UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BARCELONA
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales
Programa de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas

Tesis Doctoral

El proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de ordenación y combinación con estudiantes de educación superior: Un enfoque basado en la resolución de problemas

Autor: Alejandro Gómez Aguirre

Directores: Drs. Jordi Deulofeu Piquet y Lourdes Figueiras Ocaña

Bellaterrra, Diciembre de 2010

Esta investigación ha sido posible gracias a la Beca del Programa de Mejoramiento de Profesores de la Secretaría de Educación Pública y de la Universidad Veracruzana.

A mí querida familia:
Susana
Alejandra
Denise
Nadia
Alexis
Rafael
Antonio
Elisa
Rafita
Ana Paula

AGRADECIMIENTOS

Deseo hacer un reconocimiento a las personas, sin cuyo apoyo no hubiera podido llevar a cabo esta investigación.

En primer lugar a los Drs. Jordi Deulofeu Piquet y Lourdes Figueiras Ocaña no sólo por aceptar dirigir mi trabajo de doctorado, también por dedicar sus conocimientos y valiosas ideas, por el apoyo permanente y paciencia, y sobre todo por su generosidad y amistad; muchas gracias.

A los estudiantes de la generación que inició estudios en la Facultad de Informática en agosto de 2008 y que participaron en la investigación.

Muy especial, mi agradecimiento al profesor Marco Antonio Méndez y Pedro Torres quienes colaboraron en esta investigación como profesores de los grupos experimental y de control respectivamente.

A todos los profesores que participan en el Doctorado en Didáctica de la Matemática, por sus valiosos conocimientos.

A mis amigos los Dres. Miguel Ángel Cruz Mavil y Lizette Ramos De Robles por sus consejos en la redacción de este trabajo; muchas gracias.

Es evidente que no puedo olvidar el principal apoyo recibido, el de mi esposa, hijas, yernos y nietos. Mi especial agradecimiento por su comprensión.

ÍNDICE

Introducción 1

1. Delimitación del problema 7

2. Marco Teórico 11

2.1 Problema y clasificación de problema 12

2.2 Un método para resolver problemas 19

2.3 El monitor 22

2.4 Los recursos 24

2.5 Investigaciones sobre resolución de problemas 26

2.6 Definiciones, hechos, procedimientos y estrategias heurísticas propias de la combinatoria 28

2.6.1 Regla del producto o principio multiplicativo 30

2.6.2 Modelo combinatorio 30

2.6.3 Estrategias heurísticas 33

2.7 Resultados de investigaciones sobre el aprendizaje de la combinatoria 35

3 Metodología 43

3.1 Contexto de la investigación 43

3.1.1 Bachillerato 45

3.1.2 Facultad de Informática 46

3.2 Esquema general de la fase experimental 48

3.2.1 Etapa 1: Elaboración de la Unidad Didáctica 49

3.2.2 Etapa 2: Aplicación y experimentación 50

3.2.3 Etapa 3: Análisis del proceso de aprendizaje 51

3.3 Diseño y elaboración de la Unidad Didáctica y del Curso Tradicional 53

3.3.1 Unidad didáctica 53

3.3.2 Curso tradicional 56

3.4 Diseño de instrumentos para la recogida de datos 57

3.4.1 Instrumentos aplicados antes del desarrollo de la Unidad Didáctica y Curso Tradicional 57

3.4.2 Instrumento aplicado durante el desarrollo de la Unidad Didáctica a y Curso Tradicional 59

3.4.3 Instrumentos aplicados al finalizar las unidades didácticas y temática 60

3.5 Selección de estudiantes y profesores para los grupos experimental y control 61

3.5.1 La selección de los estudiantes de los grupos experimental y control 61

3.5.2 La elección de los docentes de los grupos experimental y control 62

3.6 Los procesos de recogida y análisis de datos 63

3.6.1 Análisis Cuantitativo 63

3.6.1.1 Definición de variables 64

3.6.1.2 Metodología estadística empleada para el análisis de datos 64

3.6.2 Análisis Cualitativo 68

4 Resultados 71

4.1 Pregunta 1 71

4.2 Pregunta 2 75

4.3 Pregunta 3 77

4.4 Pregunta 4 82

4.5 Pregunta 5 84

4.5.1 Grupo experimental 85

4.5.2 Grupo control 86

4.6 Pregunta 6 88

4.6.1 Grupo experimental 89

4.6.2 Grupo control 90

.4 7 Pregunta 7 94

4.7.1 Grupo experimental 95

4.7.2 Grupo control 98

4.8 Pregunta 8 105

4.8.1 No considera algunos elementos 105

4.8.2 Se basa en el producto de los datos 106

4.9 Pregunta 9 107

4.9.1 Considera un diagrama de árbol de dos ramas 107

4.9.2 Dibuja diagramas con nodos diferentes 109

4.10 Pregunta 10 110

4.11 Pregunta 11 110

5 Conclusiones 111

5.1 Sobre el diagnóstico inicial antes de la experimentación 111

5.1.1 Dificultades de los estudiantes en un marco de resolución de problemas 111

5.1.2 Elección del modelo 112

5.1.3 Estrategias Heurísticas 113

5.1.4 Ejemplos y contraejemplos pedidos a los estudiantes 113

5.1.5 Ejemplos dados en el enunciado de un problema 114

5.2 Sobre los resultados después de la experimentación de la Unidad Didáctica 115

5.2.1 Uso de la multiplicación de datos 115

5.2.2 Tablas de enumeración de elementos 116

5.2.3 Diagramas de árbol 117

5.2.4 Principio del palomar 119

5.2.5 Fórmulas 119

5.3 Sobre los resultados después de la experimentación del curso tradicional 119

5.3.1 Uso de la multiplicación de datos 119

5.3.2 Tablas de enumeración de elementos 120

5.3.3 Diagramas de árbol 120

5.3.4 Principio del palomar 120

5.3.5 Fórmulas 121

5.4 Sobre el método de enseñanza 121

5.4.1 Sobre el profesor 121

5.4.2 Sobre la potencialidad del método 124

Bibliografía 125

Anexo M3 135

Anexo M1 177

INTRODUCCIÓN

Este trabajo representa la versión escrita de una investigación realizada en el marco de estudios de doctorado en Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas que ofrece el Departamento de Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona. En él recogemos sus aspectos más destacados. La investigación tiene como propósito analizar y validar una unidad didáctica vinculada con el curso de Matemáticas Discretas para el aprendizaje de los conceptos básicos del tema conteo (combinaciones y ordenaciones) y que se convierta en una herramienta que oriente el trabajo del profesor.

Para lograr tal fin nos hemos planteado como objetivos particulares: Conocer el tipo de dificultades que tienen los estudiantes antes y después de trabajar con la unidad didáctica, comparar estas dificultades con las que tiene un estudiante con la enseñanza tradicional y conocer la influencia de los ejemplos y contra ejemplos en el aprendizaje.

El conocimiento de tales dificultades, no es un fin en si mismo. Estamos interesados en la resolución de problemas de matemáticas como estrategia didáctica en la enseñanza de las matemáticas en general, aunque nuestro estudio se centra en los primeros cursos del nivel universitario.

Es necesario, por tanto, caracterizar y subsanar las dificultades que puedan obstaculizar el proceso de aprender matemáticas universitarias con base en la resolución de problemas. En mi experiencia docente que comprende más de veinte años, he tenido oportunidad de trabajar en los niveles de secundaria y bachillerato. En ese lapso he podido darme cuenta de las dificultades que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, ha sido en el nivel universitario en donde he identificado una problemática compleja en la cual, uno de los problemas notables tiene que ver con la divergencia entre la meta deseada y los resultados esperados. La identificación de algunos de los factores que intervienen en este hecho puede contribuir en lograr un acercamiento entre resultados y metas educativos así como al aprendizaje significativo de las matemáticas. Aunque el problema es susceptible de ser observado en diferentes niveles educativos, estamos interesados en enfocar nuestro estudio al inicio del nivel universitario.

De conformidad con nuestro propósito, esta investigación busca mejorar el aprendizaje de las matemáticas en la Facultad de Estadística e Informática de la

Universidad Veracruzana. Esta universidad se ubica en el estado de Veracruz, en México. La actividad docente que he desempeñado durante varios años en esta institución, atendiendo diversos cursos de matemáticas, me ha permitido observar algunas de las dificultades que tienen los estudiantes al enfrentar la resolución de un problema.

Otro aspecto que he podido observar es que los estudiantes de la licenciatura en Estadística e Informática muestran una deserción escolar elevada de los estudiantes que ingresan. Esta deserción generalmente se ha producido en el segundo semestre y muy probablemente, la causa de esta deserción, guarda relación con los elevados índices de reprobación que en cada periodo escolar se obtienen en los cursos del área de matemáticas. Los cursos de matemáticas que se imparten en la licenciatura en estadística, son obligatorios y pertenecen a un tronco común. La observación de hechos como los que aquí mencionamos justifica la realización de este trabajo.

En los últimos 4 años, en esta universidad se ha impulsando un cambio que gradualmente se ha podido ir implantando en cada una de sus escuelas y facultades. Este cambio consiste en la transición de un modelo rígido a uno flexible. El modelo que se está dejando atrás se caracteriza por la integración de grupos en los cuales, un conjunto estable de estudiantes recorre un mismo itinerario a lo largo de sus estudios. En el modelo que se está dejando atrás, la enseñanza es fundamentalmente presencial y los cursos se imparten en un mismo horario que puede ser o bien matutino o bien, vespertino. El modelo que se está implantando se caracteriza porque ya no existe el tradicional concepto de *grupo*. Actualmente los estudiantes de las licenciaturas que han adoptado este cambio –entre ellos los de la facultad de Estadística e Informática– tienen la posibilidad de elegir un itinerario propio.

Consideramos que una parte del problema que nos ocupa puede atribuirse a los métodos de enseñanza que regularmente se han seguido en esta institución. En términos generales, la enseñanza de las matemáticas ha consistido en seguir procedimientos rutinarios dentro del salón de clase. El procedimiento generalmente adoptado consiste en iniciar con una breve explicación de los conceptos involucrados en el tema a presentar. A continuación, la actividad en el aula se centra en realizar algunos ejercicios que el profesor selecciona del libro de texto. Finalmente, el profesor encarga como trabajo extraescolar resolver ejercicios parecidos a los que se han resuelto en clase.

Con un método como el descrito en el párrafo anterior, que en adelante llamaremos enseñanza tradicional, no es difícil darse cuenta que la enseñanza de la matemática que se imparte en la mencionada Facultad, presenta una situación que puede calificarse como inadecuada a los propósitos que busca la enseñanza de la matemática.

Merece la pena tener presente que, en general, la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina muestra situaciones semejantes en los diferentes niveles donde se imparte. Entre los factores comunes que dan lugar a ambientes como los que describimos se encuentran las siguientes:

- **Interés**. Los profesores no siempre logran encontrar un método que permita mantener el interés de sus estudiantes en la resolución de un problema.

- **Mejora del aprendizaje.** Los métodos y técnicas de enseñanza que se siguen en el aula difícilmente favorecen en los estudiantes la comprensión de los conceptos propuestos y menos aún habilidades para construir nuevos conocimientos.

- **Conocimientos de las matemáticas.** A menudo, los profesores consideran como problemas los ejercicios que cotidianamente aplica en el aula.

- **Competencias básicas.** La mayoría de los estudiantes no ha adquirido los conocimientos básicos deseables en el dominio de adscripción de diferentes problemas.

Otros problemas que se relacionan con la problemática que enfrentan los cursos de matemáticas son:

- **Conocimientos específicos.** Muchos profesores dedican su interés a la resolución de ejercicios elementales y no acostumbran resolver problemas no rutinarios.

- **Creencias.** La creencia de muchos profesores, que consideran 'su método' como bueno o adecuado, se resisten a considerar la resolución de problemas como una alternativa metodológica en la enseñanza que puede ser más adecuada que la que tradicionalmente utilizan.

- **Afectos.** Algunos aspectos de los afectos como la confianza las emociones y los sentimientos de los estudiantes, en general son poco valorados por los docentes en el proceso de enseñanza.

La situación que describimos es la que a menudo sigue la mayoría de los profesores de la institución donde laboro. Dado que estas son las características que distinguen a los cursos que normalmente sigue la mayoría de los profesores de la institución donde me desempeño como profesor, cobra actualidad la cita de Polya (1965) quien hace alusión a la gravedad que supone un procedimiento de enseñanza como el descrito.

> *Un profesor de matemáticas tiene en sus manos una gran oportunidad: Si utiliza su tiempo en ejercitar a sus alumnos en operaciones rutinarias matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual; pero si estimula en ellos la curiosidad podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente.* (Polya, 1965, pp. 5.)

Debido a la complejidad del problema de enseñar matemáticas, no es difícil imaginar que la mera selección y puesta en práctica de una estrategia didáctica cualquiera, resulta insuficiente. Existen muchos aspectos que pueden incidir en los resultados que pueden observarse al final de un curso. Por ejemplo, la mera estrategia de resolver problemas para aprender matemáticas sería infructuosa sin una formación sólida en matemáticas. Esta es una de las condiciones más relevantes. Parece una obviedad decirlo pero merece la pena insistir en que, para enseñar algo, es necesario tener conocimientos y experiencias amplias en el tema a enseñar.

Otros aspectos que resultan importantes incluyen, por ejemplo, la capacidad para hacer investigación desde la Didáctica de la Matemática. Al respecto, consideramos que un área relevante es la línea de investigación en Resolución de Problemas.

Nos parece importante disponer de un método de enseñanza de la matemática que incluya la resolución de problemas como método de enseñanza y que se pueda implementar con un grupo de estudiantes. Con base en esta apreciación, decidimos concretar nuestro trabajo en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de *ordenación y combinación* a través de la resolución de problemas. En consecuencia, uno de los retos que enfrentamos era el de hacer emerger, en los estudiantes, las dificultades que tienen antes y después de trabajar con la unidad didáctica, comparar estas dificultades con las que tiene un estudiante con la enseñanza tradicional y conocer la influencia de los ejemplos y contra ejemplos en el aprendizaje.

La consideración de la problemática descrita hasta aquí, da pautas para hacer investigación en la línea de resolución de problemas como estrategia didáctica. Con este fin y como un primer acercamiento al conocimiento de tal problemática, iniciamos nuestra investigación en el contexto de la Universidad Autónoma de Veracruz, donde este autor es profesor de tiempo completo.

Por tanto, los resultados de esta investigación surgen del análisis de las respuestas que dieron estudiantes de la facultad de informática que tomaban el curso de Probabilidad y Estadística. Nuestro objeto de estudio está delimitado por el objetivo general que nos planteamos:

Diseñar analizar y validar una unidad didáctica vinculada con el curso de Matemáticas Discretas para el aprendizaje de los conceptos básicos del tema *conteo* (combinaciones y ordenaciones) de manera que se convierta en una herramienta que oriente el trabajo del profesor.

La investigación que se presenta en este trabajo explora situaciones relativas a nuestro objetivo general, tomando como base la utilización de la unidad didáctica, un método de ayuda para los estudiantes en la resolución de problemas durante el curso (Gómez, 2008), los cuestionarios de problemas de inicio y fin de la unidad didáctica y la forma de participación de los estudiantes y el profesor en el aula.

CAPÍTULO 1

DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

La presente investigación tiene como objetivo, acercarnos al conocimiento de la problemática inherente a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, a través de la resolución de problemas. Se trata de un área de investigación que ha sido tratada por autores como Polya (1965, 1981) y Schoenfeld (1985,1992), entre otros. Sin embargo, son pocos los trabajos que, siguiendo esta estrategia, se han realizado en el nivel de educación superior. Con esta base, decidimos ubicar nuestra tarea en el nivel de licenciatura, específicamente centramos nuestra actuación en la práctica de estudiantes de una licenciatura en informática. Concretamos nuestro trabajo y nuestra atención en el proceso de comprender el concepto de conteo que actualmente corresponden a cursos de matemáticas discretas.

En mis 25 años de experiencia docente, he enseñado en los niveles de secundaria, bachillerato y universitario. En ese lapso he podido darme cuenta de algunas de las dificultades que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

En mi opinión, una parte de esta problemática puede atribuirse al método de enseñanza que, a menudo, se sigue en el aula. En términos generales, y dentro del contexto donde realicé la investigación, la enseñanza de las matemáticas consiste en mencionar los conceptos involucrados en el tema a presentar. A continuación, la actividad en el aula se centra en realizar ejercicios que el profesor selecciona del libro de texto. Posteriormente, el profesor encarga como trabajo extraescolar resolver ejercicios parecidos a los que se han resuelto en clase.

No es difícil darse cuenta que la enseñanza de la matemática que sigue este procedimiento: enseñar – memorizar – evaluar, es ineficiente con relación a los propósitos que busca la enseñanza de la matemática. Dado que este procedimiento caracteriza el trabajo que normalmente es seguido por la mayoría de los profesores de la institución donde me desempeño como profesor, cobra actualidad la cita de Polya (1965), quien hace alusión a la gravedad que supone un procedimiento de enseñanza como el mencionado en este documento.

La consideración de la problemática descrita, da pautas para hacer investigación en la línea de resolución de problemas como estrategia didáctica. Este trabajo pretende hacer aportaciones en el dominio de la Didáctica de la Matemática y particularmente en la línea de investigación denominada *resolución de problemas*.

Para aproximarnos al conocimiento teórico de la resolución de problemas retomamos la perspectiva que considera que la matemática es creada en un proceso de formulación y resolución de problemas según Kilpatrick (1985)

Este posicionamiento nos lleva también a relacionar nuestras ideas al respecto y a sumarnos con la idea de incrementar las investigaciones en resolución de problemas que identifica Lester (1994).

Para abordar este planteamiento, en el presente trabajo nos posicionamos en el nivel III de Puig (1966) quien considera que en el proceso de resolución de problemas se han de identificar los elementos que integran la terna: estudiante, profesor y problema. Adicionalmente incorporamos el contexto en el que se lleva a cabo la resolución del problema como un cuarto elemento descrito por Callejo y Carrillo (1998).

De acuerdo con nuestros objetivos, cabe mencionar que este trabajo no pretende analizar la resolución de problemas desde la perspectiva de las creencias y los afectos de los estudiantes que participen en la investigación. No obstante y aunque este aspecto no constituye nuestro foco de análisis, hemos de incluir aquellas creencias que incidan en el tiempo que los estudiantes dediquen al intento por resolver el problema propuesto antes de abandonarlo y que en este sentido resultan esenciales para el logro de tales objetivos.

La investigación se centra en identificar las dificultades que enfrentan los estudiantes antes y después de haber cursado una unidad didáctica sobre combinatoria. El método de enseñanza de esta unidad está basado en la adquisición de conocimientos a través de un método de enseñanza constructivista, específicamente en la adquisición de conocimientos por medio de la resolución de problemas. Además, estamos interesados en comparar los logros de estos estudiantes con los de otro grupo de estudiantes que ha cursado los contenidos del mismo tema con otro método de enseñanza, específicamente el tradicional. Todo lo anterior nos permitirá construir una unidad didáctica que rescate las ventajas y los logros de ambos métodos de enseñanza.

Como actores principales, en esta investigación identificamos dos grupos de estudiantes, un profesor que actúa como monitor para uno de los grupos y otro que lo hace como conferenciante para el otro grupo. Estas dos personas participan de una manera establecida previamente. Los dos grupos de estudiantes deben cursar una unidad de conocimientos. La unidad contiene los conocimientos básicos del tema de combinatoria inscrito en el programa de estudios de la asignatura de Matemática Discreta.

Objetivos de la investigación

En el caso concreto de la problemática que hemos elegido para esta investigación nuestro objeto de estudio está delimitado por el objetivo general que nos planteamos:

Diseñar, analizar y validar, una unidad didáctica vinculada con el curso de Matemáticas Discretas para el aprendizaje de los conceptos básicos del tema conteo (combinaciones y ordenaciones) de manera que se convierta en una herramienta que oriente el trabajo del profesor.

Para asegurar el logro de nuestro objetivo general, planteamos los siguientes objetivos particulares:

- Conocer el tipo de dificultades que tienen los estudiantes antes de trabajar con la unidad didáctica o la unidad temática según sea el caso.
- Conocer las formas de plantear la resolución de problemas.
- Conocer la influencia de los ejemplos y contra ejemplos en el aprendizaje.
- Conocer las dificultades que perduran en los estudiantes después del curso.
- Comparar los logros de la unidad didáctica con otra de corte tradicional

Para alcanzar estos objetivos nos hemos planteado los siguientes interrogantes:

- ¿La elección adecuada del modelo combinatorio al que pertenece un problema está relacionado con la posibilidad de dar un ejemplo y/o un contraejemplo del conjunto solución de un problema?
- ¿Si al final del enunciado de un problema de combinatoria se da un ejemplo, este es una ayuda para la resolución del problema?
- ¿La capacidad de los estudiantes de seleccionar el modelo combinatorio que conduzca a resolver un problema mejora después de cursar la unidad didáctica basada en la resolución de problemas o de desarrollar el tema de manera tradicional?

- ¿El uso de la multiplicación o de la suma de datos dados como heurística de resolución, perdura después de cursar la unidad didáctica o tradicional, o bien se modifica?

- ¿Son diferentes las estrategias heurísticas elegidas por los estudiantes en la resolución de los problemas de la prueba final al término de la Unidad Didáctica o la Unidad Tradicional, que las utilizadas en la prueba diagnóstica?

- ¿Utilizan más estrategias, para la resolución de problemas del cuestionario final, los estudiantes del grupo experimental que los estudiantes del grupo de control?

- ¿Cuáles son los principales errores que comete un estudiante cuando utiliza un método de conteo sistemático, un diagrama de árbol, el principio del palomar (diagrama de caja) o una fórmula?

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo enmarcamos el problema que nos hemos planteado, de acuerdo con los campos del conocimiento científico en el que se ubica. Como mencionamos en la introducción, el presente trabajo de tesis tiene como objeto de estudio, la resolución de problemas como estrategia didáctica para el aprendizaje matemático.

Es, por tanto, una investigación que en primera instancia corresponde al dominio científico de la Didáctica de las Matemáticas. Los trabajos de investigación en Didáctica de las Matemáticas se interesan generalmente en el estudio de las herramientas, los métodos o los enfoques que contribuyan a mejorar el quehacer matemático desde su perspectiva didáctica.

El problema que discutimos es así mismo, un problema de la Educación Matemática en tanto que disciplina que estudia la práctica de la enseñanza y el aprendizaje matemáticos, además de la investigación que se desarrolla en relación con estos aspectos. A diferencia del contexto europeo, en el contexto americano el campo de la Didáctica de las Matemáticas se conoce como Educación Matemática.

Toda vez que nuestro objeto de estudio es la resolución de problemas, y más concretamente, la enseñanza de la matemática a través de la Resolución de Problemas iniciamos nuestra discusión a partir de lo que ha de entenderse por la frase: resolución de problemas. El diccionario de la Real Academia Española muestra que el término *resolución* es multisemántico. De las diferentes acepciones que ofrece este diccionario, el que recoge de manera apropiada el significado que damos en este trabajo al mencionado término es el de: *Acción y efecto de resolver o resolverse* (RAE).

Ahora bien, la yuxtaposición del término *resolución* con el término *problema* da lugar a interpretaciones diversas ya que, en la acción y efecto de resolver, es posible identificar un conjunto de acciones que pueden estar presentes en el proceso de resolución de **problemas matemáticos**. El uso de negritas que utilizamos en la frase anterior, tiene el propósito de destacar el alcance y el tipo de problemas al que nos referimos en este trabajo.

Entre las acepciones que ofrece el mencionado diccionario, para el término *resolver*, encontramos las siguientes:

1. tr. Tomar determinación fija y decisiva.

> 2. tr. Resumir, epilogar, recapitular.
>
> 3. tr. Desatar una dificultad o dar solución a una duda.
>
> 4. tr. Hallar la solución de un problema.
>
> 5. tr. Deshacer, destruir.
>
> 6. tr. Dicho de un agente natural: Deshacer algo cuyas partes separa destruyendo su unión.
>
> 7. tr. Analizar, dividir física o mentalmente un compuesto en sus partes o elementos, para reconocerlos cada uno de por sí.

Si consideramos con Brousseau (1986), que la didáctica es la ciencia que se interesa por la producción y comunicación del conocimiento, es decir, por saber qué es lo que se está produciendo en una situación de enseñanza, entonces el término *resolver* ha de desvelar algo más que el mero hecho de *hallar 'la' solución de un problema*.

En general, los procesos matemáticos son complejos y en el proceso de resolver problemas afloran algunas de las acciones que dan significancia a este proceso. La presencia de algunas de ellas, en la traza del trabajo de los estudiantes, posibilita comprender, como postula Schoenfeld (1987), las estructuras mentales de los alumnos. Schoenfeld considera que tal comprensión ayuda a conocer de mejor manera los modos en que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar.

El quehacer matemático de un estudiante puede caracterizarse por las acciones presentes en sus procesos creativos. En este sentido, tales acciones han de mirarse como una resultante de cuestiones tales como una participación comprometida en el tratamiento de situaciones problemáticas. Situaciones que, a menudo, demandan un pensamiento creativo que le lleve a conjeturar; a aplicar una información dada o supuesta; a descubrir; a inventar; a comunicar ideas o analizar sus propias concepciones a la luz de la una reflexión crítica y de la argumentación.

En el siguiente apartado hacemos una discusión sucinta del término *problema* que es un concepto clave en nuestro trabajo. En primer lugar especificamos lo que entendemos por problema y el criterio que utilizamos para clasificar los problemas. Así mismo, definimos cómo han de entenderse los términos *resultado*, *solución* y *resolución* aplicados con el vocablo problema.

