mu) = \kappa_n z^n + \dots$ con $\kappa_n > 0$ que constituyen un sistema ortonormal en $L^2(\mu)$, es decir:

$$\int p_m \overline{p_n} d\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} .$$

Estos polinomios pueden ser determinados a partir de los momentos complejos de la medida; es decir: $\sigma_{i,j} = \int z^i \overline{z^j} d\kappa(z)$.

Por tanto, conociendo los momentos, con la parte real y compleja podemos calcular los polinomios ortonormales con respecto de la medida κ (véanse, por ejemplo, [156] y [77]).

Por otra parte, también se requiere el cálculo de la integral de una función cuando se estudian medidas de concordancia en las cópulas. Nuevamente, resulta difícil su cálculo cuando el soporte de la cópula es un conjunto fractal.

En la parte final del Capítulo abordamos estos dos problemas en el contexto de las copulas de soporte fractal introducidas en [67]. En concreto, damos una fórmula recurrente que permite calcular los momentos reales de la medida asociada a la cópula y también para las funciones diagonal principal y opuesta de las cópulas. También, se estudian diferentes medidas de concordancia para estas cópulas.

Desde hace varias décadas, diferentes artículos han aparecido para estudiar momentos de distribuciones singulares (principalmente unidimensionales), puesto que los polinomios ortogonales con respecto a la distribución están determinados por los momentos (véanse, por ejemplo, [106] y [17]).

En este Capítulo se da una fórmula recurrentes para calcular los momentos de las copulas de soporte fractal. La principal herramienta es la autosimilaridad, junto a la relación entre la función característica y los momentos de la distribución.

También, se estudian las principales medidas de asociación, obteniendo que no dependen del parámetro $r \in]0, 1/2[$ que determina a la matriz T_r .

8.2. Estudio ergódico

Estudiaremos las cópulas y sus medidas doblemente estocásticas asociadas (definidas en [67]) y algunas de sus propiedades, haciendo uso de su autosimilaridad y la de su soporte, al que representaremos por S (en realidad debería ser S_r , pero la ausencia del índice no causará confusión). Su medida asociada la representamos por μ (debería ser $\mu_{C_{T_r}}$, pero tampoco causará confusión). Lo mismo haremos con otras medidas y soportes que se irán introduciendo. En esta sección $r \in]0, 1/2[$.

Definición 8.1 Notamos por S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 la intersección de S con los siguientes cuadrados:

- Q_1 que tiene por vértices a $(0, 0), (0, r), (r, 0), (r, r)$;
- Q_2 que tiene por vértices a $(0, 1 - r), (0, 1), (r, 1 - r), (r, 1)$;
- Q_3 que tiene por vértices a $(1 - r, 0), (0, 1), (1 - r, r), (1 - r, 1)$;
- Q_4 que tiene por vértices a $(1 - r, 1 - r), (1 - r, r), (1 - r, 1), (1, 1)$;
- Q_5 que tiene por vértices a $(r, r), (1 - r, r), (r, 1 - r), (1 - r, 1 - r)$.

Definimos la función

$$F : S \rightarrow S$$

$$F(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right), & \text{si } (x, y) \in S_1 \\ \left(\frac{x}{r}, \frac{y-1+r}{r} \right), & \text{si } (x, y) \in S_2 \\ \left(\frac{x-1+r}{r}, \frac{y}{r} \right), & \text{si } (x, y) \in S_3 \\ \left(\frac{x-1+r}{r}, \frac{y-1+r}{r} \right), & \text{si } (x, y) \in S_4 \\ \left(\frac{x-r}{r}, \frac{y-r}{r} \right), & \text{si } (x, y) \in S_5^* \end{cases}$$

donde $S_5^* = S_5 \setminus \{(r, r), (1 - r, r), (r, 1 - r), (1 - r, 1 - r)\}$. La función $F_i : S_i \rightarrow S$ es la restricción a S_i de F .

Proposición 8.2 La función F es invariante bajo μ .

Demostración. Dado $D \in \mathcal{B}(\mathbb{I}^2)$, el conjunto de Borel $F^{-1}(D)$ está formado por cinco conjuntos similares a D , cada uno de ellos incluido en S_i . Y verifican que cada uno tiene una medida de $\frac{r}{2}\mu(D)$ para los cuatro primeros índices y para el último $(1 - 2r)\mu(D)$. Sumando las cinco medidas, tenemos que $\mu(F^{-1}(D)) = \mu(D)$. ■

Para el siguiente resultado introducimos un modo de identificar los puntos como intersección de conjuntos cerrados encajados. Para ello, en cada punto, definimos $a((x, y)) = i$, donde i es el índice del conjunto S_i al que pertenece (x, y) . Salvo para una cantidad numerable de puntos, tenemos que (x, y) queda determinado por la sucesión $\{b_n = a(T^n(x, y))\}_{n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}}$. Notamos I_{b_0, b_1, \dots, b_k} a la adherencia del conjunto $F_{b_0} \circ F_{b_1} \circ \dots \circ F_{b_k}(\mathbb{I}^2)$. Para un punto (x, y) , decimos que el conjunto I_{b_0, b_1, \dots, b_k} es su cilindro de orden k . Puesto que $(x, y) \in I_{b_0, b_1, \dots, b_k}$ tenemos que

$$(x, y) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}} F_{b_0} \circ F_{b_1} \circ \dots \circ F_{b_n}(\mathbb{I}^2).$$

Como afirmábamos, los puntos están determinados de forma única.

Teorema 8.3 El par (F, μ) es ergódico.

Demostración. La demostración se basa en el uso del lema 2 de la sección 24 (pg. 315) de [30]. En esta ocasión, P está dado por los conjuntos I_{b_0, b_1, \dots, b_k} con $b_j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Si $A = I_{b_0, b_1, \dots, b_k}$, tomamos $n_A = k$ y tenemos la igualdad $\mu(A \cap F^{-n_A}(B)) = \mu(A)\mu(B)$, por lo que es ergódica. ■

Comentario 8.4 En realidad, podíamos haber obtenido que (S, μ, F) es un sistema de Bernoulli.

Con la ayuda del último teorema podemos obtener información sobre los puntos del conjunto S .

Corolario 8.5 *El conjunto de puntos de S satisfaciendo las condiciones*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 1, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 2, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 3, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 4, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 5, k = 0, \dots, n\}}{n} &= 1 - 2r\end{aligned}$$

es un conjunto de μ -medida uno.

Demostración. La demostración es una consecuencia del teorema ergódico aplicado a las funciones características de los conjuntos S_i . El conjunto anunciado es la intersección de los que se obtienen para cada una de esas funciones características. ■

Corolario 8.6 *El conjunto de puntos de S para el que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0 + \dots + b_n}{n} = 5 - 5r$$

es un conjunto de μ -medida uno.

Demostración. Es una consecuencia del corolario anterior. También podemos obtenerlo aplicando el teorema ergódico a la función a definida en la demostración de la proposición 8.2. ■

Otra consecuencia de la aplicación de la teoría ergódica a esta cópula nos muestra el modo en que podemos obtenerla como límite en la convergencia débil de probabilidades atómicas.

Corolario 8.7 *Casi todo punto (x, y) (referido a μ) de S cumple que*

$$C((\alpha, \beta)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{F^k((x, y)) : \pi_1(F^k((x, y))) \leq \alpha, \pi_2(F^k((x, y))) \leq \beta\}}{n}.$$

Corolario 8.8 *Para casi todo punto (x, y) (referido a μ) de S ocurre que para los cilindros de orden n (lo notamos $\Delta_n = \Delta_n((x, y))$) se tiene:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(\Delta_n)}{n} = -2r \ln r - (1 - 2r) \ln(1 - 2r) + 2r \ln 2.$$

Demostración. Por el segundo de los corolarios, tenemos que los elementos de un conjunto de medida uno cumplen que, para los n primeros coeficientes b_k , el número de veces que toman el valor uno es $rn + o(n)$ (para cada uno de ellos está asociada la probabilidad $r/2$). Y lo mismo ocurre para 2, 3 y 4. Para el valor 5 toma $(1 - 2r)n + o(n)$, asociado con la probabilidad $1 - 2r$. La probabilidad del cilindro será $\left(\frac{r}{2}\right)^{2rn+o(n)} (1 - 2r)^{(1-2r)n+o(n)}$, lo que nos conduce a resultado anunciado. ■

Corolario 8.9 *La entropía del sistema (S, \mathcal{B}, μ, F) es*

$$-2r \ln r - (1 - 2r) \ln(1 - 2r) + 2r \ln 2.$$

Demostración. Es una consecuencia del teorema de Shannon-McMillan-Breiman (véanse [30], [140], o [164]). ■

Las copulas C_r están soportadas en conjuntos con una dimensión fractal comprendida entre uno y dos; pero podemos preguntarnos si existen conjuntos de dimensión de Hausdorff inferior tales que su μ -medida sea igual a uno. En estos ejemplos, la respuesta es afirmativa.

Corolario 8.10 *La medida está concentrada en un conjunto de dimensión de Hausdorff*

$$\frac{2r \ln r + (1 - 2r) \ln(1 - 2r) - 2r \ln 2}{2r \ln r + (1 - 2r) \ln(1 - 2r)}.$$

Demostración. El conjunto es el de los puntos en los que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(\Delta_n)}{n} = -2r \ln r - (1 - 2r) \ln(1 - 2r) + 2r \ln 2,$$

la demostración sigue de un modo sencillo a partir del lema de Frostman (proposición 4.9 de [63]), adaptado a los cilindros de los puntos. ■

Haciendo uso de que el sistema es de Bernoulli, lo que implica que es fuertemente mezclado, podemos obtener el siguiente resultado del tipo Gauss-Kuzmin-Levy.

Corolario 8.11 *Sea m una probabilidad verificando $m \ll \mu$, entonces*

$$\lim_n m(\{(x, y) : \pi_1(F^k((x, y))) \leq \alpha, \pi_2(F^k((x, y))) \leq \beta\}) = \mu((\alpha, \beta)).$$

Demostración. Consideramos la derivada de Radon-Nikodym $h := \frac{dm}{d\mu}$. Ahora:

$$\begin{aligned} & \lim_n m(\{(x, y) : \pi_1(F^k((x, y))) \leq \alpha, \pi_2(F^k((x, y))) \leq \beta\}) \\ &= \lim_n \int_{\mathbb{I}^2} (\chi_{[0, \alpha] \times [0, \beta]} \circ F^n)((x, y)) dm \\ &= \lim_n \int_{\mathbb{I}^2} (\chi_{[0, \alpha] \times [0, \beta]} \circ F^n)((x, y)) h(x) d\mu \end{aligned}$$

y al ser Bernoulli, es fuertemente mezclado, y por tanto:

$$= \lim_n \int_{\mathbb{I}^2} \chi_{[0, \alpha] \times [0, \beta]}((x, y)) d\mu \lim_n \int_{\mathbb{I}^2} h((x, y)) d\mu = \mu((\alpha, \beta)).$$

■

Comentario 8.12 *Las funciones b_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Este hecho, junto a la Ley Fuerte de los Grandes Números, nos permite dar una nueva demostración de los corolarios 8 y 9. Si aplicamos la Ley del Logaritmo Iterado podemos mejorar el resultado añadiendo un término de error óptimo:*

$$\begin{aligned} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 1, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 + O\left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}}\right) \\ \frac{\text{Card}\{k : b_k = 2, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 + O\left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}}\right) \\ \frac{\text{Card}\{k : b_k = 3, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 + O\left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}}\right) \\ \frac{\text{Card}\{k : b_k = 4, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 + O\left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}}\right) \\ \frac{\text{Card}\{k : b_k = 5, k = 0, \dots, n\}}{n} &= 1 - 2r + O\left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}}\right) \\ \frac{b_0 + \dots + b_n}{n} &= 5 - 5r + O\left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}}\right). \end{aligned}$$

Teorema 8.13 *Para las variables aleatorias b_k ,*

$$\lim_n \lambda \left(b < \frac{\sum_{k=1}^n b_k - n(5 - 5r)}{\sqrt{n(15r - 25r^2)}} < c \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^c e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Demostración. Es una aplicación del Teorema Central del Límite con la condición de Lindeberg-Levy (véase [30, pg.357]). ■

8.2.1. Generalización

A continuación hacemos una generalización y destacamos los resultados más notables que se pueden obtener mediante técnicas similares a las utilizadas previamente. Únicamente demostraremos la última de las proposiciones.

Podemos generalizar la cópula anterior, en el mismo soporte, pero con una distribución de masa diferente. Si en vez de utilizar la matriz

$$T_r = \begin{bmatrix} r/2 & 0 & r/2 \\ 0 & 1-2r & 0 \\ r/2 & 0 & r/2 \end{bmatrix},$$

tal y como se hace en [67], utilizamos

$$T_{r,a} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1-2r & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix},$$

con $0 < a < r$ y $a + b = r$, obtenemos una nueva familia de cópulas $C_{r,a}$. En esta ocasión, es biparamétrica, con el mismo soporte que C_r , y tiene asociada una nueva medida, que notamos $\delta = \delta_{r,a}$. Para estas medidas podemos hacer un estudio similar al realizado anteriormente para μ obteniendo los siguientes resultados.

Proposición 8.14 *La función F es invariante bajo δ .*

Teorema 8.15 *El sistema $(S, \mathcal{B}, \delta, F)$ es ergódico.*

Corolario 8.16 *El conjunto de puntos de S para el que*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 1, k = 0, \dots, n\}}{n} &= a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 2, k = 0, \dots, n\}}{n} &= b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 3, k = 0, \dots, n\}}{n} &= b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 4, k = 0, \dots, n\}}{n} &= a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 5, k = 0, \dots, n\}}{n} &= 1 - 2r \end{aligned}$$

es un conjunto de δ -medida uno.

Corolario 8.17 *El conjunto de puntos de S cumpliendo que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0 + \dots + b_n}{n} = 5 - 5r$$

es un conjunto de δ -medida uno.

Corolario 8.18 *Casi todo punto (x, y) (referido a μ) de S verifica que*

$$C'((\alpha, \beta)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{F^k((x, y)) : \pi_1(F^k((x, y))) \leq \alpha, \pi_2(F^k((x, y))) \leq \beta\}}{n}.$$

Corolario 8.19 *Casi todo punto (x, y) (referido a δ) de S satisface que para los cilindros de orden n (lo notamos $\Delta_n = \Delta_n((x, y))$) se tiene:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \delta(\Delta_n)}{n} = -2a \ln a - 2b \ln b - (1 - 2r) \ln(1 - 2r).$$

Corolario 8.20 *La entropía del sistema $(S, \mathcal{B}, \delta, F)$ es $-2a \ln a - 2b \ln b - (1 - 2r) \ln(1 - 2r)$.*

Corolario 8.21 *La medida está concentrada en un conjunto de dimensión de Hausdorff*

$$\frac{2a \ln a + 2b \ln b + (1 - 2r) \ln(1 - 2r)}{2r \ln r + (1 - 2r) \ln(1 - 2r)}.$$

Proposición 8.22 *Dadas dos medidas δ_1, δ_2 de la familia descrita (asociadas con C_{r,a_1} y C_{r,a_2}) están soportadas en el mismo conjunto, ambas originan cópulas y son mutuamente singulares.*

Demostración. El conjunto de puntos en los que el promedio de ceros en los b_n es a_1 tiene δ_1 -medida igual a uno, por otra parte ese conjunto es de δ_2 -medida nula. Lo inverso ocurre para el conjunto de puntos en los que el promedio de ceros es a_2 . ■

8.3. Cópulas con soporte de interior no vacío

Igual que en la última subsección, enunciamos una serie de resultados sin demostraciones. Se basan en las técnicas usadas en el capítulo 8.2 y por eso es por lo que nos limitamos a exponer algunos de los más relevantes.

Vamos a dar un ejemplo de una cópula cuyo soporte es el cuadrado unidad pero la masa de la medida doblemente estocástica asociada está concentrada en conjuntos de dimensión de Hausdorff inferior. En esta sección $r \in]0, 1/3[$

Sean los siguientes cuadrados:

- Q_1 que tiene por vértices $(0, 0), (0, 1/3), (1/3, 0), (1/3, 1/3)$,
- Q_2 que tiene por vértices $(1/3, 0), (1/3, 2/3), (2/3, 1/3), (2/3, 2/3)$,
- Q_3 que tiene por vértices $(2/3, 1/3), (2/3, 2/3), (1, 0), (1, 2/3)$;
- Q_4 que tiene por vértices $(0, 1/3), (0, 2/3), (1/3, 1/3), (1/3, 2/3)$;
- Q_5 que tiene por vértices $(1/3, 1/3), (1/3, 2/3), (2/3, 1/3), (2/3, 2/3)$,
- Q_6 que tiene por vértices $(2/3, 1/3), (2/3, 2/3), (1, 1/3), (1, 2/3)$,
- Q_7 que tiene por vértices $(0, 2/3), (0, 1), (1/3, 2/3), (1/3, 1)$,
- Q_8 que tiene por vértices $(1/3, 2/3), (1/3, 1), (2/3, 1), (2/3, 2/3)$,
- Q_9 que tiene por vértices $(2/3, 2/3), (2/3, 1), (1, 1), (1, 2/3)$.

Nos vamos a ayudar de esta división de \mathbb{I}^2 para crear las cópulas que den respuesta a la segunda de las cuestiones planteadas. Para ello utilizamos la matriz

$$T'_r = \begin{bmatrix} \frac{1/3-r}{2} & \frac{1/3-r}{2} & r \\ \frac{1/3-r}{2} & r & \frac{1/3-r}{2} \\ r & \frac{1/3-r}{2} & \frac{1/3-r}{2} \end{bmatrix}.$$

Nuevamente tenemos una medida autosimilar, a la que llamaremos μ' . El soporte de la cópula asociada es el cuadrado unidad, por lo que evidentemente tiene interior no vacío.

Al final de este apartado veremos que está concentrada en un conjunto de dimensión de Hausdorff inferior a dos. La cópula la representamos por C' .

Enunciamos los siguientes resultados que se obtienen como en ocasiones anteriores.

Definición 8.23 Consideremos la función

$$A : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2$$

que viene dada por

$$A(x, y) = \begin{cases} (3x, 3y), & \text{si } (x, y) \in Q_1 \\ (3(x - 1/3), 3y), & \text{si } (x, y) \in Q_2 \\ (3(x - 2/3), 3y), & \text{si } (x, y) \in Q_3 \\ (3x, 3(y - 1/3)), & \text{si } (x, y) \in Q_4 \\ (3(x - 1/3), 3(y - 1/3)), & \text{si } (x, y) \in Q_5 \\ (3(x - 2/3), 3(y - 1/3)), & \text{si } (x, y) \in Q_6 \\ (3x, 3(y - 2/3)), & \text{si } (x, y) \in Q_7 \\ (3(x - 1/3), 3(y - 2/3)), & \text{si } (x, y) \in Q_8 \\ (3(x - 2/3), 3(y - 2/3)), & \text{si } (x, y) \in Q_9 \end{cases}$$

Proposición 8.24 La función A es invariante bajo μ'

Teorema 8.25 El sistema $(\mathbb{I}^2, \mathcal{B}, \mu', A)$ es ergódico.

Corolario 8.26 El conjunto de puntos de \mathbb{I}^2 en los que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 1, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 2, k = 0, \dots, n\}}{n} &= \frac{1/3 - r}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 3, k = 0, \dots, n\}}{n} &= \frac{1/3 - r}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 4, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 5, k = 0, \dots, n\}}{n} &= \frac{1/3 - r}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 6, k = 0, \dots, n\}}{n} &= \frac{1/3 - r}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 7, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 8, k = 0, \dots, n\}}{n} &= \frac{1/3 - r}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 9, k = 0, \dots, n\}}{n} &= \frac{1/3 - r}{2} \end{aligned}$$

es un conjunto de μ' -medida uno.

Corolario 8.27 *El conjunto de puntos de \mathbb{I}^2 tales que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0 + \dots + b_n}{n} = \frac{11 - 9r}{2}$$

es un conjunto de μ' -medida uno.

Corolario 8.28 *Para casi todo punto (x, y) (referido a μ') de \mathbb{I}^2 ocurre que $C'((\alpha, \beta))$ vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{F^k((x, y)) : \pi_1(F^k((x, y))) \leq \alpha, \pi_2(F^k((x, y))) \leq \beta\}}{n}.$$

Corolario 8.29 *Casi todo punto (x, y) (referido a μ') de \mathbb{I}^2 cumple que para los cilindros de orden n se tiene:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu'(\Delta_n)}{n} = 3r \ln r + 6 \left(\frac{1/3 - r}{2} \right) \ln \left(\frac{1/3 - r}{2} \right).$$

Corolario 8.30 *La entropía del sistema $(\mathbb{I}^2, \mathcal{B}, \mu', A)$ es $3r \ln r + 6 \left(\frac{1/3 - r}{2} \right) \ln \left(\frac{1/3 - r}{2} \right)$.*

Corolario 8.31 *La medida está concentrada en un conjunto de dimensión de Hausdorff*

$$\frac{3r \ln r + 6 \left(\frac{1/3 - r}{2} \right) \ln \left(\frac{1/3 - r}{2} \right)}{-\ln 3}.$$

Proposición 8.32 *Dadas dos medidas arbitrarias μ'_1, μ'_2 de la familia descrita que están soportadas en \mathbb{I}^2 , ambas originarán cópulas y son mutuamente singulares.*

8.4. Ejemplos en los que el soporte no es conexo

En todos los ejemplos anteriores que hemos presentado el soporte es un conjunto conexo. Daremos ahora un ejemplo en el que no lo sea. En este caso, la matriz utilizada será la dada por

$$T_r^* = \begin{bmatrix} r/2 & 0 & 0 & r/2 \\ 0 & 0 & \frac{1-2r}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-2r}{2} & 0 & 0 \\ r/2 & 0 & 0 & r/2 \end{bmatrix}$$

con $r \in]0, 1/2[$. La nueva medida la representamos por μ^* .

Enunciamos, sin demostración, los siguientes resultados. Al soporte lo representamos por S^* y a la cópula por C^* .

Definición 8.33 Definamos los siguientes subconjuntos del cuadrado unidad:

- Q_1 que tiene por vértices $(0, 0), (0, r), (r, 0), (r, r)$,
- Q_2 que tiene por vértices $(0, 1-r), (0, 1), (r, 1-r), (r, 1)$,
- Q_3 que tiene por vértices $(1-r, 0), (0, 1), (1-r, r), (1-r, 1)$,
- Q_4 que tiene por vértices $(1-r, 1-r), (1-r, r), (1-r, 1), (1, 1)$,
- Q_5 que tiene por vértices $(r, r), (1/2, r), (r, 1/2), (1/2, 1/2)$,
- Q_6 que tiene por vértices $(1/2, 1/2), (1/2, 1-r), (1-r, 1/2), (1-r, 1-r)$.

y sea $H^* : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2$ la función dada por

$$H^*(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right), & \text{si } (x, y) \in Q_1 \\ \left(\frac{x}{r}, \frac{y-1+r}{r} \right), & \text{si } (x, y) \in Q_2 \\ \left(\frac{x-1+r}{r}, \frac{y}{r} \right), & \text{si } (x, y) \in Q_3 \\ \left(\frac{x-1+r}{r}, \frac{y-1+r}{r} \right), & \text{si } (x, y) \in Q_4 \\ \left(\frac{x-1/2}{\frac{1-2r}{2}}, \frac{y-1/2}{\frac{1-2r}{2}} \right), & \text{si } (x, y) \in Q_5 \\ \left(\frac{x-1+r}{\frac{1-2r}{2}}, \frac{y-1+r}{\frac{1-2r}{2}} \right), & \text{si } (x, y) \in Q_6 \end{cases}$$

Proposición 8.34 La función H^* es invariante bajo μ^* .

Teorema 8.35 El sistema $(S^*, \mathcal{B}, \mu^*, H^*)$ es ergódico.

Corolario 8.36 El conjunto de puntos de S^* tales que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 1, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 2, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 3, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 4, k = 0, \dots, n\}}{n} &= r/2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 5, k = 0, \dots, n\}}{n} &= \frac{1-2r}{2} \\ y \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{k : b_k = 6, k = 0, \dots, n\}}{n} &= \frac{1-2r}{2} \end{aligned}$$

es un conjunto de μ^* -medida uno.

Corolario 8.37 El conjunto de puntos de S para los que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0 + \dots + b_n}{n} = \frac{11}{2} - 6r$$

es un conjunto de μ^* -medida uno.

Corolario 8.38 Para casi todo punto (x, y) (referido a μ^*) de S verifica que

$$C^*((\alpha, \beta)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}\{F^k((x, y)) : \pi_1(F^k((x, y))) \leq \alpha, \pi_2(F^k((x, y))) \leq \beta\}}{n}.$$

Corolario 8.39 En casi todo punto (x, y) (referido a μ^*) de S^* ocurre que para los cilindros de orden n (los notamos por $\Delta_n = \Delta_n((x, y))$) se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu^*(\Delta_n)}{n} = 2r \ln r + (1-2r) \ln(1-2r) - 2r \ln 2.$$

Corolario 8.40 La entropía del sistema $(S^*, \mathcal{B}, \mu^*, H^*)$ es $2r \ln r + (1-2r) \ln(1-2r) - 2r \ln 2$.

Corolario 8.41 La medida está concentrada en un conjunto de dimensión de Hausdorff

$$\frac{2r \ln r + (1-2r) \ln(1-2r) - 2r \ln 2}{2r \ln r + (1-2r) \ln(1-2r)}.$$

8.4.1. Ejemplos en los que la proyección sobre cada eje es un punto

Como último caso, presentamos un ejemplo de cópula que recuerda a los shuffles de Min, ya que la intersección de su soporte y cualquier línea vertical u horizontal es un único punto (salvo en un conjunto numerable); pero, a diferencia de aquellos, el soporte es totalmente disconexo. Hasta donde conocemos, este es el primer ejemplo de cópula con esta propiedad. Viene dado por la matriz

$$T_r^{**} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1-4r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix},$$

y la medida asociada la representamos por μ^{**} , el soporte por S^{**} y a la cópula por C^{**} .

Nuevamente, nos limitamos a dar los resultados sin demostración. Es sencillo hacerlas siguiendo las técnicas de la sección 8.2.

Proposición 8.42 *La función H^{**} es invariante bajo μ^{**}*

Teorema 8.43 *El par $(S^{**}, \mathcal{B}, \mu^{**}, H^{**})$ es ergódico*

Corolario 8.44 *El conjunto de puntos de S^{**} tales que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{k : b_k = 1, k = 0, \dots, n\}}{n} = r$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{k : b_k = 2, k = 0, \dots, n\}}{n} = r$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{k : b_k = 3, k = 0, \dots, n\}}{n} = r$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{k : b_k = 4, k = 0, \dots, n\}}{n} = r$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{k : b_k = 5, k = 0, \dots, n\}}{n} = 1 - 4r,$$

es un conjunto de μ^{**} -medida uno.

Corolario 8.45 *El conjunto de puntos de S^{**} satisfaciendo*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0 + \dots + b_n}{n} = 5 - 10r$$

es un conjunto de μ^{**} -medida uno.

Corolario 8.46 *Para casi todo punto (x, y) (referido a μ^{**}) de S ocurre que*

$$C^{**}((\alpha, \beta)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{F^k((x, y)) : \pi_1(F^k((x, y))) \leq \alpha, \pi_2(F^k((x, y))) \leq \beta\}}{n}$$

Corolario 8.47 *Casi todo punto (x, y) (referido a μ^{**}) de S cumple que para los cilindros de orden n (lo notamos $\Delta_n = \Delta_n((x, y))$) se tiene:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu^{**}(\Delta_n)}{n} = 4r \ln r + (1 - 4r) \ln(1 - 4r)$$

Corolario 8.48 *La entropía del sistema $(S^{**}, \mu^{**}, H^{**})$ es $4r \ln r + (1 - 4r) \ln(1 - 4r)$.*

Corolario 8.49 *La medida está concentrada en un conjunto de dimensión de Hausdorff uno.*

Proposición 8.50 *El soporte de la cópula es totalmente disconexo.*

8.5. Fórmula recurrente de los momentos

Como anunciábamos en la introducción realizaremos un estudio de los momentos de la medida doblemente estocástica asociada con la cópula C_{T_r} .

8.5.1. Primer método

Puesto que una cópula C puede considerarse como un caso particular de una función de distribución bidimensional, entonces para C tenemos la función característica definida por

$$\phi(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{I}^2} e^{(xt_1 + yt_2)i} d\mu_C(x, y)$$

y los momentos

$$M_{m,n} = \int_{\mathbb{I}^2} x^m y^n d\mu_C(x, y)$$

(véase [30, sec 26]).

Lema 8.51 *Sea K un subconjunto de \mathbb{R}^n en el que hay definida una medida autosimilar ρ , asociada con la familia de contracciones autosimilares \mathcal{F}_k y los pesos p_k . Con estas condiciones tenemos que*

$$\int_{\mathcal{F}_k(K)} g(x) d\rho(x) = p_k \int_K g(\mathcal{F}_k(x)) d\rho(x),$$

(el uso de ρ para la medida en K y para su restricción a $\mathcal{F}_k(K)$ no debe causar confusión).

Demostración. Al ser \mathcal{F}_k una autosimilaridad, es un isomorfismo de espacios medibles; por tanto, existe una biyección natural entre las funciones escalonadas en K y $\mathcal{F}_k(K)$ (ambos con la σ -álgebra inducida). Puesto que la medida del conjunto medible A y la de $\mathcal{F}_k(A)$ son proporcionales con razón p_k , tenemos que la afirmación es cierta cuando g es una función escalonada. Por argumentos de densidad, también lo habrá de ser en el conjunto de las funciones integrables. ■

Este resultado nos conduce a poder escribir la fórmula

$$\int_K g(x) d\rho(x) = \sum_k p_k \int_K g(\mathcal{F}_k(x)) d\rho(x) \quad (8.1)$$

que será la herramienta a utilizar para obtener los resultados de esta parte final del Capítulo.

Volvemos a considerar la familia de matrices de transformación

$$T_r = \begin{pmatrix} r/2 & 0 & r/2 \\ 0 & 1 - 2r & 0 \\ r/2 & 0 & r/2 \end{pmatrix}$$

con $r \in]0, \frac{1}{2}[$.

Proposición 8.52 (Ecuación funcional) *La función característica de C_{T_r} , que representaremos por c_r , verifica*

$$\begin{aligned} c_r(t_1, t_2) &= \frac{r}{2} \left(1 + e^{i(1-r)t_1} + e^{i(1-r)t_2} + e^{i(1-r)(t_1+t_2)} \right) c_r(rt_1, rt_2) + \\ &+ (1 - 2r) e^{ir(t_1+t_2)} c_r((1-2r)t_1, (1-2r)t_2). \end{aligned}$$

Demostración. Es una reescritura de la fórmula 8.1, teniendo en cuenta los pesos de la matriz y la forma particular de g . ■

Esta igualdad tiene un caso de especial interés; se trata de aquel en que $r = 1/3$. Para este valor la cópula se obtiene como una convolución infinita.

Corolario 8.53 Cuando $r = 1/3$ podemos expresar la función característica como un producto infinito

$$c_{1/3}(t_1, t_2) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \left(1 + e^{i\frac{2}{3^k}t_1} + e^{i\frac{2}{3^k}t_2} + e^{i\frac{2}{3^k}(t_1+t_2)} \right) + \frac{1}{3} e^{i\frac{1}{3^k}(t_1+t_2)} \right)$$

Por tanto, la probabilidad asociada a la cópula puede escribirse como una convolución infinita de las probabilidades P_k :

$$\begin{cases} P_k((0, 0)) = p_k \left(\left(0, \frac{2^k}{3^k} \right) \right) = P_k \left(\left(\frac{2^k}{3^k}, 0 \right) \right) = P_k \left(\left(\frac{2^k}{3^k}, \frac{2^k}{3^k} \right) \right) = \frac{1}{6} \\ P_k \left(\left(\frac{1}{3^k}, \frac{1}{3^k} \right) \right) = 1/3. \end{cases}$$

Demostración. La función

$$H((t_1, t_2)) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \left(1 + e^{i\frac{2}{3^k}t_1} + e^{i\frac{2}{3^k}t_2} + e^{i\frac{2}{3^k}(t_1+t_2)} \right) + \frac{1}{3} e^{i\frac{1}{3^k}(t_1+t_2)} \right)$$

es holomorfa en dos variables complejas, puesto que lo es en cada variable.

Cuando $r = 1/3$ la ecuación funcional queda como

$$c_r(t_1, t_2) = \left(\frac{1}{6} \left(1 + e^{i\frac{2}{3}t_1} + e^{i\frac{2}{3}t_2} + e^{i\frac{2}{3}(t_1+t_2)} \right) + \frac{1}{3} e^{i\frac{1}{3}(t_1+t_2)} \right) c_r \left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3} \right);$$

y, en general, se tiene

$$\frac{c_r(t_1, t_2)}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{6} \left(1 + e^{i\frac{2}{3^k}t_1} + e^{i\frac{2}{3^k}t_2} + e^{i\frac{2}{3^k}(t_1+t_2)} \right) + \frac{1}{3} e^{i\frac{1}{3^k}(t_1+t_2)} \right)} = c_r \left(\frac{t_1}{3^{n+1}}, \frac{t_2}{3^{n+1}} \right),$$

por lo que gracias a la continuidad de c_r :

$$\frac{c_r(t_1, t_2)}{H((t_1, t_2))} = c_r(0, 0) = 1.$$

■

Corolario 8.54 Los momentos de las cópulas C_{T_r} satisfacen la expresión recurrente

$$M_{m,n} = m!n! \frac{A + B + C + D}{1 - 2r^{m+n+1} - (1 - 2r)^{m+n+1}},$$

donde

$$A = \frac{r}{2} \sum_{a=1}^m \frac{(1-r)^a r^{m+n-a} M_{m-a,n}}{a!n!(m-a)!},$$

$$B = \frac{r}{2} \sum_{b=1}^m \frac{(1-r)^b r^{m+n-b} M_{m,n-b}}{b!m!(n-b)!},$$

$$C = \frac{r}{2} \sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^{n^*} \frac{(1-r)^{a+b} r^{m+n-a-b} M_{m-a,n-b}}{a!b!(m-a)!(n-b)!},$$

y

$$D = (1 - 2r) \sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^{n^*} \frac{r^{a+b} (1 - 2r)^{m+n-a-b} M_{m-a,n-b}}{a!b!(m-a)!(n-b)!}.$$

(El asterisco indica que la suma es tomada en todo el rango salvo para $a = b = 0$.)

Demostración. Si en el interior del integrando de la expresión $\int_{\mathbb{I}^2} e^{(xt_1+yt_2)i} d\mu_{C_r}(x, y)$ hacemos uso del desarrollo en serie de la exponencial, se efectúan las potencias y se hace un intercambio ente sumas e integral (en virtud del teorema de la convergencia monótona), obtenemos la conocida igualdad:

$$\begin{aligned} c_r(t_1, t_2) &= \int_{\mathbb{I}^2} e^{(xt_1+yt_2)i} d\mu_{C_r}(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} \frac{i^{m+n}}{m!n!} M_{m,n} t_1^m t_2^n = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{m+n}}{m!n!} M_{m,n} t_1^m t_2^n. \end{aligned}$$

Para aplicar la ecuación funcional, sustituimos en la expresión anterior y tenemos:

$$\begin{aligned} c_r(rt_1, rt_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{m+n} r^{m+n}}{m!n!} M_{m,n} t_1^m t_2^n \\ c_r((1-2r)t_1, (1-2r)t_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{m+n} (1-2r)^{m+n}}{m!n!} M_{m,n} t_1^m t_2^n. \end{aligned}$$

Multiplicando estas series por las de $1 + e^{i(1-r)t_1} + e^{i(1-r)t_2} + e^{i(1-r)(t_1+t_2)}$ y $(1-2r)e^{ir(t_1+t_2)}$ nos da la igualdad

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{m+n}}{m!n!} M_{m,n} t_1^m t_2^n \\ = &\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{2} \frac{i^{m+n}}{m!n!} M_{m,n} t_1^m t_2^n + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{2} \sum_{a=0}^m \frac{i^{m+n} (1-r)^a r^{m+n-a}}{a!n!(m-a)!} M_{m-a,n} t_1^m t_2^n + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{2} \sum_{b=0}^n \frac{i^{m+n} (1-r)^b r^{m+n-b}}{b!m!(n-b)!} M_{m,n-b} t_1^m t_2^n + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{2} \sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^n \frac{i^{m+n} (1-r)^{a+b} r^{m+n-a-b}}{a!b!(m-a)!(n-b)!} M_{m-a,n-b} t_1^m t_2^n + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (1-2r) \sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^n \frac{i^{m+n} r^{a+b} (1-2r)^{m+n-a-b}}{a!b!(m-a)!(n-b)!} M_{m-a,n-b} t_1^m t_2^n \end{aligned}$$

Finalmente, igualando los coeficientes de las potencias en $t_1^m t_2^n$ y despejando $M_{m,n}$, obtenemos la igualdad escrita. ■

8.5.2. Segundo método

Podemos obtener el mismo resultado utilizando directamente la integral de $x^m y^n$.

Demostración. En este ocasión la aplicación de la fórmula 8.1 nos da

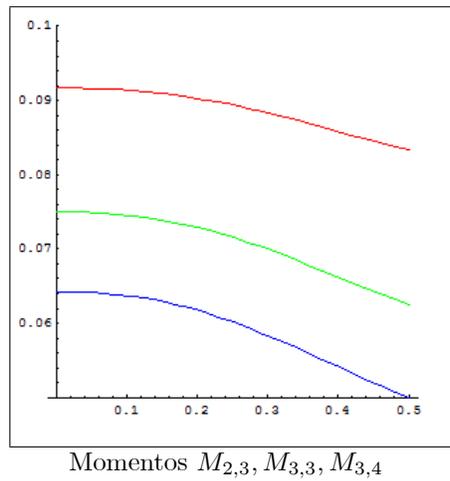
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{I}^2} x^m y^n dC_r &= \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} (rx)^m (ry)^n dC_r + \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} (rx+1-r)^m (ry)^n d\mu_{C_r} + \\ &+ \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} (rx)^m (ry+1-r)^n dC_r \\ &+ \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} (rx+1-r)^m (ry+1-r)^n d\mu_{C_r} + \\ &+ (1-2r) \int_{\mathbb{I}^2} ((1-2r)x+r)^m ((1-2r)y+r)^n d\mu_{C_r}; \end{aligned}$$

operando dentro de la integral e integrando tenemos:

$$\begin{aligned}
 M_{m,n} &= \frac{r^{1+n+m}}{2} M_{m,n} + \frac{r^{1+n}}{2} \sum_{a=0}^m \binom{m}{a} r^a (1-r)^{m-a} M_{a,n} \\
 &\quad + \frac{r^{1+m}}{2} \sum_{b=0}^{n-1} \binom{n}{b} r^b (1-r)^{n-b} M_{m,b} \\
 &\quad + \frac{r}{2} \sum_{a=0}^n \sum_{b=0}^m \binom{m}{a} \binom{n}{b} r^{a+b} (1-r)^{n+m-a-b} M_{a,b} \\
 &\quad + (1-2r) \sum_{a=0}^n \sum_{b=0}^m \binom{m}{a} \binom{n}{b} (1-2r)^{a+b} r^{n+m-a-b} M_{a,b}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, despejando $M_{m,n}$, obtenemos el resultado enunciado. ■

En esta gráfica podemos ver los momentos $M_{2,3}$, $M_{3,3}$, $M_{3,4}$.