2.1 Problema y clasificación de problemas

Al analizar el término *problema*, encontramos una pluralidad de significados análoga a la que encontramos con la palabra *resolución*. Al ser multisemánticos los términos que conforman el binomio resolución/problema, dan lugar a diferencias en el tipo de situaciones susceptibles de ser calificadas como problema. Esta multiplicidad de significados no es inocua puesto que lo que se entienda por *problema*, tiene implicaciones en el discurso cotidiano entre profesores y estudiantes y tiene que ver también, con el diseño curricular de las diferentes asignaturas de los cursos de matemáticas.

La confusión más frecuente reside en llamar *problema* a otras actividades que propiamente han de denominarse *ejercicio*. Problema y ejercicio no son sinónimos. Éste término, a su vez, tiene también diferentes acepciones. La que mejor le describe es la que considera que: un ejercicio es un trabajo práctico que en el aprendizaje de ciertas disciplinas sirve de complemento y comprobación de la enseñanza teórica (RAE).

Para Puig (2008) la práctica docente muestra que, el planteamiento de problemas ha tenido un papel destacado en los cursos de matemáticas en todos sus niveles. Sin embargo, la *resolución* de problemas, ha sido soslayada. No ha sido sino hasta años relativamente recientes que se ha considerado la idea de que el desarrollo de la habilidad para resolver problemas merece un lugar destacado en la didáctica de las matemáticas.

La resolución de problemas suele ser vista como una actividad establecida tan sólo como paso previo para el alcance de objetivos extra matemáticos. Una concepción diferente es aquella que pondera la resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje matemático. Esta idea parece encontrar sustento en la idea generalizada que consiste en creer que el trabajo de los matemáticos es precisamente el de resolver problemas. Es necesario pues clarificar las dimensiones ontológica y epistemológica de la resolución de problemas.

No obstante, la valoración de la resolución de problemas ha dejado ver su desconocimiento entre el profesorado en tanto que estrategia de aprendizaje. Su aplicación ha dado lugar a actividades que parecen responder más al entusiasmo que a su conocimiento. No obstante, la *resolución de problemas* deja ver la conveniencia de adecuar sus planteamientos a los diferentes cursos que conforman el currículo matemático actual.

La enseñanza de la matemática, desde una concepción basada en la resolución de problemas, pasa por considerar una habilidad especial en el profesorado que la utiliza en su práctica. Se trata de una competencia que ha de permitir a los profesores adelantarse a la trayectoria seguida por los estudiantes. El profesor ha de tener la capacidad para anticipar la validez de las aproximaciones a ***la*** solución de un problema, a pesar de que puedan ser fructíferas o no. La enseñanza basada en la resolución de problemas supone también la capacidad del profesor para decidir en qué momento ha de intervenir o qué sugerencias pueden ayudar a los estudiantes en el proceso de resolución.

El diccionario de la Real Academia Española establece que, por *problema* puede entenderse cualquiera de las acepciones siguientes:

> 1. m. Cuestión que se trata de aclarar.
>
> 2. m. Proposición o dificultad de solución dudosa.
>
> 3. m. Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin.
>
> 4. m. Disgusto, preocupación.
>
> 5. m. Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.

Estas maneras de entender lo que representa un problema pueden encontrarse en mayor o menor medida en una situación de enseñanza/aprendizaje. Por ejemplo, una actividad determinada puede suponer un problema para algunas personas y no serlo para otras. Esto puede observarse entre un niño de la escuela primaria y su profesor. La inexperiencia del primero y la práctica continua y específica son diametralmente opuestas. Cuando una persona resuelve un problema de matemáticas, este mismo problema deja de serlo inmediatamente para esa persona. A partir de su resolución parece razonable suponer que podrá encontrar la solución en cualquier otra ocasión. Lo que si ha de tenerse presente es que, la experiencia en la resolución de problemas no garantiza la capacidad para resolver cualquier problema.

Aunque no existe una manera única de entender lo que es un problema, cuando se le considera en el marco de la didáctica de las matemáticas parece haber un acercamiento en la concepción de este término. Diferentes investigadores han hecho sus aportaciones con la intención de recoger la manera como ha de entenderse lo que es un *problema*.

Por ejemplo, Deulofeu (2002) considera que: *Un problema de matemáticas es un enunciado donde se pide que se obtenga un resultado a partir de un conjunto de informaciones que se proporcionan. El problema es tal, cuando una vez conocido el enunciado, no es inmediato el camino que hay que seguir para hallar la solución*. (Deulofeu, 2002: 536/4)

La definición de Puig (1996) considera que: *Un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que este desea abordar, y para el cual no ha producido sentido.* (Puig, 1996: 31). Resalta en esta manera de entender el término problema, el adjetivo *matemático* que delimita el tipo de problemas. Destaca también la participación en la resolución como un acto volitivo. Sin embargo, podría establecerse esta condición cuando el estudiante ha entendido o conocido el enunciado, como menciona Deulofeu (2002).

Una de las definiciones destacada es la que ofrece Schoenfeld (1985). Para él, un problema es: "*Una tarea que es difícil para el individuo que está intentando resolverlo. Es más, esa dificultad debe ser un callejón sin salida intelectual en lugar de uno* *computacional. Para declarar las cosas más formalmente, si uno tiene acceso listo a un esquema de solución para una tarea matemática, esa tarea es un ejercicio y no un problema*". (Schoenfeld 1985:74)

Este autor clasifica las tareas difíciles de resolver en dos categorías: *problemas* y *ejercicios*. La diferencia tiene que ver con las tareas a las que el resolutor tiene acceso a un esquema de solución.

Por otra parte, Puig (1996) no sólo recurre a esta clasificación sino que, además, lo hace por nivel de dificultad, tratando de identificar la diferencia entre ejercicio y problema. Incluye también, el conocimiento de los recursos de adscripción o conocimientos de definiciones, hechos y procedimientos que son necesarios para resolver el problema que tiene el resolutor. La inclusión de estas categorías da lugar a las siguientes situaciones:

- Ejercicio de reconocimiento

  Si lo único que tiene que hacer el resolutor es buscar en la memoria el resultado.

- Ejercicio algorítmico

  Si sólo se ha de ejecutar un algoritmo de forma automática.

- Problema de aplicación

  Cuando el resolutor conoce un procedimiento para resolver un problema y ha de justificar que ese procedimiento es adecuado para obtener su solución o siempre que la ejecución de un procedimiento tenga que ir acompañada de la argumentación de que sus pasos son adecuados.

- Problema de búsqueda

  Cuando ha de crear un procedimiento de solución.

- Situación problemática

  Son aquellas en cuyo enunciado no se ha precisado qué es lo que hay que hacer y esa es la primera tarea del resolutor. (Puig L., 1996: 32-33)

Es necesario destacar un tipo de problema al que Puig (1966) llama *situación problemática.* Estas situaciones aparecen con mucha frecuencia en la vida cotidiana.

En esta misma línea Vila (2004) considera que un problema es: *Una situación que plantea una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al sujeto que intenta responderla porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y las incógnitas o los datos y las conclusión y debe por tanto, buscar, investigar, relacionar, implicar sus afectos, etc., para hacer frente a una situación nueva*. (Vila, 2004: 31)

Destacamos en esta definición el hecho de mencionar, de manera explícita, que una de las características básicas de un problema es que se le considere como una tarea que no es accesible de manera inmediata. Este autor establece las diferencias entre ejercicio y problema de la siguiente manera.

- Al leer un ejercicio, se ve inmediatamente en qué consiste la cuestión y cuál es el medio de resolverla. Ante un problema no se sabe a primera vista como atacarlo y resolverlo; a veces ni siquiera se ve claro en qué consiste el problema.

- El objetivo que persigue el profesor cuando propone un ejercicio, es que el alumno aplique de forma mecánica conocimientos y algoritmos ya adquiridos y fáciles de identificar. El objetivo que persigue el profesor, al proponer un problema, es que el alumno busque, investigue, utilice la intuición, profundice en el conjunto de conocimientos y experiencias anteriores y elabore una estrategia de resolución.

- En general la resolución de un ejercicio exige poco tiempo y éste se puede prever de antemano. Por otra parte, la resolución de problemas exige un tiempo que es imposible prever de antemano

- La resolución de un ejercicio no suele implicar la afectividad. La resolución de un problema supone una fuerte inversión de energías y de afectividad. A lo largo de la resolución se suelen experimentar sentimientos de ansiedad, de confianza, de frustración, de entusiasmo, de alegría, etc.

- En general los ejercicios son cuestiones cerradas. En cambio, los problemas están abiertos a posibles variantes y generalizaciones y a nuevos problemas.

- Los ejercicios abundan en los libros de texto mientras que los problemas suelen ser escasos en ellos. (Vila A., 1995: 74)

Finalmente, Vila (2001) menciona una clasificación del tipo de problemas propuesta por (Polya, 1981), de acuerdo al conocimiento de los recursos que posee el resolutor, del dominio de adscripción del problema y toma en cuenta tanto las experiencias anteriores y la situación en que los problemas son propuestos. Vila distingue entre:

a) Problemas en los cuales la regla que hay que aplicar salta a la vista porque acaba de ser presentada o estudiada en clase.

b) Problemas en los cuales hay que escoger la regla que hay que aplicar; regla que se ha trabajado en clase recientemente.

c) Problemas en los cuales hay que escoger una combinación de reglas previamente estudiadas.

d) Problemas en los cuales hay que investigar. Se trata de problemas en los que la resolución exige una combinación original de reglas acompañados de un razonamiento plausible. (Vila, A., 2001: 30).

En mi opinión, esta clasificación puede resultar ambigua debido al uso de términos vagos o borrosos. Por ejemplo, el término *recientemente*, que menciona en el punto número dos de la viñeta anterior. En este caso, el término *recientemente*, podría referirse a horas, días, semanas o meses.

No obstante, pienso que esta clasificación de problema, a diferencia de las antes mencionadas, está estrechamente relacionada con los tiempos escolares por lo que resulta de utilidad en esta investigación, si hacemos las siguientes modificaciones:

- ✓ En el inciso "a" se debe precisar que las reglas se han estudiado durante la sesión en que se propone la resolución del problema;
- ✓ en el inciso "b" entendemos que la regla se ha trabajado en clase y el problema se aplica inmediatamente después de haber terminado la última sesión en que se terminaron de ver las reglas necesarias para la solución del problema;
- ✓ en el inciso "c" entendemos que las reglas a aplicar fueron estudiadas durante algún curso o de manera independiente.
- ✓ en el inciso "d" no es necesaria alguna explicación ya que no contiene términos ambiguos.

En consecuencia, la clasificación de problema que utilizamos en el presente trabajo es la de Polya (1981) con las precisiones antes señaladas y que presentamos a continuación:

a) Problemas en los cuales la regla que hay que aplicar salta a la vista, porque la regla se da a conocer en la sesión en la cual se propone la resolución del problema.

b) Problemas en los cuales hay que escoger la regla que hay que aplicar, entre las que se han trabajado en clase. El problema se aplica inmediatamente después de haber terminado la última sesión en que se finalizó de ver las reglas necesarias para la solución del problema.

c) Problemas en los cuales hay que escoger una combinación de reglas previamente estudiadas en algún curso o de forma independiente.

d) Problemas en los cuales hay que investigar: Se trata de problemas en los que su resolución exige una combinación original de reglas y de un razonamiento plausible.

Para los fines de la presente investigación estamos interesados en los problemas que pertenecen a los incisos a, b y c de la clasificación modificada de Polya (1981).

En esta investigación usamos la definición de *problema* que da Vila (2004). En ella consideramos, además, la definición de Puig (1996), en cuanto a la idea de que el alumno desea participar en el proceso de resolución y que el enunciado es significativo para el estudiante. Siempre que el estudiante haya conocido o estudiado el problema, como menciona Deulofeu (2002).

En el contexto de esta investigación, entendemos por *problema*, una situación que plantea una cuestión matemática, cuyo enunciado es significativo para el estudiante a quien se le plantea lo cual supone la puesta en práctica de su voluntad en el intento por resolverlo, después de haber conocido o estudiado el problema. Adicionalmente, el método de resolución no ha de ser inmediatamente accesible al estudiante.

La intención volitiva que suponemos en el resolutor supone que éste, no dispone de un algoritmo que relacione los datos con las incógnitas ni los datos con la conclusión. Esta limitante ha de llevarle a buscar, investigar, relacionar, implicar sus afectos, etc., Estas acciones le han de permitir hacer frente a nuevas situaciones semejantes.

Otros elementos que consideramos importantes en relación con los problemas son: En general, se trata de problemas que no han sido resueltos en clase; no han sido pedidos como trabajo extraescolar y no aparecen en el currículo de los niveles inferiores de educación de los estudiantes. Los recursos de adscripción de los problemas son conocimientos básicos de definiciones, hechos y procedimientos propios de la aritmética.

Otros términos que forman parte de los conceptos relacionados con nuestra discusión de la noción de problema, son conceptos tales como: resultado, solución y resolución. Para nuestro análisis seguiremos la distinción que hace Puig (1996)

"*usaremos el término* ***resultado*** *para indicar lo que contesta a la pregunta del problema, ya sea un número, una fórmula, una expresión algebraica, una construcción geométrica, una derivación lógica, etc. El término* ***solución*** *lo usaremos para indicar la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita o de la hipótesis a la conclusión. Finalmente usaremos el término* ***resolución*** *para indicar el conjunto de las acciones del resolutor durante el proceso, que pueden conducir a obtener la solución o no*" (Puig, 1996: 34)

Una vez que hemos establecido la distinción entre los términos *problema* y *resolución de problemas*, pasamos a la discusión de un método para el segundo de estos aspectos. Buscamos con ello, disponer de un procedimiento que permita a los estudiantes resolver problemas, intentando evitar que el estudiante se encuentre en una trampa cognitiva en la cual, no sepa que hacer. Esta situación impide avanzar hacia la resolución del problema.

A continuación describimos cómo esperamos captar la atención de los estudiantes y, a la vez, hacerlos avanzar en la resolución de un determinado problema. El darse cuenta que han conseguido avanzar en la resolución del problema tiene como efecto inmediato atraer y mantener la atención del grupo en la actividad propuesta. El trabajo desarrollado conjuntamente con algunos compañeros favorece la apropiación de conocimientos por parte de los estudiantes.

2.2 Un método para resolver problemas.

Cuando decimos que el estudiante *avanza* en la resolución de un problema, nos referimos al hecho en el cual, el estudiante desarrolla una actividad reflexiva que lo acerca, a lo largo del proceso de resolución, a lo solución del problema. Por ejemplo, cuando un estudiante realiza cálculos que siguen siendo aplicables al problema pero que eventualmente lo conducen a un callejón sin salida. Los problemas a resolver deben ser tales que los estudiantes que participen en el estudio puedan resolverlo tan sólo con sus conocimientos previos en matemáticas. El área de las matemáticas denominada **Combinatoria,** ofrece varias alternativas para el diseño de nuestra investigación.

Los estudiantes consiguen avanzar en la resolución de un problema cuando están involucradas las cuatro fases que establece Polya (1965) para la resolución de problemas:

- Comprender el problema
- Concebir un plan
- Ejecutar el plan
- Examinar la solución obtenida

En cada fase se plantean algunos interrogantes a los estudiantes. La respuesta que den, puede permitirles avanzar en la resolución del problema planteado. Dos aspectos que han de supervisarse tienen que ver con el momento y la manera de guiarles en el proceso que ha de llevarles a la obtención de una solución que han de conseguir por sí mismos. Las preguntas orientadoras están pensadas para que sirvan como una ayuda que favorezca cumplimentar la resolución del problema y ha de ser equilibrada. Es decir, no debe ser excesiva pero tampoco ha de ser limitada ni limitante al grado de hacer desistir a los resolutores en su propósito.

La estrategia orientadora que derive de interrogantes oportunos y pertinentes se ve incrementada cuando están involucrados su intuición y sus conocimientos. El desarrollo de una capacidad resolutiva puede hacer que los estudiantes mantengan su atención e interés en la resolución del problema. Estos dos aspectos nos hacen suponer que se producirán avances cuando menos parciales, en la resolución del problema planteado.

Polya (1965) propone determinadas preguntas que pueden hacerse en cada fase al resolutor y que –en su opinión– garantizan una ayuda equilibrada. Es necesario entender que estas preguntas las establece Polya a manera de sugerencia y que ha de ser el profesor o el monitor, en tanto que conocedores del hecho educativo, quienes tienen que encontrar preguntas equivalentes a las propuestas por Polya.

De acuerdo con este autor, el tipo de preguntas que pueden hacerse en cada una de las etapas son las siguientes:

Comprender el problema.

- *¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?*
- *¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?*

Concebir un plan

- *¿Se ha encontrado un problema semejante? ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?*
- *¿Conoce un problema relacionado con este? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? ¿Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar?*
- *He aquí un problema relacionado con el suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría falta introducir algunos elementos auxiliares a fin de poder utilizarlo?*
- *¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.*
- *Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo que le parezca más accesible? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita, los datos o ambos, si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?*

- *¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?*

Ejecución del plan

Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.

¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Examinar la solución obtenida

¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?

¿Puedes obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema? (Polya, 1965: 19)

El primero de estos puntos "*Comprender el Problema*", como sugiere la frase, tiene como finalidad precisamente, entender el problema. Cuando decimos ‘entender el problema’ estamos suponiendo que el estudiante sabe cuáles son las incógnitas, los datos o las condiciones del problema. Suponemos también que puede determinar si tales elementos son suficientes o insuficientes, o bien, si son redundantes o contradictorios.

En cuanto al segundo punto "*Concebir un plan*", nos referimos a que el resolutor ha de recurrir a sus conocimientos previos en el dominio del problema. Esta fase supone también modificar o mantener, según convenga, una estrategia de resolución basada en las preguntas que se le formulen lo que, posiblemente, puede hacerlo regresar a la fase de comprensión del problema. En estas decisiones puede seguir alguna heurística que en combinación con sus conocimientos o recursos puedan acercarlo a la solución del problema.

En relación con el tercero de estos puntos "*Ejecutar el plan*", se considera que para aproximarse a la resolución del problema, el resolutor debe mantener el control de los recursos que puede usar; cómo los usa y cuándo los usa. Es en este paso donde ha de decidirse si se regresa a la primera fase o a la segunda. Cualquiera de estas decisiones se toma cuando el resolutor considera que lo hecho hasta el momento, no permite avanzar en la resolución del problema. Esta fase nos deja ver que el método de Polya (1965) no es lineal. Se trata más bien de una construcción evolutiva ascendente y en espiral hacia la obtención de la solución al problema planteado.

El último paso, "*Examinar la solución obtenida*", se caracteriza porque ocurre cuando el resolutor ha resuelto ya el problema y necesita revisar si los pasos que le han conducido a obtener la solución, se han dado tal como se planearon previamente. De manera destacada se han de considerar la posibilidad de que haya otro procedimiento para llegar a la solución así como, la obtención de otros resultados que, aunque no se hayan solicitado, pudiesen ser aportaciones valiosas.

El profesor que hace las preguntas a los estudiantes con el fin de que logren avanzar en la resolución del problema lo hace en momentos puntuales y que puede ser en los momentos en que es notorio que se ha producido alguna de las situaciones siguientes:

- El estudiante no consigue avanzar hacia la resolución del problema.
- El estudiante se encuentra inmerso en un entresijo de cálculos que le resulten complicados de manejar.
- El desarrollo seguido por el estudiante le aleje de la solución.
- Cuando las conjeturas sean palmariamente inválidas.

La lista de situaciones que mencionamos no es exhaustiva y en el proceso de resolución pueden surgir otras. Este hecho demanda un monitor (profesor) con unos conocimientos que incluyan las fases propuestas por Polya (1965). El monitor debe tener experiencia en el dominio del problema pero de manera destacada debe tener la capacidad de percatarse cuándo ha llegado el momento de intervenir. Este momento ocurrirá cuando el estudiante se encuentre en una situación que puede calificarse como estática, es decir, una situación en la cual no avanza en el proceso de obtención de la solución del problema.

2.3 EL monitor

Se llama monitor a la persona que acompaña a un estudiante o grupo de estudiantes y observa su actuación al resolver un problema. Este 'acompañamiento' consiste en hacerle preguntas o sugerencias pertinentes, en el momento adecuado. Mason (1988) define el papel del monitor y especifica claramente en qué consiste su actuación:

"*Este monitor actuará, pues, casi lo mismo que un tutor personal que te vigila y te hace las preguntas oportunas, con la ventaja de ser estrictamente personal a tus pensamientos y a tus actos. Y ¿qué clase de cosas puede hacer este monitor?*

- *Vigilar los cálculos para que sigan siendo aplicables al problema. Si te ves envuelto en largos y tediosos cálculos que te van alejando del problema propiamente dicho y te llevan a un callejón sin salida, una resistencia creciente a continuar por ese camino indica que el monitor está inquieto y se empieza a preocupar.*
- *Vigilar la ejecución de un plan (INTENTAR…) para asegurar que no nos lleve demasiado lejos. Una desgana o incomodidad creciente con lo que*

estás haciendo significa que el monitor ya ha comenzado a actuar.

- *Identificar las generalizaciones, por vagas e imprecisas que sean, como conjeturas, y distinguir bien lo que SE, de lo que QUIERO y de lo que PUEDE SER.*

- *Valorar las ideas que se vayan presentando sobre la marcha, para ver si merece la pena seguirlas. La tendencia a rechazar montones y montones de cálculos en un problema que ‹‹parece›› que no los va a necesitar en absoluto, es otro indicio de que el monitor está haciendo su trabajo. El pararse a considerar con calma un plan de acción o una idea antes de saltar a llevarlos a cabo irreflexivamente, es una de las tareas más importantes del monitor.*

- *Darse cuenta de cuando se presenta la situación de ATASCADO y hacer tal conciencia explicita, permitiendo así un cambio de actividad.*

- *Sugerir, si es necesario, un regreso a la fase de abordaje, Con objeto de clarificar lo que SÉ y lo que QUIERO, de particulizar de una manera más sistemática, o bien de adoptar una perspectiva, figura o notación alternativas.*

- *Sugerir modificaciones en el plan de ataque, tratando de generalizar en una dirección distinta, buscando leyes generales subyacentes alternativas.*

- *Examinar críticamente los razonamientos para tratar de detectar lagunas, suposiciones ocultas o errores lógicos.*

- *Exhortar a revisar la resolución completa antes de dar por finalizado el trabajo.*

- *Estar constantemente vigilante hacia el exterior, proponiendo nuevos problemas motivados por cualquier cosa que pase, ya sea en el razonamiento matemático o en la vida diaria. (Mason, 1988:126)*

Un papel fundamental del monitor es el de propiciar que el resolutor se convierta en *monitor interno*. En este papel, el monitor ha de propiciar que el mismo resolutor se plantee interrogantes y haga sugerencias cuando sea alentado a hacerlo. Este auto cuestionamiento se va conformando a través de la experiencia en la resolución de problemas y de la reflexión acerca del proceso de resolución por parte del estudiante.

El monitor debe tener presente que, en general, los estudiantes mantienen la atención en la resolución de un problema, en periodos cuya duración no va más allá de los 10 minutos, antes de suponer que no podrán resolverlo. Esta conducta suele presentarse particularmente en estudiantes con una formación matemática basada en la resolución de ejercicios rutinarios como ocurre a menudo en México.

En un estudio sobre creencias de los estudiantes, Schoenfeld (1992) aplicó un cuestionario a estudiantes del décimo segundo grado de la escuela superior (equivalente al último año de Bachillerato en México). En ese estudio, las últimas dos preguntas del cuestionario fueron las siguientes: ¿Si entiendes el enunciado, cuánto tiempo te tomará resolver un problema de las tareas para realizar en casa? y ¿Cuál es el tiempo razonable que le dedicas a la resolución de un problema antes de saber que es imposible que lo resuelvas? La media para la primera pregunta fue de 2.2 minutos con una muestra de tamaño n = 221). Para la segunda, fue de 11.7 minutos y el tamaño de la muestra fue ligeramente mayor que la anterior (n = 227).

Tanto los pasos que propone Polya como las actividades que propone Mason involucran aspectos relacionados con el papel del monitor interno, además del conocimiento relacionado con el problema. Estos aspectos son llamados *recursos* por Shoenfeld (1985). Para poder avanzar en cada uno de los pasos de la resolución de un problema son necesarios distintos conocimientos o recursos. Para precisar esta idea, en la siguiente sección ampliamos esta noción.

2.4 Los recursos

Polya (1965) supone en el resolutor un conocimiento del dominio donde se plantea el problema. Este hecho se hace evidente cuando en su intento por hacer avanzar al estudiante en la búsqueda de la solución, le dice:

"Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar" o bien *¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?"* (Polya, 1965:19)

De manera análoga, cuando le pide recordar una *definición*, Polya (1965), está evocando el conocimiento relacionado con el problema que posee el resolutor. Debemos asegurarnos que los estudiantes que resuelven el problema tengan, cuando menos, los conocimientos mínimos necesarios para hacerlo.

Por otro lado, Schoenfeld (1985), considera que los recursos no son el único componente por el que una persona fracasa en la resolución de problemas. Para este autor, existe otra componente que influye en este proceso y que no considera Polya (1965). Nos referimos al sistema de creencias.

No obstante, para los fines de nuestro estudio, nos hemos centrado en conocer si los resolutores tienen los conocimientos previos necesarios en el dominio de los problemas que han de resolverse en las sesiones de la unidad. Este aspecto, aparentemente, se hace evidente en nuestro estudio debido a que los estudiantes que participan son alumnos de ingreso reciente al sistema de educación superior. Es decir, estudiantes que recientemente han terminado el bachillerato. En una situación como la descrita, puede suponerse que todos ellos tienen los conocimientos aritméticos necesarios para enfrentar los problemas de combinatoria que habrían de resolver a lo largo de algunas sesiones en las cuales se estudiaría Combinatoria.

Sin embargo, como ya hemos mencionado, no era difícil advertir que se trata de estudiantes que mayoritariamente no han enfrentado algún problema a lo largo de su vida académica y, por tanto, puede suponerse que desconocen estrategias heurísticas propias de la resolución de problemas, específicamente del área de conteo. Schoenfeld (1992) se refiere a estos conocimientos como base de conocimiento.

Para precisar cuáles son los recursos del dominio de adscripción del problema, Schoenfeld menciona y describe los siguientes:

"**Recursos***: Son los conocimiento de Matemáticas que ya posee el individuo y que pueden ser evocados para incidir sobre el problema dado.* Entre ellos se encuentran:

- *Las intuiciones y el conocimiento informal con respecto al dominio*
- *Hechos y definiciones*
- *Los procedimientos algorítmicos*
- *Los procedimientos no-algorítmicos adquiridos como rutinas*
- *Los acuerdos (el conocimiento de la proposición) sobre el estar de acuerdo- en las reglas para trabajar en el dominio" (Schoenfeld, 1985: 15)*

Por otra parte, Lester (1987) incluye también entre tales recursos, los conocimientos que puede utilizar una persona para resolver problemas. De manera destacada, uno de tales conocimientos son las estrategias heurísticas.

En este trabajo exploraremos conocimientos o recursos desde la perspectiva de Schoenfeld (1985). Es decir, partimos del supuesto que los estudiantes tienen conocimientos acerca de determinados hechos. Suponemos también, que conocen y posiblemente recuerdan definiciones, procedimientos algorítmicos y procedimientos no-algorítmicos.

En resumen, el procedimiento para avanzar en la resolución de un problema que seguimos en este trabajo, consiste en hacer las preguntas sugeridas por Polya (1965) a los resolutores, con base en las fases y en los momentos que sugiere Mason (1988). Adecuamos también las actividades del monitor y el concepto de recursos de Schoenfeld (1985).

Hasta aquí, hemos definido qué entendemos por problema y cuáles son sus principales características. Explicamos además el método que seguiríamos para hacer avanzar a un estudiante o a un grupo de estudiantes durante la resolución de un problema. Finalmente hemos precisado lo que entendemos por monitor y mencionamos cuáles son sus intervenciones y el momento de hacerlas a lo largo del proceso de resolución de problemas que habrán de intentar los estudiantes. Además, requerimos determinar la forma en que consideramos la organización del proceso enseñanza-aprendizaje durante las sesiones de la unidad didáctica.

2.5 Investigaciones sobre resolución de problemas

Dentro de la didáctica de las matemáticas, la línea de investigación sobre resolución de problemas constituye, al menos en los últimos años, una de las que presenta un gran número de investigaciones. Dada su amplitud y su diversidad, algunos teóricos han realizado estados de la cuestión con la finalidad de clasificar los tipos de temas abordados, las perspectivas desde las cuales se abordan y la importancia de los componentes básicos que intervienen en la resolución del problema.

Uno de los investigadores que ha trabajado en esta línea es Castro, quien realiza un acercamiento a los campos de investigación actuales en resolución de problemas. Dicho autor reconoce que la resolución de problemas es una extensa área de investigación. Por tanto, una manera de describir y situar un trabajo de investigación en resolución de problemas es el considerar los distintos agentes que intervienen en la resolución y los componentes que lo articulan (Castro, 2008)

Por otra parte, y para cualquier situación relacionada con la didáctica de las matemáticas es necesario tener en cuenta que en toda situación de resolución de los problemas de matemáticas se distinguen o intervienen tres componentes: a) el problema, interrogante o cuestión que se plantea, b) el alumno (o los alumnos) a quien se plantea el problema para que lo resuelva, y c) la situación en que resuelve el problema, que en el ámbito educativo es el aula, manejada por el profesor (Kilpatrick, 1978).

La consideración y la importancia que se otorgue a cada uno de ellos, por separado o conjuntamente, y en interacción con los otros componentes, permite situar distintas líneas de investigación en resolución de problemas en Educación Matemática. Estos tres componentes constituyen las dimensiones de un continuum que permite enmarcar las investigaciones sobre resolución de problemas escolares. En unos casos las investigaciones se centran en una de estas dimensiones, o en más de una, pero sin perder la perspectiva de las otras dimensiones de manera individual o en conjunto.

Una síntesis de los aspectos que han merecido la atención y han estado incluidos en las agendas de investigación a nivel internacional sobre resolución de problemas lo presentamos en la siguiente tabla 2.

Aislamiento de determinantes clave de la dificultad de los problemas, Esquemas en resolución de problemas (Marshall, 1995) Iidentificación de las características de buenos resolutores de problemas; Identificación de estrategias; entrenamiento en heurísticos y estrategias Comparación entre buenos y malos resolutores de problemas (expertos vs. novatos) Metacognición (Flavell, 1976; Garofalo y Lester, 1985; Schoenfeld, 1992). Afectos/creencias en resolución de problemas (DeBellis y Goldin,1997)	Interacciones sociales (Cobo y Fortuny, 2000; Goos, Galbraith y Renshauw, 2002). Resolución de problemas en contexto (resolución de problemas situada) (Greeno, 1991; Greeno, Collins y Resnick (1996) Invención de problemas (English, 1998; Silver y Cai, 1996; Tortosa y Castro, 1997) Evaluación de la resolución de problemas (Charles, Lester y O¨Daffer, 1987; Fernández, 1997) Rpresentación y resolución de problemas (Castro, Morcillo, Castro, 1999; Goldin, 1998a; Lesh, 1997; Schwartz, 1981) Tecnología y resolución de problemas

Tabla 2. Temas de investigación en resolución de problemas (Castro, 2008).

Como podemos observar las temáticas abordadas dentro de la resolución de problemas son muy diversas; no obstante, forzando la situación y con ánimos de simplificar la exposición, si nos atenemos a los motivos prácticos que nos conducen en Educación Matemática a investigar en resolución de problemas de matemáticas, considero que las investigaciones realizadas se pueden agrupar en dos grandes líneas: a) investigaciones sobre cómo enseñar a resolver problemas y b) estudios sobre cómo pensamos cuando resolvemos problemas.

Por tanto, y considerando la clasificación general de Castro (2008) la presente investigación está enmarcada en los temas de investigación de entrenamiento en estrategias heurísticas y aislamiento de determinantes claves de las dificultades de los problemas.

Por otra parte y haciendo una delimitación contextual sobre el estado de la cuestión, identificamos las investigaciones actuales desarrolladas en España en el ámbito de la resolución de problemas. En este sentido Puig (2008) presenta una panorámica general sobre las investigaciones en este campo. Para ello retoma ciertos antecedentes como es el caso del trabajo realizado por Manuel Torralbo quien en el 2003 clasificó como de "Investigación y resolución de problemas" treinta y seis de las ciento treinta y cinco tesis doctorales del ámbito de la didáctica de las matemáticas, que catalogó en el período 1976-1998, . (cf. Torralbo, Fernández, Rico, Maz y Gutiérrez, 2003).

En cuanto a los temas de la resolución de problemas que se abordan, la heurística está presente en varias de sus facetas. Por ejemplo en Cerdán y Puig (1983), se examinaba el potencial heurístico de los problemas del currículo; en Arrieta (1989), la forma de integrar los resultados de la investigación en el currículo, y en Pifarré y Sauny (2001), la enseñanza efectiva de algunas estrategias de resolución de problemas. Otra manera de concebir la resolución de problemas lo encontramos en Alonso, González Carmona, y Sáenz (1988), que la estudiaron a través de lo que llamaron "estrategias operativas".

Por otra parte, El estudio de clases de problemas desde el punto de vista de la contribución de la resolución de problemas a la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos implicados está presente en Castro, Rico y Gil (1992). Para el caso de los problemas aritméticos de enunciado verbal aditivos, identificamos las aportaciones de Bruno y Martinón (1997) para la extensión de estos problemas cuando están presentes en ellos los números negativos.

En los estudios desarrollados por Gascón (1985) y Bosch y Gascón (1994) se presenta el estudio de campos de problemas examinando los detalles de un método general; y otros dos de los últimos artículos publicados hasta la fecha estuvieron dedicados, desde dos puntos de vista distintos, al estudio de los problemas de probabilidad (Huerta, 2002 y Guisasola y Barragués, 2002).

Dentro de esta panorámica general, consideramos que las aportaciones de nuestra investigación se centran en la aplicación y valoración de una unidad didáctica a través de la cual podamos identificar ventajas y desventajas de su implementación así como estrategias de mejora de los procesos de resolución de problemas.

En la siguiente sección describimos definiciones, hechos, procedimientos y estrategias heurísticas que utilizamos en nuestra investigación.

2.6 Definiciones, hechos, procedimientos y estrategias heurísticas propias de la combinatoria

Las razones por las que elegimos la combinatoria es que además de formar parte del contenido curricular del curso de matemáticas discretas es necesaria como recurso para comprender algunos contenidos de la programación lineal, la probabilidad, la estadística, la teoría de juegos, la topología o la teoría de números. Estas asignaturas suelen formar parte de los planes de estudio de las licenciaturas en informática.

Además, nos hemos decantado por el tema de la combinatoria porque coincidimos con Kapur (1970) cuando considera que:

- La combinatoria se puede adaptar a los diferentes niveles educativos y pueden ser resueltos o discutidos con los estudiantes una gran variedad de problemas que los pueden llevar a la necesidad de descubrir nuevos conocimientos matemáticos.

- Los estudiantes pueden ser entrenados en técnicas de enumeración de elementos, en conjeturar, en generalizar y en el desarrollo del pensamiento sistemático.

- Se pueden presentar muchos problemas de aplicación a muchos campos del conocimiento.

En su “Art Congectanding” Bernoulli, manifiesta que el alcance de la combinatoria es más que resolver problemas de permutaciones, ordenaciones y combinaciones. Él lo describe como el arte de enumerar todas las posibles formas en las que un número dado de objetos puede mezclarse y combinarse de tal forma que podamos asegurar que están todas las posibilidades en el resultado.

Además define tres diferentes categorías de problemas combinatorios: problemas de existencia, problemas de conteo y problemas de optimización. Los problemas de existencia centran su atención en determinar si el problema tiene o no solución. Los de conteo investigan cuantas soluciones pueden tener los problemas que conocemos sus soluciones y los problemas de optimización apuntan a localizar la mejor solución para un problema. Para Batanero, Godino & Navarro-Pelayo (1997) existe una cuarta categoría: problemas de enumeración que corresponden a si existe un procedimiento sistemático para listar todos los elementos del conjunto solución del problema.

Consideramos que, como primera experiencia en el estudio de los contenidos de un curso de conocimientos básicos de la combinatoria, el estudiante debe enfrentar problemas en los que interesa saber cuántas soluciones tiene un problema que pueden enumerarse los elementos del conjunto solución.

Existen diferentes tipos de problemas de acuerdo a las operaciones combinatorias (arreglos y combinaciones) que se utilicen para su resolución. Los problemas más sencillos son aquéllos en los que, en general, se necesita saber de cuántas maneras diferentes se pueden desarrollar una tarea que contiene dos actividades, donde la primera actividad se realiza de m maneras diferentes y la segunda de n maneras diferentes. Estos son problemas que se resuelven utilizando la regla del producto.

2.6.1 Regla del producto o Principio multiplicativo

Si un suceso se puede dar de *m* maneras diferentes y después de haber ocurrido, otro suceso se puede dar de *n* maneras diferentes entonces, los dos sucesos se pueden dar de *m x n* maneras diferentes.

Otra forma de expresar el principio del producto Cuando en un conjunto A se tienen m elementos y en un conjunto B se tienen n elementos entonces en el conjunto $A \times B$, formado por todas las parejas de elementos donde el primer elemento es de A y el segundo es de B, hay $m \times n$ elementos.

En general la regla del producto o principio multiplicativo lo podemos definir como sigue:

Si tenemos p conjuntos A_1 , A_2 , $\cdots$, A_n donde el número de elementos de cada conjunto es m_1 , m_2 , ... , m_p entonces el número de elementos del producto cartesiano de los p conjuntos $A_1 \; X \; A_2 \; X \cdots X \; A_p$ es $m_1 \; x \; m_2 \; x \cdots x \; m_p$. También podemos decir, si un primer suceso A_1 se puede dar de m_1 maneras diferente, un segundo suceso A_2 se puede dar de m_2 maneras diferentes y así sucesivamente hasta el suceso A_p que se puede dar de m_p entonces los sucesos juntos se pueden dar de $m_1 \; x \; m_2 \; x \cdots x \; m_p$

No obstante, existen problemas donde la regla de la multiplicación no es suficiente para resolverlos, requiriéndose otro tipo de operaciones combinatorias. Por ejemplo, si requerimos saber de cuantas maneras diferentes puedo elegir a 3 estudiantes de un grupo de 5 para pasar a borrar el pizarrón, no tendremos la solución si aplicamos la regla del producto. A continuación describimos los tipos de operaciones combinatorias que usamos en nuestra investigación.

2.6.2 Modelo Combinatorio

Cuando nos referimos a "Modelo Combinatorio" entendemos cualquier de las cuatro tipos: arreglos con repetición, arreglos sin repetición, combinaciones con repetición y combinaciones sin repetición. Así, cuando en lo escrito por el estudiante en el proceso de resolución de un problema deja constancia que supuso que el orden de los elementos del conjunto solución no es importante y que los elementos no se repiten, establecemos que el estudiante pensó en una combinación sin repetición como modelo combinatorio. El modelo combinatorio deja constancia de que el estudiante pensó si es importante el orden o no lo es y en si hay repetición o no la hay. Mientras que la operación combinatoria, incluye además las operaciones que son necesarias para resolver el problema.

En México se consideran las Permutaciones como un caso particular de las Ordenaciones o Variaciones, cuando coinciden el número de elementos del conjunto inicial con el número de elementos que ordenamos, a diferencia del ámbito anglosajon donde el término permutaciones es sinónimo de ordenaciones o variaciones.

Para Navarro-Pelayo (1994) los problemas combinatorios se dividen en dos clases: los problemas que se pueden resolver con una sola operación combinatoria (problemas simples) y los problemas que se requieren más de una operación combinatoria (problemas compuestos) llamados así por Gascón (1988).

Los problemas simples, que son los que interesan para este trabajo los podemos clasificar, de acuerdo con Dubois (1984), en problemas de selección, de colocación y de partición.

Llamamos problemas de selección aquéllos en los que se pide seleccionar una muestra. Por ejemplo, elegir un comité de tres personas de un grupo de cinco. Llamamos problemas de colocación aquéllos en los que se pide colocar elementos de un conjunto en lugares de otro conjunto. Por ejemplo, colocar tres cartas en 5 sobres. Finalmente, llamamos problemas de partición aquéllos que se relacionan con la idea de partir un conjunto en subconjuntos disjuntos. Por ejemplo, distribuir cuatro automóviles entre tres hermanos, en los que puede suceder que todos los automóviles le toquen a uno sólo de los hermanos.

En Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1997a) y de acurdo con Dubois (1998) los problemas de **selección** de un conjunto de m elementos (generalmente diferentes) sacamos una muestra de n elementos en donde es posible que el orden en que sacamos los elementos de la muestra nos interese o bien, que sea irrelevante. También es posible que se permita repetir uno o varios elementos de la muestra o que no se pueda.

Por tanto, tenemos las siguientes posibilidades:

Cuando el orden en que extraemos los elementos resulta ser importante y no se permite la repetición de elementos estamos ante una ordenación de m elementos sacados de *n* en *n*, al número de estos elementos los denotados utilizando el símbolo O_n^m .

Cuando el orden resulta ser irrelevante y no se permite la repetición de elementos estamos, ante una combinación de *m* elementos tomados de *n* en *n*; al número de estos elementos los denotamos con el símbolo C_n^m

Por ejemplo, el problema 6 del cuestionario corresponde a un problema de selección que se resuelve mediante una combinación sin repetición y el problema 13 corresponde a un problema de selección que se resuelve mediante una ordenación sin repetición (Anexo M1)

En el caso de los problemas de **colocación** entendemos que se trata de colocar *n* objetos en *m* lugares. El resultado de este tipo de problemas depende de:

- Si los objetos a colocar son idénticos o no
- Si los contenedores son idénticos o no
- Si debemos ordenar los objetos antes de colocarlos en los contenedores

Además, es posible otro tipo de condiciones básicas para encontrar la solución al problema, como el máximo número de objetos en los contenedores o la posibilidad de que haya celdas vacías. Por lo que no hay un modelo combinatorio para cada tipo de problema de colocación, puede ser que el mismo modelo combinatorio pueda ser usado en dos problemas de colocación diferentes.

Por ejemplo, Los problemas 3 y 8 del cuestionario están dentro de esta categoría, es decir son problemas de colocación. El problema 3 es un problema de colocación sin repetición, donde los objetos a colocar (las cartas) son idénticos, los contenedores (los sobres) son diferentes y el número máximo de objetos (cartas) es de un elemento en cada contenedor (sobre). El modelo combinatorio utilizado en el proceso de resolución del problema es una combinación. El problema 8 es de colocación sin repetición, donde los objetos a colocar (coches) son diferentes, los contenedores (lugar de estacionamiento) son diferentes y el número máximo de objetos (coches) es de uno. El modelo combinatorio utilizado durante la resolución del problema es un arreglo.

Este tipo de problemas se puede convertir en problemas de selección. El problema 3 puede ser pensado como obtener las posibles maneras diferentes de seleccionar 3 sobres de un conjunto de 4 sobres, sin importar el orden en que son elegidos (las cartas son idénticas). El problema 8 puede ser replanteado como elegir una muestra de 3 lugares de estacionamiento de un conjunto de 5 lugares de estacionamiento donde el orden es importante (los coches son diferentes).

Por último, los problemas de **partición** son aquellos en los que tenemos un conjunto de m elementos y deseamos hacer una partición del conjunto en sub-conjuntos de n elementos. Los problemas de partición pueden ser vistos como problemas de colocación y por tanto de selección.

Los problemas del cuestionario que fueron analizados en este trabajo de investigación y que pertenecen a esta categoría son los problemas 4 y 5.

En el problema 5 tenemos un conjunto de m elementos (4 estudiantes) y deseamos hacer una partición del conjunto en sub-conjuntos de n elementos (2 estudiantes para realizar un trabajo). El problema se puede ver como un problema de colocación en el que queremos colocar m objetos (4 estudiantes) en n contenedores (2 contenedores que formarán las parejas de estudiantes). Este problema de colocación se puede pensar como extraer dos estudiantes de donde hay 4 sin que nos interese el orden.

2.6.3 Estrategias Heurísticas

A continuación mencionamos y describimos las estrategias heurísticas observadas, utilizadas por los estudiantes durante la resolución de los problemas:

a) Tablas de enumeración de datos

Para Besot y Richard (1980), Presci (1994) y Navarro-Pelayo (1994) los métodos de resolución de problemas más usados por los estudiante son los de enumeración y el uso de fórmulas y muchas veces se usa uno de estos para validar el otro.

El uso de este método implica el empleo de estrategias para la enumeración de los elementos del conjunto solución del problema. Estas estrategias van desde las que utilizan un método de ensayo y error hasta las que mediante métodos sistemáticos logran todos y cada uno de los elementos del conjunto solución.

Para English (1993a y b) las estrategias de enumeración empleadas se caracterizan en dos problemas de combinatoria: bidimensional y tridimensional. En cada uno de ellos distingue cinco basadas en el nivel de sofisticación y en el uso sistemático de fijación de elementos. En el caso tridimensional se distinguen dos tipos de elementos que se mantienen fijos y actúan de pivotes: principal y secundario. El principal se fija primero y el secundario es el siguiente a fijar.

Basándose en lo anterior fija las siguientes estrategias:

Estrategia 1: técnica de ensayo y error, con poca o nula presencia de patrones y con menos de la mitad de los elementos secundarios considerados.

Estrategia 2: más eficiente que la anterior. Sin acabar de considerar todos los elementos secundarios, los niños que emplean esta estrategia consideran más de la mitad de ellos. Existe un patrón inicialmente pero llega un momento en que este patrón se abandona.

Estrategia 3: Todos los elementos secundarios son considerados siguiendo claramente un patrón de resolución. Sin embargo, no todas las posibilidades principal-secundaria son tenidas en cuenta en esta estrategia.

Estrategia 4: muy sofisticada, los alumnos que siguen esta estrategia completan un conjunto principal secundario pero no el otro.

Estrategia 5: completan todas las posibilidades de la manera más ordenada y eficiente.

Para esta investigación consideramos solo dos estrategias de las 5 mencionadas anteriormente. Supusimos que el estudiante que estuviera en las estrategias 1 y 2 son personas que no aplicaron un método de enumeración sistemático y los que se encontraran en los supuestos de las estrategias 3, 4 y 5 son los que aplicaron un método sistemático de conteo.

Por lo que las dos posibilidades consideradas para la enumeración en tablas son:

- ✓ Enumeración de los datos a través de un conteo no sistemáticamente es decir, mediante un procedimiento de localización de los elementos por ensayo y error (Estrategias 1 y 2)
- ✓ Enumeración de los datos a través de un conteo sistemático, esto es, mediante un procedimiento recurrente de localización de los elementos (Estrategias 3, 4 y 5).

El término recurrente se refiere a la propiedad de aquellas secuencias en las que cualquier término se puede calcular conociendo los precedentes. De otro modo, se determina el elemento faltante a través de un procedimiento en que se localiza por medio de los ya existentes.

b) Principio del Palomar

El principio del Palomar postulado por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) también llamado Principio de los Casilleros que en términos particulares dice:

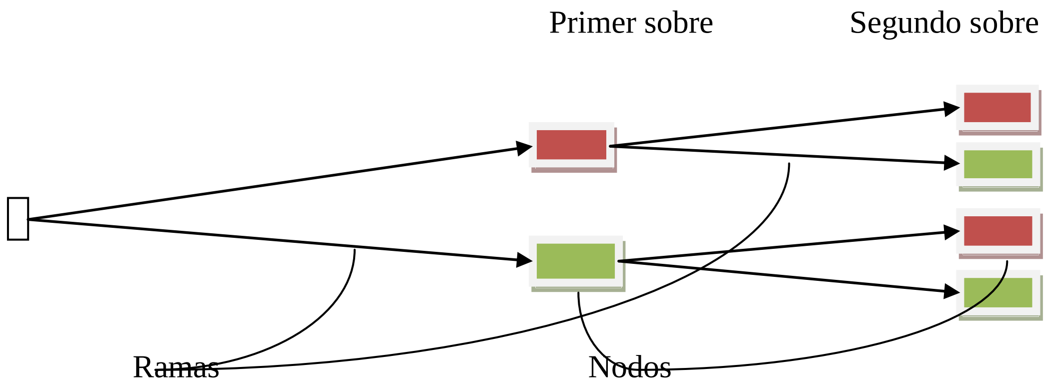
Si tenemos 4 nidos y en ellos duermen 5 palomas, entonces hay al menos un nido con más de una paloma. Esto es, en general, si tenemos n casilleros y p objetos, y queremos introducir en n casilleros los p objetos, donde $p > n$, entonces hay al menos un casillero con más de un objeto.

Este principio ha sido estudiado en varias investigaciones, una de ellas la de Sriraman (2002a y 2003b) estudió la habilidad de los estudiantes de noveno grado para el desarrollo independiente de principios combinatorios cuando se dan cambios de contexto en la resolución de problemas. En uno de los experimentos de enseñanza (Sriraman 2002b, 2003a, 2004a) los estudiantes trabajaron en problemas en los cuales el principio del palomar (el cual declara que si hay n nidos y n+1 palomas, entonces al menos un nido tiene más de una paloma) fue el principio combinatorio fundamental.

c) Diagrama de Árbol

Un diagrama de árbol es una forma gráfica de representar y enumerar todas las posibles formas de combinar los elementos de uno o más conjuntos.

Los diagramas de árbol están construidos por dos elementos: los nodos y las ramas. Por ejemplo, el siguiente gráfica diagrama de árbol representa las posibles formas en que se pueden sacar de una urna 2 sobres de diferente color (rojo y verde), de uno en uno y sin regresar los sobres.



Gráfica: Diagrama de árbol donde los nodos son las cartas y las ramas cada una de las extracciones.

Fischbein (1975) investiga los efectos de la instrucción en niños de entre 10 y 15 años de edad sobre la capacidad combinatoria, para esto experimenta al enseñar con diagramas de árbol y material manipulativo encontrando que estos promueven el razonamiento recursivo, propio de la combinatoria.

Sin embargo, Pesci (1994) afirma que los estudiantes encuentran dificultad para construir diagramas de árbol adecuados para representar situaciones problemáticas y por tanto, los diagramas son la causa de muchos errores.

2.7 Resultados de investigaciones sobre el aprendizaje de la combinatoria

Para el caso específico de las investigaciones en torno al aprendizaje de la combinatoria, de acuerdo con Bharath Sriraman y Lyn D. English (2004), éstas pueden ser rastreadas desde los estudios de Piaget e Inhelder (1951) los cuales desde una visión que podríamos denominar constructivista, abordan la evolución de la noción de probabilidad en niños de acuerdo a sus etapas de desarrollo. Batanero, Navarro-Pelayo, y Godino (1997) proporcionan una narración descriptiva e ilustrativa de las tesis sobre razonamiento combinatorio de Piaget e Inhelder.

Numerosos estudios posteriores al de Piaget han sido conducidos y han llegado a nuevas conclusiones. Las cinco mayores implicaciones para la práctica docente surgen de una síntesis de las investigaciones internacionales más recientes. En este sentido podemos resumir que el uso de problemas combinatorios puede:

- Promover el pensamiento independiente
- Impulsar la flexibilidad en métodos y representaciones
- Impulsar un enfoque en estructuras de problemas
- Alentar a compartir soluciones, y
- Presentar problemas-plantear oportunidades

En la siguiente sección describimos cada una de estos cinco puntos y discutimos investigaciones que se relacionan con ellos. A pesar de que muchos de estos estudios fueron abordados con niños que no han entrado a la educación secundaria los hallazgos se pueden extender a estudiantes de la escuela secundaria. El contexto de la combinatoria se presta de manera natural para entregar a los estudiantes trabajo práctico manipulativo, haciendo de esto un excelente contexto de trabajo para estudiantes en remediación y estudiantes con necesidades especiales, así como un rico contexto para la exploración matemática para todos los estudiantes.