8.5.3. Secciones diagonales

En una cópula destacan dos funciones δ_1, δ_2 de \mathbb{I} en \mathbb{I} definidas por $\delta_1(x) = C(x, x)$ (la sección diagonal principal) y $\delta_2(x) = C(x, 1-x)$ (la sección diagonal opuesta). La sección diagonal principal es una función de distribución absolutamente continua, pero no parece fácil hacer un cálculo de sus momentos. Aplicando los mismos argumentos que anteriormente y utilizando el siguiente resultado sobre las ecuaciones funcionales (añadimos la observación de que hay una perturbación producida por una medida absolutamente continua), es posible obtener una fórmula recurrente para los momentos de orden n , respecto a la familia de copulas C_{T_r} .

Proposición 8.55 (Ecuaciones funcionales) *La sección diagonal principal verifica las ecuaciones funcionales*

$$\begin{cases}
 \delta_1(rx) = \frac{r}{2} \delta_1(x) \\
 \delta_1(r + (1-2r)x) = \frac{r}{2} + (1-2r) \delta_1(x) \\
 \delta_1(1-r+rx) = 1 - \frac{3r}{2} + \frac{r}{2} \delta_1(x) + rx.
 \end{cases}$$

Proposición 8.56 *La función característica de la sección diagonal principal cumple*

$$c(t) = \frac{r}{2} \left(1 + e^{i(1-r)t}\right) c(rt) + (1-2r) e^{irt} c((1-2r)t) + r \frac{e^{it} - e^{it(1-r)}}{it}.$$

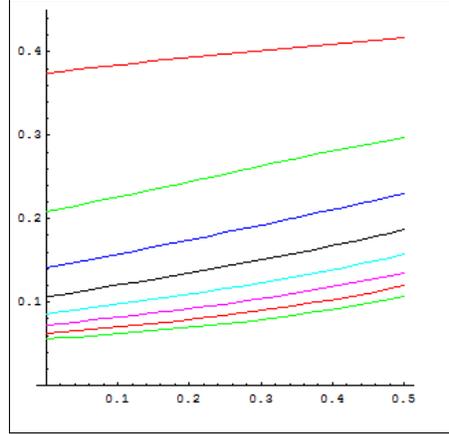
Corolario 8.57 *En el caso $r = 1/3$ tenemos la expresión*

$$c(t) = \frac{1}{3it} \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(e^{it/3^k} - e^{2it/3^{k+1}} \right) \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{i/3} + \frac{1}{6} e^{2i/3} \right)^k$$

Corolario 8.58 Para los momentos M_m de la sección diagonal principal, definidos por $M_m = \int_0^1 x^n d\delta_1(x)$, se tiene la relación de recurrencia:

$$\frac{\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (1-2r)^{k+1} r^{m-k} M_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (1-r)^{m-k} r^{k+1} M_k + \frac{r^{m+1} + 1 - (1-r)^{m+1}}{2(m+1)}}{1 - r^{m+1} - (1-2r)^{m+1}}.$$

Observamos la gráfica, dependiendo de r , de los ocho primeros momentos:



Momentos de la sección diagonal

Recordamos que, en el caso de la sección diagonal opuesta, no se tiene una función de distribución ya que no es monótona; se trata de una función de variación acotada; y, asociada a ella, existe una medida signada. Para esa medida podemos estudiar sus momentos.

Proposición 8.59 (Ecuaciones funcionales) La sección diagonal opuesta verifica las ecuaciones funcionales

$$\begin{cases} \delta_2(rx) = \frac{r}{2}\delta_2(x) + \frac{r}{2}x \\ \delta_2(r + (1-2r)x) = \frac{r}{2} + (1-2r)\delta_2(x) \\ \delta_2(1-r+rx) = \frac{r}{2}\delta_2(x) + \frac{r}{2}(1-x) \end{cases}$$

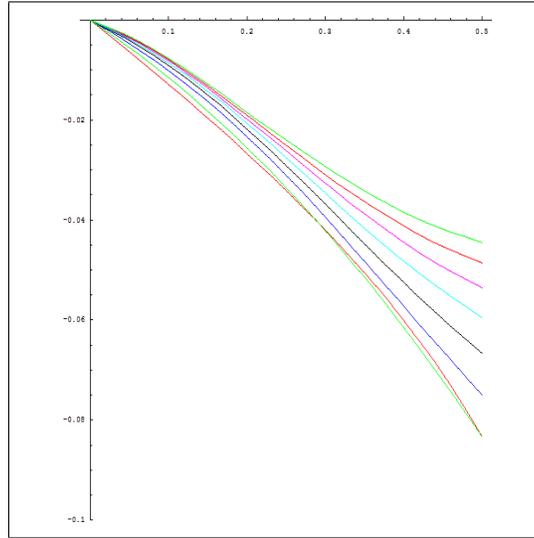
Proposición 8.60 La función característica de la sección diagonal opuesta cumple

$$c(t) = \frac{r}{2} \left(1 + e^{i(1-r)}\right) c(rt) + (1-2r) e^{irt} c((1-2r)t) + \frac{r e^{itr} + e^{it(1-r)} - 1 - e}{2it}.$$

Corolario 8.61 Los momentos M_m de la sección diagonal opuesta, definidos por $M_m = \int_0^1 x^n d\delta_2(x)$, satisfacen la relación recurrente:

$$\frac{\sum_{a=0}^{m-1} \binom{m}{a} (1-2r)^{a+1} \frac{r^{m-a+1}}{2} M_a + \frac{1}{2} \sum_{a=0}^{m-1} \binom{m}{a} (1-r)^{m-a+1} r^a M_a + \frac{r^{m+1} - 1 + (1-r)^{m+1}}{2(m+1)}}{1 - r^{m+1} - (1-2r)^{m+1}}.$$

A continuación observamos la gráfica, dependiendo de r , de los ocho primeros momentos de la diagonal opuesta.



Momentos de la diagonal opuesta

8.6. Medidas de asociación

Recordemos que muchas medidas de asociación están basadas en la noción de concordancia o discordancia.

Dos pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de números reales son concordantes si $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) > 0$ y discordantes en caso contrario.

Dados dos vectores, (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , de variables aleatorias continuas con distribuciones marginales comunes F y G y distribuciones conjuntas H_1 y H_2 , llamamos función de concordancia a:

$$Q = P[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0]$$

(Para consultar una revisión de las medidas de concordancia y el papel que las cópulas juegan en el estudio de la dependencia o asociación entre variables aleatorias, puede verse [122, Chap. 5].)

En particular, el siguiente resultado es una herramienta fundamental en el estudio de Q (véase [122, Theorem 5.1.1.]):

Teorema 8.62 Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores de variables aleatorias independientes con funciones de distribuciones conjuntas H_1 y H_2 , respectivamente, y con marginales comunes F y G . Si C_1 y C_2 son, respectivamente, cópulas de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) tales que $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ y $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$, entonces

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{\mathbb{I}^2} C_2(x, y) d\mu_{C_1}(x, y) - 1.$$

Definición 8.63 Cuando H_1 y H_2 son la misma distribución decimos que

$$Q = Q(C, C) = \tau$$

es la medida de asociación de Kendall.

El caso en que una de las cópulas sea Π , es decir, la cópula independiente, podemos introducir la llamada medida ρ de Spearman

$$\rho = 3Q(C, \Pi).$$

Otra medida de gran interés es la de Gini, dada por

$$\gamma = Q(C, M) + Q(C, W).$$

Proposición 8.64 Para la cópula C_r de parámetro r tenemos los valores:

a. $\int_{\mathbb{I}^2} \max(x + y - 1, 0) dC_r(x, y) = \frac{1-r}{8-10r}.$

- b. $\int_{\mathbb{I}^2} \min(x, y) dC_r(x, y) = \frac{3-4r}{8-10r}$.
- c. $\int_{\mathbb{I}^2} xy dC_r(x, y) = 1/4$.
- d. $\int_{\mathbb{I}^2} C_r(x, y) dC_r(x, y) = 1/4$.

Demostración. a. Descomponemos la integral en suma de integrales en cinco regiones, y aplicando que $d\mu_{C_r}$ es autosimilar tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{I}^2} W(x, y) d\mu_{C_r}(x, y) &= \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} W(rx, ry) d\mu_{C_r} + \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} W(rx + 1 - r, ry) d\mu_{C_r} + \\
&+ \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} W(rx, ry + 1 - r) d\mu_{C_r} \\
&+ \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} W(rx + 1 - r, ry + 1 - r) d\mu_{C_r} + \\
&+ (1 - 2r) \int_{\mathbb{I}^2} W((1 - 2r)x + r, (1 - 2r)y + r) d\mu_{C_r} \\
&= \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} 0 d\mu_{C_r} + \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} rW(x, y) d\mu_{C_r} \\
&+ \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} rW(x, y) d\mu_{C_r} + \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} rx + ry + 1 - 2r d\mu_{C_r} \\
&+ (1 - 2r)^2 \int_{\mathbb{I}^2} W(x, y) d\mu_{C_r} \\
&= \left(r^2 + (1 - 2r)^2 \right) \int_{\mathbb{I}^2} W(x, y) d\mu_{C_r}(x, y) + \frac{r(1 - r)}{2}
\end{aligned}$$

Despejando la integral obtenemos el resultado enunciado.

b. Procederíamos como en el caso anterior.

c. Se trata de $M_{1,1}$.

d. Descomponiendo como en el caso a., se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{I}^2} C_r(x, y) d\mu_{C_r}(x, y) &= \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} C_r(rx, ry) d\mu_{C_r} + \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} C_r(rx + 1 - r, ry) d\mu_{C_r} \\
&+ \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} C_r(rx, ry + 1 - r) d\mu_{C_r} \\
&+ \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} C_r(rx + 1 - r, ry + 1 - r) d\mu_{C_r} + \\
&+ (1 - 2r) \int_{\mathbb{I}^2} C_r((1 - 2r)x + r, (1 - 2r)y + r) d\mu_{C_r} \\
&= \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} \frac{r}{2} C_r(x, y) d\mu_{C_r} + \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} \frac{r}{2} y + \frac{r}{2} C_r(x, y) d\mu_{C_r} \\
&+ \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} \frac{r}{2} x + \frac{r}{2} C_r(x, y) d\mu_{C_r} + \\
&+ \frac{r}{2} \int_{\mathbb{I}^2} \frac{r}{2} + 1 - 2r + \frac{r}{2}(x + y) + \frac{r}{2} C_r(x, y) d\mu_{C_r} + \\
&+ (1 - 2r) \int_{\mathbb{I}^2} \frac{r}{2} + (1 - 2r) C_r(x, y) d\mu_{C_r} \\
&= \left(r^2 + (1 - 2r)^2 \right) \int_{\mathbb{I}^2} C_r(x, y) d\mu_{C_r}(x, y) \\
&+ \frac{3}{4} r^2 + r(1 - 2r).
\end{aligned}$$

Despejando, obtenemos el valor de la integral. ■

Corolario 8.65 *Tenemos la siguiente consecuencia para las medidas de asociación:*

Las medida τ de Kendall, ρ de Spearman y la medida de asociación de Gini son cero para cualquier valor de r .

Capítulo 9

Cóputas y variables aleatorias no continuas

9.1. Introducción

Fue en 1959 cuando Sklar ([155]) introdujo el concepto de cópula como una función que ayuda a representar una distribución bidimensional mediante sus marginales. Hoy ese resultado es conocido como Teorema de Sklar y ha sido el elemento fundamental que ha hecho que la Teoría de Cóputas sea un campo de estudio matemático de plena vigencia.

Es sorprendente el hecho de que la primera demostración publicada de este teorema no aparezca hasta 1974 en [152], para el caso bidimensional (también puede consultarse en [122]). Desde entonces, han aparecido otras demostraciones (pueden consultarse, por ejemplo, los trabajos [33], [42], [119] y [148]).

En [152], la demostración se hace construyendo una cópula con las propiedades deseadas; y el método utilizado es la extensión de una subcópula. Sin embargo, en los otros artículos citados arriba, únicamente se demuestra la existencia de al menos una cópula verificando el Teorema de Sklar.

El objetivo de este Capítulo es seguir la línea de [152] y establecer, como resultado principal, la descripción de todas las cóputas C que cumplen el teorema de Sklar para una distribución bidimensional H dada, con marginales F y G (Teoremas 9.4 y 9.5). El método utilizado, que denominaremos H -proceso, consiste en la construcción de medidas doblemente estocásticas que permitan encontrar esas cóputas C (Proposición 9.2). El procedimiento para obtener C es constructivo. En particular, se obtienen, como aplicaciones, las cotas superior e inferior de todas las cóputas que extienden una subcópula dada y que, de hecho, se trata de cóputas (Teoremas 9.7 y 9.8); y, además, se prueba cómo este método permite extender una sub-cuasicóputa a una cuasicóputa.

El Teorema de Sklar representa una función de distribución bidimensional H en dos partes, las funciones de distribución marginales F, G y la cópula C . Ambas están conectadas por la ecuación $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ (véanse [152] y [122]).

Si F y G son continuas, entonces C es única; en otro caso, C estará determinada de forma única en $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$.

Para la demostración del Teorema de Sklar podemos definir una subcópula en $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$ y extender la definición a su clausura. Para nuevas consideraciones recordamos el siguiente resultado (véase Lema 2.3.4 de [122]).

Lema 9.1 *Sea H una función de distribución bidimensional en \mathbb{I}^2 con funciones de distribución marginales F y G . Entonces existe una única subcópula $C^* : \overline{\text{Ran}F} \times \overline{\text{Ran}G} \rightarrow \mathbb{I}$, tal que $C^*(F(x), G(y)) = H(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{I}$.*

Es evidente que si la restricción de una cópula C_1 a $\overline{\text{Ran}F} \times \overline{\text{Ran}G}$ coincide con C^* , entonces $C_1(F(x), G(y)) = H(x, y)$.

Siguiendo esta línea, lo más difícil para obtener la demostración del Teorema de Sklar es extender la subcópula C^* a una cópula. Un modo de proceder para obtener esa extensión puede verse en [152] lema 5 y en [122], lema 2.3.5. Otros tipos de demostración del citado teorema pueden encontrarse, por ejemplo, en [33], [42], [119] o en [148].

9.2. Resultado Principal (Extensión del Teorema de Sklar)

9.2.1. El H -proceso

Como hemos venido escribiendo, $H : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ es una función de distribución bidimensional con funciones de distribución marginales F y G .

Por otra parte, asociados a una función de distribución $F : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, existe un conjunto numerable de intervalos cerrados contenidos en \mathbb{I} tales que las intersecciones de ellos, dos a dos, es un punto o vacía. Para hacerlo, consideremos la gráfica de F . La proyección de su clausura en $\{0\} \times \mathbb{I}$ es un conjunto, que representaremos por S_1 de intervalos cerrados disjuntos. Puede ocurrir que algunos intervalos estén formados por un único punto. Dividimos S_1 en los subconjuntos: P_1 formado por los intervalos que se reducen a un punto y D_1 formado por el resto.

El complementario de la proyección de los intervalos de S_1 en el eje de ordenadas está formado por intervalos abiertos. Al conjunto formado por los intervalos cerrados correspondientes a los anteriores (abiertos) lo representamos por O_1 .

Por T denotaremos la unión de $D_1 \cup O_1$; y los miembros de T serán notados por T_t (el conjunto de índices será finito o \mathbb{Z}^+ y lo representaremos T').

Del mismo modo, para la función de distribución G , se tienen los conjuntos S_2, P_2, D_2, O_2 ; y la unión de D_2 y O_2 la representaremos por J y sus elementos por J_j . Nuevamente, el conjunto de índices será finito o \mathbb{Z}^+ ; y lo representaremos por J' .

Los intervalos los representamos por $T_t = [a_t, b_t]$ y $J_j = [c_j, d_j]$.

A continuación, construiremos una medida μ en los rectángulos de la forma $T_t \times J_j$, con $T_t \in T$ y $J_j \in J$, y comprobaremos que esa medida es doblemente estocástica.

Proposición 9.2 *Sea $H : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ una función de distribución bidimensional, con funciones de distribución marginales F y G . Entonces, existe una medida doblemente estocástica μ para la que la cópula C_1 asociada con ella verifica que su restricción a $\overline{\text{Ran}F} \times \overline{\text{Ran}G}$ es C^* .*

Demostración. El proceso de construcción de la medida μ lo desarrollamos en las siguientes etapas:

i) *Construcción de funciones de distribución continuas $F_{t,j}$ (resp., $G_{t,j}$) asociadas a $T_t \in O_1$ (resp., O_2).*

Se definen unas funciones auxiliares asociadas con los elementos de O_1 y O_2 . Sea $T_t \in O_1$, elegimos una familia de funciones $F_{t,j}$ que son funciones de distribución 1-Lipschitz de modo que se tiene

$$x = \frac{1}{V} \sum_j \beta_{t,j} F_{t,j}(x)$$

donde

$$\beta_{t,j} = H(b'_t, d'_j) + H(a'_t, c'_j) - H(b'_t, c'_j) - H(a'_t, d'_j)$$

y

$$V = H(b'_t, 1) + H(a'_t, 0) - H(b'_t, 0) - H(a'_t, 1)$$

donde a'_t es tal que $F(a'_t) = a_t$; y lo mismo ocurre para las otras notaciones.

Del mismo modo se eligen las funciones $G_{t,j}$ asociadas con $J_j \in O_2$.

ii) *Asignación de medida, con la ayuda de una distribución bidimensional con marginales $F_{t,j}$ y $G_{t,j}$.*

Distinguiamos varios casos:

a) $T_t \times J_j \in D_1 \times D_2$. Si $[a, b] \times [c, d] \subseteq T_t \times J_j$, tenemos que

$$\mu([a, b] \times [c, d]) = H(b', d') + H(a', c') - H(b', c') - H(d', a')$$

donde a' es un valor tal que $F(a') = a$; y lo mismo ocurre para las otras letras. El teorema de extensión permite extender la medida a los conjuntos de Borel de ese rectángulo.

b) $T_t \times J_j \in D_1 \times O_2$. Si $\beta_{t,j} = 0$, la medida de un conjunto de Borel contenido en ese rectángulo es cero. Si $\beta_{t,j} \neq 0$ consideramos las funciones de distribución

$$\begin{aligned} F_{t,j}(x) &= \frac{1}{\beta_{t,j}} (C^*((b_t - a_t)x + a_t, d_j) + C^*(a_t, c_j) - \\ &\quad - (C^*(a_t, d_j) + C^*((b_t - a_t)x + a_t, c_j))) \end{aligned}$$

y $G_{t,j}$ (asociada previamente).