- **Promover el pensamiento independiente**

Para promover el desarrollo de un pensamiento independiente en el alumnado, el profesor puede usar problemas de combinatoria, tales como el de las pizzas o el problema de la torre, los cuales ayudan a los estudiantes a sistematizar su pensamiento.

Por ejemplo, veamos el problema de la torre (Martino y Maher, 1999): dado un conjunto de cubos de plástico iguales de dos colores diferentes, ¿cuantas torres diferentes de una cierta altura pueden ser construidas? Por ejemplo, ¿Cuántas torres de tres cubos pueden ser construidas?

Problemas como estos son particularmente efectivos cuando se presentan en una secuencia que ayude a los estudiantes a descubrir principios generales de los mismos. Los profesores pueden facilitar el proceso de descubrimiento pidiendo a los estudiantes que expliquen y justifiquen su solución. Los estudiantes pueden entonces rechazar algunas de sus ideas originales y pueden modificar, refinar o consolidar sus argumentos originales (Maher y Martino 1996a). Maher y sus colaboradores (Maher y Martino 1996a, 1996b, 1997; Maher y Speiser 1997; Martino y Maher 1999; Muter y Maher 1998; Sepeiser 1997) conducen estudios longitudinales que incluyen un enfoque sobre la evolución matemática de un grupo de estudiantes de los grados 5 al 12 a través del uso de combinatoria y probabilidad. Los problemas de la torre y de la pizza se usaron en este estudio porque permiten la formulación de soluciones que son matemáticamente similares. Estudiantes del cuarto grado que trabajaron con estos problemas descubrieron propiedades de las combinaciones, y estas propiedades se incrementaron desde las imágenes concretas de torres y pizzas. Para el décimo grado, los estudiantes vincularon nociones concretas abstrayendo nociones de combinaciones y del coeficiente binomial en el triángulo de Pascal.

Estos hallazgos no simplemente confirman lo encontrado por Piaget sino en un sentido revelan el crecimiento del acelerado razonamiento combinatorio de los estudiantes que cursan del grado cuatro al diez. En el modelo Piagetano el desarrollo del pensamiento para la solución de problemas de combinatoria, abarca un periodo de tiempo de 11 años, mientras que lo encontrado por los estudios longitudinales conducidos por Maher y sus colegas indican que, con apropiada instrucción, el pensamiento combinatorio de los estudiantes puede desarrollarse sobre estructuras sofisticadas en el periodo de 7 a 8 años. Este incremento en el desarrollo en un menor número de años, depende del uso de tareas apropiadas para facilitar su desarrollo en un intervalo de tiempo muy corto.

Sriraman (2002a y 2003b) estudió la habilidad de los estudiantes de noveno grado para el desarrollo independiente de principios combinatorios cuando se dan cambios de contexto en la resolución de problemas. En este estudio, a los estudiantes se les permitió trabajar independientemente sobre una secuencia de problemas en su jornada en un tiempo prolongado. En uno de los experimentos de enseñanza (Sriraman 2002b, 2003a, 2004a) los estudiantes trabajaron en problemas en los cuales el principio del palomar (el cual declara que si hay n nidos y m palomas con $m>n$, entonces al menos un nido tiene más de una paloma) fue el principio combinatorio fundamental. En este tipo de problemas el principio del palomar es una herramienta adecuada.

Se pide a los estudiantes que resuelvan 5 problemas combinatorios no rutinarios. Los problemas se asignaron con incrementos en el nivel de complejidad en un periodo de 3 meses. Los resultados muestran que aproximadamente el 50 % de los estudiantes fueron capaces de usar intuitivamente el principio del palomar, el que aplicaron a las diversas situaciones representadas en la secuencia de problemas. Asimismo, los estudiantes desarrollaron mejores estrategias a lo largo del tiempo. Los hallazgos revelan que los estudiantes son capaces de descubrir el principio fundamental centrado en la estructura de un problema dado y entender la estructura de un problema dado (Dubinsky 1991; Piaget 1971).

En un estudio diferente (Sriraman 2003a, 2004b), a los estudiantes se les dio una serie de problemas a lo largo de 4 meses. Cuatro de estos problemas fueron dados no secuencialmente, la estructura subyacente es que la solución involucra la construcción de Steiner (STS) que es un arreglo de n objetos en ternas, tal que cualquier par de objetos aparece en una terna exactamente una sola vez.

Para este caso los resultados muestran que más del 50% de los estudiantes fueron capaces de idear estrategias que requieren un alto nivel de abstracción y sistematización para contar todos los posibles arreglos. Estos hallazgos son notables porque los estudiantes fueron capaces de idear estrategias complejas, construir representaciones significativas, abstractas, y generalizar sin instrucción explicita.

Los hallazgos reportados en esta sección son semejantes a los de English (1991, 1993) excepto que en sus estudios, los niños desarrollan sofisticadas estrategias a través de un conjunto de tareas no trabajadas de acuerdo con el nivel de complejidad. Estos estudios son discutidos en el siguiente punto.

- **Impulsar la flexibilidad en métodos y representaciones**

Las situaciones combinatorias se prestan a una variedad de métodos de solución y representaciones. Cuando los estudiantes se enfrentan con nuevos problemas de combinatoria, usan diferentes métodos de solución, como lo muestran las investigaciones contenidas en este artículo, Sriraman (2004). Al mismo tiempo, los estudiantes adoptan varias representaciones en la resolución de estos problemas, incluyendo el uso de dibujos, tablas de listados sistemáticos (y no sistemáticos) y modelos concretos. Es importante que los estudiantes tengan libertad para utilizar diferentes representaciones y modelos y que estos sean alentados a describir y explicar sus acciones. Alentar tal flexibilidad y el análisis crítico de la construcción elegida, es una base en la matemática compleja.

English (1991) explora con niños estrategias para resolver problemas combinatorios. A 50 niños, de entre 4 y 10 años de edad, se les administró una serie de siete tareas que involucran vestimentas de juguetes en cartulina (puestos en percheros) en todas las formas posibles; la vestimenta consiste de camisas y pantalones de diferente color (o algunas camisas de diferente color y faldas con diferente número de botones, para dos de las tareas). El objetivo de las tareas fue vestir los percheros de tal forma que cada perchero tenga un vestimenta diferente (en los colores para las primeras cinco tareas, y en el total del número de botones para las restantes tareas). La complejidad de la tarea se incrementa durante la entrevista. No se proporciona asistencia a los niños.

El resultado de la investigación revela el uso de una serie de estrategias de solución usadas por los niños en la resolución del conjunto de tareas. Estas estrategias van desde selección de elementos al azar a selección de elementos en patrones sistemáticos, reflejando incrementos en la sofisticación de los procedimientos de solución. El procedimiento más eficiente, la estrategia de "cuenta kilómetros", implica repetir la selección de un elemento hasta que todas las posibles combinaciones con este elemento hayan sido formadas (por ejemplo, camisa roja); un nueva constante de elemento es elegida (por ejemplo, camisa amarilla) y el proceso mecánico sistemático se repite. La selección de elementos para combinar con cada nuevo elemento constante despliega un patrón cíclico sistemático (por ejemplo, pantalones azules, pantalones amarillos, pantalones rojos; pantalones azules, pantalones amarillos, pantalones rojos). Los niños que desarrollan esta estrategia "cuenta kilómetros" saben cuándo tienen la solución a la tarea y concluyen que no se pueden formar combinaciones adicionales (por ejemplo, "sé que no puedo hacer más vestidos porque hay tres diferentes camisas y he usado cada par de pantalones tres veces).

Aunque los niños de cuatro a seis años no despliegan aprendizajes significativos a través del conjunto de tareas, con todos los niños de 7 a 9 años se demostraron mejoras considerables en sus estrategias de solución, y 4 de los 26 niños mostraron más eficiencia en los procedimientos sistemáticos que cuando iniciaron la tarea. Un hallazgo interesante encontrado es el uso de la estrategia "cuenta kilómetros" por los niños para validar un procedimiento. Con todo, 29 de los 50 niños usaron la estrategia del "cuenta kilómetros" para formar combinaciones de ternas con los elementos no usados. Un componente significativo en la adopción de estrategias por los niños es su habilidad para usarlo y su capacidad para checar o verificar. Los hallazgos indican que, dado un apropiado contexto, los niños son capaces de producir de forma independiente un procedimiento sistemático para formar combinaciones $m\times n$ antes de alcanzar la etapa de las operaciones formales postulado por Piaget e Inhelder (1951). Aunque este estudio involucra niños que son más jóvenes que los estudiantes de la escuela secundaria, la implicación sigue siendo relevante; es decir, involucrar estudiantes en trabajos con problemas combinatorios puede fomentar la flexibilidad en los enfoques y puede apoyar el desarrollo eficiente, estrategias razonadas. Además, dado que los niños en este estudio mostraron mejoras durante la entrevista, es razonable proponer que los estudiantes trabajen con problemas combinatorios para impulsar el desarrollo de estrategias más eficientes en todos los estudiantes.

La participación de estudiantes en trabajos con problemas combinatorios puede fomentar la flexibilidad en los enfoques y puede apoyar el desarrollo de eficientes, estrategias razonadas.

- **Impulsar un enfoque en estructuras de problema**

Uno de los principales objetivos de la educación matemática es que los estudiantes vean las conexiones y las relaciones entre ideas matemáticas y aplicar este conocimiento a resolver problemas nuevos (Fuson 1992; Hiebert 1986; NCTM 2000). Una implicación de importancia pedagógica en la investigación analizada en este artículo es la elección de los problemas, que varían contextualmente pero que son básicamente similares en su estructura matemática.

En otro estudio con niños jóvenes, English (1999) investiga la estructura de la comprensión de los problemas combinatorios cuando los problemas se presentaron en situaciones diferentes. 32 niños de diez años de edad, fueron examinados en habilidades para:

- Identificar la estructura (o relación) propia de los problemas combinatorios elementales (dos dimensiones [$X\times Y$] y tres dimensiones [$X\times Y\times Z$]),
- representar y resolver problemas que se concretan en:
  - ✓ aplicar el proceso de razonamiento por analogía determinando las estructuras similares y diferencias entre problemas (origen de los problemas),
  - ✓ resolver nuevos problemas relacionados (los ya realizados),
  - ✓ plantear problemas.

Se entregaron los problemas a los niños en dos sesiones de aproximadamente veinte minutos de duración, principalmente en días consecutivos.

Las conclusiones destacan los resultados en relación con su solución en contraposición a la comprensión de la estructura de los problemas. La mayoría de los niños deben resolver los problemas en muchas formas y representar el problema simbólicamente. Sin embargo, tienen dificultades en explicar completamente las estructuras de los problemas bidimensionales *(X×Y)* y raramente pueden identificar los rasgos de multiplicaciones cruzadas de estos problemas. Aunque muchos de los niños registran enunciados multiplicativos, un gran número de estos prefieren la repetición de sumas, sin tomar en cuenta el tipo de representación gráfica que estos emplean (por ejemplo, dibujos, listados sistemáticos, diagramas de árbol). Las representaciones simbólicas de niños para los problemas de tres dimensiones sugieren que los niños carecen de una comprensión completa de su estructura.

Por otra parte, el trabajo de Fischbein y Gazit (1988) señala que los problemas más difíciles antes de recibir una instrucción en combinatoria son los problemas de permutaciones, seguido de las ordenaciones con repetición, ordenaciones sin repetición y los menos difíciles son los de combinaciones. Luego de la instrucción cambia el orden y los que tienen la menor frecuencia de respuesta correcta son las combinaciones y las permutaciones las de mayor respuesta correcta. Además, con relación al tipo de errores ellos encuentran que:

- Multiplican los datos dados en el enunciado del problema.
- Uno de los datos del problema es dado como la solución al problema.
- La persona da un dato como resultado del problema sin que aparentemente tenga relación con los datos.
- Confunde el modelo combinatorio en el uso de las formulas.

Por otro lado, ellos consideran basados en los hallazgos de sus investigaciones que el orden de enseñanza en los modelos combinatorios debe ser: Arreglos con repetición, permutaciones, arreglos sin repetición y combinaciones. Los problemas deben contener elementos simbólicos (dígitos y letras) para más tarde incluir problemas en contextos concretos.

El extenso trabajo de Batanero y sus colegas (e.g., Batanero, Navarro-Pelayo, y Godino 1997) en España, prolongación del anterior trabajo de Fischbein y Gazit (1988), proporciona comprensión significativa sobre el aprendizaje de la combinatoria. En el exploran el razonamiento combinatorio de estudiantes de 14 y 15 años de edad antes y después de la instrucción. Los siguientes tres tipos de problemas se administraron a 720 estudiantes:

- Problemas de Selección, que enfatizan el concepto de muestreo.
- Problemas de Distribución, relacionados con el concepto de función.
- Problemas de Partición, que están relacionados con la división de un conjunto en subconjuntos,

Las operaciones combinatorias involucradas en los problemas anteriores son las combinaciones, permutaciones con repetición, arreglos con repetición, permutaciones y arreglos. La respuesta de los estudiantes al cuestionario antes de la instrucción indica diferencias no mayores en el nivel de dificultad de los tres tipos de problemas. Después de la instrucción hay una mejora en un subconjunto de estos. En conjunto la mejora ocurre en los problemas de selección y en los problemas de arreglos, permutaciones y permutaciones con repetición. En los problemas de distribución la mejora no fue general y no mejoraron en todo lo suscitado en los problemas de partición. Como destacan los autores, estos hallazgos pueden ser explicados por el orden en que las operaciones son introducidas en el currículo español.

Las investigaciones de Roa (2000) para estudiantes universitarios centradas en las estrategias y dificultades de dichos estudiantes con preparación universitaria avanzada y utilizando problemas simples, muestran que los resultados son mejores que los obtenidos por alumnos de secundaria (Navarro-Pelayo, 1994), pero en algunos casos son similares o inferiores. También se encontró que la dificultad de los problemas no depende del modelo combinatorio (problemas de selección, de colocación y de partición), implícito en el enunciado. Sin embargo, se constató que la dificultad aumenta con el tamaño de la solución. Además, halló que con respecto a la operación combinatoria que los resuelve, los más difíciles son los de variaciones con repetición y los más sencillos los de combinaciones.

- **Alentar a compartir la solución**

Recomendamos que los estudiantes compartan la solución de los problemas combinatorios con sus pares. Como consecuencia, deberán describir y explicar cómo llegaron a la solución y por qué consideran que su solución es verdadera y única. Esta práctica de compartir significa que la solución que los estudiantes generan debe sostenerse bajo el escrutinio de otros estudiantes. Además, cuando los estudiantes comparten su solución, estos nos proporcionan conocimiento sobre su comprensión de la combinatoria e importante oportunidad para que sus pares proporcionen retroalimentación constructiva.

Los problemas combinatorios que exigen que los estudiantes ideen eficientes estrategias de clasificación han sido utilizados por Hung (1998a, 1998b, 2000) en Singapur para estudiar conversaciones entre pares de estudiantes mientras resolvían problemas. Hung encontró que los estudiantes son capaces de construir generalizaciones maravillosas descubriendo fórmulas que aplican a situaciones problemáticas.

Los estudiantes también fueron capaces de transferir el concepto usado en un problema para vincular contextos. Hung (2000) toma la hipótesis de que los estudiantes construyen generalizaciones matemáticas potentes cuando son capaces de conectar una relación de problemas resueltos previamente con un problema similar en contextos diferentes completamente.

- **Plantear problemas**

La capacidad para plantear problemas (dentro de la resolución de estos) es importante en la sociedad de hoy en día (Brown y Walter 1993; English 1998; English 2003). En

English (1999), el cual ha sido citado previamente, los 32 niños de 10 años fueron invitados a plantear sus propios problemas usando dos de los problemas dados como base. Los niños han tenido dificultad considerable, con el 41% incapaz de crear un problema sensato o plantear un problema de un tipo diferente, tal como una resta. El 18% de los niños fueron capaces de construir un enunciado de problemas apropiados pero incapaces de plantear una pregunta apropiada, dar un problema sin solución. Solo el 32% pudieron crear un problema con solución, muchos de ellos puestos en uno de los contextos de los problemas dados.

Incluyendo problemas planteados en experimentos con combinatoria, podemos incrementar su acceso a los conceptos combinatorios importantes y procedimientos, además de mejorar su entendimiento de la estructura de los problemas combinatorios. Adicionalmente, cuando los niños crean sus propios problemas combinatorios, necesitan considerar el diseño del problema, esto es, los componentes que hacen construir el problema, tal como el conocimiento o desconocimiento de la información, los objetivos a ser alcanzados y cualquier condición para alcanzarlos (Moses, Bjork y Goldenberg 1993). Esta comprensión del diseño del problema permite a los estudiantes diferenciar los problemas matemáticos de los no matemáticos, de buenos problemas y pobres, y de problemas solubles y no solubles (English de próxima aparición).

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA

En este capítulo describimos las estrategias metodológicas que hemos seguido para acercarnos al conocimiento y la comprensión de la actuación que siguen los estudiantes al resolver problemas de *conteo*. Aunque en la introducción de este trabajo hemos hecho ya una descripción general del escenario en el cual se lleva a cabo esta investigación, en este capítulo recuperamos algunas características distintivas del evento que consideramos relevantes para comprender las acciones que muestran los estudiantes.

Las tareas más relevantes para el diseño de esta investigación han sido: la selección de una muestra de la población; el diseño de una unidad didáctica creada ex profeso para este trabajo; la aplicación de la unidad didáctica así como el diseño y selección de un conjunto de problemas. El esquema de recogida de datos parte del análisis de los protocolos de resolución de los 13 problemas del cuestionario de Navarro y Pelayo (1994) que siguieron dos grupos de estudiantes. Este análisis distingue entre dos momentos: antes y después de recibir un curso de razonamiento combinatorio siguiendo diferentes metodologías de enseñanza.

El diseño del experimento y el tratamiento diferencial aplicado a los dos grupos de estudiantes ha dado lugar a medidas estadísticas tales como porcentajes o pruebas específicas correspondientes a los métodos no paramétricos (Prueba Chi cuadrada y Prueba de McNemar).

3.1 Contexto de la investigación

La presente investigación corresponde a un trabajo desarrollado con estudiantes de nivel universitario. Específicamente, la población bajo estudio consiste de estudiantes de ingreso reciente a la licenciatura en Informática que ofrece la Universidad Veracruzana. Esta universidad se ubica en la ciudad de Xalapa, que es la capital del estado de Veracruz, en México. Es ésta la universidad pública más importante de la zona centro oriental del país.

A pesar de su importancia relativa en el contexto local, las posibilidades de estudiar alguna disciplina en sus instalaciones están fuertemente restringidas debido a los recursos limitados de que dispone tal universidad. Por ejemplo, de los 37.800 egresados del nivel de bachillerato en Veracruz, en el año inmediato anterior, el examen de selectividad permitió que tan sólo 17.500 pudieran cursar alguna de las 62 licenciaturas que pueden estudiarse ahí.

La situación económica dominante en el país, ha tenido un fuerte impacto social en las generaciones actuales, al ver limitadas sus posibilidades de continuar sus estudios. Este hecho, que pudiera parecer intrascendente tiene implicaciones que pueden incidir en el desempeño académico de los estudiantes.

Para admitir a sus estudiantes, la Universidad Veracruzana contrata un servicio de outsourcing para aplicar un examen a cada uno de los aspirantes. Cabe destacar que al ser limitada la oferta de lugares en las diferentes carreras, a menudo los estudiantes se ven en la disyuntiva de elegir entre su área de interés o un área diferente pero que les asegure la continuación de sus estudios. Así, de los 461 aspirantes que solicitaron su ingreso a la carrera de informática, sólo fueron aceptados los 220 estudiantes que obtuvieron los puntajes relativamente mayores, que es el número de estudiantes que pueden admitirse en la Facultad de Informática. Este número está vinculado a la plantilla de profesores que atienden los cursos de la carrera de informática. (http://www.uv.mx/escolar/RESULTADOS/XALAPA.htm)

El servicio de outsourcing que mencionamos en el párrafo anterior lo proporciona el *Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior* (**CENEVAL**). Se trata de una asociación civil -sin fines de lucro- cuya actividad principal consiste en diseñar y aplicar instrumentos de evaluación de conocimientos, habilidades y competencias. Así mismo, se encarga del análisis y la difusión de los resultados de la aplicación de tales instrumentos.

En el caso particular que nos ocupa, el instrumento de evaluación que aplica el **CENEVAL** incluye reactivos de opción múltiple para obtener indicadores de competencias en las áreas: Razonamiento verbal, Razonamiento Matemático, Mundo contemporáneo, Ciencias naturales, Ciencias Sociales, Español, Inglés y Derecho. En cada pregunta, el aspirante debe elegir una de 5 opciones propuestas.

Conviene precisar que el hecho de que los aspirantes consigan superar el examen de ingreso que diseña **CENEVAL**, no garantiza que tengan los conocimientos y habilidades mínimos necesarios para enfrentar exitosamente los programas de la carrera de su elección. Esto puede deberse a que el instrumento de evaluación utilizado no considera el plan de estudios vigente en la mayoría de los bachilleratos del estado de Veracruz y a que el ingreso esté determinado por el número de lugares. En consecuencia, algunos estudiantes que consiguen ser aceptados lo hacen con un puntaje muy bajo.

3.1.1 Bachillerato

Los estudiantes que participan en esta investigación han concluido en el período inmediato anterior los estudios de~~l~~ bachillerato e iniciaban sus estudios en la universidad veracruzana.

Consideramos importante, para los fines de este trabajo, describir las condiciones que acompañan a los estudiantes en la transición del bachillerato a la universidad. Con este propósito, a continuación describimos brevemente los objetivos que se persiguen en el bachillerato, así como los conocimientos que de acuerdo al currículo oficial se han de adquirir en los cursos de matemáticas.

De acuerdo con la Dirección General de Bachilleratos, de la Secretaría de Educación Pública (www.dgb.sep.gob.mx), el bachillerato tiene como finalidad *generar en el educando el desarrollo de una primera síntesis personal y social que le permita su acceso a la educación superior, a la vez que le dé una comprensión de su sociedad y de su tiempo y lo prepare para su posible incorporación al trabajo productivo. Como etapa de educación formal el bachillerato se caracteriza por:*

- *La universalidad de sus contenidos de enseñanza y de aprendizaje.*
- *Iniciar síntesis e integración de los conocimientos disciplinariamente acumulados.*
- *Ser la última oportunidad en el sistema educativo para establecer contacto con los productos de la cultura en su más amplio sentido, dado que los estudios profesionales tenderán siempre a la especialización en ciertas áreas, formas o tipos de conocimiento, en menoscabo del resto del panorama científico cultural.*

Por otra parte, es esencialmente ***formativo, integral*** *y* ***propedéutico***. ***Integral*** *porque considera y atiende todas las dimensiones del educando (cognitivas, axiológicas, físicas y sociales), a fin de consolidar los distintos aspectos de su personalidad.* ***Propedéutico*** *porque prepara al estudiante para ingresar a la educación superior al ofrecerle contenidos de estudio que le permiten adquirir conocimientos, habilidades y valores, en el campo científico, humanístico y tecnológico.* ***Formativo*** *porque no se reduce a la transmisión, recepción y acumulación de información, sino que pretende hacer partícipe al alumno de su proceso educativo, propiciando la reflexión y comprensión de cómo y para qué se construye el conocimiento; esto le permite tener conciencia de las razones que lo fundamentan. Asimismo, le brinda los elementos metodológicos necesarios para entender de manera objetiva y crítica su realidad.*

El plan de estudios y los programas de las diversas modalidades de bachillerato actualmente no son muy diferentes, especialmente en el área de matemáticas. Los programas del plan de estudios que entraron en vigor el semestre Septiembre – Febrero de 2010 incluyen cuatro cursos semestrales de matemáticas que han de enseñarse a lo largo de los primeros cuatro semestres (Álgebra, Trigonometría, Geometría analítica, Cálculo funcional). Adicionalmente, el programa de matemáticas incluye dos cursos que sólo son obligatorios para estudiantes del área técnica.

Actualmente, cada uno de los cursos tiene asignadas cinco horas a la semana para el trabajo dentro del aula. El total de horas semanales es de 80 hrs. El quinto y sexto semestres del bachillerato son considerados como área propedéutica para las carreras universitarias. En consecuencia, las asignaturas correspondientes a este período dependen del área que elijan los estudiantes. Existen cuatro áreas diferentes: humanidades, técnica, económico-administrativa y médico-biológicas. Para quienes han elegido el área técnica, en los semestres quinto y sexto los cursos versan sobre el cálculo diferencial y cálculo integral respectivamente. Para mayor información sobre los contenidos de cada asignatura puede consultarse: www.dgb.sep.gob.mx

Es importante tener presente, para los fines de este trabajo, que la finalidad del currículo de Matemáticas del Bachillerato es desarrollar la creatividad y el pensamiento lógico y crítico de los estudiantes mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que supongan el despliegue de conocimientos, habilidades, actitudes y valores *en la resolución de problemas matemáticos que en su aplicación trasciendа el ámbito escolar.* (El subrayado es nuestro).

3.1.2 Facultad de Informática

En los apartados anteriores hemos descrito de manera general aspectos que permiten contextualizar el escenario en el cual se llevó a cabo la parte experimental de esta investigación. En este apartado ampliamos esta descripción destacando aspectos propios de la institución educativa en la cual trabajamos.

La parte experimental de este trabajo se realizó en el periodo comprendido entre agosto del 2009 y enero del 2010. Los estudiantes sujetos de esta investigación eran alumnos de la Facultad de Estadística e Informática de la Universidad Veracruzana. Todos ellos iniciaban sus estudios y tenían en común el encontrarse tomando la asignatura denominada *Probabilidad y Estadística*.

De acuerdo con lo que muestra la página web de la Facultad de Informática su misión consiste en: … *formar profesionales propositivos, comprometidos con su superación y el avance de la informática; que permanezcan vinculados con las necesidades sociales de su entorno y que comprendan y utilicen de manera analítica, crítica y creativa modelos, enfoques, metodologías y herramientas de la computación en la solución de problemas relacionados con el manejo de la información*.

Actualmente, el plan de estudios vigente de la Facultad de Informática se encuentra divido por áreas de conocimiento.

El área de **formación básica** comprende los cursos:

Computación Básica

Habilidades del pensamiento crítico y creativo

Inglés I

Inglés II

Lectura y Redacción a través del análisis del mundo contemporáneo

El área de **iniciación a la disciplina informática** comprende los cursos:

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Arquitectura de Computadoras I

Álgebra Lineal

Probabilidad y Estadística

Matemáticas Discretas

En general, el nivel de conocimientos elementales necesarios para relacionar hechos, procedimientos o definiciones en la resolución de ejercicios del área de matemáticas no parecía ser un problema para estos estudiantes. Sin embargo, parecía que enfrentaban serias dificultades de aprendizaje cuando se requería una capacidad de razonamiento abstracto para el *planteamiento y resolución de problemas matemáticos*, propios de las asignaturas de esta área.

Es posible que esto se debiera a que en la mayoría de las instituciones de educación básica y de bachillerato, los docentes suelen reproducir el modelo de enseñanza que tradicionalmente han adoptado y en el cual pueden identificarse tres fases:

- Introducción del tema
- Ejemplos realizados por el profesor
- Resolución de ejercicios semejantes a los ejemplificados por el profesor

A pesar de no existir investigaciones en el estado de Veracruz que confirmen lo anterior, podemos mencionar los siguientes elementos que fortalecen nuestra aseveración:

- Los resultados de los diferentes instrumentos de ingreso a la educación superior que año con año se realizan en el estado de Veracruz, muestran resultados pobres en razonamiento matemático por parte de los egresados del bachillerato (Cuesta 2009).
- Los resultados de PISA aplicado a nivel nacional a estudiantes de bachillerato, también lo indican así.
- Las observaciones realizadas en mi práctica docente a lo largo de 21 años.

Por otro lado, los profesores de las asignaturas de matemáticas de la Facultad de Informática en su mayoría desconocen metodologías de enseñanza basadas en la resolución de problemas. Este desconocimiento lo manifestaron en diferentes reuniones que sostuvimos con ellos con el fin de planear la aplicación de la unidad didáctica que se erige como elemento esencial de esta investigación.

En la siguiente sección describimos, de manera general, las etapas que seguimos para dar cuenta del desarrollo de este trabajo de investigación y en las siguientes secciones lo haremos de forma detallada.

3.2 Esquema general de la fase experimental

Las oportunidades de investigación que pueden presentarse en cursos de matemáticas son numerosas tanto por el nivel en el cual se enseñe, como por las características distintivas de cada tipo de asignatura. En el caso concreto de la problemática que hemos elegido para esta investigación nuestro objeto de estudio está delimitado por el objetivo general que nos planteamos:

Analizar y validar una unidad didáctica vinculada con el curso de Matemáticas Discretas para el aprendizaje de los conceptos básicos del tema *conteo* (combinaciones y ordenaciones) y que se erija en herramienta que oriente el trabajo del profesor.

Para asegurar el logro de nuestro objetivo general, planteamos los siguientes objetivos particulares:

- Conocer el tipo de dificultades que tienen los estudiantes antes de trabajar con la unidad didáctica o la unidad temática según sea el caso.

- Conocer las formas de plantear la resolución de problemas.

- Conocer la influencia de los ejemplos y contra ejemplos en el aprendizaje.

- Conocer las dificultades que perduran en los estudiantes después del curso.
- Comparar los logros de la unidad didáctica con otra de corte tradicional.

Para el logro de los objetivos anteriores, las acciones que derivan de ellos las dividimos en tres etapas:

1. Diseño de los elementos de la unidad didáctica y temática
2. Aplicación y experimentación de la unidad didáctica
3. Análisis del proceso de aprendizaje

El diseño de investigación condujo a la división de la población bajo estudio, dando lugar a la conformación de dos grupos de estudiantes que en lo sucesivo denominaremos “Grupo Experimental” y “Grupo de Control”. En el primero caso, los estudiantes y el profesor guiarían el aprendizaje de los temas de combinatoria utilizando la unidad didáctica basada en resolución de problemas. De manera semejante, el grupo de control realizaría el mismo trabajo pero basando su aprendizaje en la unidad temática en la cual el profesor sigue el método tradicional que hemos descrito ya líneas arriba

A continuación, describimos las etapas y las acciones seguidas para el alcance de nuestros objetivos:

3.2.1 Etapa 1: Elaboración de la Unidad Didáctica.

Para la elaboración de las unidades didáctica y tradicional fue necesario determinar los siguientes aspectos relacionados con la fase de experimentación:

- Objetivos del proceso de enseñanza aprendizaje
- Contenidos del curso y su secuenciación
- Actividades y tareas de aprendizaje
- Orientaciones de carácter metodológico para el profesor
- Forma de evaluación

Acciones

<u>Elaboración de la unidad didáctica para profesor y estudiantes</u>

La unidad didáctica es la guía de trabajo del profesor y de los estudiantes del grupo experimental. Tiene la finalidad de informar acerca de los objetivos de enseñanza aprendizaje; establece la secuencia de las sesiones que componen la unidad didáctica; muestra cuáles son las tareas que han de realizarse así como, la forma de evaluación. Esta unidad propone al docente tareas que pueden realizar los estudiantes dentro y fuera de la sesión de clase e incluye algunas orientaciones metodológicas que pueden serle útiles en el desarrollo de cada sesión.

Elaboración de la unidad tradicional para profesor y estudiantes

La unidad que llamamos tradicional difiere del anterior sólo en la metodología de enseñanza que -como hemos mencionado- se caracteriza por el esquema de enseñanza que consiste en: Introducción del tema por parte del profesor; desarrollo de ejemplos por parte del profesor y la resolución de ejercicios semejantes a los ejemplificados por el profesor mismos que han de realizar los estudiantes.

3.2.2 Etapa 2: Aplicación y experimentación

Una vez definidos el grupo experimental y de control, se informó a los estudiantes cuáles eran los objetivos del tema de *combinatoria* y la forma de evaluación de ambas unidades. A continuación se aplicaron ambas unidades didácticas.

La parte relativa a la puesta en marcha del trabajo de enseñanza aprendizaje se centra en el trabajo desarrollado por los estudiantes divididos en ambos subgrupos. El “grupo experimental”, trabajó bajo la dirección de un profesor. En este caso, el investigador participaba como observador para obtener información del proceso de enseñanza aprendizaje. El “grupo de control”, trabajó bajo la dirección de un segundo profesor. En este segundo grupo, un miembro del claustro de profesores de la Facultad de Estadística e Informática anota los problemas que el profesor resuelve en clase y hace un resumen de la metodología de enseñanza aprendizaje que utiliza el profesor en cada sesión.

Acciones

Selección de los grupos experimental y de control

De un grupo de estudiantes de primer ingreso a la Facultad de Informática, inscritos a la asignatura de Probabilidad y Estadística, se seleccionaron dos grupos para formar los dos subgrupos. En este punto, decidimos que al grupo experimental se aplique la unidad didáctica para el aprendizaje de la *combinatoria* mientras que al grupo de control se aplique la unidad tradicional. La selección de estos dos grupos se basó en el análisis del puntaje obtenido por los estudiantes en el examen de selectividad para ingresar la Universidad Veracruzana, realizado en septiembre del 2010.

Información a los estudiantes de los objetivos y la evaluación de las unidades didáctica y tradicional

En la primera sesión de trabajo se informó a ambos grupos, reunidos en el mismo espacio educativo, acerca de los objetivos de la investigación y de la forma de evaluación de ambas unidades. Es en esta primera sesión se aplicó el cuestionario diagnóstico como primer instrumento de recolección de datos de la investigación. (Anexo M1)

Aplicación de las unidades didáctica y tradicional

Estas actividades de enseñanza-aprendizaje se desarrollaron, bajo la orientación del profesor de cada grupo, en las sesiones de clase y con la metodología de aprendizaje correspondiente a cada grupo.

3.2.3 Etapa 3: Análisis del proceso de aprendizaje

El objetivo de esta etapa consiste en describir, interpretar, analizar y evaluar el aprendizaje, antes y después de aplicar las unidades didáctica y tradicional, en los grupos correspondientes. Los datos resultantes de tal aplicación han permitido:

- Identificar algunas dificultades y errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, antes y después de la aplicación de la unidad didáctica y la unidad temática.
- Evaluar la unidad didáctica, la unidad temática y su desarrollo como instrumento de aprendizaje.
- Comparar ambas unidades como instrumento de aprendizaje

Acciones

Organización, codificación y procesamiento de datos obtenidos al dar respuesta a los problemas del cuestionario diagnóstico y final de ambos grupos

Como parte de nuestro análisis definimos un conjunto de variables discretas. Dichas variables corresponden a alguna acción observable en lo escrito por el estudiante mientras intenta resolver los problemas. Las acciones observadas posibilitan dar respuesta a preguntas planteadas en los objetivos de la investigación.

Para el procesamiento de la información elegimos el software estadístico denominado SPSS Statistics 17.0 para windows. Esta elección obedeció fundamentalmente a las siguientes consideraciones.

- Está a disposición de estudiantes y profesores de la Universidad Veracruzana y se encuentra instalado en la mayoría de sus terminales de trabajo.
- Es fácil su uso.

<u>Análisis de los datos obtenidos durante el proceso de resolución de los problemas del cuestionario diagnóstico y final en ambos grupos de estudio</u>

La necesidad de comparar los procedimientos que siguieron los estudiantes y el papel del profesor tutor, surgió a partir de los resultados preliminares que se obtuvieron al analizar las respuestas que los estudiantes dieron a 13 problemas.

Seleccionamos las variables propias de estos problemas, en la hoja electrónica de Excel 2007 (Anexo M2) y se trasladaron al software SPSS para hacer el análisis estadístico correspondiente. De este software estadístico se utilizaron dos herramientas de métodos no paramétricos:

- Tablas de Frecuencias, que usamos para determinar proporciones de algún valor observado.
- Prueba de Chi cuadrada, usada para determinar si la proporción de estudiantes en los que se realizó una observación es diferente, significativamente, con la proporción de estudiantes en los que no se realizó la observación.
- Prueba de McNemar, usada para la comparación de los resultados anterior y posterior al seguimiento de un curso con una unidad didáctica concreta a cada uno de los estudiantes.

<u>Evaluación de la unidad didáctica combinatoria.</u>

La unidad didáctica es el instrumento que utilizaron el profesor y los estudiantes –del grupo experimental- en el proceso enseñanza aprendizaje. La mencionada unidad didáctica, tiene como objetivo desarrollar en los estudiantes el pensamiento matemático propio de la combinatoria. Por lo que, en esta investigación nos enfocaremos en algunas habilidades que pueden propiciarse y que consideramos de importancia para los estudiantes de la facultad de informática.

- definir los modelos combinatorios.
- clasificar problemas según el modelo combinatorio.
- conjeturar
- particularizar y generalizar

- utilizar estrategias heurísticas tales como: diagramas de árbol; el principio del palomar, enumeración sistemática de los elementos de un conjunto o fórmulas propias del modelo combinatorio en la resolución de problemas.

Consideramos de importancia lo anterior debido a que cuando conocemos estas componentes tenemos más posibilidades de elegir un proceso que lleve a la resolución del problema. Consideramos que cuando conocemos una forma de contar sistemáticamente los elementos de un conjunto, tenemos pocas posibilidades de omitir alguno o bien de duplicarlo. Si podemos elegir el modelo combinatorio al que pertenece el problema estamos en condiciones de no tener la necesidad de adivinar el proceso a seguir en la resolución de un problema. Tener conocimientos de estrategias heurísticas para la resolución de problemas combinatorios implica tener herramientas adecuadas para atacar el problema.

Para valorar la unidad didáctica centramos nuestra atención en la evaluación de estas componentes. El propósito ha sido el de determinar los problemas que enfrentan los estudiantes, con el fin de mejorar la Unidad Didáctica. Para lograrlo será necesario hacer las adecuaciones necesarias a la unidad didáctica. Además, debemos considerar los logros en ambos grupos, destacando los logros del grupo experimental en la unidad y adicionando los éxitos del grupo de control.

3.3 Diseño y elaboración de la Unidad Didáctica y del Curso Tradicional.

3.3.1 Unidad didáctica

Una unidad didáctica es básicamente la planificación del proceso enseñanza-aprendizaje de un objeto concreto de conocimiento. Alrededor de dicho objeto se concretan y organizan los elementos más relevantes que contextualizan una práctica docente situada. En el diseño de una unidad didáctica no basta con precisar cuál es el objeto de conocimiento y cuáles son los objetivos que se persiguen. Su diseño está condicionado por elementos tan importantes como:

- a quién va dirigido;
- cuántas sesiones la integran,
- en qué orden deben desarrollarse,
- cuáles son los contenidos de cada una de ellas,

- qué metodología de enseñanza-aprendizaje debe emplearse durante el desarrollo de las secciones ,
- qué actividades, dentro y fuera del salón de clases, deben desarrollarse para el logro de los objetivos de cada sección.
- cómo esperamos evaluar a los estudiantes y
- en qué tiempo se espera alcanzar los objetivos.

La presente unidad didáctica que ha guiado el proceso de enseñanza aprendizaje con los estudiantes participantes en esta investigación está inscrita en la definición anterior y corresponde al área de la matemática y se centra en el estudio de la Combinatoria (Anexo M3).

Como mencionamos, el profesor y los alumnos desarrollaron el tema de *combinatoria* de acuerdo a lo que especificamos en la unidad didáctica. En esta unidad describimos una didáctica específica para el aprendizaje de conceptos básicos de la combinatoria, con base en la resolución de problemas. Se describe además cómo han de llevarse a cabo las actividades a desarrollar durante las sesiones de clase. Estas actividades son: Intervención del profesor; exposición de los estudiantes; trabajo en equipo; trabajo individual y discusión general (Arcavi, A., Kessel, C., Meira, L., y Smith, J., 1998).

A continuación, hacemos una breve descripción de cada una de estas actividades. Cabe mencionar que el orden en que las presentamos no guarda relación con su importancia. La descripción de las actividades no supone que deban seguirse exhaustivamente en una sesión en el aula. Tampoco se especifica la duración de la clase.

a) **Intervención del profesor**

Las intervenciones del profesor, al introducir un tema, han de ser cortas. En todo caso, han de producirse con la finalidad de orientar a los estudiantes en aspectos concretos como: a) Establecer los objetivos particulares; b) Describir la forma de organizar el trabajo de los equipos y en el aula; c) Explicar procedimientos, hechos o heurísticas que permitan a los estudiantes avanzar en la resolución de un problema.

b) **Exposiciones de los estudiantes**

Las intervenciones de los estudiantes pueden ser de manera individual o por equipos para a) Presentar sus argumentos; b) Dirimir ideas que puedan parecer contrarias entre uno o más miembros del equipo; c) Presentar el proceso de resolución de un problema; d) Presentar el proceso de resolución de algún problema dado como trabajo extra escolar; e) Presentar trabajos o tareas a desarrollar fuera del aula.

c) **Trabajo en equipo**

Los equipos podrán integrarse con tres o cuatro estudiantes. El trabajo en equipo tiene como propósito proporcionar a los estudiantes un contexto más o menos estable y continuo para enfrentar colectivamente la resolución de problemas. Se sugiere dedicar a esta actividad el tiempo suficiente en cada sesión para resolver los problemas planteados.

d) **Trabajo individual**

El trabajo individual tiene como propósito evaluar el trabajo de cada estudiante fuera de la sesión. La frecuencia y grado de participación puede obtenerse a partir de la participación individual en el aula o bien, a partir de los reportes escritos que formen parte del portafolio de trabajo de cada estudiante.

e) **Discusión general**

Esta actividad ha de permitir a los estudiantes escuchar y valorar las preguntas y comentarios de sus compañeros; corregir errores cometidos en el proceso de resolución de un problema o aprender a sustentar sus ideas.

Un ejemplo de la implementación de estas actividades, puede ser como sigue: Después de que los estudiantes, agrupados en equipos de tres o cuatro personas *(Trabajo en equipo)*, intenten resolver algunos problemas utilizando sus propios recursos, el profesor y los estudiantes, escucharán algunos de los procedimientos seguidos por otros equipos, *(Exposiciones de los estudiantes y Discusión general).* Si ningún equipo usa alguna de las estrategias de conteo que el profesor quiere introducir, por ejemplo los *diagramas de árbol*, el profesor, ha de tomar la palabra cuando lo considere pertinente. (*Intervención del profesor)* Su intervención la hará para explicar a los estudiantes qué es un diagrama de árbol o bien para hacer las preguntas pertinentes que pueda conducir a los estudiantes a generar alguno.

Como hemos visto todas las actividades están centradas en la resolución de problemas. Por tal razón existen actividades que ha de desarrollar el profesor antes, durante y después de la sesión. Existen también actividades a desarrollar por los estudiantes durante y después de la misma.
Los problemas que desarrollan los estudiantes dentro y fuera del aula, durante las actividades mencionadas en párrafos anteriores, se suscriben al contenido curricular correspondiente a los conceptos básicos de la combinatoria y que especificamos en la siguiente sección.

En la discusión previa que tuvimos con el profesor que estaría a cargo del grupo experimental se le hizo ver la necesidad de tener en cuenta que en los estados iniciales de aprendizaje los estudiantes requieren de un tipo particular de ayuda a lo largo del proceso de resolución de un problema. La ayuda que proponemos ha de apegarse de manera general a los lineamientos establecidos en (Gómez, 2008):

- Plantear interrogantes que provoquen en los estudiantes un avance en la resolución de cada problema de acuerdo con las pautas establecidas en las cuatro fases de (Polya, 1965).

- Determinar el momento en que se debe prestar ayuda a los estudiantes en la resolución de problemas, de acuerdo a las pautas que al respecto propone (Mason, 1988).

- Conjugar la experiencia del profesor con la propuesta de (Schoenfeld, 1992) en relación con el tiempo que cabe esperar antes de suponer que el estudiante ha decidido que no podrá resolver un problema.

3.3.2 Curso tradicional.

La Unidad temática sólo difiere de la Unidad didáctica en la metodología de enseñanza-aprendizaje. Ésta en términos generales puede ser narrada como sigue: el profesor expone en una conferencia los conceptos, hechos y procedimientos que considera importantes de la sesión. A continuación en seguida explica cómo se resuelven algunos problemas (ejercicios) en donde se usan los conceptos, hechos y procedimientos explicados anteriormente por él. Cuando termina de resolver los problemas, pide a los estudiantes que encuentren la solución de un problema que escribe en el pizarrón.

Es importante aclarar que la solución del problema puede ser encontrada usando el mismo procedimiento que utilizó en la resolución de los problemas trabajados previamente, dando lugar a que el estudiante sólo tenga que aplicar el procedimiento para resolver el problema. Después de haber transcurrido a lo más 10 minutos, pregunta al grupo si encontraron alguna solución y cuál es. Esta pregunta tiene la intención de saber cuántos estudiantes y quiénes lograron la solución correcta, ya que en ningún momento hace más preguntas. En seguida el profesor se apropia del pizarrón y explica cómo se resuelve el problema, según su procedimiento. Finalmente el profesor entrega una hoja a los estudiantes que contiene de 2 a 4 problemas que se resuelven utilizando los mismos procedimientos enseñados en el aula que deberán resolver en casa y traer para la próxima clase.

En cuanto al trabajo a desarrollar por los estudiantes asignados al grupo de control, puede suponerse que el profesor hará uso de la unidad tradicional (Anexo M4). Esta unidad se caracteriza por apegarse a lo que cabe denominar *método de enseñanza el tradicional*, mismo que ya hemos descrito anteriormente.

3.4 Diseño de instrumentos para la recogida de datos

La recogida de datos cuantitativos y cualitativos encuentra su origen, por una parte, en el momento mismo donde se desarrolla el hecho didáctico.

Para esta investigación decidimos capturar la información en tres momentos: Antes de iniciar el desarrollo del tema; durante la resolución de los problemas y al final de las unidades didáctica y tradicional.

3.4.1 Instrumentos aplicados antes del desarrollo de las Unidades Didáctica y Curso Tradicional

En la primera sesión de ambas unidades se aplicó el primer instrumento de recogida de datos que denominamos “Cuestionario Diagnóstico”. La aplicación se llevó a cabo en el espacio educativo donde se encontraban reunidos los estudiantes que conformarían los grupos experimental y de control, los dos profesores y el investigador.

Las instrucciones que se dieron a los estudiantes para desarrollar el trabajo con este instrumento fueron expresadas en forma escrita y verbal. En el primer caso fueron las siguientes:

- Escribir en el cuadernillo todas las operaciones que utilicen en la resolución del problema.
- No usar hojas adicionales para escribir.
- No borrar las operaciones que realicen mientras resuelven un problema, sin importar que parezcan erróneas o si en algún momento les parece que no conducirán a la solución del problema. Si ha de desecharse algo, no eliminarlo para que se pueda dar seguimiento a lo escrito.
- La calificación de cada estudiante se determinará en función del esfuerzo realizado para resolver los problemas y de los resultados obtenidos.
- Pueden solicitar un cuadernillo adicional al aplicador del cuestionario cuando lo requieran.

Las explicaciones dadas a los estudiantes de forma verbal fueron las siguientes:

- La disponibilidad del tiempo que requieran para resolver los problemas del cuestionario es total.
- Cuál es el significado de los términos *ejemplo* y *contraejemplo*.
- El trabajo es individual.

- Conveniencia de leer el cuestionario y aclarar cualquier duda que surja.

- Por única ocasión, los estudiantes que participen en esta investigación, podrán obtener un beneficio de hasta 2.5 puntos adicionales a la calificación final de la asignatura de *Probabilidad y estadística*. Estos puntos se distribuirán de la siguiente manera: hasta medio punto por el intento que muestren al resolver los problemas del cuestionario diagnóstico; hasta dos puntos por sus participaciones en cada sesión de trabajo, de acuerdo al resultado y al esfuerzo puesto en la resolución de los problemas del cuestionario final.

Cuestionario diagnóstico

El cuestionario diagnóstico que mostramos en el (Anexo M1) es un instrumento que aplicamos con el fin de obtener información inicial del problema al que nos enfrentábamos. Su aplicación tenía como objetivo conocer el tipo de dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas además de conocer el tipo de estrategias que siguen para encontrar a la solución de los problemas planteados.

La elección de este instrumento de evaluación la hemos incluido porque ha sido usado en otras investigaciones como Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1997a). Este cuestionario contiene problemas que se resuelven considerando ambos modelos combinatorios (ordenaciones y combinaciones); se adapta a los objetivos de esta investigación y sus problemas se adaptan a los objetivos de la asignatura de Probabilidad y Estadística.

El cuestionario se integró con 13 problemas de combinatoria de dos clases. Los problemas que denominamos simples reciben este nombre debido a que se resuelven mediante una sola operación combinatoria. Los problemas que adjetivamos como compuestos, requieren dos o más operaciones del tipo mencionado.

Los problemas 2 y 7 pertenecen a la clase denominada *problemas compuestos* (Gascón, 1988). Los 11 problemas restantes pertenecen a la clase denominada *problemas simples* (Navarro-Pelayo, 1994). Los problemas seleccionados corresponden a la clasificación de Dubois, (1984). En el cuestionario puede distinguirse también la partición que corresponde a cuatro *problemas de selección* (1, 6, 11 y 13); cuatro *problemas de colocación* (3, 8, 9 y 12) y tres *problemas de partición* (4, 5 y 10).

De acuerdo con Dubois (1984), llamamos problemas de **selección** aquéllos en los que se pide seleccionar una muestra. Por ejemplo, *elegir un comité de tres personas de donde hay cinco*. Llamamos problemas de **colocación** aquéllos en los que se pide colocar elementos de un conjunto en lugares de otro conjunto. Por ejemplo, *colocar tres cartas en 5 sobres*. Finalmente, llamamos problemas de **partición** aquéllos que se relacionan con la idea de partir un conjunto en subconjuntos ajenos. Por ejemplo, distribuir cuatro automóviles entre tres hermanos, en los que puede suceder que todos los automóviles le toquen a uno sólo de los hermanos. En cada uno de los problemas del cuestionario, además del enunciado se da a los estudiantes un ejemplo, como ayuda, de una de las soluciones del conjunto solución.

Este momento de recogida de datos, antes de iniciar el trabajo en el aula, está orientado por el objetivo de conocer el tipo de dificultades que pueden tener los estudiantes antes de desarrollar el trabajo tanto con la unidad didáctica como con la unidad temática. Los interrogantes que nos planteamos en este momento fueron:

- ¿Cuál es la proporción de estudiantes que elige de manera adecuada el modelo combinatorio al que pertenece el problema?

- ¿Cuál es la proporción de estudiantes que utiliza tablas, diagramas de árbol, diagramas de caja, fórmula, multiplicación directa de datos u otro tipo de estrategias?

Para determinar si los ejemplos y/o contraejemplos que se dan o que se piden en el enunciado de un problema, son una ayuda para la resolución del problema, nos planteamos los siguientes interrogantes:

- ¿La elección adecuada del modelo combinatorio al que pertenece un problema está relacionado con la posibilidad de dar un ejemplo y/o un contraejemplo del conjunto solución de un problema?

- ¿El ejemplo dado al final del enunciado de un problema de combinatoria es una ayuda para la resolución del problema?

3.4.2 Instrumento aplicado durante el desarrollo de la Unidad Didáctica y temática

Observación no participativa

Como mencionamos anteriormente, el diseño de esta investigación incluye la participación de dos observadores. Uno para el grupo de control y otro para el grupo experimental. El papel de estos observadores se limitó estrictamente a observar y registrar acciones bien definidas de los miembros de cada grupo.