Para $F_{t,j}$ y $G_{t,j}$ y una cópula cualquiera (que representaremos por $C_{t,j}$), existe una distribución de masa que responde a una función de distribución

$$H_{t,j}(x, y) = C_{t,j}(F_{t,j}(x), G_{t,j}(y)).$$

La aplicación

$$\begin{aligned} Q_{t,j} &: \mathbb{I}^2 \rightarrow T_t \times J_j \\ Q_{t,j}((x, y)) &= ((b_t - a_t)x + a_t, (d_j - c_j)y + c_j) \end{aligned}$$

permite trasladar la masa que determina $H_{t,j}$, de \mathbb{I}^2 a $T_t \times J_j$. La medida μ en $T_t \times J_j$ es la "trasladada" por $Q_{t,j}$ multiplicada por $\beta_{t,j}$.

c) $T_t \times J_j \in O_1 \times D_2$. Se trata del "dual" de b).

d) $T_t \times J_j \in O_1 \times O_2$. En este caso procedemos de un modo similar a b). En esta ocasión las funciones $F_{t,j}$ y $G_{t,j}$ han sido fijadas previamente.

iii) La probabilidad μ es doblemente estocástica.

Basta demostrar que $\mu([a, b] \times \mathbb{I}) = b - a$ cuando $[a, b]$ está incluido en algún T_t . Distinguiamos varios casos.

Si $T_t \in D_1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mu([a, b] \times \mathbb{I}) &= \sum_j C^*(b, d_j) - C^*(a, d_j) - C^*(b, c_j) + C^*(a, c_j) \\ &= C^*(b, 1) - C^*(a, 1) = b - a. \end{aligned}$$

Si $T_t \in O_1$ tenemos que $\mu([a, b] \times \mathbb{I}) = \frac{1}{V} \sum_j \beta_{t,j} (F_{t,j}(b) - F_{t,j}(a)) = b - a$.

El caso de $\mathbb{I} \times [a, b]$ es simétrico.

Finalmente, esta medida μ tiene asociada una cópula C_1 . Notemos que la forma de construir la medida nos garantiza que su restricción a $\overline{RanF} \times \overline{RanG}$ es C^* . Además, se tiene que $C_1(F(x), G(y)) = H(x, y)$, con lo que se concluye el resultado. ■

Hemos de notar que, dada una función de distribución H , el método de construcción anterior (que denominamos H -proceso) está asociado con las cópulas $C_{t,j}$ y las funciones de distribución $F_{t,j}$ y $G_{t,j}$.

9.2.2. Teorema de Sklar

Si en los casos en que hemos de elegir una cópula $C_{t,j}$ tomamos la cópula independiente o cópula producto Π y cuando podemos elegir algunas funciones de distribución unidimensionales tomamos $F_{t,j}(x) = G_{t,j}(x) = x$, tenemos un caso particular que es el utilizado por Sklar y Schweizer en la demostración del Teorema de Sklar que dan en [152].

Sea la cópula C y la familia $\{S_i\}_{i \in \mathfrak{S}}$ de subconjuntos cerrados y acotados de \mathbb{I}^2 cuyas fronteras (notadas por ∂S_i) cumplen que $S_i \cap S_j \subseteq \partial S_i \cap \partial S_j$ cuando $i \neq j$. Además, para cada $i \in \mathfrak{S}$, tomamos una función $L_i : S_i \rightarrow \mathbb{I}$ continua y creciente en cada variable, tal que $C = L_i$ en ∂S_i . Entonces, la función $L : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ definida por

$$L(x, y) = \begin{cases} L_i(x, y), & \text{si } (x, y) \in S_i \\ C(x, y), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es llamada patchwork de $\{F_i\}_{i \in \mathfrak{S}}$. Cuando los conjuntos S_i son rectángulos se les llama *rectangular patchwork* (ver [54]).

Podemos obtener, sin dificultad, el siguiente resultado:

Proposición 9.3 Si notamos por C_1 y C_2 las cópulas obtenidas en dos H -procesos en los que se han tomado las mismas funciones de distribución $F_{t,j}, G_{t,j}$, entonces C_1 es un *rectangular patchwork* de C_2 (y viceversa).

9.2.3. Extensión del Teorema de Sklar

El H -proceso descrito en este Capítulo nos permite establecer el objetivo de describir cómo son todas las cópulas que cumplen el Teorema de Sklar para una distribución bidimensional H y sus marginales F y G .

Para ello, introducimos previamente una notación adicional. Si D'_1 es el conjunto de índices $t \in T'$ para los que $T_t \in D_1$; y de modo similar D'_2, O'_1 y O'_2 . Al subconjunto de $D'_1 \times D'_2 \cup O'_1 \times D'_2 \cup O'_1 \times O'_2$ formado por los índices para los que $\beta_{t,j} \neq 0$, lo representamos por K .

Por $1FD$ representamos al conjunto de funciones de distribución 1-Lipschitz definidas en \mathbb{I} y M_1 es el subconjunto de $1FD^{O_1 \times J' \cap K}$ tal que

$$x = \frac{1}{V} \sum_{j:(t,j) \in O_1' \times J'} \beta_{tj} F_{tj}(x).$$

De modo idéntico se define M_2 .

Ahora, analizando la demostración de la Proposición 9.2 observamos que hemos probado más de lo que se enuncia en ese resultado. Notaremos por COP al conjunto de todas las cópulas. En concreto, podemos decir que para cada elemento de $COP^K \times M_1 \times M_2$ el H -proceso asociado con él nos da una cópula para la que $C(F(x), G(y)) = H(x, y)$.

Por otra parte, teniendo en cuenta que en toda cópula C , que extiende a C^* , las secciones verticales y horizontales son 1-Lipschitz y monótonas crecientes. Es fácil comprobar que, cuando $\beta_{tj} \neq 0$, si tomamos

$$F_{tj}(x) = \frac{1}{\beta_{tj}} (C((b_t - a_t)x + a_t, d_j) + C(a_t, c_j) - (C(a_t, d_j) + C((b_t - a_t)x + a_t, c_j)))$$

y

$$G_{tj}(y) = \frac{1}{\beta_{tj}} (C(b_t, (d_j - c_j)y + c_j) + C(a_t, c_j) - (C(a_t, (d_j - c_j)y + c_j) + C(b_t, c_j)))$$

entonces, obtenemos a C como un H -proceso.

Teorema 9.4 (Extensión del teorema de Sklar) a. *Para cada elemento de $COP^K \times M_1 \times M_2$ el H -proceso asociado con él nos da una cópula que verifica $C(F(x), G(y)) = H(x, y)$. Además, a elementos diferentes de $COP^K \times M_1 \times M_2$ les corresponden cópulas diferentes.*

b. *Toda cópula C satisfaciendo que $C(F(x), G(y)) = H(x, y)$ se obtiene mediante un H -proceso.*

Finalmente, teniendo en cuenta el resultado anterior, podemos dar la expresión de todas las cópulas que cumplen que $C(F(x), G(y)) = H(x, y)$.

Teorema 9.5 *Sea $H(x, y)$ una función de distribución bidimensional en \mathbb{I}^2 con distribuciones marginales F y G , y sea C una cópula cumpliendo la relación $C(F(x), G(y)) = H(x, y)$. Entonces, C tiene la siguiente expresión*

$$C(x, y) = \begin{cases} C^*(x, y), & \text{si } (x, y) \in \overline{\text{Ran}F} \times \overline{\text{Ran}G} \\ C^*(a_t, c_j) + \beta_{tj} C_{tj} \left(F_{tj} \left(\frac{x-a_t}{b_t-a_t} \right), G_{tj} \left(\frac{y-c_j}{d_j-c_j} \right) \right) + \\ + \sum_{t' \in S_t} \beta_{t'j} G_{t'j} \left(\frac{y-c_j}{d_j-c_j} \right) + \sum_{j' \in Z_j} \beta_{tj'} F_{tj'} \left(\frac{x-a_t}{b_t-a_t} \right), \\ \text{si } (x, y) \notin \overline{\text{Ran}F} \times \overline{\text{Ran}G}; \quad (x, y) \in T_t \times J_j. \end{cases}$$

donde $S_t = \{t' : a_{t'} < a_t\}$ y $Z_j = \{j' : c_{j'} < c_j\}$.

Ejemplo 9.6 *En el caso en que $\text{Ran}F = \mathbb{I}$ y $\text{Ran}G = \{0, b, 1\}$ la subcópula, esencialmente, se puede identificar con la sección horizontal $C^*(x, b) = h_b(x)$. La función $h_b : \mathbb{I} \rightarrow [0, b]$ es una función creciente, biyectiva y $|h_b(x) - h_b(y)| \leq |x - y|$ (esto es, es 1-Lipschitz).*

La situación inversa también es cierta, si una función $h_b : \mathbb{I} \rightarrow [0, b]$ es creciente, biyectiva y $|h_b(x) - h_b(y)| \leq |x - y|$, entonces la aplicación $C^ : \mathbb{I} \times \{0, b, 1\} \rightarrow \mathbb{I}$ dada por*

$$C^*(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ h_b(x) & \text{si } y = b \\ x & \text{si } y = 1 \end{cases}$$

es una subcópula.

En este caso $T = \{T_0 = \mathbb{I}\}$ y $J = \{J_0 = [0, b], J_1 = [b, 1]\}$, $F_{0,0} = \frac{h_b(x)}{b}$, $F_{0,1} = \frac{x-h_b(x)}{1-b}$, $G_{0,0}(x) = G_{0,1}(x) = x$.

El resultado anterior conduce a una expresión general para todas las cópulas con una sección horizontal h_b , dada por

$$C(x, y) = \begin{cases} bC_1\left(\frac{h_b(x)}{b}, \frac{y}{b}\right), & \text{si } x \leq b \\ (1-b)C_2\left(\frac{x-h_b(x)}{1-b}, \frac{y-b}{1-b}\right) + h_b(x), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde C_1 y C_2 son cópulas.

Este resultado ha sido obtenido por otros métodos en [54]. Teniendo en cuenta las acotaciones de Fréchet–Hoeffding, cuando tomamos

$$a) \quad C_1(x, y) = C_2(x, y) = M(x, y) = \min\{x, y\}$$

o bien

$$b) \quad C_1(x, y) = C_2(x, y) = W(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}$$

se obtienen, respectivamente, la mayor y la menor de las cópulas de esta familia. Este resultado corresponde con los teoremas 3.1 y 3.2 de [99].

9.3. Aplicaciones

9.3.1. Acotaciones superior e inferior

Dada una subcópula C^* , es interesante conocer las funciones

$$SC^*(x, y) = \sup\{C(x, y) : C \text{ es una cópula que extiende a } C^*\}$$

y

$$IC^*(x, y) = \inf\{C(x, y) : C \text{ es una cópula que extiende a } C^*\}.$$

Veremos que tanto SC^* como IC^* son cópulas y daremos un método para determinarlas.

Un intervalo T_t se divide en subintervalos indizados en J' , de modo que el intervalo $[a_t^j, b_t^j] = T_t^j \subset T_t$ es un intervalo de longitud igual a $V_{C^*}(T_t \times J_j)$ y su extremo inferior es $a_t + \sum_{c_{j'} < c_j} V_{C^*}(T_t \times J_{j'})$. De modo similar se divide J_j en intervalos J_j^t .

En el caso en que podamos elegir la función $F_{t,j}$ se tomará

$$F_{t,j}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{a_t^j - a_t}{b_t - a_t} \\ \frac{b_t - a_t}{b_t^j - a_t^j} x + \frac{a_t - a_t^j}{b_t^j - a_t^j}, & \frac{a_t^j - a_t}{b_t - a_t} \leq x \leq \frac{b_t^j - a_t}{b_t - a_t} \\ 1, & \frac{b_t^j - a_t}{b_t - a_t} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

y de modo similar se haría para $G_{t,j}$.

Teorema 9.7 Si en el H -proceso elegimos las funciones $F_{t,j}$ y $G_{t,j}$ como se ha descrito anteriormente y hacemos $C_{t,j} = M$, entonces la cópula asociada con la medida doblemente estocástica será SC^* .

Demostración. Es sencillo observar que si $T_t \times J_j \in O_1 \times O_2$, entonces en ese rectángulo la masa está distribuida uniformemente en la diagonal del cuadrado $T_t^j \times J_j^t$. Si $T_t \times J_j \in D_1 \times O_2$ la masa está distribuida en la gráfica de una función biyectiva y monótona creciente de T_t en J_j^t .

Si $T_t \times J_j \in O_1 \times D_2$ la masa está distribuida en la gráfica de una función biyectiva y monótona creciente de T_t^j en J_j .

Para comprobar que la cópula asociada con esa medida es SC^* veremos varias situaciones. Representamos la cópula por C' :

i) Si $(x, y) \in \overline{\text{Rang}F} \times \overline{\text{Rang}G}$ es obvio que se trata de $SC^*(x, y)$.

ii) Si $(x, y) \in T_t \times J_j \in O_1 \times O_2$ distinguimos, a su vez, varios casos:

α) Si $x \leq a_t^j, y \leq c_j^t$, entonces $C'(x, y) = C^*(a_t, c_j) + (x - a_t) + (y - c_j)$, que es el mayor valor que puede tomar.

β) Si $x \geq b_t^j, y \geq d_j^t$, el valor es $C'(x, y) = C^*(b_t, d_j)$, que también es el máximo que puede tomar.

δ) Si $a_t^j \leq x \leq b_t^j, y \leq c_j^t$ se tiene

$$C'(x, y) = C^*(a_t, c_j) + \sum_{j' < j} V_{C^*}(T_t \times J_{j'}) + x - a_t,$$

que vuelve a ser el valor máximo que puede alcanzar.

ε) Del mismo modo se obtiene cuando $x \leq b_t^j, c_j^t \leq y \leq d_j^t$.

Razonamientos similares nos dan el mismo resultado para las situaciones:

ζ) $x \geq b_t^j, y \leq c_j^t$

η) $x \leq a_t^j, y \geq d_j^t$

θ) $a_t^j \leq x \leq b_t^j, y \geq d_j^t$

ϑ) $x \geq b_t^j, c_j^t \leq y \leq d_j^t$.

ι) $a_t^j \leq x \leq b_t^j, c_j^t \leq y \leq d_j^t$.

iii) Si $(x, y) \in T_t \times J_j \in D_1 \times O_2$ o $(x, y) \in T_t \times J_j \in O_1 \times D_2$, se hace una descomposición en casos del mismo modo que en ii). ■

De modo similar obtenemos la cota inferior. En este caso, el intervalo $T_t^j \subset T_t$ es un intervalo de longitud igual a $V_{C^*}(T_t \times J_j)$; y su extremo superior es

$$b_t - \sum_{j' < j} V_{C^*}(T_t \times J_{j'}).$$

También de este modo se divide J_j en intervalos J_j^t . Las funciones $F_{t,j}$ y $G_{t,j}$ se definen como en el caso anterior.

Teorema 9.8 Si en el H -proceso elegimos las funciones $F_{t,j}$ y $G_{t,j}$ como se ha descrito anteriormente y $C_{t,j} = W$ entonces la cópula asociada con la medida doblemente estocástica será SC^* .

Los dos últimos teoremas incluyen, como caso particular, el resultado obtenido por Carley y Taylor en [34] cuando $RanF$ y $RanG$ son conjuntos finitos.

9.3.2. Extensión de sub-cuasicópulas

El H -proceso también se puede aplicar a la extensión de sub-cuasicópulas (véase [142]).

En este caso, cuando $T_t \in O_1$, la elección de funciones de distribución continuas $F_{t,j}$, con $x = \frac{1}{V} \sum_j \beta_{t,j} F_{t,j}(x)$ puede llevar a que no se tenga la condición 1-Lipschitz, ya que alguno de los $\beta_{t,j}$ puede ser negativo. Ésto se evita mediante conveniente elección de esas funciones: $F_{t,j}(x) = x$ (del mismo modo para $G_{t,j}$ cuando $J_j \in O_2$). La cópula $C_{t,j}$ puede ahora ser cualquiera.

a) Este proceso de extensión de la sub-cuasicópula se hace con la ayuda de una distribución de masa (positiva, negativa o masa cero en los rectángulos $T_t \times J_j$).

b) Cuando en los rectángulos no degenerados de $\overline{RanF} \times \overline{RanG}$ la sub-cuasicópula responde a una distribución de masa signada, las cuasicópulas obtenidas están asociadas con una medida signada doblemente estocástica.

c) Si tomamos $C_{t,j} = \Pi$ obtenemos el ejemplo de extensión que se da en el apéndice A de [142] debido a F. Durante.

Capítulo 10

Cuestiones sobre cópulas con sección diagonal dada

10.1. Introducción

Dada una diagonal δ estamos interesados en estudiar \mathcal{C}_δ , que, recordemos, denota la familia de cópulas que tiene a δ como diagonal principal. Posiblemente, las cópulas pertenecientes a \mathcal{C}_δ mejor conocidas son las llamadas *cópulas diagonales* (véanse [123] y [66]), que están definidas por la expresión

$$K_\delta(x, y) = \min \left\{ x, y, \frac{\delta(x) + \delta(y)}{2} \right\}. \quad (10.1)$$

Basados en investigaciones recogidas en [85] y [86], podemos señalar que las cópulas diagonales tienen la siguiente interpretación probabilística. Para cada $(x, y) \in \mathbb{I}^2$, se tiene que

$$K_\delta(x, y) = \frac{\min\{2x - \delta(x), \delta(y)\}}{2} + \frac{\min\{2y - \delta(y), \delta(x)\}}{2}.$$

Puesto que las funciones F y G de \mathbb{I}^2 en \mathbb{I} dadas por

$$F(x, y) = \min\{2x - \delta(x), \delta(y)\} \quad \text{y} \quad G(x, y) = \min\{2y - \delta(y), \delta(x)\}$$

son 2–crecientes (son funciones de distribución bidimensionales obtenidas por la composición de la cópula $M(x, y) = \min\{x, y\}$ con las funciones de distribución unidimensionales $t \mapsto \delta(t)$, $t \mapsto (2t - \delta(t))$), entonces una cópula diagonal es una combinación lineal convexa de dos distribuciones bidimensionales con la misma cópula M , pero con marginales diferentes.

Esta interpretación también permite demostrar que, efectivamente, K_δ es una cópula y que es discreta.

Bajo condiciones adicionales sobre δ , pueden construirse otras cópulas de \mathcal{C}_δ , como puede verse en [19], [48], [50], [53], o [114].

Queremos ahora proponer otro método de construcción de cópulas de \mathcal{C}_δ bajo la condición de que δ sea una función convexa.

También, daremos respuesta a dos problemas propuestos por Nelsen et al. en [126]. Concretamente, se trata de:

- Determinar para qué diagonales la inclusión $\mathcal{C}_\delta \subset \mathcal{Q}_\delta$ es estricta.
- Determinar si existen diagonales diferentes de δ_M para las que $\mathcal{C}_\delta = \mathcal{Q}_\delta$ es un único elemento.