Los observadores recibieron instrucciones para no involucrarse en modo alguno con los roles y el trabajo del grupo. Para los fines de este trabajo, entendemos el término *observación no–participante* la que corresponde a la clasificación que hace (Mc Kernan, 2001). Elegimos esta técnica de observación debido a que permite mirar de forma sistemática y determinante la manera como se desarrolla la vida social sin manipularla ni modificarla (Ruia e Ispizú, 1989). En todo caso, la tarea de cada observador está orientada por los siguientes objetivos:

- Registrar los problemas que el profesor utiliza en cada sesión.

- Elaborar un resumen de las características más destacadas en la metodología de enseñanza empleada por el profesor en cada sesión.

Los contenidos de tales registros permitirían discutir posibles adecuaciones al método empleado por el profesor del grupo experimental. En relación con el grupo de control, permitirían conocer si el profesor ha recurrido, en todas las sesiones, al método tradicional como instrumento de enseñanza aprendizaje.

3.4.3 Instrumentos aplicados al finalizar las unidades didáctica y temática

El instrumento empleado en este momento fue el cuestionario final que como mencionamos anteriormente es el mismo que el cuestionario diagnóstico.

Cuestionario final

Una semana después de haber concluido la última sesión de trabajo con ambos grupos, se aplicó un cuestionario que contenía exactamente las mismas preguntas que las del cuestionario diagnóstico (Anexo M1). Llamamos a este instrumento "Cuestionario Final" (Anexo M5) mismo que se aplicó a ambos grupos reunidos en un mismo espacio y en presencia de sus profesores y del investigador.

De manera semejante a la primera aplicación, antes de que los estudiantes diesen respuesta al cuestionario se les dieron las mismas instrucciones que les fueron dadas en el cuestionario diagnóstico:

- Tienen el tiempo que consideren necesario para resolver los problemas del cuestionario

- El significado de ejemplo y contraejemplo

- Se les recuerda que el trabajo es individual

- Se les pide leer el cuestionario y aclarar las dudas que consideren pertinentes

El objetivo del cuestionario final era conocer las dificultades que perduran en los estudiantes después de enfrentar la unidad didáctica o la unidad tradicional según el caso y comparar los logros entre los dos grupos.

Los aspectos que hemos mencionado hasta este punto, tienen el propósito de abordar el problema de investigación. Con el objetivo de conocer las dificultades que tienen los estudiantes después de enfrentar la unidad didáctica o la unidad temática, nos planteamos las siguientes interrogantes:

- ¿Mejora la capacidad de los estudiantes de seleccionar el modelo combinatorio que conduzca a resolver un problema después de cursar las unidades didáctica o la tradicional?

- ¿Perdura o se modifica el uso de la multiplicación o de la suma de datos dados como heurística de resolución después de cursar las unidades didáctica o tradicional?

- ¿Son diferentes las estrategias heurísticas elegidas por los estudiantes en la resolución de los problemas de la prueba final al término de la Unidad Didáctica o la Unidad Tradicional, que las utilizadas en la prueba diagnóstica?

- ¿Utilizan más estrategias, para la resolución de problemas del cuestionario final, los estudiantes del grupo experimental que los estudiantes del grupo de control?

- ¿Cuáles son algunos de los errores que comete un estudiante cuando utiliza un método de conteo sistemático, un diagrama de árbol, el principio del palomar (diagrama de caja) o una fórmula?

3.5 Selección de estudiantes y profesores de los grupos experimental y de control

En esta sección describimos el proceso utilizado para elegir a los estudiantes que participan en la investigación, el método utilizado para asignarlos a cada uno de los dos grupos, el grupo de control y el experimental y el proceso de selección de los docentes que tendrán la tarea de llevar a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje a través de la unidad didáctica, en uno de ellos y el otro de la unidad tradicional.

3.5.1 La selección de los estudiantes de los grupos experimental y control

Para la selección de la muestra se eligieron los estudiantes inscritos en la asignatura de Probabilidad y Estadística en el grupo vespertino. El grupo en cuestión tiene 39 estudiantes.

Para asignar estudiantes al grupo experimental y al grupo de control de estos 39 se procede de la siguiente forma: Se ordenan los estudiantes, de mayor a menor, de acuerdo al puntaje logrado en el examen de admisión; se construyen dos listas, asignando al de mayor puntaje a una lista y el estudiante siguiente a la otra lista, y así sucesivamente. Consiguiendo de esta manera dos grupos, uno de 20 estudiantes y otro de 19 estudiantes.

Después de sortear los grupos, en presencia de cada uno de los docentes que se encargan de impartir las unidades didáctica y tradicional, 19 estudiantes quedan asignados al grupo experimental y 20 al grupo de control. Sin embargo, después de presentar el cuestionario diagnóstico, 5 estudiantes del grupo experimental y 2 del grupo de control, tomaron la decisión de darse de baja en la materia.

Por lo que el grupo experimental lo constituyeron 14 estudiantes y el de control 18. Todos ellos permanecieron en el aula durante las cuatro sesiones que conforman las unidades didáctica y tradicional.

3.5.2 La elección de los docentes del grupo de control y experimental

Para seleccionar a los profesores que podrían participar en nuestra investigación consideramos que en ambos casos, los docentes participantes debían poseer cuando menos, las siguientes características:

- Tener gusto por la resolución de problemas.
- Tener experiencia en resolución de problemas de combinatoria.
- En el caso del profesor del grupo de control, estar convencido de que el método de enseñanza tradicional (unidad tradicional) aporta conocimientos, al menos, equivalentes a los métodos de enseñanza a través de la resolución de problemas.
- En el caso del profesor del grupo experimental (unidad didáctica), estar convencido de que el método de enseñanza a través de resolución de problemas aporta más beneficios a los estudiantes.

Para el grupo experimental se selección al profesor por tener las siguientes cualidades. De manera destacada hemos considerado que se ha graduado en la Licenciatura de Matemáticas que imparte la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana. Posee además una Máster en Matemáticas pero, sobre todo, le gusta resolver problemas. Con esta base, puede suponerse que el Profesor no ha adquirido las prácticas viciadas que hemos mencionado anteriormente ya que cuenta con 8 años de experiencia docente en la Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana.

Otros aspectos que consideramos han sido: su destacada participación en la Olimpiada de Matemáticas el año 1992 en el que obtuvo el tercer lugar nivel nacional cuando estudiaba el bachillerato. El entusiasmo de este profesor le ha llevado, en varias ocasiones, a mencionar la necesidad de inducir a los estudiantes a adentrarse en la resolución de problemas. En consecuencia, aceptó y mostró su disposición cuando se le propuso participar en esta investigación, en el grupo experimental. Debemos mencionar que, como todos los maestros de matemáticas de la Facultad de Informática usa una metodología de enseñanza de corte tradicional.

En cambio, para desarrollar el trabajo con el grupo de control se seleccionó un profesor que cuenta con 28 años de experiencia como profesor de diferentes cursos de la disciplina matemática. Él también ha egresado de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Veracruzana. Actualmente imparte cursos de Lógica, Álgebra Lineal o Cálculo en la Facultad de Estadística e Informática de la misma universidad. Por su trayectoria, tiene un alto prestigio con los estudiantes como buen expositor. El es un apasionado del método de enseñanza tradicional con lo cual, no resultó extraño que hubiese manifestado su interés por participar en el proyecto trabajando precisamente con el grupo de control.

3.6 Los procesos de recogida y análisis de datos

Después de aplicar los instrumentos de recogida de datos es necesaria una abstracción de propiedades de la información a observar, para responder a las preguntas de la investigación, que nos permita hacer análisis mediante técnicas estadísticas apropiadas que permitan: su descripción, la determinación de correlaciones y la posibilidad de analizarla cualitativamente.

3.6.1 Análisis Cuantitativo.

La abstracción de las propiedades de la información puede hacerse a través de la codificación de la información. Para esto es conveniente definir variables que tomen valores de acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes, al intentar resolver los problemas del cuestionario (Anexo M6). Por ejemplo, definimos la variable "OVVE" que toma valores de acuerdo a la respuesta a la pregunta ¿el ejemplo dado por el estudiante es verdadero?

La información resultante es un conjunto de variables, cuyos valores están dados en escala nominal, para cada pregunta que se plantea en los objetivos de la investigación. Por ejemplo, en la función OVVE los tipos posibles de respuesta observadas son: *no es verdadero el ejemplo; es verdadero el ejemplo; no escribió el ejemplo o no contestó el problema ni el ejemplo*. Con el fin de aplicar métodos estadísticos tales como: tablas de frecuencias y algunas pruebas propias de la estadística no-paramétrica, procedimos a codificar las respuestas dadas por los estudiantes. Por ejemplo, en el caso de la variable OVVE decidimos que toma el valor 0 cuando el ejemplo dado por el estudiante no es verdadero, toma el valor 1 si es verdadero, etc.

En los próximos apartados definiremos las variables utilizadas para analizar cada pregunta planteada en los objetivos, los valores que toman cada una de las variables que corresponden a la acción del estudiante y los métodos estadísticos empleados para dar respuesta a las preguntas de los objetivos

3.6.1.1 Definición de Variables

Los símbolos que utilizamos para hacer referencia a las variables son una combinación de letras y números que aparecen en el orden: seguido de un conjunto de letras hay un número, que refiere al problema al que pertenece la variable y luego, la letra D o F que especifica el cuestionario al que pertenece el problema (Diagnostico o Final). Por ejemplo, las siguientes son algunos nombres de variables usados en esta investigación: PA6D, O13D, F4F, OVVE5F

Así, el nombre de variable PA6D de significa:

PA: corresponde a la pregunta ¿El estudiante uso el principio del palomar en la resolución del problema?

6: indica que el problema del cuestionario al que corresponde la variable es el 6 y,

D: muestra que el problema es del cuestionario diagnóstico.

Por lo tanto, la variable PA6D significa: ¿El estudiante uso el principio del palomar en la resolución del problema 6 del cuestionario diagnostico? Los valores que toma la variable PA6D dependen de la respuesta que se dé a la pregunta.

Para distinguir variables que pertenecen al grupo experimental o al grupo de control, denotamos: PA6D, para significar que la pregunta está referida al grupo experimental y PA6D_1 para el grupo de control.

Existen variables que corresponden a ambos grupos (experimental y control) que utilizamos durante el análisis. Para distinguir estas variables usamos, al final del número de problema, la notación DD_1 o FF_1 para considerar ambos grupos en el cuestionario diagnostico o en el cuestionario final, respectivamente.

Por ejemplo, la variable T6DD_1 representa las respuestas a la pregunta: ¿El estudiante del grupo experimental o del grupo de control uso un diagrama de árbol para resolver el problema 6 del cuestionario diagnostico?

Algunas variables son comunes a todos los problemas, mientras otras son propias del tipo de problema que analizamos. También hay constantes y variables especiales que se utilizan para el manejo del paquete estadístico SPSS.

3.6.1.2 Metodología estadística empleada para el análisis de datos

Uno de los objetivos de este trabajo de investigación incluye la comparación de los resultados anterior y posterior al seguimiento de un curso con una unidad didáctica concreta a cada uno de los estudiantes. En consecuencia, el análisis de los datos obtenidos lo hemos hecho con base en la prueba de McNemar.

En la investigación en ciencias sociales como es el caso que nos ocupa, se presentan situaciones donde un individuo actúa como su propio control. En tales casos se cuenta con pares de observaciones tomadas de un mismo individuo. Una de ellas corresponde al estado anterior al tratamiento y la segunda, al estado después de haberse aplicado algún tratamiento. La prueba de McNemar es bastante apropiada para este tipo de problemas, ya que cada pareja observada puede clasificarse en una de dos categorías excluyentes, lo que permite usar información referida a escala nominal. (Ojeda, 2008)

Hemos utilizado también la prueba χ^2 (Ji-cuadrada) para determinar si la proporción de estudiantes en los que se realizó una observación es diferente, significativamente, con la proporción de estudiantes en los que no se realizó la observación.

La prueba Ji-cuadrada puede usarse inclusive para variables que tengan escala nominal de medida. Se aplica cuando se desea probar si una muestra aleatoria $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, proviene de una población con función de probabilidad F0 o ¿?no; es decir, el sistema de hipótesis es:

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \text{ } vs \text{ } H_a : F(x) \neq F_0(x)$$

Además, utilizamos tablas de frecuencias para hacer comparaciones visuales entre algunas variables.

A continuación, definimos cada variable utilizada para responder a una de las preguntas de los objetivos de esta investigación. Para facilitar su lectura, en la Tabla 3.1 escribimos primero la pregunta; enseguida escribimos las variables que se usan para responderla y finalmente, el método estadístico empleado para el análisis así como algunas observaciones.

Pregunta	Variables y la pregunta que representan	Valores que pueden tomar estas variables	Metodología de análisis	Observaciones
¿Qué proporción de estudiantes elige de manera adecuada el modelo combinatorio al que pertenece el problema?	OMN: Representa la respuesta a la pregunta: ¿El estudiante considero el modelo combinatorio adecuado?	1, si eligió bien el modelo combinatorio y 0, en otro caso.	Tablas de frecuencias	Respondemos a la pregunta considerando el grupo experimental y de control por separado y después uniendo ambos grupos. En algunos procedimientos de resolución de problemas usados por los estudiantes no es evidente la elección del modelo combinatorio. Por tal razón, juzgamos que el estudiante no considera el modelo combinatorio apropiado cuando realiza alguna de las siguientes acciones: Una suma o un producto de los datos dados en el enunciado para dar la solución al problema. No intenta resolver el problema. Sólo escribe el resultado.
¿Cuál es la proporción de estudiantes que utiliza heurísticas como: tablas; diagramas de árbol; regla del palomar (diagrama de caja); fórmulas, multiplicación directa de los datos o bien, otro tipo de estrategias diferentes en cada uno de los grupos?	MD: ¿El estudiante consideró una suma o multiplicación de los datos dados en el enunciado del problema? T: ¿El estudiante consideró una tabla para enumerar los elementos del conjunto solución del problema? F: ¿El estudiante consideró durante el proceso de resolución del problema alguna fórmula propia de la combinatoria (ordenaciones, combinaciones o permutaciones)? PA: ¿El estudiante consideró durante el proceso de resolución del problema la regla del palomar (diagrama de caja)? DA: ¿El estudiante consideró durante el proceso de la resolución del problema un diagrama de árbol?	0: no la consideró 1: sí la consideró	Tablas de frecuencias	Respondemos a las preguntas anteriores para los grupos experimental, de control y uniendo ambos grupos. Cuando un estudiante usa más de una estrategia durante el proceso de resolucion del problema, contabilizamos cada una de ellas en el análisis de los datos. Consideramos como uso de una tabla cuando el estudiante escribe un conjunto de posibles soluciones aunque estas no se encuentren ordenadas en filas y columnas
¿La elección adecuada del modelo combinatorio al que pertenece un problema está relacionada con la posibilidad	OMN: variable ya definida anteriormente OVVE: ¿el estudiante escribió un ejemplo verdadero del	OVVE: 0: ejemplo falso. 1: ejemplo verdadero. OVVC:	Prueba de Ji cuadrada (χ^2)	Para dar respuesta a la pregunta consideramos ambos grupos unidos en un sólo grupo.

de dar un ejemplo y/o un contraejemplo del conjunto solución de un problema?	conjunto solución del problema? OVVC: ¿el estudiante escribió un contraejemplo verdadero? OVVEC: ¿el estudiante escribió un ejemplo y un contraejemplo verdaderos? OMNOVVE: variable compuesta por las variables OMN y OVVE OMNOVVC: variable compuesta por las variables OMN y OVVC OMNOVVEC: variable compuesta por las variables OMN y OVVEC	0: contraejemplo falso. 1: contraejemplo verdadero. OVVEC: 1: el ejemplo y el contraejemplo son verdaderos. 0: en cualquier otro caso OMNOVVE: 1: si OMN y OVVE toman valores iguales. 0: en cualquier otro caso OMNOVVC: 1: si OMN y OVVC toman valores iguales. 0: en cualquier otro caso OMNOVVEC son: 1: si OMN y OVVEC toman valores iguales. 0: en cualquier otro caso		Además, usamos el cuestionario diagnóstico para el análisis de las respuestas.
¿El ejemplo dado al final del enunciado de un problema de combinatoria es una ayuda para la resolución del problema?	OMN: variable ya definida anteriormente SCRN: ¿el estudiante considera que Sota, Caballo y Rey son inseparables, que deben estar en el orden SCR y que cualquier carta numerada debe estar al final de estas como en el ejemplo dado en el enunciado del problema, esto es, S, C, R, 1? NSCR:¿el estudiante considera que Sota, Caballo y Rey son inseparables, que deben estar en el orden SCR y que cualquier carta numerada debe estar al inicio de estas como en el siguiente ejemplo 1, S, C, R? JSCR: ¿el estudiante considera que las cartas Sota, Caballo y Rey son inseparables, que deben estar en el orden SCR y que cualquier carta numerada debe estar al inicio o al final de estas?	SCRN: 0: no lo considera. 1: lo considera. NSCR: 0: no lo considera. 1: lo considera. JSCR 0: no lo considera. 1: lo considera.	Tabla de Frecuencias.	Para dar respuesta a la pregunta consideramos ambos grupos unidos en un sólo grupo. Además, usamos el cuestionario diagnóstico para el análisis de las respuestas.
¿Después de cursar la Unidad Didáctica o la Unidad Tradicional mejoran la elección del modelo combinatorio que resuelve el problema?	OMN: variable ya definida anteriormente	0: si no elige el modelo combinatorio adecuado. 1: en cualquier otro caso	Prueba de McNemar	Para dar respuesta a la pregunta consideramos la variable OMN para el cuestionario diagnóstico y para el final en el grupo experimental y en el grupo de control.
¿Los estudiantes dejan de usar como estrategia heurística la multiplicación o suma de datos dados en el enunciado del problema, después de cursar la Unidad Didáctica o la Unidad Tradicional?	MD: variable ya definida anteriormente.		Prueba de McNemar	Para dar respuesta a la pregunta consideramos la variable MD para el cuestionario diagnóstico y final en el grupo experimental y en el de control.

¿Son diferentes las estrategias heurísticas elegidas por los estudiantes en la resolución de los problemas de la prueba final al término de la Unidad Didáctica o la Unidad Tradicional, que las utilizadas en la prueba diagnóstica?	FPDA: ¿el estudiante usa en el proceso de resolución del problema una formula, el principio del palomar (diagrama de caja) o un diagrama de árbol?	FPDA: 0: no usó otra estrategia heurística diferente a la de sumar o multiplicar los datos del enunciado del problema, o la de usar una tabla. 1: usó una diferente (fórmula, principio del palomar o diagrama de árbol u otras).	Prueba de McNemar	Para dar respuesta a la pregunta consideramos la variable FPDA para el cuestionario diagnóstico y final en el grupo experimental y en el de control.
¿En qué tipo de problemas los estudiantes del grupo experimental son mejores para elegir el modelo combinatorio que resuelve el problema que los estudiantes del grupo de control?	OMN: variable ya definida anteriormente.		Prueba de McNemar	Para dar respuesta a la pregunta consideramos la variable OMN para el cuestionario diagnóstico y final en el grupo experimental y en el de control.
¿Utilizan más estrategias, para la resolución de problemas del cuestionario final, los estudiantes del grupo experimental que los estudiantes del grupo de control?	FPDA: variable ya definida anteriormente.		Prueba de McNemar	Para dar respuesta a la pregunta consideramos la variable FPDA en el cuestionario final de los grupos experimental y de control.
¿Cuáles son algunos de los errores que comete un estudiante cuando utiliza un método de conteo sistemático, un diagrama de árbol, el principio del palomar (diagrama de caja) o una fórmula?			Análisis de casos.	

Tabla 3.1 Variables, significado de las variables, valores que toman, método estadístico empleado y observaciones.

El valor que toma cada variable por estudiante y tipo de grupo al que pertenece el estudiante aparece en el Anexo M7.

3.6.2 Análisis Cualitativo

Las siguientes preguntas no fueron consideradas dentro del análisis cuantitativo ya que el número de elementos en las categorías observadas es muy pequeño, de uno a tres estudiantes.

Pregunta: ¿Cuáles son los errores que comete un estudiante cuando utiliza un método de conteo sistemático?

Pregunta: ¿Cuáles son los errores que comete un estudiante cuando usa un diagrama de árbol para resolver un problema?

Pregunta: ¿Cuáles son los errores que comete un estudiante cuando utiliza un diagrama de caja para resolver un problema

Pregunta: ¿Cuáles son los errores que comete un estudiante cuando utiliza una fórmula para resolver un problema?

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

En este capítulo damos respuesta a las preguntas que nos planteamos en cada uno de los objetivos específicos de nuestra investigación. Decidimos escribir cada pregunta y luego presentar la respuesta o respuestas a cada una con objeto de hacer la lectura lo más sencilla y clara posible.

Con el fin de justificar las respuestas hacemos uso de tablas de frecuencias y pruebas estadísticas que pertenecen a los métodos Estadísticos No Paramétricos. Además, usamos ejemplos que aclaren las acciones que llevan a cabo los estudiantes y que son de interés en nuestro análisis. Sólo desglosamos las pruebas estadísticas en los casos en que encontramos evidencia para rechazar la hipótesis nula.

Para guardar el anonimato de los estudiantes y de los profesores que participaron en la investigación, nos referimos a ellos usando dos letras mayúsculas.

4.1 PREGUNTA 1

OBJETIVO: Conocer algunas dificultades que tienen los estudiantes antes de cursar la unidad didáctica o la unidad temática

PREGUNTA: ¿Cuál es la proporción de estudiantes que elige de manera adecuada el modelo combinatorio al que pertenece el problema?

<u>Cálculo de la proporción de estudiantes, del grupo experimental (Tabla 1R), grupo de control (Tabla 2R) y ambos grupos juntos (Tabla 3R), que eligieron el modelo combinatorio adecuado en la resolución de los problemas 6, 13, 3, 8, 5 y 4 del cuestionario diagnóstico.</u>

En las Tablas (1R, 2R y 3R) presentamos el porcentaje de estudiantes que no eligieron el modelo combinatorio adecuado en los problemas 6, 13, 3, 5, 8 y 4 en el renglón marcado con 0. En el señalado con 1 aparecen los porcentajes de estudiantes que eligieron el modelo combinatorio adecuado a los problemas y en el renglón señalado con la palabra Total escribimos la suma de ambos.

En primer lugar presentamos la Tabla 1R, en ella, nos referimos a los estudiantes del grupo experimental. En segundo lugar, la Tabla 2R presenta los del grupo de control y por último en la Tabla 3R los estudiantes de ambos grupos.

TABLAS DE ELECCION CORRECTA O INCORRECTA DEL MODELO COMBINATORIO

	Selección		Colocación		Partición	
	Problema 6 Combinación	Problema 13 Ordenación	Problema 3 Combinación	Problema 8 Ordinación	Problema 5 Combinación	Problema 4 Ordenación
0	71%	86%	50%	71%	36%	50%
1	29%	14%	50%	29%	64%	50%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tabla 1R: Frecuencia de elección del modelo combinatorio de forma correcta o incorrecta, en cada problema en el grupo experimental.

	Selección		Colocación		Partición	
	Problema 6 Combinación	Problema 13 Ordenación	Problema 3 Combinación	Problema 8 Ordinación	Problema 5 Combinación	Problema 4 Ordenación
0	56%	72%	56%	78%	28%	50.0%
1	44%	28%	44%	22%	72%	50.0%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tabla 2R: Frecuencia de elección del modelo combinatorio de forma correcta o incorrecta, en cada problema en el grupo de control.

	Selección		Colocación		Partición	
	Problema 6 Combinación	Problema 13 Ordenación	Problema 3 Combinación	Problema 8 Ordinación	Problema 5 Combinación	Problema 4 Ordenación
0	63%	78%	53%	75%	31%	50.0%
1	37%	22%	47%	25%	69%	50.0%
Total	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Tabla 3R: Frecuencia de elección del modelo combinatorio de forma correcta o incorrecta, en cada problema en ambos grupo.

Las Tablas (4R, 5R y 6R) muestran en el renglón llamado CS el número de estudiantes que usó durante la resolución de problemas Conteo Sistemático y en el renglón denominado CSYRC los estudiantes que mediante el conteo sistemático lograron la solución del problema. Esta información la presentamos a continuación en tres tablas que corresponden a la del grupo experimental, del grupo de control y a la de ambos grupos.

TABLAS DEL USO CORRECTO DEL CONTEO SISTEMÁTICO

	Problema 6	Problema 13	Problema 3	Problema 8	Problema 5	Problema 4
CS	2	2	7	2	6	2
CSYRC	0	0	4	0	4	0

Tabla 4R: Uso del Conteo Sistemático en el examen diagnostico por parte de los estudiantes del grupo experimental y efectividad del mismo para encontrar la solución del problema.

	Problema 6	Problema 13	Problema 3	Problema 8	Problema 5	Problema 4
CS	9	3	8	3	7	6
CSYRC	2	2	5	0	1	0

Tabla 5R: Uso del Conteo Sistemático en el examen diagnóstico por parte de los estudiantes del grupo de control y efectividad del mismo para encontrar la solución del problema.

	Problema 6	Problema 13	Problema 3	Problema 8	Problema 5	Problema 4
CS	11	5	15	5	13	8
CSYRC	2	2	9	0	5	0

Tabla 6R: Uso del Conteo Sistemático en el examen diagnóstico por parte de los estudiantes de ambos grupos y efectividad del mismo para encontrar la solución del problema.

De las Tablas 1R, 2R y 3R observamos lo siguiente:

- En los problemas 13 y 8 aparecen mayor número de equivocaciones por parte de los estudiantes al elegir el modelo combinatorio al que pertenece cada problema, con el 78% y el 75% respectivamente (Tabla 3R).

  Par el problema 13, una posible causa es que el 68% de los estudiantes cometieron el error de multiplicar los datos que se dan en el enunciado del problema (3 puestos x 4 personas) o por realizar operaciones sin sentido con estos datos, con el fin de dar una solución al problema (Tabla 3R). Esto condujo a incluir a estos estudiantes en el grupo que erraron la elección del modelo combinatorio al que pertenece el problema. Elevando el porcentaje de estudiantes que erraron la elección del modelo combinatorio.

Por otra parte, en el problema 8 tenemos un conjunto solución de 60 elementos, lo que hace laborioso y complicado enumerarlos cuando se desconoce un método sistemático de conteo. La enumeración de elementos en una tabla es la estrategia heurística más usada por los estudiantes, aunque la mayoría de estos no conocen un método de conteo sistemático y los pocos que lo conocen no logran concluir con éxito el conteo. Los estudiantes, al responder el examen diagnóstico, usaron 57 veces el conteo sistemático y en 18 casos los llevó a la solución del problema. Además, en el problema 8 a los 5 estudiantes que utilizaron el conteo sistemático no lograron la solución del problema. (Tablas 3R y 6R)

- Antes de que los estudiantes de ambos grupos reciban el curso de Combinatoria, los problemas que pertenecen al modelo combinatorio de ordenaciones (problemas 13, 8 y 4) representan los de mayores dificultades para determinar el modelo combinatorio. (Tablas 1R, 2R y 3R).

  Esto es contrario a lo que se ha encontrado en otras investigaciones con jóvenes de entre 11 y 14 años de sexto y octavo grado, antes de recibir instrucción en combinatoria. (Fischbein E. y Gazit A., 1988) y (Piaget y Inhelder, 1975). Es posible que los resultados obtenido en esta investigación se deben a que los estudiantes son de mayor edad (18 o más años) y con mayor preparación matemática (después del bachillerato), lo que les ha permitido adquirir mayor cantidad de hechos y procedimientos en matemática.

- El problema 5 es el que menos dificultades tuvieron los estudiantes para determinar el modelo combinatorio al que pertenece. El 69% eligieron el modelo combinatorio adecuado. (Tabla 6R)

  El problema 5 es de interés para los estudiantes y el proceso de resolución puede ser muy cómodo para ellos por conjugarse dos factores: (1) el problema es de la vida real de un estudiante, en algún momento de su vida escolar, han tenido que resolver el mismo problema y (2) el conjunto solución del problema tiene pocos elementos los cuales resulta fácil de enumerar, aún usando un método de conteo no sistemático. Por tanto, es de esperar que sea el problema en el que se cometieron menos errores en la elección del modelo combinatorio.

4.2 PREGUNTA 2

OBJETIVO: Conocer algunas dificultades que tienen los estudiantes antes de cursar la unidad didáctica o la unidad temática

PREGUNTA: ¿Cuál es la proporción de estudiantes que utiliza tablas, diagrama de árbol, principio del palomar (diagrama de caja), fórmula, multiplicación directa de los datos u otro tipo de estrategias diferentes?

<u>Cálculo de la proporción de estudiantes, del grupo experimental (Tabla 7R), del grupo de control (Tabla 8R) y de ambos grupos juntos (Tabla 9R) que eligieron alguna de las siguientes estrategias heurísticas: Multiplicación o suma de los datos dados en el enunciado, tablas, diagramas de árbol, principio del palomar (diagramas de caja) y fórmulas en la resolución de los problemas 6, 13, 3, 8, 5 y 4 del cuestionario diagnostico.</u>

Las Tablas (7R, 8R y 9R) representan el porcentaje del uso de estrategias heurísticas en la resolución de problemas. Las estrategias heurísticas utilizadas por los estudiantes en la resolución de los problemas son: Multiplicación de los datos del enunciado (MD), Tablas de enumeración de los elementos del conjunto solución (T), Formulas propias de la combinatoria (F), Principio del palomar (PA), Diagramas de Árbol (DA) y uso de varias operaciones con los datos que no conducen al resultado. La Tabla (7R) corresponde a los estudiantes del grupo experimental, la (8R) al de control y la (9R) a ambos grupos.

	Problema 6 Combinación	Problema 13 Ordenación	Problema 3 Combinación	Problema 8 Ordinación	Problema 5 Combinación	Problema 4 Ordenación
MD	57%	64%	36%	50%	21%	36%
T	43%	36%	79%	57%	71%	71%
F	0%	0%	0%	0%	0%	0%
PA	0%	0%	0%	0%	0%	0%
DA	0%	0%	7%	0%	0%	14%
OTR	0%	21%	7%	7%	7%	21%

Tabla 7R.: Frecuencia de uso de algunas estrategias para la resolución de problemas del grupo experimental

	Problema 6 Combinación	Problema 13 Ordenación	Problema 3 Combinación	Problema 8 Ordinación	Problema 5 Combinación	Problema 4 Ordenación
MD	33%	50%	28%	56%	22%	22%
T	61%	33%	61%	33%	67%	67%
F	0%	0%	0%	0%	0%	0%
PA	0%	0%	0%	0%	0%	0%
DA	11%	11%	11%	6%	11%	17%
OTR	0%	6%	6%	17%	11%	6%

Tabla 8R.: Frecuencia de uso de algunas estrategias para la resolución de problemas del grupo de control

	Problema 6 Combinación	Problema 13 Ordenación	Problema 3 Combinación	Problema 8 Ordinación	Problema 5 Combinación	Problema 4 Ordenación
MD	44%	56%	31%	53%	22%	28%
T	53%	34%	69%	44%	69%	69%
F	0%	0%	0%	0%	0%	0%
PA	0%	0%	0%	0%	0%	0%
DA	6%	6%	9%	3%	6%	16%
OTR	0%	12%	6%	12%	9%	12%

Tabla 9R: Frecuencia de uso de algunas estrategias para la resolución de problemas de ambos grupos

En la Tabla 9R podemos apreciar aspectos tales como:

Ningún estudiante utilizó las Fórmulas propias de la combinatoria (F) o el Principio del Palomar (PA) en la resolución de los problemas y sólo 4 de 32 estudiantes (12%) en el problema 4 usaron un diagrama de árbol, en los demás problemas sólo 1 o 2 estudiantes lo usaron. Por lo que, podemos suponer que la enumeración de elementos en tablas son la única estrategia heurística que aplican para la resolución de problemas.

Por tanto es necesario que la unidad didáctica promueva el uso de estrategias heurísticas tales como: los diagramas de árbol, el principio del palomar, las formulas y el conteo sistemático en el uso de la enumeración de elementos en tablas. Además debe mostrar al estudiante que el uso del producto de los datos dados en el enunciado o el uso, no explicable, de operaciones con los datos del enunciado no necesariamente conducen al resultado correcto del problema.

4.3 PREGUNTA 3

OBJETIVO: Determinar si los ejemplos y/o contraejemplos que se piden en el enunciado de un problema, son una ayuda para la resolución del problema.

PREGUNTA 3: ¿La posibilidad de dar un ejemplo y/o un contraejemplo del conjunto solución del problema, produce cambios, en los estudiantes, en relación con la elección del Modelo Combinatorio para la resolución de problemas de combinatoria?

Para poder dar respuesta a esta pregunta usaremos la prueba estadística denominada Binomial la que nos permitirá determinar si existe evidencia suficiente para rechazar la siguiente hipótesis nula

H_0: No hay diferencias en la probabilidad de elección del modelo combinatorio en la resolución de problemas.

Nivel de significación.

Para todo valor de probabilidad igual o menor que 0.05, se rechaza Ho.

Zona de rechazo.

Para todo valor de probabilidad mayor que 0.05, se acepta

<u>Análisis de la relación entre dar un ejemplo del conjunto solución de un problema y determinar el modelo combinatorio al que pertenece el problema en estudiantes de ambos grupos en el cuestionario diagnostico.</u>

En los problemas 3, 4, 5, 6, 8 y 13 no se encontraron evidencia que respalde el hecho de que dar un ejemplo del conjunto solución del problema provoque cambios en los estudiantes al elegir el modelo combinatorio al que pertenece el problema. En adelante, cuando no encontremos evidencia para rechazar la hipótesis nula, no escribiremos la demostración; esta sólo aparecerá en el caso que sí exista evidencia.

Por otro lado, en los problemas 3, 4, 5, 8 y 13 no se encontró evidencia que respalde el hecho de que, dar un contraejemplo del conjunto solución del problema haya ejercido cambios en los estudiantes al elegir el modelo combinatorio al que pertenece el problema. En el caso del problemas 6 se encontró evidencia como lo mostramos en el siguiente análisis.

<u>Análisis de la resolución de un problema simple de selección (problema 6) por parte de los estudiantes de ambos grupos, que se resuelve mediante una combinación,, relacionado con un contraejemplo dado por el estudiante en el cuestionario diagnóstico</u>:

Problema 6

Prueba binomial

OMNOVVC6DD_1		Categoría	N	Proporción observada	Prop. de prueba	Sig. asintót. (bilateral)
	Grupo 1	1	27	.84	.50	.000[a]
	Grupo 2	0	5	.16		
	Total		32	1.00		

A. Basado en la aproximación Z.

Decisión.

En razón de que el valor calculado es (0.00) tiene una probabilidad menor que 0.05, cae en el nivel de significancia, por lo tanto, hay suficiente evidencia para rechazar Ho.

Interpretación.

Hay evidencia que respalde el hecho de que dar un contraejemplo del conjunto solución del problema haya ejercido cambios en los estudiantes, al elegir el modelo combinatorio para resolver un problema simple de selección cuyo conjunto solución es resultado de hacer una combinación de elementos de un conjunto. El problema en cuestión es el número 6 de los cuestionarios diagnóstico y final.

RESUMEN.

Con el fin de sintetizar los resultados presentados anteriormente construimos la Tabla 7R, en ella utilizamos “No” para significar que los estudiantes no mejoraron su desempeño en la elección del modelo combinatorio para resolver el problema y un “Sí” para significar que lograron mejorar en su desempeño. Además, “−Sí” significa que los estudiantes antes de tomar la unidad correspondiente, tenían mejor desempeño para determinar el modelo combinatorio que debían usar para resolver el problema.

Como observamos en la Tabla 10R no hay suficiente evidencia que muestre que poder dar un ejemplo del conjunto solución de un problema (6, 13, 3, 8, 5 y 4) esté relacionado con elegir el modelo combinatorio adecuado. Hay evidencia suficiente que permite señalar que cuando el estudiante puede dar un contra-ejemplo del conjunto solución de los problemas de selección y colocación, que se resuelven utilizando una combinación (6 y 3), entonces son capaces de elegir el modelo combinatorio adecuado para resolver el problema. En todos los demás casos no se encontraron evidencias para afirmar lo anterior.

El caso en el que los estudiantes pueden dar un ejemplo y un contra-ejemplo del conjunto solución es un caso particular, por tanto se comporta de la misma manera.

La Tabla 10R muestra los resultados obtenidos en el análisis anterior. En el renglón denominado Ejemplo aparecen determinados por un Si, los problemas donde hay evidencia de haber relación entre dar un ejemplo y elegir el modelo combinatorio adecuado en el proceso de resolución. En el renglón nombrado Contra-ejemplo aparecen los problemas señalados con un Si, los que se encontró evidencia de haber relación entre dar un contra-ejemplo y elegir el modelo combinatorio adecuado.

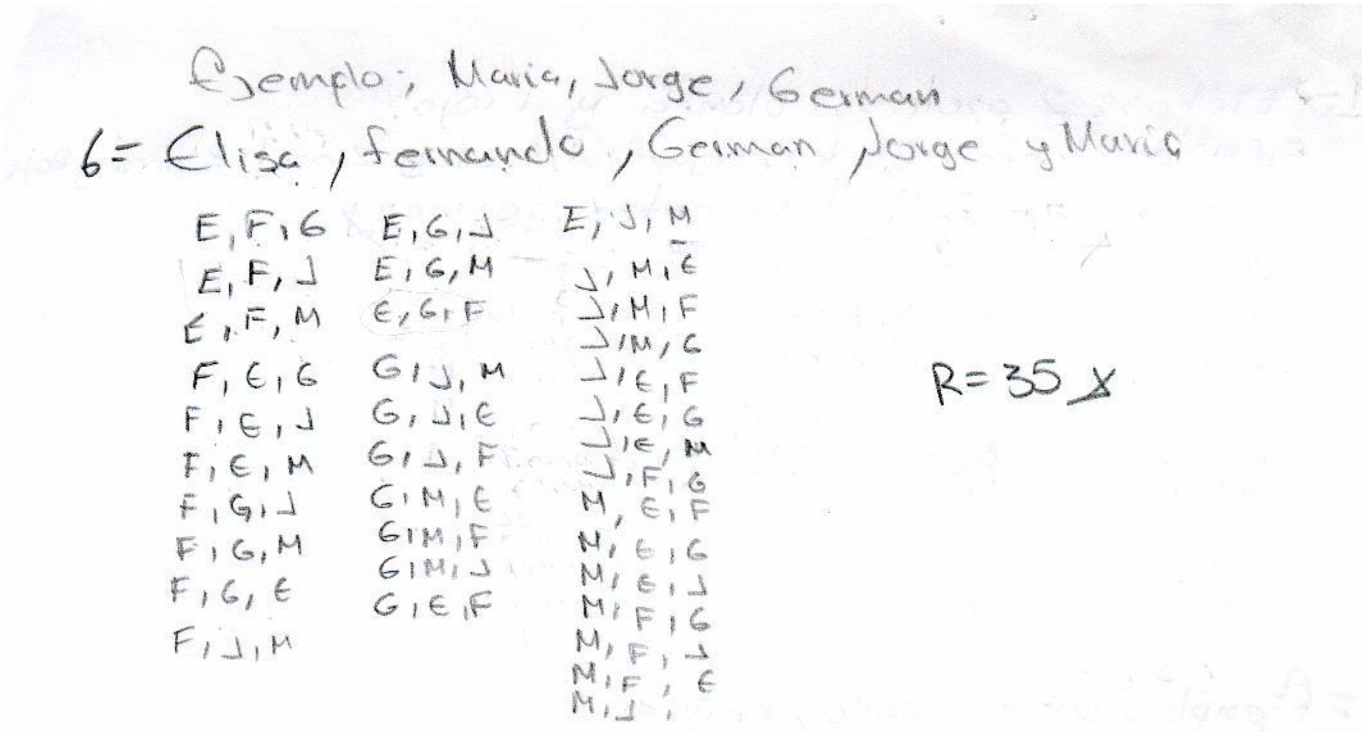
EJEMPLO O CONTRAEJEMPLO RELACIONADO CON EL MODELO COMBINATORIO						
	SELECCIÓN		COLOCACIÓN		PARTICIÓN	
PROBLEMA	6	13	3	8	5	4
Ejemplo	No	No	No	No	No	No
Contra-ejemplo	Si	No	No	No	No	No

Tabla 10R: Resultados del análisis de determinar si dar ejemplo o un contraejemplo del conjunto solución modifica las posibilidades de elegir el modelo combinatorio adecuado para resolver el problema.

En la Tabla 10R, en el renglón correspondiente a Ejemplos observamos que no hay relación entre dar un ejemplo verdadero del conjunto solución de los problema 3, 4, 5, 6, 8 y 13, y determinar el modelo combinatorio al que pertenecen los mismos

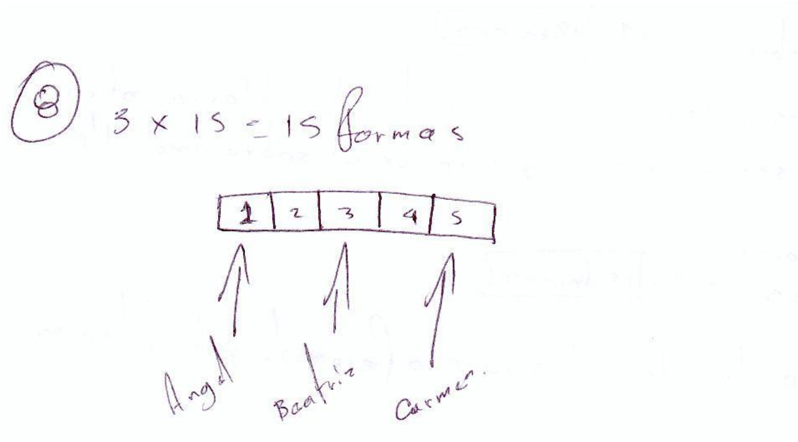
Esto es posible, porque para dar un ejemplo del conjunto solución no requerimos conocer el modelo combinatorio al que pertenece el problema. Por ejemplo, en el problema 6 (Anexo M1) si consideramos que el modelo combinatorio es una ordenación podemos dar como ejemplo a Elisa, Fernando y María, pero también podemos dar el mimo ejemplo si consideramos que el problema pertenece a una combinación.

Tal es el caso del estudiante CS que da un ejemplo verdadero del conjunto solución del problema 6 y deja ver de acuerdo a la enumeración de elementos en tabla que construye, que el problema se corresponde con una ordenación, lo cual es incorrecto. (Dibujo 1R)



Dibujo 1R: Copia de la resolución del problema 6 realizada por el estudiante MM.

En el siguiente caso, el estudiante GA da un ejemplo verdadero del conjunto solución del problema 8 (Anexo M1) y para encontrar la solución multiplica los datos dados en el enunciado (3 personas x 5 lugares de estacionamiento). Mostrando con esta acción que es poco probable que conozca el modelo combinatorio al que pertenece el problema. (Dibujo 2R)



Dibujo 2R: Copia de la resolución del problema 8 realizada por el estudiante GA.

Por otro lado, ser capaces de dar un contraejemplo verdadero del conjunto solución no está relacionado con conocer el modelo combinatorio adecuado al que pertenece el problema. No obstante que en la Tabla Resumen 7R observamos que en el problemas 6 hay relación entre dar un contraejemplo verdadero y encontrar el modelo combinatorio adecuado del problema.

Para dar una explicación de lo anterior hemos escrito a continuación el tipo de contraejemplo que dieron los estudiantes en cada uno de los problemas 3, 4, 5, 6, 8 y 13 (Anexo M1) del cuestionario

- Problema 3: Colocar 2 cartas en un sobre; colocar una cuarta carta en un sobre; colocar una carta en dos sobres y colocar una carta en un sobre adicional no especificado en el enunciado.

- Problema 13: Colocar a una persona en dos puestos diferentes y colocar en un puesto a dos personas diferentes.

- Problema 6: Pasar a borrar el pizarrón a una persona que no se menciona en el enunciado del problema; pasar a borrar el pizarrón a más de 3 personas y pasar a borrar el pizarrón a menos de tres personas.

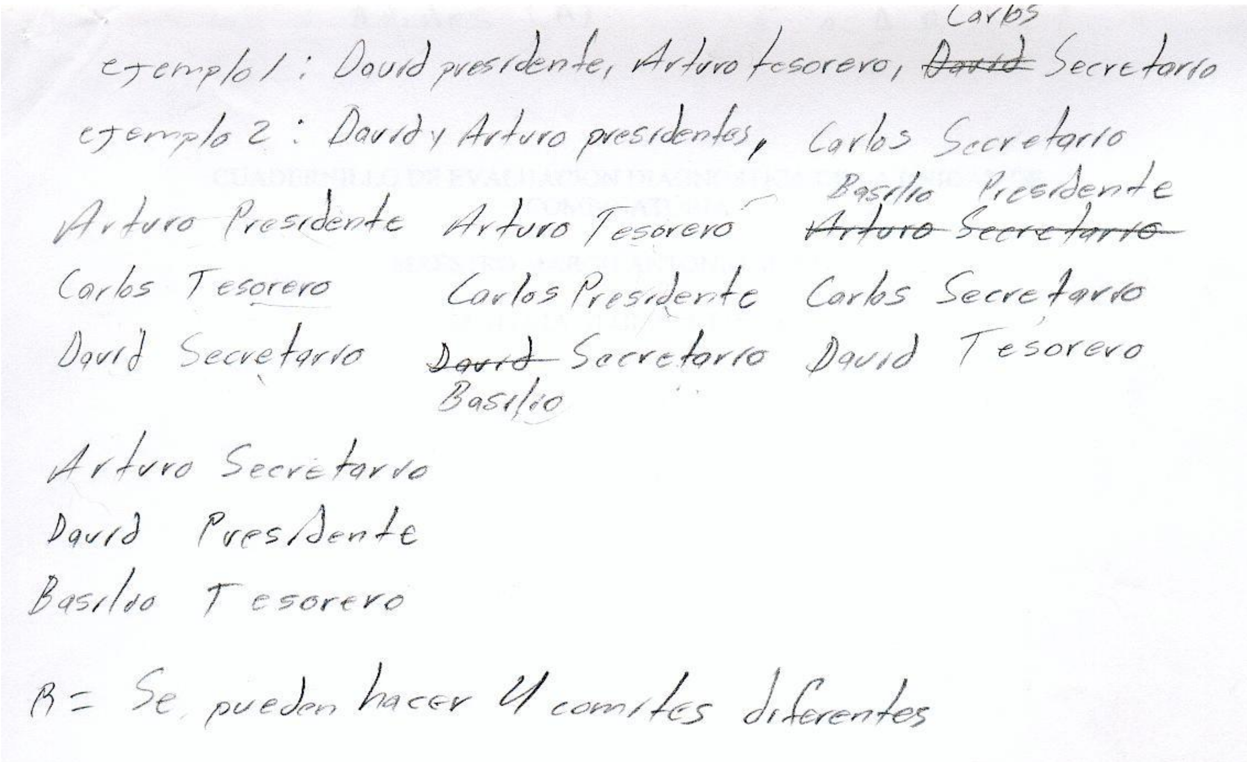
- Problema 8: Estacionar 2 o más automóviles en el mismo lugar; estacionar 1 automóvil en 2 o 3 lugares y estacionar un automóvil en un sexto lugar (solo hay cinco).

- Problema 5: Asignar a 3 estudiantes para hacer el trabajo de una de las materias, todos los estudiantes hacen los dos trabajos, un estudiante participa en dos materias, un estudiante que no es del grupo hace junto con otro un trabajo y todos hacen un solo trabajo.

- Problema 4: Regalar el mismo automóvil a dos hermanos, no regala un automóvil, regala automóviles a una persona que no está en el enunciado, no regala los automóviles, regala uno que no tiene.

Como se puede apreciar en cada uno de los contraejemplos de cada problema, estos no dependen del conocimiento que el estudiante tenga sobre el modelo combinatorio al que pertenece el problema.

Por ejemplo, en el problema 13 el estudiante (MM) da como contraejemplo verdadero: David y Arturo darles la presidencia y a Carlos la secretaria es decir, "colocar en un puesto a dos personas diferentes". Esto lo podemos observar en la siguiente imagen que corresponde a una copia del proceso de resolución del mismo estudiante. (Dibujo 3R)


ejemplo 1: David presidente, Arturo tesorero, ~~David~~ Carlos Secretario
ejemplo 2: David y Arturo presidentes, Carlos Secretario
Arturo Presidente Arturo Tesorero ~~Arturo Secretario~~ Basilio Presidente
Carlos Tesorero Carlos Presidente Carlos Secretario
David Secretario ~~David~~ Basilio Secretario David Tesorero
Arturo Secretario
David Presidente
Basilio Tesorero
R = Se pueden hacer 4 comites diferentes

Dibujo 3R: Copia de la resolución del problema 13 realizada por el estudiante MM.

En la misma imagen observamos que en lugar de suponer que está ante un problema que corresponde a un modelo combinatorio de una ordenación, el considera que corresponde a una combinación.

Por tanto, los ejemplos y contraejemplos dados por los estudiantes en la resolución de un problema no garantizan que el estudiante conozca el modelo combinatorio al que pertenece el problema.

4.4 PREGUNTA 4

OBJETIVO: Objetivo: determinar si los ejemplos que se dan en los problemas son una ayuda para elegir el modelo combinatorio adecuado para resolver el problema

PREGUNTA 4: ¿El ejemplo dado al final del enunciado de un problema de combinatoria es una ayuda para la resolución del problema?

El 72% de los estudiantes de ambos grupos, que intentaron resolver el problema 2 del cuestionario diagnóstico, consideran que las cartas sota, caballo y rey son inseparables, que deben estar en el orden scr y que cualquier carta numerada debe estar al final de estas como en el ejemplo dado en el enunciado del problema, esto es, sota, caballo, rey, 1. (Tabla 11R).

A continuación la tabla 11R muestra la Frecuencia de estudiantes que consideran que las cartas sota, caballo y rey son inseparables, que deben estar en el orden sota, caballo, rey y que cualquier carta numerada debe estar al final de estas. En el renglón de la Tabla 11R señalado con el número 1, mostramos el número de estudiantes que considero lo dicho anteriormente.

SCRN2DD_1

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	0	9	28.1	28.1	28.1
	1	23	71.9	71.9	100.0
	Total	32	100.0	100.0	

Tabla 11R: Frecuencia de estudiantes que piensan que el conjunto solución está formado por elementos de la forma (s, c, r, No.), donde No. representa algún número del 1 al 9

Además, el 34% de estudiantes consideran que las cartas sota, caballo y rey son inseparables, que deben estar en el orden sota, caballo, rey y que cualquier carta numerada debe estar al inicio de estas. (Tabla 12R)

En la tabla 12R, mostramos en el regalón marcado con el número 1 el número de estudiantes que consideran lo dicho en el párrafo anterior.

NSCR2DD_1

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	0	21	65.6	65.6	65.6
	1	11	34.4	34.4	100.0
	Total	32	100.0	100.0	

Tabla 12R: Frecuencia de estudiantes que piensan que el conjunto solución esta formado por elementos de la forma (No., s, c, r), donde No. representa algún número del 1 al 9

El 75% de estudiantes consideran que las cartas sota, caballo y rey son inseparables, que deben estar en el orden sota, caballo, rey y que cualquier carta numerada debe estar al inicio o al final de esta. (Tabla 13R)

JSCR2DD_1

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	0	8	25.0	25.0	25.0
	1	24	75.0	75.0	100.0
	Total	32	100.0	100.0	

Tabla 13R: Frecuencia de estudiantes que piensan que el conjunto solución está formado por elementos de la forma (No., s, c, r) o (s, c, r, No.) donde No. representa algún número del 1 al 9

Estos datos muestran que el problema 2 del cuestionario es una muestra de que el ejemplo "sota, caballo, rey, 1", dado en el enunciado del problema, y la palabra "alineadas" del mismo enunciado, juntos crean la idea de que los únicos elementos del conjunto solución son las cuaternas donde sota, caballo, rey deben estar juntas.