10.2. Construcción de cópulas con una sección diagonal convexa

Para construir un nuevo tipo de cópulas con sección diagonal dada, necesitamos algunos lemas previos. El primero está contenido en la proposición 4.B.2 de [112] y el segundo el teorema 7.1 de [51].

Lema 10.1 Sean A un intervalo de \mathbb{R} y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es convexa y creciente, entonces para cada $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ tales que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, y $a_1 + a_4 \geq a_2 + a_3$, se tiene que

$$f(a_1) + f(a_4) \geq f(a_2) + f(a_3).$$

Lema 10.2 Para una aplicación $A: \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ que sea 2-creciente y 1-Lipschitz en cada variable, con $A(0,0) = 0$ y $A(1,1) = 1$, la función

$$C(x, y) = \min\{x, y, A(x, y)\} \quad (10.2)$$

es una cópula.

Teorema 10.3 Para una diagonal convexa δ , la función $C_\delta: \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ dada por

$$C_\delta(x, y) = \min\left\{x, y, \delta\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\}, \quad (10.3)$$

es una cópula.

Demostración. Sea la función $A: \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ definida por

$$A(x, y) = \delta\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Para demostrar que C_δ es una cópula, únicamente hemos de comprobar que A satisface las hipótesis del lema 10.2.

Es sencillo comprobar que $A(0,0) = 0$ y $A(1,1) = 1$. Además, puesto que δ satisface $|\delta(v) - \delta(u)| \leq 2|v - u|$, para $x, y, x', y' \in \mathbb{I}$, tenemos que

$$|A(x, y) - A(x', y')| = \left| \delta\left(\frac{x+y}{2}\right) - \delta\left(\frac{x'+y'}{2}\right) \right| \leq |x - x'| + |y - y'|,$$

esto es, A es 1-Lipschitz en cada variable.

Finalmente, para todo $x, y, x', y' \in \mathbb{I}$ con $x \leq x'$ e $y \leq y'$, tenemos que

$$\begin{aligned} & A(x, y) + A(x', y') - A(x, y') - A(x', y) \\ &= \delta\left(\frac{x+y}{2}\right) + \delta\left(\frac{x'+y'}{2}\right) - \delta\left(\frac{x'+y}{2}\right) - \delta\left(\frac{x+y'}{2}\right). \end{aligned}$$

Esta expresión es no negativa, puesto que δ es convexa y, por tanto, el lema 10.1 puede ser aplicado. ■

10.3. Resolución de dos problemas abiertos sobre \mathcal{C}_δ y \mathcal{Q}_δ

Ahora, daremos respuesta a dos problemas que han sido planteados en la sección 10.1. En primer lugar, estamos interesados en las diagonales δ para las que \mathcal{C}_δ contiene un único punto. El siguiente resultado las caracteriza.

Proposición 10.4 Sea δ una diagonal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Hay una cópula C tal que $\mathcal{C}_\delta = \{C\}$;
- (b) $\delta = \delta_M$; o, en otras palabras, $C = M$.

Puesto que $\mathcal{C}_\delta \subseteq \mathcal{Q}_\delta$, entonces ocurre que \mathcal{Q}_δ contiene un único elemento cuando $\delta = \delta_M$.

Notemos que, para demostrar la proposición, es suficiente demostrar que (a) implica (b), puesto que la otra implicación es cierta como una consecuencia de la proposition 2.7 de [56]. Previamente, introducimos un poco de notación.

Dada una función $H: [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \rightarrow [c_1, c_2]$, las marginales de H son las funciones $h_{b_1}^H$, $h_{b_2}^H$, $v_{a_1}^H$, y $v_{a_2}^H$ definidas por

$$\begin{aligned} h_{b_1}^H: [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] &\rightarrow [c_1, c_2], & h_{b_1}^H &= H(x, b_1), \\ h_{b_2}^H: [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] &\rightarrow [c_1, c_2], & h_{b_2}^H &= H(x, b_2), \\ v_{a_1}^H: [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] &\rightarrow [c_1, c_2], & v_{a_1}^H &= H(a_1, y), \\ v_{a_2}^H: [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] &\rightarrow [c_1, c_2], & v_{a_2}^H &= H(a_2, y). \end{aligned}$$

Primera demostración. Supongamos que \mathcal{C}_δ tiene la cópula C como su único elemento. Supongamos que $\delta(t_0) \neq t_0$ para algún $t_0 \in]0, 1[$; y tomemos $R = [0, t_0] \times [t_0, 1]$. Como consecuencia de ser una cópula, tenemos

$$V_C(R) = t_0 - \delta(t_0) = \lambda_R > 0.$$

Sean C_1 y C_2 dos cópulas diferentes, $C_1 \neq C_2$, y consideramos, para $i = 1, 2$, las funciones $\tilde{C}_i(x, y)$ dadas por

$$\begin{cases} \lambda_R C_i \left(\frac{V_C([0, x] \times [t_0, 1])}{\lambda_R}, \frac{V_C([0, t_0] \times [t_0, y])}{\lambda_R} \right) + h_{t_0}^C(x), \\ \text{si } (x, y) \in R, \\ C(x, y), \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el teorema 2.2 de [54], \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 son cópulas, con $\tilde{C}_1 \neq \tilde{C}_2$. Además, es fácil comprobar que \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 tienen la misma sección diagonal y que es δ . Como consecuencia, \mathcal{C}_δ contiene, al menos, dos elementos distintos, lo cual es una contradicción. Por tanto, δ debe ser igual a δ_M . ■

Segunda demostración. Supongamos que \mathcal{C}_δ tiene la cópula C como su único elemento y que $\delta(t_0) \neq t_0$ para algún $t_0 \in]0, 1[$. Entonces, C no es absolutamente continua. Efectivamente, es posible asociar a la diagonal δ la cópula K_δ dada por (10.1). Por tanto, si C es absolutamente continua, entonces \mathcal{C}_δ contendrá, al menos, dos elementos.

Por otra parte, es conocido por el teorema 2.3 de [48] que \mathcal{C}_δ contiene una cópula absolutamente continua cuando $\delta(t) < t$, para todo $t \in]0, 1[$. Además, como δ es una función continua, existe un intervalo $[t_1, t_2] \neq \mathbb{I}$ tal que $\delta(t_1) = t_1$, $\delta(t_2) = t_2$ y $\delta(t) < t$ en $]t_1, t_2[$. Además, el teorema 3.2.1 de [122] asegura que C es una suma ordinal. Es sencillo comprobar que $C_1: \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ dado por

$$C_1(x, y) = \frac{C((t_2 - t_1)x + t_1, (t_2 - t_1)y + t_1) - t_1}{t_2 - t_1},$$

es una cópula cuya sección diagonal es

$$\delta_1(t) = \frac{\delta((t_2 - t_1)t + t_1) - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Hemos de notar que $\delta_1(t) < t$ para todo $t \in]0, 1[$. Sea C_2 otra cópula cuya sección diagonal es δ_1 y $C_2 \neq C_1$. La existencia de C_2 esta garantizada ya que el teorema 2.3 de [48] afirma que existe una cópula absolutamente continua con sección diagonal igual a δ_1 y, por otra parte, existe la cópula singular K_{δ_1} . Ahora, definimos una cópula \tilde{C} de la forma:

$$\tilde{C}(x, y) = \begin{cases} t_1 + (t_2 - t_1)C_2 \left(\frac{x-t_1}{t_2-t_1}, \frac{y-t_1}{t_2-t_1} \right), & \text{si } (x, y) \in [t_1, t_2]^2, \\ C(x, y), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En estas circunstancias, $\tilde{C} \in \mathcal{C}_\delta$ y $\tilde{C} \neq C$. Como consecuencia, \mathcal{C}_δ contiene al menos dos elementos, lo que es una contradicción. Por tanto, δ debe ser igual a δ_M . ■

La segunda versión de la demostración puede ser usada para demostrar un resultado d -dimensional análogo ($n \geq 3$), que escribimos como un corolario.

Corolario 10.5 *Sea δ una d -diagonal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) *la clase de todas las cópulas d -dimensionales cuya sección diagonal es δ consta de un único elemento;*
- (b) *$\delta(t) = t$ en \mathbb{I} .*

La demostración puede obtenerse imitando la segunda de las demostraciones de la proposición 10.4 y utilizando los resultados que aparecen en [85] sobre la clase de las cópulas d -dimensionales con una sección diagonal dada.

Comentario 10.6 *Notemos que, si la clase \mathcal{C}_δ contiene dos elementos, entonces contiene una infinidad de elementos. En efecto, si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_\delta$ y $C_1 \neq C_2$, entonces $\alpha C_1 + (1 - \alpha)C_2 \in \mathcal{C}_\delta$ para todo $\alpha \in \mathbb{I}$.*

Ahora, estudiamos el segundo de los problemas. Sea δ una diagonal y consideremos las clases \mathcal{C}_δ y \mathcal{Q}_δ . Es conocido que $\mathcal{C}_\delta = \mathcal{Q}_\delta$ cuando $\delta = \delta_M$ (véase, por ejemplo, la proposición 2.7 de [56]). A continuación demostraremos que este es el único caso en el que se da la igualdad.

Proposición 10.7 *Sea δ una función diagonal. Entonces $\mathcal{C}_\delta = \mathcal{Q}_\delta$ si, y sólo si, $\delta = \delta_M$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}_\delta = \mathcal{Q}_\delta$ y que $\delta(t_0) \neq t_0$ para algún $t_0 \in]0, 1[$. Como en la primera de las demostraciones de la proposición 10.4, tomamos $R = [0, t_0] \times [t_0, 1]$ y $V_C(R) = \lambda_R > 0$. Sea Q una cuasicópula propia, es decir, una cuasicópula que no es una cópula (su existencia está garantizada por [70]). Consideramos la función

$$\tilde{C}(x, y) = \begin{cases} D(x, y), & (x, y) \in R, \\ C(x, y), & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (10.4)$$

donde $D: R \rightarrow \mathbb{I}$, $D(x, y) = \lambda_R Q(F(x), G(y)) + h_{t_0}^C(x)$, y las funciones $F: [0, t_0] \rightarrow \mathbb{I}$ y $G: [t_0, 1] \rightarrow \mathbb{I}$ definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{V_C([0, x] \times [t_0, 1])}{\lambda_R} = \frac{x - h_{t_0}^C(x)}{\lambda_R} \\ G(y) &= \frac{V_C([0, t_0] \times [t_0, y])}{\lambda_R} = \frac{v_{t_0}^C(y) - C(t_0, t_0)}{\lambda_R}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las proposiciones 4, 5 y 6 de [18], para demostrar que \tilde{C} es una cuasicópula, hemos de comprobar que $C = D$ en la frontera de R , D es creciente en cada variable, y que las aplicaciones $t \mapsto D(t, y_0)$ y $t \mapsto D(x_0, t)$ son 1-Lipschitz para cada $x_0 \in [0, t_0]$ e $y_0 \in [t_0, 1]$.

Puesto que la primera condición para D se demuestra fácilmente, queda por comprobar que las secciones vertical y horizontal de D son 1-Lipschitz. Para este fin, tomamos $t_1, t_2 \in [0, t_0]$; y sin pérdida de generalidad, supondremos que $t_1 < t_2$. Sea $y_0 \in [t_0, 1]$. Tenemos que

$$\begin{aligned} D(t_2, y_0) - D(t_1, y_0) &= \lambda_R (Q(F(t_2), G(y_0)) - Q(F(t_1), G(y_0))) \\ &\quad + (h_{t_0}^C(t_2) - h_{t_0}^C(t_1)) \\ &\leq (t_2 - t_1) - (h_{t_0}^C(t_2) - h_{t_0}^C(t_1)) + (h_{t_0}^C(t_2) - h_{t_0}^C(t_1)) \\ &= t_2 - t_1. \end{aligned}$$

Análogamente, sean $t_1, t_2 \in [t_0, 1]$; y supondremos que $t_1 < t_2$. Sea $x_0 \in [0, t_0]$. Así,

$$\begin{aligned} D(x_0, t_2) - D(x_0, t_1) &= \lambda_R (Q(F(x_0), G(t_2)) - Q(F(x_0), G(t_1))) \\ &\leq v_{x_0}^C(t_2) - v_{x_0}^C(t_1) \leq t_2 - t_1. \end{aligned}$$

Podemos concluir que $t \mapsto D(t, y_0)$ y $t \mapsto D(x_0, t)$ son 1-Lipschitz y, por tanto, \tilde{C} es una cuasicópula. Además, se puede comprobar fácilmente que $\tilde{C} \in \mathcal{Q}_\delta$.

Notemos que \tilde{C} es realmente una cuasicópula propia. Efectivamente, puesto que Q es una cuasicópula propia, existe un rectángulo en el que $R^* = [a_1^*, a_2^*] \times [b_1^*, b_2^*] \subseteq \mathbb{I}^2$ tal que $V_Q(R^*) < 0$. Ahora, sean $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1$ y \bar{b}_2 puntos de R tales que

$$F(\bar{a}_1) = a_1^*, G(\bar{a}_2) = a_2^*, F(\bar{b}_1) = b_1^*, F(\bar{b}_2) = b_2^*.$$

Se sigue, por ser

$$V_{\tilde{C}}([\bar{a}_1, \bar{a}_2] \times [\bar{b}_1, \bar{b}_2]) = \lambda_R V_Q(R^*) < 0,$$

que \tilde{C} no es una cópula.

Por tanto, tenemos que $Q \in \mathcal{Q}_\delta \setminus \mathcal{C}_\delta$, lo que es una contradicción. Entonces, $\delta = \delta_M$. Puesto que la implicación inversa es obviamente cierta, tenemos demostrado el resultado. ■

Comentario 10.8 De la demostración de la proposición 10.7, podemos deducir que $C \in \mathcal{C}_\delta$, $\delta \neq \delta_M$, puede ser aproximada por medio de una cuasicópula propia $Q \in \mathcal{Q}_\delta$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, y utilizando la notación de la proposición 10.7, consideramos el rectángulo $R = R_\varepsilon \subseteq [0, t_0] \times [t_0, 1]$, $V_C(R) > 0$, y la cuasi cópula Q de (10.4). Para R suficientemente pequeño (pero de C -volumen positivo), podemos deducir que $|C(x, y) - Q(x, y)| < \varepsilon$ para todo $(x, y) \in \mathbb{I}^2$. Además, por el uso del teorema 4.2 de [124], podemos suponer que la cuasicópula Q tiene una masa negativa, en algún subconjunto de R , menor que la cantidad que queramos fijar.

Notemos que si la cópula C es simétrica, entonces la cuasicópula \tilde{C} de (10.4) no es simétrica. Sin embargo, no es difícil construir una cuasicópula simétrica perteneciente a \mathcal{Q}_δ . Efectivamente, podemos considerar la cuasicópula $\tilde{C}^*(x, y) = \tilde{C}(\min\{x, y\}, \max\{x, y\})$ (véase Remark 3 de [52]). Como consecuencia, si denotamos por \mathcal{Q}_s la clase de las cuasicópulas simétricas, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 10.9 Sea δ una diagonal. Entonces $\mathcal{C}_\delta \cap \mathcal{Q}_s = \mathcal{Q}_\delta \cap \mathcal{Q}_s$ si, y sólo si, $\delta = \delta_M$.

Es interesante hacer notar que para $\delta \neq \delta_M$, tenemos que $\mathcal{C}_\delta \cap \mathcal{Q}_s \subset \mathcal{Q}_\delta \cap \mathcal{Q}_s$, es conocido que las cotas superior e inferior de $\mathcal{C}_\delta \cap \mathcal{Q}_s$ y $\mathcal{Q}_\delta \cap \mathcal{Q}_s$ coinciden (véanse [98] o [125]).

Capítulo 11

S-cóputas

11.1. Introducción

El concepto de shuffle de Min fue introducido por Mikusinski et al. en [116] (véase también [122]). En ese trabajo dan una demostración de que estas cóputas son densas en el conjunto de las cóputas con la distancia del supremo. Recientemente, se han dado generalizaciones de las mismas: en el caso bidimensional, por Durante et al. en [55]; y en el multidimensional, por Mikusinski y Taylor en [117].

Pretendemos aportar una forma de generar cóputas a partir de una familia dada. Este método incluye, como caso particular, a los shuffles de Min (en el sentido introducido en [117]) y a las sumas ordinales de cóputas. Este tipo de cóputas, que llamaremos S -cóputas, tienen la interesante propiedad de que dadas dos cóputas cualesquiera C_1 y C_2 , la primera puede ser aproximada uniformemente por S -cóputas de la segunda.

11.2. S -estructura

Recordamos que una cóputa C es un shuffle de Min (bidimensional) si existe un entero positivo n , dos particiones $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de \mathbb{I} y una permutación σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ tales que cada producto $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{\sigma(i)-1}, t_{\sigma(i)}]$ es un cuadrado en el que C deposita una masa de tamaño $s_i - s_{i-1}$ distribuida uniformemente en una de las diagonales. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ representamos $m(i)$ a la pendiente de la diagonal del cuadrado $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{\sigma(i)-1}, t_{\sigma(i)}]$ en la que está distribuida la masa.

Podemos ver los shuffles of Min como cóputas cuya distribución de masa está formada por n copias (con pesos) de la distribución de masa de M o W . Siguiendo esta idea, podemos generalizar el concepto a conjuntos de cóputas diferentes de $\{M, W\}$; y la descomposición de \mathbb{I} en subintervalos puede ser infinita.

Definición 11.1 Dadas d familias J^j , con $j = 1, \dots, d$, formadas por una cantidad numerable de subintervalos cerrados (puede ser finito), no degenerados, representados por $J_n^j = [\alpha_n^j, \beta_n^j]$, tal que para $n \neq m$ se tiene que $J_n^{j\circ} \cap J_m^{j\circ} = \emptyset$ ($J_m^{j\circ}$ es el interior de J_m^j) y que $\sum_n \lambda(J_n^j) = 1$, con la condición de que $\lambda(J_n^j) = \lambda(J_n^b)$ para todos j, b . Si el número de intervalos es finito el conjunto de índices será $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, a\}$ y si es infinito $A = \mathbb{Z}^+$. Sea un conjunto K numerable (puede ser finito) y una aplicación sobreyectiva $i : A \rightarrow K$. A $i(n)$ lo representamos como i_n . Llamamos S -estructura a $(J \times d, A, K, i)$, donde $J \times d$ representa las familias J^j y la representamos por $S_{J \times d, A, K, i}$. (Si no hay confusión se omitirán los subíndices total o parcialmente.)

Definición 11.2 Decimos que m es una S -medida de la familia de probabilidades $\{m_k\}_{k \in K}$ (definidas en la σ -álgebra de Borel y sin masa en la frontera) si existe una S -estructura tal que m es la medida que está definida en las cajas $J_{n_1}^1 \times \dots \times J_{n_d}^d$ de la siguiente forma:

- $m(J_{n_1}^1 \times \dots \times J_{n_d}^d) = 0$ si existen k y k' con $n_k \neq n_{k'}$.
- Para B un subconjunto de Borel de $J_{n_1}^1 \times \dots \times J_{n_d}^d$ se tiene que $m(B) = \lambda(J_{n_1}^1) m_{i_n}(f_n(B))$, donde $f_n(x_1, \dots, x_d) = \left(\frac{x_1 - \alpha_{n_1}^1}{\lambda(J_{n_1}^1)}, \dots, \frac{x_d - \alpha_{n_d}^d}{\lambda(J_{n_d}^d)} \right)$ y $i_n \in K$.

Proposición 11.3 Las S -medidas son probabilidades; y si las probabilidades $\{m_k\}_{k \in K}$ son d -estocásticas, entonces las S -medidas asociadas con ellas también lo son.

Demostración. Para una S -medida, la medida total es $\sum_n \lambda(J_n^1) m_{i_n}(f_n(\mathbb{I}^d)) = 1$, por lo que podemos afirmar que es una probabilidad.

En el caso de que las medidas m_k sean doblemente estocásticas. Para $x_1 = 0$, resulta inmediato que $m([0, x_1] \times \mathbb{I}^{d-1}) = 0$; en otro caso:

$$\begin{aligned} m([0, x_1] \times \mathbb{I}^{d-1}) &= \sum_{\substack{J_n^1 \cap [0, x_1] \neq \emptyset \\ x_1 \in J_n^1}} \lambda(J_n^1) m_{i_n}(f_n(J_n^1 \times \dots \times (J_n^d \cap [0, x_1]) \times J_n^2 \times \dots \times J_n^d)) \\ &+ \sum_{\substack{J_n^1 \cap [0, x_1] \neq \emptyset \\ x_1 \notin J_n^1}} \lambda(J_n^1) m_{i_n}(f_n(J_n^1 \times \dots \times J_n^d)). \end{aligned}$$

La segunda de las sumas es igual a la suma de las longitudes de los intervalos cuyos extremos son menores que x_1 ; la primera puede ser vacía, o estar formada por un sumando o por dos.

En el caso de ser vacía, x_1 no pertenecería a ningún I_n ; pero sería un punto de acumulación de la unión de los intervalos de cuya intersección con $[0, x_1]$ es no vacía. Este hecho, unido a que la suma total de longitudes es uno, nos garantiza que $m([0, x_1] \times \mathbb{I}^{d-1}) = x_1$.

Si la suma tiene un término, la primera suma es igual a

$$\alpha_{n(x_1)}^1 = \sup \bigcup_{\substack{J_n^1 \cap [0, x_1] \neq \emptyset \\ x_1 \notin J_n^1}} J_n^1$$

y $x_1 \in J_{n(x_1)}^1 = [\alpha_{n(x_1)}^1, \beta_{n(x_1)}^1]$. Puesto que:

$$\begin{aligned} &(\beta_{n(x_1)}^1 - \alpha_{n(x_1)}^1) m_{i_{n(x_1)}}(f_n((J_n^1 \cap [0, x_1]) \times J_n^2 \times \dots \times J_n^d)) \\ &= (\beta_{n(x_1)}^1 - \alpha_{n(x_1)}^1) m_{i_{n(x_1)}}(f_n([\alpha_{n(x_1)}^1, x_1] \times J_n^2 \times \dots \times J_n^d)) \\ &= (\beta_{n(x_1)}^1 - \alpha_{n(x_1)}^1) m_{i_{n(x_1)}}\left(\left([0, \frac{x_1 - \alpha_{n(x_1)}^1}{\beta_{n(x_1)}^1 - \alpha_{n(x_1)}^1}\right] \times \mathbb{I}^{d-1}\right) \\ &= x_1 - \alpha_{n(x_1)}^1, \end{aligned}$$

si la suma consta de dos sumandos, resulta que x_1 es el extremo final de uno de los intervalos y el inicial de otro. Para el caso del intervalo en el que se trata del punto inicial, el sumando es cero y la situación es similar a cuando hay un único sumando.

Del mismo modo se razonaría para x_2, \dots, x_d . ■

Definición 11.4 Decimos que la cópula C es una S -cópula si su medida asociada μ_C es una S -medida.

Proposición 11.5 Si C es una S -cópula, entonces tiene la expresión:

$$C(x_1, \dots, x_d) = \sum_n \lambda(J_n^1) C_{i_n} \left(T \left(\frac{x_1 - \alpha_n^1}{\lambda(J_n^1)} \right), \dots, T \left(\frac{x_d - \alpha_n^d}{\lambda(J_n^1)} \right) \right),$$

donde T es la función $T(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Ejemplo 11.6 (Los shuffles of Min) Recordamos que un shuffle de M está determinado por un entero positivo n , una partición de \mathbb{I} en n subintervalos cerrados, representados por H_l , una permutación σ de $\{1, 2, \dots, n\}$; y una aplicación $m : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, -1\}$.

Si queremos expresarlo como una S -medida, tomaríamos la S -estructura dada por $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $\{J_l^1\} = \{H_{\sigma(l)}\}$, $\{J_l^2\} = \{H_l\}$, con $K = \{1, 2\}$, $i_n = m(\sigma^{-1}(n))$ y las probabilidades $m_1 = \mu_M$, $m_2 = \mu_W$.

Por simplicidad nos hemos restringido al caso bidimensional, pero no es difícil incluir los shuffles de otras dimensiones introducidos en [117].

Ejemplo 11.7 (Las sumas ordinales) Dada una partición de \mathbb{I} en intervalos cerrados $H_l = [\alpha_l, \beta_l]$ y una colección de cópulas $\{C_l\}$ indizada en el mismo conjunto de índices L que los intervalos. La suma ordinal de $\{C_l\}$ respecto de $\{H_l\}$ está dada por:

$$C(x_1, \dots, x_d) = \begin{cases} \alpha_l + (\beta_l - \alpha_l) C_l \left(\frac{x_1 - \alpha_l}{\beta_l - \alpha_l}, \dots, \frac{x_d - \alpha_l}{\beta_l - \alpha_l} \right), \\ \text{si } (x_1, \dots, x_d) \in H_l \times \dots \times H_l \\ \text{mín } \{(x_1, \dots, x_d)\}, \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para expresar μ_C como una S -medida, tomamos la S -estructura dada por $A = K = L, J_l^j = H_l, \forall l, i(l) = l$, y las medidas $m_l = \mu_{C_l}$. Notemos que si las cópulas C_l no son todas distintas se debería reducir el conjunto K y cambiar i . De modo similar, puede extenderse a una definición más general dada en [121].

11.3. Propiedades de las S -cópulas

Definición 11.8 Sea $S_{J \times d, A, K, i}$ una S -estructura. Asociada con ellos tenemos la función

$$\begin{aligned} S_{J \times d, A, K, i} &: COP^K \rightarrow COP \\ \{C_k\}_{k \in K} &\rightarrow C, \end{aligned}$$

donde la medida μ_C es la S -medida asociada con $S_{J \times d, A, K, i}$ y las medidas μ_{C_k} .

El uso de la misma notación para la S -estructura y la función no debe causar confusión, ya que el contexto en que se utilizan las diferencia sin dificultad.

Teorema 11.9 La aplicación $S_{J \times d, A, K, i}$ (evitaremos los subíndices siempre que sea posible) es uniformemente continua cuando el conjunto de cópulas está dotado de la distancia del supremo (que notaremos) d_1 y en COP^K disponemos de la distancia

$$d^+ (\{C_k\}_{k \in K}, \{C_k^*\}_{k \in K}) = \sup_{k \in K} \left(\sup_{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{I}^d} |C_k(x_1, \dots, x_d) - C_k^*(x_1, \dots, x_d)| \right).$$

Demostración. Consideremos $\{C_k^1\}_{k \in K}$ satisfaciendo que $d^+ (\{C_k\}_{k \in K}, \{C_k^1\}_{k \in K}) < \varepsilon$. Vamos a estudiar

$$d_1 \left(S(\{C_k\}_{k \in K}), S(\{C_k^1\}_{k \in K}) \right).$$

El modo en que se ha definido la S -cópula nos permite asegurar que cuando (x_1, \dots, x_d) no pertenece a ninguna caja $J_n^1 \times \dots \times J_n^d$, se tiene que $S(\{C_k\}_{k \in K})(x_1, \dots, x_d)$ es independiente de $\{C_k\}_{k \in K}$.

Si $(x_1, \dots, x_d) \in J_n^1 \times \dots \times J_n^d$ se tiene que

$$d_1 \left(S(\{C_k\}_{k \in K})(x_1, \dots, x_d), S(\{C_k^1\}_{k \in K})(x_1, \dots, x_d) \right) < \lambda(I_n) \varepsilon,$$

por lo que la función es uniformemente continua. ■

Comentario 11.10 En realidad, hemos demostrado más de lo que se dice en el enunciado, pues se ha obtenido que la aplicación es una contracción con constante igual a la mayor de las longitudes de los intervalos de \mathbb{I} .

Si nos restringimos al caso en que K contiene un único elemento, podemos preguntarnos por cuáles son los puntos fijos de esta aplicaciones.

Para la siguiente proposición es necesario recuperar el concepto de medida autosimilar dada en los Preliminares (o consultar [81]).

Proposición 11.11 El punto fijo de $S'_{J \times d, A, K, i} : COP \rightarrow COP$ es aquella cópula para la que μ_C es la medida que esta asociada con la familia de autosimilaridades $F_n : \mathbb{I}^d \rightarrow J_n^1 \times \dots \times J_n^d$ definida por

$$F_n(x_1, \dots, x_d) = \lambda(I_n)(x_1, \dots, x_d) + (\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^d) \text{ y } p_n = \lambda(I_n).$$

Demostración. Es inmediato, a partir de la definición que se ha hecho de la aplicación. ■

Recordemos que, a partir de d funciones que conservan la medida, se define la cópula

$$C_{g_1, \dots, g_d}(x_1, \dots, x_d) = \lambda(\{t : g_1(t) \leq x_1, \dots, g_d(t) \leq x_d\}),$$

y que, para una cópula C , es posible encontrar d funciones g_1, \dots, g_d , tal que $C = C_{g_1, \dots, g_d}$. El siguiente resultado permite encontrar funciones de este tipo para las S -cópulas, a partir de funciones relacionadas con las cópulas C_k .

Teorema 11.12 *Si para cada una de las cópulas $\{C_k\}_{k \in K}$ conocemos una d -upla de funciones que conservan la medida tal que $C_k = C_{g_1^k, \dots, g_d^k}$.*

Las funciones dadas por

$$g_s(t) = g_s^{i_n} \left(\frac{t - \alpha_n^1}{\beta_n^1 - \alpha_n^1} \right) (\beta_n^1 - \alpha_n^1) + \alpha_n^s \quad \text{si } t \in J_n^{1^\circ}$$

En el conjunto, numerable o finito, de los extremos de los vértices todas las g_s toman el valor cero.

Entonces, las funciones g_s con $s \in \{1, 2, \dots, d\}$ son un ejemplo de funciones que preservan la medida y C_{g_1, \dots, g_d} es la S -cópula C .

Demostración. Es sencillo comprobar que g_s preserva la medida.

Demostraremos que μ_C y $\mu_{C_{g_1, \dots, g_d}}$ son, de hecho, la misma medida en los rectángulos $J_{n_1}^1 \times \dots \times J_{n_d}^d$.

Si existen $n_s \neq n_r$, tenemos que

$$\{t : g_s(t) \in J_{n_s}^s \text{ y } g_k(t) \in J_{n_r}^r\} = \{t : t \in J_{n_s}^{1^\circ} \text{ y } t \in J_{n_r}^{1^\circ}\} = \emptyset,$$

por lo que $\mu_{C_{g_1, \dots, g_d}}(J_{n_1}^1 \times \dots \times J_{n_d}^d) = 0$, que es el mismo valor que $\mu_C(J_{n_1}^1 \times \dots \times J_{n_d}^d)$.

En el caso en que $n_s = n$, $\forall s$, tenemos que

$$\begin{aligned} & \mu_{C_{g_1, \dots, g_d}}((\alpha_n^1, x_1) \times \dots \times (\alpha_n^d, x_d)) \\ &= \lambda(\{t : g_1(t) \in (\alpha_n^1, x_1), \dots, g_d(t) \in (\alpha_n^d, x_d)\}) \\ &= (\beta_n^1 - \alpha_n^1) \lambda \left\{ \left(t : g_1^{i_n}(t) \in \left(0, \frac{x_1 - \alpha_n^1}{\lambda(J_n^1)}\right), \dots, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. g_d^{i_n}(t) \in \left(0, \frac{x_d - \alpha_n^d}{\lambda(J_n^1)}\right) \right) \right\} \\ &= (\beta_n - \alpha_n) \mu_{C_{g_1^{i_n}, \dots, g_d^{i_n}}} \left(\left(0, \frac{x_1 - \alpha_n^1}{\lambda(J_n^1)}\right) \times \dots \times \left(0, \frac{x_d - \alpha_n^d}{\lambda(J_n^1)}\right) \right) \\ &= \mu_C((\alpha_n^1, x_1) \times \dots \times (\alpha_n^d, x_d)). \end{aligned}$$

Si el resultado es cierto para las cajas $((\alpha_n^1, x_1) \times \dots \times (\alpha_n^d, x_d))$, también es cierto para cualquier otra caja incluida en $J_n^1 \times \dots \times J_n^d$, y, gracias al teorema de extensión, lo es para cualquier conjunto de Borel incluido en él.

Al ser cierto en los rectángulos en los conjuntos de Borel de los rectángulos $J_{n_1}^1 \times \dots \times J_{n_d}^d$, lo es en los conjuntos de Borel de \mathbb{I}^d . ■

Hay un caso en el que el resultado anterior no es aplicable. Se trata de los puntos fijos de $S'_{J \times d, A, K, i}$, ya que al ser autosimilares, para aplicar el teorema necesitaríamos conocer la solución. En este caso es posible dar directamente una expresión de unas funciones g_1, \dots, g_d .

Ejemplo 11.13 *Vamos a ilustrarlo con un ejemplo en dos variables. Utilizando la notación introducida en [67] para las cópulas autosimilares, si consideramos la S -cópula dada por la matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a dar un ejemplo de funciones para las que la S -cópula, que llamamos C , correspondiente a la matriz anterior es C_{fg} .

Como función f tomamos la identidad y como g aquella que a un número con representación en base tres $x = \sum_n \frac{a_n}{3^n}$ le hace corresponder $g(x) = \sum_n \frac{b_n}{3^n}$, tal que cuando $a_n = 0$, entonces $b_n = 0$, si $a_n = 1$, entonces $b_n = 2$, y si $a_n = 2$, entonces $b_n = 1$.

Hay un conjunto numerable en el que la función no está bien definida; para los elementos de ese conjunto hacemos $g(x) = 0$. Esto no tiene influencia, pues al ser numerable es de medida nula.

Para demostrarlo, haremos uso de un sistema de ecuaciones funcionales. Sea $h(x) = v_g([0, x]) = \lambda \{t : g(t) \leq x\}$. Esta función cumple que $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$ y las ecuaciones funcionales son

$$\begin{cases} h(\frac{t}{3}) = \frac{h(t)}{3} \\ h(\frac{1+t}{3}) = \frac{1+h(t)}{3} \\ h(\frac{2+t}{3}) = \frac{2+h(t)}{3} \end{cases} \quad (11.1)$$

Representamos por (X, d^*) el espacio métrico donde X es el conjunto de las funciones acotadas para las que se tiene que $s(0) = 0$ y $s(1) = 1$ y d^* la distancia del supremo. Se trata de un espacio métrico completo. Definimos el funcional $B : (X, d^*) \rightarrow (X, d^*)$ que sobre la función k actúa del siguiente modo:

$$B(k)(t) = \begin{cases} \frac{k(3t)}{3} \\ \frac{1+k(3t-1)}{3} \\ \frac{2+k(3t-2)}{3} \end{cases}$$

Este funcional es una contracción en (X, d^*) , por lo que tiene un único punto fijo. Las ecuaciones funcionales (11.1) garantizan que $B(h) = h$; y, por otra parte, la identidad $i(x) = x$ también satisface $B(i) = i$. Por tanto, $h(x) = x$ y g preserva la medida de Lebesgue.

Resta demostrar que $C_{f,g}$ es la S-cópula anterior. Es sencillo comprobar que g verifica las ecuaciones funcionales

$$\begin{cases} g(\frac{t}{3}) = \frac{g(t)}{3} \\ g(\frac{1+t}{3}) = \frac{2+g(t)}{3} \\ g(\frac{2+t}{3}) = \frac{1+g(t)}{3} \end{cases}$$

Sean $x, y \leq 1/3$. Gracias a la primera de las ecuaciones, podemos escribir

$$\begin{aligned} C_{f,g}(x, y) &= \lambda \{t : f(t) \leq x \text{ y } g(t) \leq y\} \\ &= \frac{1}{3} \lambda \{t : f(t) \leq 3x \text{ y } g(t) \leq 3y\} \\ &= \frac{1}{3} C_{f,g}(3x, 3y). \end{aligned}$$

Este resultado podemos escribirlo como

$$\mu_{C_{f,g}}([0, x] \times [0, y]) = \frac{1}{3} \mu_{C_{f,g}}([0, 3x] \times [0, 3y])$$

cuando $[0, x] \times [0, y] \subseteq \mathbb{I}^2$.

Del mismo modo, gracias a las otras dos ecuaciones, es posible demostrar que

$$\mu_{C_{f,g}}([1/3, x] \times [2/3, y]) = \frac{1}{3} \mu_{C_{f,g}}([0, 3x-1] \times [0, 3y-2])$$

cuando $[1/3, x] \times [2/3, y] \subseteq [1/3, 2/3] \times [2/3, 1]$ y

$$\mu_{C_{f,g}}([2/3, x] \times [1/3, y]) = \frac{1}{3} \mu_{C_{f,g}}([0, 3x-2] \times [0, 3y-1])$$

cuando $[2/3, x] \times [1/3, y] \subseteq [2/3, 1] \times [1/3, 2/3]$. Estos resultados conducen a la autosimilaridad de la medida $\mu_{C_{f,g}}$ y por tanto a demostrar que $C = C_{f,g}$.

Para generalizar este caso particular hemos de introducir una forma de representación de los números reales conocida como serie de Luroth generalizada. Para ver un estudio de estas series puede consultarse [40, pág.41].

Teorema 11.14 (Serie de Luroth generalizada) Dado un conjunto de intervalos disjuntos (l_n, r_n) tales que $\sum_n r_n - l_n = 1$, se tiene que todo número real (salvo un conjunto numerable) de \mathbb{I} , admite una única expresión de la forma

$$x = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_k}{s_1 s_2 \dots s_k}$$

con $(h_k, s_k) \in \left\{ \left(\frac{l_n}{r_n - l_n}, \frac{1}{r_n - l_n} \right) \right\}$; y toda serie de esa forma converge a un elemento de \mathbb{I} .

Teorema 11.15 Si C es una $S_{J \times d}$ -cópula autosimilar. Dado un número x de \mathbb{I} con expresión $x = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_k^1}{s_1^1 s_2^1 \dots s_k^1}$ asociada con la partición I .

Definimos $g_r(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_k^r}{s_1^r s_2^r \dots s_k^r}$ donde $(h_k^r, s_k^r) = \left(\frac{\alpha_n^r}{\beta_n^r - \alpha_n^r}, \frac{1}{\beta_n^r - \alpha_n^r} \right)$ cuando $(h_k^1, s_k^1) = \left(\frac{\alpha_n^1}{\beta_n^1 - \alpha_n^1}, \frac{1}{\beta_n^1 - \alpha_n^1} \right)$.

Entonces la cópula C es igual a C_{g_1, \dots, g_d} .

Demostración. Sigue como en el caso de la S -cópula autosimilar anterior. ■

Teorema 11.16 Podemos expresar los momentos $M_{s_1, \dots, s_d, C}$ de $C = S(\{C_k\}_{k \in K})$ en función de las distintas C_k mediante la expresión

$$\sum_n \lambda(J_n^1) \sum_{s_1=0}^{m_1} \dots \sum_{s_d=0}^{m_d} \binom{m_1}{s_1} \dots \binom{m_d}{s_d} \lambda(J_n^1)^{s_1 + \dots + s_d} (\alpha_k^1)^{m_1 - s_1} \dots (\alpha_k^d)^{m_d - s_d} M_{s_1, \dots, s_d, C_{i_k}}$$

Demostración. Haciendo cálculos a partir de las definiciones:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{I}^d} x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} d\mu_C = \sum_n \int_{J_n^1 \times \dots \times J_n^d} x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} d\mu_C \\ &= \sum_n \lambda(J_n^1) \int_{\mathbb{I}^d} (\lambda(J_n^1) x_1 + \alpha_n^1)^{m_1} \dots (\lambda(J_n^1) x_d + \alpha_n^d)^{m_d} d\mu_{C_{i_n}} \\ &= \sum_n \lambda(J_n^1) \int_{\mathbb{I}^d} \sum_{s_1=0}^{m_1} \binom{m_1}{s_1} (\alpha_k^1)^{m_1 - s_1} \lambda(J_n^1)^{s_1} x_1^{s_1} \dots \\ & \quad \dots \sum_{s_d=0}^{m_d} \binom{m_d}{s_d} (\alpha_k^d)^{m_d - s_d} \lambda(J_n^1)^{s_d} x_d^{s_d} d\mu_{C_{i_k}} \\ &= \sum_n \lambda(J_n^1) \sum_{s_1=0}^{m_1} \dots \sum_{s_d=0}^{m_d} \binom{m_1}{s_1} \dots \binom{m_d}{s_d} \lambda(J_n^1)^{s_1 + \dots + s_d} (\alpha_k^1)^{m_1 - s_1} \dots \\ & \quad \dots (\alpha_k^d)^{m_d - s_d} \int_{\mathbb{I}^d} x_1^{s_1} \dots x_d^{s_d} d\mu_{C_{i_k}}, \end{aligned}$$

que es el resultado buscado. ■

Definición 11.17 Si C_1 y C_2 son cópulas, decimos que C_1 es menor que C_2 , y escribimos $C_1 \prec C_2$, si $C_1(x_1, \dots, x_d) \leq C_2(x_1, \dots, x_d)$ para todo $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{I}^d$.

Proposición 11.18 Si tenemos una S -estructura y dos subconjuntos de los conjuntos de cópulas $\{C_k\}_{k \in K}$ y $\{C'_k\}_{k \in K}$ tales que $C_k \prec C'_k$ para todo k entonces $S(\{C_k\}_{k \in K}) \prec S(\{C'_k\}_{k \in K})$.

Demostración. Las cópulas $S(\{C_k\}_{k \in K})$ y $S(\{C'_k\}_{k \in K})$ toman los mismos valores cuando (x_1, \dots, x_d) no pertenece a ninguna caja $J_n^1 \times \dots \times J_n^d$. También ocurre que

$$S(\{C_k\}_{k \in K})(\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^d) = S(\{C'_k\}_{k \in K})(\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^d).$$

Cuando $(x_1, \dots, x_d) \in J_n^1 \times \dots \times J_n^d$ se tiene

$$\begin{aligned} & S(\{C_k\}_{k \in K})(x_1, \dots, x_d) \\ &= S(\{C_k\}_{k \in K})(\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^d) + C_{i_n} \left(\frac{x_1 - \alpha_n^1}{\beta_n^1 - \alpha_n^1}, \dots, \frac{x_d - \alpha_n^d}{\beta_n^1 - \alpha_n^1} \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & S(\{C'_k\}_{k \in K})(x, y) \\ &= S(\{C'_k\}_{k \in K})(\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^d) + C'_{i_n} \left(\frac{x_1 - \alpha_n^1}{\beta_n^1 - \alpha_n^1}, \dots, \frac{x_d - \alpha_n^d}{\beta_n^1 - \alpha_n^1} \right). \end{aligned}$$

Puesto que $C_{i_n} \left(\frac{x_1 - \alpha_n^1}{\beta_n^1 - \alpha_n^1}, \dots, \frac{x_d - \alpha_n^d}{\beta_n^1 - \alpha_n^1} \right) \leq C'_{i_n} \left(\frac{x_1 - \alpha_n^1}{\beta_n^1 - \alpha_n^1}, \dots, \frac{x_d - \alpha_n^d}{\beta_n^1 - \alpha_n^1} \right)$, tenemos que $S(\{C_k\}_{k \in K}) \prec S(\{C'_k\}_{k \in K})$. ■

11.4. Aproximación

Posiblemente, la propiedad más destacada de los shuffles de Min es que son densos en el conjunto de las cópulas. Vamos a estudiar si esta propiedad se mantiene para S-cópulas.

Es conocido que, en el conjunto de las cópulas, la convergencia puntual implica la convergencia uniforme, por lo que para demostrar que una sucesión de cópulas converge uniformemente a otra es suficiente demostrar que lo hace puntualmente. Para estudiar la convergencia puntual utilizamos el lema que se da más abajo.

Previamente, es necesario recordar que para un espacio métrico en el que se ha definido una probabilidad P , en el σ -álgebra de Borel decimos que un conjunto A es P -continuo si $P(\partial A) = 0$ (recordamos que ∂A es la frontera de A). Si P es una medida doblemente estocástica, entonces la P -medida de los lados de un cuadrado de lados paralelos a los ejes es cero.

Lema 11.19 *Si para toda función continua f , la sucesión $\int_{\mathbb{I}^d} f(x_1, \dots, x_d) d\mu_{C_n}$ converge a $\int_{\mathbb{I}^d} f(x_1, \dots, x_d) d\mu_C$, entonces la sucesión de cópulas $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ converge puntualmente a C .*

Demostración. En [28, pág. 12] encontramos que si $\int_{\mathbb{I}^d} f(x_1, \dots, x_d) d\mu_{C_n}$ converge a $\int_{\mathbb{I}^d} f(x_1, \dots, x_d) d\mu_C$, para las funciones continuas, entonces

$$\begin{aligned} C_n(x_1, \dots, x_d) &= \mu_{C_n}([0, x_1] \times \dots \times [0, x_d]) \\ &\rightarrow \mu_C([0, x_1] \times \dots \times [0, x_d]) = C(x_1, \dots, x_d). \end{aligned}$$

■

Teorema 11.20 *Dada una cópula C , la familia de sus S-cópulas es densa en el conjunto de las cópulas, dotado con la norma del supremo.*

Demostración. Dado un número p , dividimos \mathbb{I} en p intervalos de la forma $\left[\frac{a}{p}, \frac{a+1}{p}\right]$ con $a \in \{0, 1, \dots, p-1\}$; e \mathbb{I}^d en p^d cajas, de la forma $\prod_{j=0}^{d-1} \left[\frac{a_j}{p}, \frac{a_j+1}{p}\right]$, donde $a_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. A $\prod_{j=0}^{d-1} \left[\frac{a_j}{p}, \frac{a_j+1}{p}\right]$ lo notamos por B_m^p , con

$$m = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_{d-1}p^{d-1} \in \{0, 1, \dots, p^d - 1\}.$$

Dividimos cada intervalo de la forma $\left[\frac{a}{p}, \frac{a+1}{p}\right]$ en p subintervalos de interiores disjuntos de longitud total $\frac{1}{p}$. En cada eje se trabajará de un modo diferente.

En el eje OX_j : Si $a = a'_0 + a'_1p + a'_2p^2 + \dots + a'_{d-1}p^{d-1}$ definimos por $S_{a,j}$ al conjunto

$$\left\{ m : \begin{array}{l} m = a_0 + a_1p + \dots + a_{j-1}p^{j-1} + a'_j p^j + a_{j+1}p^{j+1} + \dots + a_{d-1}p^{d-1} \\ a_s \in \{0, 1, \dots, p-1\} \text{ y } j \neq s \end{array} \right\}.$$

Cada elemento m de $S_{a,j}$ tiene asociado un intervalo J_m^j de longitud $\mu_C(B_m^p)$ (los intervalos pueden ser degenerados). Esto se hace de modo que si $m_1 \in S_{a_1,j}$ y $m_2 \in S_{a_2,j}$ entonces el extremo superior de $J_{m_1}^j$ es menor o igual que el inferior de $J_{m_2}^j$. Lo mismo ocurre si $m_1, m_2 \in S_{a,j}$ y $m_1 < m_2$. Obtenemos una descomposición (asociada con el eje OX_j) de \mathbb{I} en p^2 intervalos que están numerados; y la longitud de J_m^j es $\mu_C(B_m^p)$ (independiente de j).

Las divisiones J^j , con $A = \{0, 1, \dots, p^2 - 1\}$, $K = \{1\}$, e i la única aplicación posible de A en K , nos dan una S-estructura. Si alguna de las longitudes es nula, esos intervalos han de eliminarse y el conjunto de índices cambiar.

La S-cópula asociada cumple que para la medida asociada:

$$\mu_{C_p}(B_m^p) = \mu_C(B_m^p).$$

Consideremos una función f continua en \mathbb{I}^d . Al ser \mathbb{I}^d un compacto, la función es uniformemente continua. Dado un real $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo q , de modo que para $p > q$, si se tiene que $(x_1, \dots, x_d), (x'_1, \dots, x'_d) \in B_m^p$ entonces

$$|f(x_1, \dots, x_d) - f(x'_1, \dots, x'_d)| < \varepsilon.$$

Aplicando lo anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \sum_r \min \{f(x_1, \dots, x_d) : (x_1, \dots, x_d) \in B_m^p\} \mu_C(B_m^p) \\
& \leq \int_{\mathbb{I}^d} f(x_1, \dots, x_d) d\mu_{C_p} \\
& \leq \sum_r \max \{f(x_1, \dots, x_d) : (x_1, \dots, x_d) \in B_m^p\} \mu_C(B_m^p) \\
& \leq \sum_r \min \{f(x_1, \dots, x_d) : (x_1, \dots, x_d) \in B_m^p\} \mu_C(B_m^p) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Puesto que $\mu_{C_p}(B_m^p) = \mu_C(B_m^p)$, las desigualdades siguen siendo ciertas para $\int_{\mathbb{I}^d} f(x_1, \dots, x_d) d\mu_C$, por lo que tenemos que

$$\left| \int_{\mathbb{I}^d} f(x_1, \dots, x_d) d\mu_C - \int_{\mathbb{I}^d} f(x_1, \dots, x_d) d\mu_{C_p} \right| < \varepsilon$$

cuando $p > q$.

Este resultado, junto al lema anterior, nos conduce a que las cópulas C_p convergen puntualmente y, por tanto, uniformemente a C . ■

Este resultado no es cierto cuando el conjunto de cópulas esta dotado de otras topologías que también puedan ser de interés. Por ejemplo, consideremos el conjunto de las medidas signadas en \mathbb{I}^d (con la σ -álgebra de Borel), esto es, funciones de \mathcal{B} en \mathbb{R} tales que $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ para todo $E \in \mathcal{B}$ y toda partición $\{E_i\}$ de E . A este conjunto lo representamos por \mathcal{MS} . Para cada $\mu \in \mathcal{MS}$, su variación total es

$$\|\mu\|(\mathbb{I}^d) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

donde el supremo está tomado en las particiones de \mathbb{I}^d . Para la suma y el producto por escalares definidos en la forma usual, se tiene que \mathcal{MS} es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y $\|\cdot\|$ es una norma que lo convierte en un espacio de Banach. En este espacio $\mu_n \rightarrow \mu$ si, y sólo si, $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ para todo subconjunto de Borel.

Podemos restringirnos al espacio de las probabilidades d -estocásticas y dotarlo de estructura de espacio métrico. Gracias a la biyección entre estas medidas y las cópulas, es posible definir una nueva distancia y, por tanto, una topología en el conjunto de cópulas.

Proposición 11.21 *Con la topología anterior las S -cópulas de cualquier familia $\{C_k\}$ no son densas en el conjunto de las cópulas.*

Demostración. Vamos a construir una cópula que no pueda ser límite de ninguna sucesión de S -cópulas asociadas con la familia $\{C_k\}$.

Tomamos una cópula D absolutamente continua, con $0 < a \leq \frac{\partial D}{\partial x \partial y}$, que sea distinta de todas las C_i .

Sea C una cópula para la que existe una familia de cópulas $\{C_k\}$ y una sucesión (S_n) de S -cópulas convergentes a C . Las longitudes de los intervalos de la S -estructura asociada con S_n serán $\{\lambda(J_{n,m}^1)\}$.

a) Si $\limsup_n \left(\sup_m \lambda(J_{n,m}) \right) = 1$, tenemos que C es una de las cópulas C_k . Por tanto, en estas condiciones D no es límite de ninguna sucesión de S -cópulas asociadas con $\{C_k\}$.

b) Si $\limsup_n \left(\sup_m \lambda(J_{n,m}^1) \right) < r < 1$, es posible encontrar un conjunto de medida $r^{d-1}(1-r)$ verificando que su μ_{S_n} -medida es nula, lo que implica que la distancia entre S_n (para el valor elegido) y C es mayor o igual $r^{d-1}(1-r)a$ y concluimos que $C \neq D$. ■

Como consecuencia del método utilizado en la demostración, podemos enunciar el siguiente resultado.

Corolario 11.22 *Si la cópula independiente Π no pertenece a $\{C_k\}$, dada una sucesión (S_n) de S -cópulas convergentes a Π con la norma del supremo, es posible encontrar $B \in \mathcal{B}(\mathbb{I}^d)$ para el que $\mu_{S_n}(B)$ no converge a $\mu(B)$.*

Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. & Stegun, I.: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, **55**, Washington, D.C. 19
- [2] Alsina, C.; Frank, M.J.; Schweizer, B.: *Associative functions: triangular norms and copulas*. 1 ed. Singapur. 2006
- [3] Alsina, C.; Nelsen, R. B.; and Schweizer, B.: *On the characterization of a class of binary operations on distribution functions*, Statist. Probab. Lett. **17** (1993) 85-89
- [4] de Amo, E.; Bhouri, I. and Fernández-Sánchez, J.: *The Hausdorff dimension of Takagi's function level sets*. Aceptado condicionalmente en Monats. für Maths.
- [5] de Amo, E. and Fernández-Sánchez, J.: *A Generalised Dyadic Representation System*, Int. J. Pure Appl. Math. **52** (1) (2009) 49-66
- [6] de Amo, E. and Fernández-Sánchez, J.: *Takagi's Function Revisited from an Arithmetical Point of View*, Int. J. Pure Appl. Math. **54** (3) (2009) 407-427
- [7] de Amo, E. and Fernández-Sánchez, J.: *An explicit expression for k -negations*, Actas del XV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. ESTYLF'2010. Huelva, 3-5 de febrero de 2010, pp. 139-144 ISBN: 978-84-92944-02-6
- [8] de Amo, E. and J. Fernández-Sánchez.: *Peculiar functions built with the aid of the Cantor's function*, Int. J. Math. Stat. Special Volume **7** (2010), No. W10, 54-59 (también en 1st Hispano-Morrocain Days in Applied Mathematics and Statistics, Tetouan, 2008. pp. 209-214. ISBN 978-84-691-7936-9)
- [9] de Amo, E.; Díaz Carrillo, M. and Fernández-Sánchez, J.: *Measure-Preserving Functions and the Independence Copula*. Aparecerá en Mediterr. J. Math., en 2011
- [10] de Amo, E.; Díaz Carrillo, M. and Fernández-Sánchez, J.: *Singular Functions with Applications to Fractals and Generalised Takagi's Functions*, sometido a publicación.
- [11] de Amo E., Díaz Carrillo, M. Fernández-Sánchez, J.: *Another proof of Euler's formula for $\zeta(2n)$* . Aparecerá en Proc. Amer. Math. Soc.
- [12] de Amo E., Díaz Carrillo, M. Fernández-Sánchez, J.: *A study of a generalized Salem's function*, sometido a publicación.
- [13] de Amo E., Díaz Carrillo, M. Fernández-Sánchez, J.: *On measures of concordance and copulas with fractal support*. Aparecerá en Advances in Intelligent and Soft Computing.
- [14] Apostol, T.M.: *Another elementary proof of Euler's formula for $\zeta(2n)$* , Amer. Math. Monthly **80** (1973) 425-431
- [15] Ayoub, R: *Euler and the Zeta Function*, Amer. Math. Monthly **81** (1974) 1067-1086
- [16] Baba,Y.: *On maxima of Takagi-van der Waerden functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984) 373-376
- [17] Baek, I.S.: *A Note on the moments of the Riesz-Nagy-Takcs distribution*, J. Math. Anal. Appl. **348** (2008) 165-168

- [18] de Baets, B. and de Meyer, H.: *Orthogonal grid constructions of copulas*, IEEE Trans. Fuzzy Systems **15** (6) (2007) 1053-1062
- [19] de Baets, B.; de Meyer, H.; and Mesiar, R.: *Asymmetric semilinear copulas*, Kybernetika **43** (2) (2007) 221-233
- [20] Barnsley, M.: *Fractal Functions and Interpolation*, Constr. Approx. **2** (1986) 303-329
- [21] Barnsley, M.: *Fractals Everywhere*. Academic Press, Inc., 1988
- [22] Bedford, T.: *The box dimension of self-affine graphs and repellers*, Nonlinearity **2** (1989) 53-71
- [23] Bernstein, B.; Erber, T.; and Karamolengos, M.: *Sneaky plasticity and mesoscopic fractals*, Chaos, Solitons & Fractals **3** (1993) 269-277
- [24] Berg, L. and Kruppel, M.: *De Rham's singular function and related functions*, Z. Anal. Anwendungen **19** (1) (2000) 227-237
- [25] Besicovitch, A.: *On the sum of the digits of real numbers represented in the dyadic system*, Math. Ann. **110** (1934) 321-330
- [26] Billingsley, P.: *Hausdorff dimension in probability theory*, Illinois J. Math. **4** (1960) 187-209
- [27] Billingsley, P.: *Ergodic theory and information*, John Wiley & Sons Inc., New York-London-Sydney, 1965
- [28] Billingsley, P.: *Convergence of Probability Measures*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1968
- [29] Billingsley, P.: *Van der Waerden's continuous nowhere differentiable*, Amer. Math. Monthly **89** (1982) 691
- [30] Billingsley, P.: *Probability and measure* (3rd ed.), Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1995
- [31] du Bois-Reymond, P.: *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in des kleinsten Intervallen*, J. Reine Angew Math. **79** (1875) 21-37
- [32] Cantor, G.: *De la puissance des ensembles parfait de points*, Acta Math. **4** (1884) 381-392
- [33] Carley, H. and Taylor, M.D.: *A new proof of Sklar's theorem*, Proceedings of the Conference on Distributions with Given Marginals and Statistical Modelling (Barcelona, 2000), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002) 29-34
- [34] Carley, H.: *Maximum and minimum extensions of finite sub-copulas*, Commun. Stat. Theory Meth. **31** (12) (2002) 2151-2166
- [35] Cater, F.S.: *On Van der Waerden's nowhere differentiable function*, Amer. Math. Monthly **91** (1984) 307-308
- [36] Cater, F.S.: *Remark on a function without unilateral derivatives*, J. Math. Anal. Appl. **198** (1994) 718-721
- [37] Cellérier, M.Ch.: *Note sur les principes fondamentaux de l'analyse*, Darboux Bull. **14** (1890) 142-160
- [38] Chapman, R.: *Evaluating $\zeta(2)$* , Preprint, <http://www.maths.ex.ac.uk/~rjc/etc/zeta2.pdf>
- [39] Cilleruelo, J. y Córdoba, A.: *La teoría de los números*, Mondadori, Madrid, 1992
- [40] Dajani, K. and Kraaikamp, C.: *Ergodic Theory of Numbers*, The Mathematical Association of America Monographs **29**, Washington, 2002
- [41] Dalrymple, K.; Strichartz, R.; and Vinson, J.: *Fractal differential equations on the Sierpiński gasket*, J. Fourier Anal. Appl. **5** (1999) 203-284
- [42] Deheuvels, P.: *Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **23** (1978) 1-37
- [43] Delange, H.: *Sur la fonction sommatorie "somme des chiffres"*, Enseign. Math. **21** (2) (1975) 31-47

- [44] Demir, B.; Dzhafarov, V.; Koçak, Ş.; and Üreyen, M.: *A Fractal Example of a Continuous Monotone Function with Vanishing Derivatives on a Dense Set and Infinite Derivatives on Another Dense Set*, Turk. J. Math. **30** (2006) 211-220
- [45] Demir, B.; Dzhafarov V.; Koçak, Ş.; and Üreyen, M.: *Derivatives of the restrictions of harmonic functions on the Sierpiński Gasket to segments*, J. of Math. Anal. and Appl. **333** (2) (2007) 817-822
- [46] Denjoy, A.: *Sur une fonction de Minkowski*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932) 44-46
- [47] Durante, F. and Fernández-Sánchez, J.: *On the classes of copulas and quasi-copulas with a given diagonal section*, sometido a publicación.
- [48] Durante, F. and Jaworski, P.: *Absolutely continuous copulas with given diagonal sections*, Comm. Statist. Theory Methods **37** (18) (2008) 2924-2942
- [49] Durante, F.; Klement, E.P.; Quesada-Molina, J.J.; and Sarkoci, P.: *Remarks on two product-like constructions for copulas*, Kybernetika (Prague) **43** (2007) 235-244
- [50] Durante, F.; Kolesárová, A.; Mesiar, R. and Sempi, C.: *Copulas with given diagonal sections: novel constructions and applications*, Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems **15** (4) (2007) 397-410
- [51] Durante, F.; Mesiar, R.; Papini, P.L.; and Sempi, C.: *2-increasing binary aggregation operators*, Inform. Sci. **177** (1) (2007) 111-129
- [52] Durante, F.; Mesiar, R.; and Sempi, C.: *Copulas with given diagonal section: some new results*, in *Proceedings of EUSFLAT-LFA Conference*, E. Montseny and P. Sobrevilla, Eds. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya, 2005, 932-936
- [53] Durante, F.; Mesiar, R.; and Sempi, C.: *On a family of copulas constructed from the diagonal section*. Soft Computing, **10** (6) (2006) 490-494.
- [54] Durante, F.; Saminger, S.; and Sarkoci, P.: *Rectangular patchwork for bivariate copulas and tail dependence*, Comm. Statist. Theory and Methods **38** (2009) 2515-2527
- [55] Durante, F.; Sarkoci, P.; and Sempi, C.: *Shuffles of copulas*, J. Math. Anal. Appl. **352** (2009) 914-921
- [56] Durante, F. and Sempi, C.: *Semicopulae*, Kybernetika (Prague), **41** (3) (2005) 315-328
- [57] Durante, F.; and Sempi, C.: *Copula theory: an introduction*, (In F. Durante, W. Härdle, P. Jaworki, and T. Rychlik, eds.) Workshop on Copula Theory and its Applications, Lecture Notes in Statistics - Proceedings, Springer, Dordrecht (NL), 2010
- [58] Eggleston, H.G.: *The fractional dimension of a set defined by decimal properties*, Quart. J. Math. Oxford Ser **20** (1949) 31-36
- [59] Eilenberg, S.: Automata, Languages and Machines (Vol A), Academic Press, New York, 1974
- [60] Elliott, P.D.T.A. Probabilistic Number Theory I: Mean-Value Theorems, II: Central Limit Theorems, Grundlehren der math. Wiss. 239, 240, Springer Verlag, Berlin, New York, 1979.
- [61] Estermann, T.: *Elementary Evaluation of $\zeta(2n)$* , J. London Math. Soc. **22** (1947) 10-13
- [62] Falconer, K.J.: Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications (2nd ed.), John Wiley, 2003
- [63] Falconer, K.: Techniques in Fractal Geometry, Wiley, 1997
- [64] Feller, W.: Introduction to Probability Theory and Its Applications (3rd ed), John Wiley & Sons, New York, 1968
- [65] Fraile, A.; Mayor, G.; and Monserrat, M.: *k-negations*, Actes del IV Congrés Català de Lògica, Barcelona (1985) 67-68
- [66] Fredricks, G.A.; and Nelsen, R.B.: *Copulas constructed from diagonal sections*, In V. Beneš and J. Štěpán, editors, Distributions with given marginals and moment problems (Prague, 1996), pages 129-136. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997

- [67] Fredricks, G.A; Nelsen, R.B.; and Rodríguez-Lallena, J.A.: *Copulas with fractal supports*, Insurance Math. Econom. **37** (1) (2005) 42-48
- [68] Galambos, J.: *Representations of real numbers by infinite series*, Springer, Berlin, 1976
- [69] Gel'fond, A.O.: *A common property of number systems* . Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. **23** (1959) 809-814
- [70] Genest, C.; Quesada-Molina, J. J.; Rodríguez-Lallena, J. A. and Sempí. C.: *A characterization of quasi-copulas*, J. Multivariate Anal, **69** (2) (1999) 193-205
- [71] Gutiérrez, R.; Juan, A.; and Herrera, F.: *Probabilidad*. Ediciones Proyecto Sur de Ediciones, 2002
- [72] Hájek, P.: *Mathematical of Fuzzy Logic*, Kluwer, Dordrecht, 1998
- [73] Halmos, P.R.: *Ergodic Theory*, Chelsea, New York, 1956
- [74] Hardy, G. H. and Wright, E. M.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed. Oxford, England: Clarendon Press, 1979.
- [75] Hata, M.: *Topological aspects of selfsimilar sets and singular functions*, Fractal Geometry and Analysis (J. Bélais and S. Dubuc, Eds.) Kluwer Acad. Publ. 1991, 255-276
- [76] Hata, M. and Yamaguti, M.: *The Takagi function and its generalization*, Japan J. Appl. Math. **1** (1984) 183-199
- [77] Stahl, H. and Totik, V.: *General orthogonal polynomials*, 43 Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [78] Hewitt, E. and Stromberg, K.R.: *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, 1965, New York
- [79] Hille, E.; and Tamarkin, J.D.: *Remarks on a known example of a monotone continuous function*, Amer. Math. Monthly **36** (5) (1929) 255-264
- [80] Hofbauer, J. A.: *Simple proof of $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ and related identities*, Amer. Math. Monthly **109** (2) (2002) 196-200
- [81] Hutchinson, J. E.: *Fractals and self similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981) 713-74
- [82] James, D. H.: *A simple proof of $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$* , Amer. Math. Monthly **109** (6) (2003) 540-541
- [83] James, R.C.: *Bases in Banach Spaces*, Amer. Math. Monthly **89** (9) (1982) 625-640
- [84] Jarník, V.: *On Bolzano's functions*, Časopis Pěst. Mat. **51** (1922) 248-266
- [85] Jaworski, P.: *On copulas and their diagonals*, Inform. Sci. **179** (17) (2009) 2863-2871
- [86] Jaworski, P. and Rychlik, T.: *On distributions of order statistics for absolutely continuous copulas with applications to reliability*, Kybernetika (Prague) **44** (6) (2008) 757-776
- [87] Jessen, B. and Wintner, A.: *Distribution functions and the Riemann zeta-function*. Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935) 48-88
- [88] Joe, H.: *Multivariate models and dependence concepts*, volume 73 of Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman & Hall, London, 1997
- [89] Jordan, Ch.: *Calculus of finite differences*. (3rd Ed, Introduction by H.C. Carver) Chelsea Publishing Co., New York, 1965
- [90] Kairies, H.H.: *Functional equations for peculiar functions*, Aequ. Math. **53** (1997) 207-241
- [91] Kamae, T.: *A characterization of self-affine functions*, Japan J. Appl. Math. **3** 271-280 (1986)
- [92] van Kampen, E.R.; and Wintner, A.: *On a singular monotone function*, Amer. J. Maths. **12** (1937) 243-244
- [93] Kannan, R.; and Krueger, C.K.: *Advanced Analysis on the Real Line*, Springer-Verlag, New York, 1996
- [94] Kharazishvili, A. B.: *Strange Functions in Real Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 2000

- [95] Kigami, J.: *Harmonic calculus on p.c.f self-similar sets*, Trans.Amer. Math. Soc. **335** (1993) 721-755
- [96] Kigami, J.: *Effective resistance for harmonic structures on p.c.f. self-similar sets*, Math. Proc.Cambridge Philos. Soc. **115** (2) (1994) 291-303
- [97] Kigami, J.: *Analysis on fractals*. Cambridge Tracts in Mathematics vol 143, Cambridge University Press, 2001
- [98] Klement, E.P.; and Kolesárová, A.: *Intervals of 1-Lipschitz aggregation operators, quasi-copulas, and copulas with given affine section*, Monatsh. Math, **152** (2) (2007) 151-167
- [99] Klement, E.P.; Kolesárová, A.; Mesiar, R; and Sempi, C.: *Copulas constructed from the horizontal section*, Comm. Statist. Theory Methods **36** (2007) 2901-2911
- [100] Kline, M.: *Euler and infinite series*, Math. Mag. **56** (5) (1983) 307-314
- [101] Knuth, D. E.: *The Art of Computer Programming*, **4**, fasc. 3. Pearson Education, Upper Saddle River (2005)
- [102] Kolesárová, A.; Mesiar, R; and Sempi, C.: *Measure-preserving transformations, copula and compatibility*, Mediterr. J. Math. **5** (2008) 325-339
- [103] Kôno, N.: *On self-affine functions*, Japan J. Appl. Math. **3** (1986) 259-269
- [104] Kôno, N.: *On self-affine functions II*, Japan J Appl Math **5** (1988) 441-454
- [105] Korobov, N.M.: *Exponential sums and their applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992
- [106] Lad, F.R.; and Taylor, W.F.C.: *The moments of the Cantor distribution*, Statist.Probab.Lett. (1992) 307-210
- [107] Lebesgue, H.: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904
- [108] Loève, M.: *Teoría de la Probabilidad*, Tecnos, 1976
- [109] Lomnicki, Z.; and Ulam, S.: *Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités I. Variables indépendantes*, Fund. Math. **23** (1934) 237-278
- [110] Maddock, Z.: *Properties of the Takagi Function*, internet-Preprint, 2006
- [111] Maddock, Z.: *Level sets of the Takagi function: Hausdorff dimension*, Monats. für Maths. (2009)
- [112] Marshall, A.W.; and Olkin, I.: *Inequalities: theory of majorization and its applications*, ser. Mathematics in Science and Engineering. New York: Academic Press Inc., 1979
- [113] Mayor,G. and Torrens, J.: *Duality for binary operations*, Fuzzy Sets and Systems **47** (1992) 77-80
- [114] Mayor, G.; Mesiar, R.; and Torrens, J.: *On quasi-homogeneous copulas*, Kybernetika **44** (6) (2008) 745-756
- [115] McMullen, C.: *The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets*, Nagoya Math. J. **96** (1984) 1-9
- [116] Mikusinski, P.; Sherwood, H.; and Taylor, M.D.: *Shuffles of Min*, Stochastica **12** (1992) 61-72
- [117] Mikusinski, P.; and Taylor, M.D.: *Some approximations of n-copulas*, Metrika (2009), en prensa
- [118] Minkowski, H.: *Verhandlungen des III internationalen mathematiker-kongresses en Heidelberg,1904; también en Gesammelte Abhandlungen*, 1991, vol 2, 50-51
- [119] Moore, D. S. and Spruill, M. C.: *Unified large-sample theory of general chi-squared statistics for tests of fit*. Ann. Statist. **3** (1975) 599-616
- [120] Mordell, L.: *The sign of the Bernoulli numbers*, Amer. Math. Monthly **80** (1973) 547-548
- [121] Mesiar, R. and Sempi, C.: *Ordinal sums and idempotents of copulas*, Aequationes Math. (2009), en prensa
- [122] Nelsen, R.B.: *An introduction to copulas* (2nd ed.), Springer Series in Statistics, New York, 2006
- [123] Nelsen, R.B.; and Fredricks, G.A.: *Diagonal copulas*, en: *Distributions with given Marginals and Moment Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1977, 121-127

- [124] Nelsen, R.B.; Quesada-Molina, J.J.; Rodríguez-Lallena, J.A. and Úbeda-Flores, M.: *Some new properties of quasi-copulas*, en: Distributions with given marginals and statistical modelling, 187–194, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002
- [125] Nelsen, R.B.; Quesada-Molina, J.J.; Rodríguez-Lallena, J.J. and Úbeda-Flores, M.: *Best-possible bounds on sets of bivariate distribution functions*, J. Multivariate Anal, **90** (2) (2004) 348-358
- [126] Nelsen, R.B.; Quesada-Molina, J.J.; Rodríguez-Lallena, J.A.; and Úbeda-Flores, M.: *On the construction of copulas and quasi-copulas with given diagonal sections*, Insurance Math. Econom. **42** (2) (2008) 473-483
- [127] Niederreiter, H.; and Kuipers, L.: Uniform Distribution of Sequences, John Wiley and Sons, New York, 1974
- [128] Niven, I.M.: Irrational Numbers, Wiley, New York, 1956
- [129] Olsen, E.T.; Darsow, W.F.; and Nguyen, B.: *Copulas and Markov operators*, en: Distributions with Fixed Marginals and Related Topics, Seattle, WA, 1993, en: IMS Lecture Notes Monogr. Ser. **28** Inst. Math. Statist., Hayward, CA 1996 244-259
- [130] Osler, T.: *Finding $\zeta(2p)$ from a product of sines*, Amer. Math. Monthly **111** (1) (2004) 52-54
- [131] Ramanujan, S.: *Some properties of Bernoulli's numbers*, [J. Indian Math. Soc. **3** (1911), 219–234.] Collected papers of Srinivasa Ramanujan, 1–14, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000
- [132] Renyi, A.: *A new approach to the theory of Engel's series*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eotvos Sect. Math. **5** (1962) 25-32
- [133] Papadimitriou, I. A.: *Simple Proof of the Formula $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$* , Amer. Math. Monthly **80** (1973) 424-425
- [134] Parry, W.: *On the β -expansions of real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **11** (1960) 401-416
- [135] Paradís, J.; Viader, P.; and Bibiloni, L.: *Riesz-Nagy singular functions revisited*, J. Math. Anal. Appl. **329** (1) (2007) 592-602
- [136] Paunič, D.: History of Measure Theory. Handbook of Measure Theory (vol I) (Edited by E. Pap) North-Holland, 2002, 1-26
- [137] Pflaumann, E.; Unger, H.: Análisis Funcional I. Ed. Alhambra, 1974
- [138] Peitgen, H.O.; Jürgens, H.; Saupe, D.: Chaos and Fractals: New Frontiers of Science. New York: Springer-Verlag; 1992
- [139] Peitgen, H.O.; Rodenhausen, A.; and Skordev, G.: *Self-affine curves and sequential machines*, Real Anal. Exch. **22** (2) (1996–1997) 446–491
- [140] Pollicott, M.; and Yuri, M.: Dynamical systems and ergodic theory, London Mathematical Society Student Texts, 40, Cambridge University Press, Cambridge, 1998
- [141] Przytycki, F. and Urbansky, M.: *On Hausdorff dimension of some fractal sets*, Studia Math. **93** (1989), 155-186
- [142] Quesada Molina, J.J.; and Sempì, C.: *Discrete quasi-copulas*, Insur. Math. Econ. **37** (1) (2005) 27-41
- [143] Renyi, A.: *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8** (1957) 472-493
- [144] Renyi, A.: *A new approach to the theory of Engel's series*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eotvos Sect. Math. **5** (1962) 25-32
- [145] de Rham, G.: *Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles*, Rend. Sere. Math. Torino **16** (1956) 101-113
- [146] Riesz, F.; and Sz-Nagy, B.: Leçons d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, Paris, 1968
- [147] Rudin, W.: Real and Complex Analysis (3rd ed.), McGraw-Hill Book Co., New York, 1987

- [148] Rüschemdorf, L.: *On the distributional transform, Sklar's Theorem, and the empirical copula process*, J. Statist. Plan. Infer. **139** (11) (2009) 3921-3927
- [149] Sagan, H.: *Space Filling Curves*, Springer-Verlag, New York, 1994
- [150] Salem, R.: *On Some Singular Monotone Functions which Are Strictly Increasing*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943) 427-439
- [151] Scheefer, L.: *Allgemeine Untersuchungen über Rectification den Curven*, Acta Math. **5** (1884) 49-82
- [152] Schweizer, B. and Sklar, A.: *Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables*, Studia Mathematica **52** (1974) 43-52
- [153] Shidfar, A. and Sabetfakhri, K.: *On the continuity of van der Waerden's function in the Hölder sense*, Amer. Math. Monthly **93** (1986) 375-376
- [154] Sierpiński, W.: *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*, C. R. Acad. Sci. Paris **160** (1915) 302-305
- [155] Sklar, A.: *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **8** (1959) 229-231
- [156] Szego, G.: *Orthogonal Polynomials*, AMS Colloquium Publ., **23**, 1939
- [157] Takacs, L.: *An increasing continuous singular function*, Amer. Math. Monthly. **85** (1978) 35-36
- [158] Takagi, T.: *A simple example of the continuous function without derivative*, Proc. Phys. Math. Soc. Tokyo Ser II **1** (1903) 176-177
- [159] E. Trillas: *Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos*, Stochastica **3** (1) (1979) 47-59
- [160] Trollope, J.R.: *An explicit expression for binary digital sums*, Math. Mag. **41** (1968) 21-25
- [161] Tsumura, H.: *An elementary proof of Euler's formula for $\zeta(2m)$* , Amer. Math. Monthly **111** (5) (2004) 430-431
- [162] Urbański, M.: *The Hausdorff dimension of the graphs of continuous self-affine functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (4) (1990) 921-930
- [163] Vitale, R.A.: *Parametrizing doubly stochastic measures*, en: Distributions with Fixed Marginals and Related Topics, Seattle, WA, 1993, en: IMS Lecture Notes Monogr. Ser. **28**, Inst. Math. Statist., Hayward, CA 1996 358-364
- [164] Walters, P.: *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1980
- [165] Wen, L.: *An approach to construct the singular monotone functions by using Markov chains*, Taiwanese J. of Math. **2** (3) (1998) 361-368.
- [166] Wheeden R.C.; and Zygmund A.: *Measure and Integral*, Marcel Dekker, New York, 1975
- [167] Williams, G. T.: *A new method of evaluating $\zeta(2n)$* , Amer. Math. Monthly **60** (1953) 19-25
- [168] Williams, K.S.: *On $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$* , Math. Mag. **44** (1971) 273-276