En consecuencia podemos considerar que posiblemente en la pregunta del enunciado, ¿De cuantas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas, con la condición de que siempre estén alineadas las tres figuras? (el subrayado es nuestro), los estudiantes consideran que la palabra alinear significa mantener juntas en un orden determinado. Adicionalmente, el ejemplo (sota, caballo, rey, 1) lo confirma. (Tablas 11R, 12R y 13R)

Es posible que un ejemplo como (caballo, rey, 1, sota) sea una ayuda para los estudiantes en la resolución del problema 2, porque rompe con la idea de que las cartas sota, caballo y rey deban estar juntas e implícitamente, aclara el significado de la palabra alinear en el sentido de que deben estar consideradas en la cuaterna sin importar el orden y lugar en el que se pongan.

Es posible que este sea un ejemplo de dificultades en la resolución de problemas ya mencionadas por Roa (2000) y denominada como “Identificación del grupo de sucesos u objetos que se pide enumerar o contar” y “en el enunciado de los problemas combinatorios hay a veces convenios implícitos que no quedan claros para el alumno”.

Por tanto, y con base en estos resultados consideramos que los ejemplos que utilicemos en los enunciados de un problema, con fines de ayuda a los estudiantes, deben representar a todos los elementos del conjunto solución y no a una parte, como en el caso del problema 2. En este problema el ejemplo dado “sota, caballo, rey, 1” sólo representa a los elementos del subconjunto donde las cartas sota caballo y rey están juntas y en el orden en que están escritas.

4.5 PREGUNTA 5

OBJETIVO: Conocer algunas dificultades que tienen los estudiantes después de cursar la unidad didáctica o la unidad tradicional.

HIPOTESIS: los estudiantes se equivocan menos al elegir el modelo combinatorio para resolver problemas después de cursar la unidad didáctica combinatoria o la unidad tradicional

PREGUNTA: ¿Mejora la capacidad de los estudiantes de seleccionar el modelo combinatorio que conduzca a resolver un problema después de cursar las unidades didáctica o la tradicional?

Para poder dar respuesta a esta pregunta usaremos la prueba estadística de McNemar que nos permitirá determinar si existe evidencia suficiente para rechazar la siguiente hipótesis nula

H_0: No hay diferencias en la probabilidad de elección del modelo combinatorio en la resolución de problemas.

Nivel de significación.

Para todo valor de probabilidad igual o menor que 0.05, se rechaza Ho.

Zona de rechazo.

Para todo valor de probabilidad mayor que 0.05, se acepta Ho

4.5.1 Grupo experimental

En los problema 6, 13, 3, 8 y 4 no se encontraron evidencias para suponer que la unidad didáctica combinatoria haya ejercido cambios significativos en los estudiantes del grupo experimental, al elegir el modelo combinatorio adecuado para resolver estos problemas.

En el problema 5 se encontró evidencia suficiente para decir que después de haber cursado la unidad didáctica tuvieron más dificultades para encontrar el modelo combinatorio al que pertenece el mismo. Así lo muestra el análisis que presentamos a continuación.

<u>Análisis de la resolución de un problema simple de partición que se resuelve mediante una combinación.</u>

Problema 5

OMN 5D y OMN 5F

OMN 5D	OMN 5F	
	0	1
0	5	0
1	6	3

Estadísticos de contraste[b]

	OMN5D y OMN5F
N	14
Sig. exacta (bilateral)	.031[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Decisión.

En razón de que la probabilidad calculada (.031) es menor que 0.05, cae en el nivel de significancia, por lo tanto, hay suficiente evidencia para rechazar Ho.

Interpretación.

Hay evidencia para suponer que la unidad didáctica combinatoria haya ejercido cambios significativos en los estudiantes del grupo experimental, al elegir el modelo combinatorio para resolver un problema simple de partición cuyo conjunto solución es resultado de hacer una combinación de elementos de un conjunto. El problema en cuestión es el número 5 de los cuestionarios diagnóstico y final.

Estos cambios, como se observa en la tabla anterior, se refieren a que los estudiantes que al inicio eligen adecuadamente el modelo combinatorio para resolver el problema, después de la unidad didáctica no logran elegir el modelo combinatorio adecuado.

4.5.2 Grupo de Control

En los problema 3, 4, 5, 6 y 8 no se encontraron evidencias para suponer que la unidad temática haya ejercido cambios significativos en los estudiantes del grupo de control, al elegir el modelo combinatorio adecuado para resolver estos problemas.

En el problema 13 se encontró evidencia suficiente para decir que después de haber cursado la unidad temática mejoraron su desempeño para encontrar el modelo combinatorio al que pertenece el mismo. Así lo muestra el análisis que presentamos a continuación.

<u>Análisis de la resolución de un problema simple de selección que se resuelve mediante una ordenación.</u>

Problema 13

OMN 13D_1 y OMD 13F_1

	OMD 13F_1	
OMN 13D_1	0	1
0	5	8
1	1	4

Estadísticos de contraste[b]

	OMN13D_1 y OMN13F_1
N	18
Sig. exacta (bilateral)	.039[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Decisión.

En razón de que la probabilidad calculada (.039) es menor que 0.05, cae en el nivel de significancia, por lo tanto, hay suficiente evidencia para rechazar Ho.

Interpretación.

Hay evidencia que respalde a decir que la unidad temática combinatoria haya ejercido cambios en los estudiantes del grupo control, al elegir el modelo combinatorio para resolver un problema simple de selección cuyo conjunto solución es resultado de hacer una ordenación de elementos de un conjunto. El problema en cuestión es el número 13 de los cuestionarios diagnóstico y final.

RESUMEN.

Con el fin de sintetizar los resultados presentados anteriormente construimos la Tabla 11R. en ella utilizamos las siglas UD para designar a la Unidad Didáctica y UT para referirnos a la Unidad Tradicional. NO, significa que los estudiantes no mejoraron su desempeño en la elección del modelo combinatorio para resolver el problema y SI, que lograron mejorar en su desempeño. Además, −SI, significa que los estudiantes antes de tomar la unidad correspondiente, tenían mejor desempeño para determinar el modelo combinatorio que debían usar para resolver el problema.

Unidad Didáctica

Los estudiantes no lograron mejorar su desempeño en la elección del modelo combinatorio que debían usar para resolver el problema. En el caso de los problemas de partición que se resuelven mediante una combinación, hay suficiente evidencia para señalar que estos estudiantes tenían más éxito en la elección del modelo combinatorio que después de tomar la Unidad Didáctica.

Unidad Tradicional

Los estudiantes que tomaron la Unidad Tradicional lograron mejorar su desempeño en la elección del modelo combinatorio en los problemas de selección que se resuelven considerando ordenaciones. En todos los demás hay suficiente evidencia para señalar que no mejoraron en su desempeño para elegir el modelo combinatorio que resolver el problema.

Cuadro Resumen

DESEMPEÑO EN LA ELECCION DEL MODELO COMBINATORIO						
	Selección		Colocación		Partición	
Problema	6	13	3	8	5	4
UD	NO	NO	NO	NO	—SI	NO
UT	NO	SI	NO	NO	NO	NO

Tabla 14R: Resultado del desempeño del estudiante en la elección del modelo combinatorio después de cursar la unidad didáctica y la unidad tradicional.

La unidad didáctica no logró mejorar la elección del modelo combinatorio en todos los problemas. En algunos empeoraron los estudiantes, como es el caso del problema 5 que pertenece a un modelo combinatorio de combinaciones (Tabla 14R).

La unidad temática logró mejorar la elección del modelo combinatorio en los problemas de selección que se resuelven por medio de una ordenación, tales es el caso del problema 13 que se resuelve mediante una ordenación (Tabla 14R).

En general podemos decir que ninguna de las unidades logró que los estudiantes mejoraran su capacidad para elegir el modelo combinatorio de un problema dado que se resuelve mediante una operación combinatoria.

En el caso de los estudiantes que cursaron la unidad didáctica es posible que esto se deba fundamentalmente a las siguientes causas:

- Es la primera experiencia que tienen con resolución de problemas.
- Es la primera experiencia que tienen con el método de enseñanza empleado.
- Es la primera vez que tienen conocimiento de estrategias heurísticas, como: diagramas de árbol, el principio del palomar y enumeración sistemática de un conjunto de elementos.

Por lo que pensamos que esto los condujo a no lograr determinar:

- Cuándo en un problema es importante el orden de los elementos del conjunto solución y cuándo no tiene importancia.
- Cómo usar las estrategias heurísticas propias de la resolución de problemas de combinatoria.

En el caso de los estudiantes que cursaron la unidad temática es posible que se debiera fundamentalmente a las siguientes causas:

- Es la primera experiencia que tienen con resolución de problemas
- El método de enseñanza es memorista y los conceptos vertidos por el profesor son incorrectos "…los problemas que piden sacar una muestra de un conjunto de elementos dados, necesariamente se resuelven usando la fórmula de combinaciones y la mayoría de estos problemas son sin repetición de elementos…" o "…las ordenaciones son los problemas que no son combinaciones y pueden resolverse usando el principio del palomar…"
- No habían tenido experiencias en el uso del principio del palomar.

Lo anterior motivó a los estudiantes a:

Tratar los problemas como ejercicios y por lo tanto, buscar en el enunciado la palabra clave "extraer una muestra" motivando con esto que los estudiantes no lograran aplicar lo dicho por el profesor.

4.6 PREGUNTA 6

OBJETIVO: Conocer algunas dificultades que tienen los estudiantes después de cursar la unidad didáctica o la unidad tradicional.

HIPOTESIS: los estudiantes usan menos la multiplicación de datos del enunciado como estrategia para determinar el número de soluciones posibles, después de cursar la unidad didáctica combinatoria.

PREGUNTA: ¿Perdura o se modifica el uso de la multiplicación o de la suma de datos dados como heurística de resolución después de cursar las unidades didáctica o tradicional?

Para dar respuesta a esta pregunta usaremos la prueba estadística denominada McNemar que nos permitirá determinar si existe evidencia suficiente para rechazar la siguiente hipótesis nula

H_0: No hay diferencias en la probabilidad de elección de la estrategia de resolución de problemas.

Nivel de significación.

Para todo valor de probabilidad igual o menor que 0.05, se rechaza Ho.

Zona de rechazo.

Para todo valor de probabilidad mayor que 0.05, se acepta Ho

4.6.1 Grupo experimental

En los problemas 3, 4, 5, 8 y 13 no se encontraron evidencias que nos permitan decir que la Unidad Didáctica permitió que los estudiantes dejaran de usar el producto de los datos del enunciado como estrategia para resolver los problemas. El problema 6 es el único caso en el que se encontraron evidencias de que la unidad didáctica ejerció cambios en los estudiantes.

<u>Análisis de la resolución de un problema simple de selección que se resuelve mediante una combinación.</u>

Problema 6

MD6D y MD6F

	MD6F	
MD6D	0	1
0	5	1
1	8	0

Estadísticos de contraste[b]

	MD6D y MD6F
N	14
Sig. exacta (bilateral)	.039[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Decisión.

En razón de que la probabilidad calculada (.039) es menor que 0.05, cae en el nivel de significancia, por lo tanto, hay suficiente evidencia para rechazar Ho.

Interpretación.

Hay evidencia que respalde el hecho de que la unidad didáctica combinatoria haya ejercido cambios en los estudiantes del grupo experimental, al utilizar otra estrategia diferente a la de sumar o multiplicar los datos del enunciado, para resolver el problema. El problema en cuestión es el número 6 de los cuestionarios diagnóstico y final.

4.6.2 Grupo de Control.

En los problemas 3, 4, 5 y 6 no se encontraron evidencias que nos permitan decir que la Unidad Didáctica permitió que los estudiantes dejaran de usar el producto de los datos del enunciado como estrategia para resolver los problemas. En los problemas 8 y 13 se encontró evidencias de que la unidad didáctica ejerció cambios en los estudiantes.

Presentamos el análisis de estos dos casos:

<u>Análisis de la resolución del problema 13 simple de selección que se resuelve mediante una ordenación y del problema 8 simple de colocación que se resuelve considerando una ordenación.</u>

<u>Problema 13</u>

MD13D_1 y MD13F_1

	MD13F_1	
MD13D_1	0	1
0	9	0
1	7	2

Estadísticos de contraste[b]

	MD13D_1 y MD13F_1
N	18
Sig. exacta (bilateral)	.016[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Problema 8

MD8D_1 y MD8F_1

	MD8F_1	
MD8D_1	0	1
0	8	0
1	10	0

Estadísticos de contraste[b]

	MD8D_1 y MD8F_1
N	18
Sig. exacta (bilateral)	.002[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Decisión.

En razón de que la probabilidades calculadas (.016) para el problema 13 y de (.002) para el problema 8 y que estas son menores que 0.05, caen en el nivel de significancia, por lo tanto, hay suficiente evidencia para rechazar ambas hipótesis nulas Ho., la del problema 13 y la del 8.

Interpretación.

Hay evidencia que respalde el hecho de que la unidad tradicional haya ejercido cambios en los estudiantes del grupo de control, al utilizar otra estrategia diferente, a la de sumar o multiplicar los datos del enunciado, para resolver los problemas. Los problemas en cuestión son el 13 y 8 de los cuestionarios diagnóstico y final.

RESUMEN.

Con el fin de sintetizar los resultados presentados anteriormente construimos la Tabla 15R. En ella utilizamos las siglas UD para designar a la Unidad Didáctica y UT para referirnos a la Unidad Tradicional. NO, significa que los estudiantes no cambiaron su estrategia, de sumar o multiplicar datos dados en el enunciado, para resolver el problema. Y SI, que cambiaron. Además, −SI, significa que los estudiantes antes de tomar la unidad correspondiente, usaban menos la estrategia de resolución de problemas consistente en sumar o multiplicar datos del enunciado, que después de cursar la Unidad Didáctica o la Unidad Tradicional.

Cuadro Resumen de Resultados

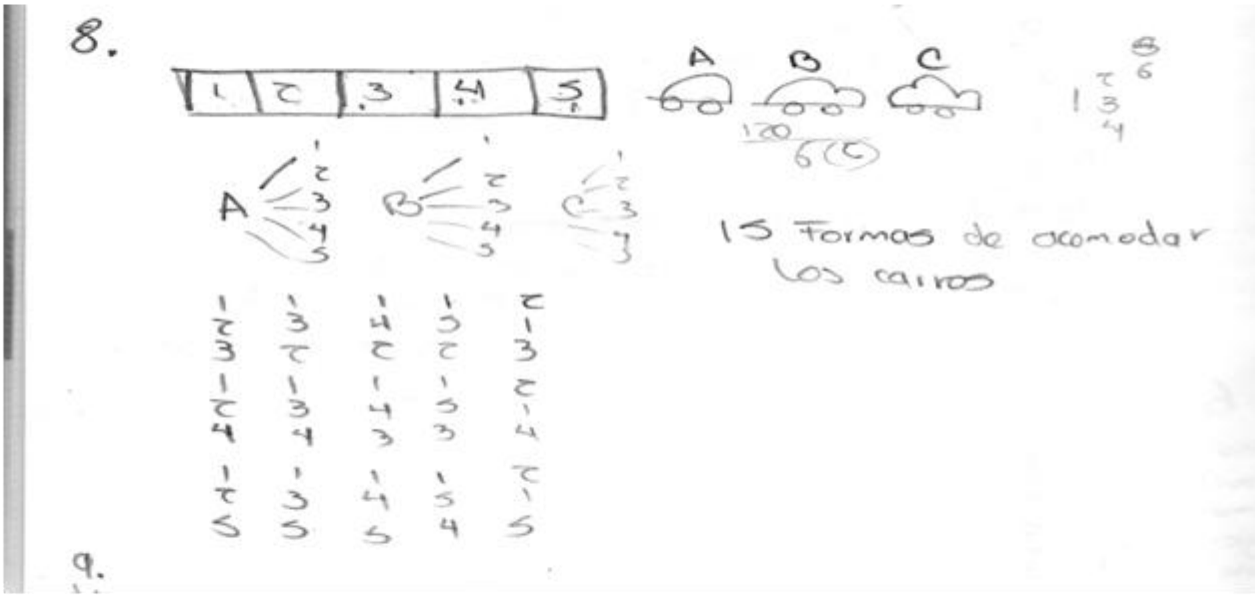
USO DE LA MULTIPLICACION DE DATOS DESPUES DE LA U.D. Y U.T.						
	Selección		Colocación		Partición	
	6	13	3	8	5	4
UD	SI	NO	NO	NO	NO	NO
UT	NO	SI	NO	SI	NO	NO

Tabla 15R: Resultado del desempeño del estudiante en el uso de la multiplicación de datos en la resolución de problemas después de tomar la unidad didáctica o la unidad tradicional.

En general las unidades didáctica y tradicional no lograron evitar que los estudiantes multiplicaran los datos del enunciado para dar la solución del problema (Ver Tabla 15R).

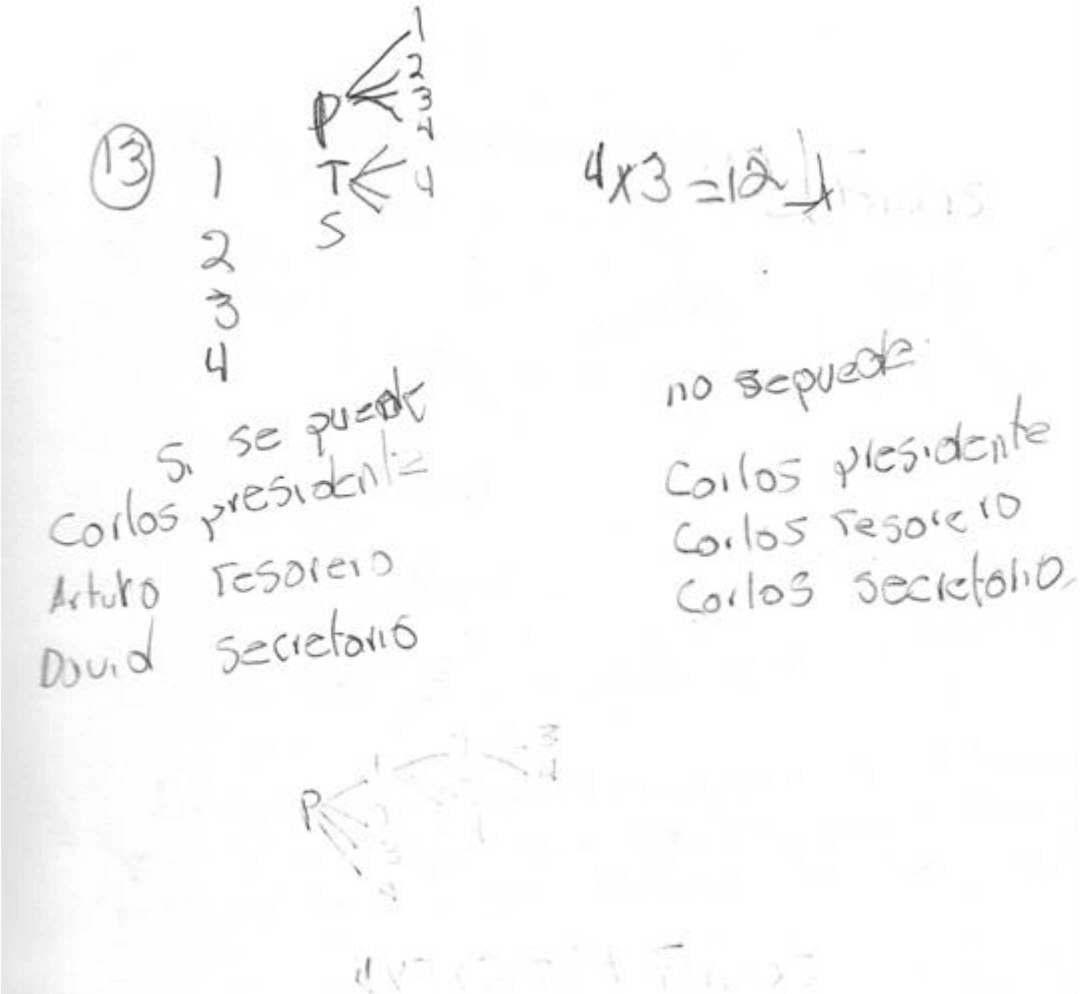
En el caso de los estudiantes que tomaron unidad didáctica, no obstante que dejaron de multiplicar los datos de forma explícita (Tabla 15R), dejan ver, en el uso de las diferentes estrategias heurísticas, que siguen pensando en la multiplicación de datos.

En el problema 8 se puede observar que el estudiante GL desarrolla un diagrama de árbol con 3 nodos (número de carros) y 5 ramas para cada nodo (número de lugares de estacionamiento) con la idea de obtener la solución (número de carros) x (número de automóviles) = 3x5 = 15. Este resultado lo usa en la construcción de una tabla donde desglosa algunos elementos del conjunto solución usando como estrategia conteo sistemático. Luego detiene el desglose porque en la enumeración ya tiene los 15 elementos. (Dibujo 4R)



Dibujo 4R: Copia de la resolución del problema 8 realizada por el estudiante GL.

Lo mismo podemos observar, en el siguiente dibujo, con el estudiantes VR que para resolver el problema 13 construye un diagrama de árbol de dos ramas, en los nodos de la primera rama coloca los 3 puestos (presidente, tesorero y secretario) y en los nodos de la otra las 4 personas (1, 2, 3 y 4), luego aplica la regla del producto (4 personas x 3 puestos = 12)



Dibujo 5R: Copia de la resolución del problema 13 realizada por el estudiante VR.

Así que, estos dos ejemplos nos muestran que ahora los estudiantes justifican la multiplicación de datos del enunciado con las estrategias heurísticas que revisaron durante las sesiones de la unidad didáctica. Esto sólo nos muestra que explícitamente durante las sesiones de debe pedir una justificación a los estudiantes del uso del producto de datos del enunciado para dar la solución del problema.

4.7 PREGUNTA 7

OBJETIVO: Conocer las dificultades que tienen los estudiantes después de cursar la unidad didáctica o la unidad temática

HIPOTESIS: La Unidad Didáctica o la Unidad Tradicional producen cambios, en los estudiantes, en relación con la cantidad de estrategias heurísticas usadas para resolver problemas.

PREGUNTA: ¿Son diferentes las estrategias heurísticas elegidas por los estudiantes en la resolución de los problemas de la prueba final al término de la Unidad Didáctica o la Unidad Tradicional, que las utilizadas en la prueba diagnóstica?

Para dar respuesta a esta pregunta usaremos la prueba estadística de McNemar que nos permitirá determinar si existe evidencia suficiente para rechazar la siguiente hipótesis nula

H_0: No hay diferencias en la probabilidad de uso de estrategias heurísticas en la resolución de problemas.

Nivel de significación.

Para todo valor de probabilidad igual o menor que 0.05, se rechaza Ho.

Zona de rechazo.

Para todo valor de probabilidad mayor que 0.05, se acepta Ho

4.7.1 Grupo experimental

Análisis de la resolución de los problemas 6, 13, 3, 8, 5 y 4.

Problema 6

FPDA6D y FPDA6F

	FPDA6F	
FPDA6D	0	1
0	4	10
1	0	0

Estadísticos de contraste[b]

	FPDA6D y FPDA6F
N	14
Sig. exacta (bilateral)	.002[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Problema 13

FPDA13D y FPDA13F

	FPDA13F	
FPDA13D	0	1
0	1	10
1	0	3

Estadísticos de contraste[b]

	FPDA13D y FPDA13F
N	14
Sig. exacta (bilateral)	.002[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Problema 3

FPDA3D y FPDA3F

	FPDA3F	
FPDA3D	0	1
0	1	11
1	0	2

Estadísticos de contraste[b]

	FPDA3D y FPDA3F
N	14
Sig. exacta (bilateral)	.001[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Problema 8

FPDA8D y FPDA8F

	FPDA8F	
FPDA8D	0	1
0	1	12
1	0	1

Estadísticos de contraste[b]

	FPDA8D y FPDA8F
N	14
Sig. exacta (bilateral)	.000[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Problema 5

FPDA5D y FPDA5F

	FPDA5F	
FPDA5D	0	1
0	3	10
1	0	1

Estadísticos de contraste[b]

	FPDA5D y FPDA5F
N	14
Sig. exacta (bilateral)	.002[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Problema 4

FPDA4D y FPDA4F

	FPDA4F	
FPDA4D	0	1
0	2	8
1	0	4

Estadísticos de contraste[b]

	FPDA4D y FPDA4F
N	14
Sig. exacta (bilateral)	.008[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Decisión.

En razón de que la probabilidad calculada para los problemas 6, 13, 3, 8, 5 y 4 es (.002), (.002), (.001), (.000), (.002) y (.008) respectivamente y son menores que 0.05, caen en el nivel de significancia, hay suficiente evidencia para rechazar Ho en cada uno de los problemas.

Interpretación.

Hay evidencia que respalde el hecho de que la unidad didáctica combinatoria haya ejercido cambios en los estudiantes del grupo experimental, al utiliza otras estrategias diferentes a la de usar enumeración de elementos en tablas o sumar o multiplicar los datos del enunciado, para resolver los problemas 6, 13, 3, 8, 5 y 4.

4.7.2 Grupo de control.

El problema 5 es el único donde no se encontró evidencia que nos permita decir que la unidad temática ejerció cambios en los estudiantes del grupo experimental, al utiliza otras estrategias diferentes a la de usar enumeración de elementos en tablas o sumar o multiplicar los datos del enunciado, para resolver el problema.

Análisis de la resolución de los problemas 6, 13, 3, 8 y 4.

Problema 6

FPDA6D_1 y FPDA6F_1

	FPDA6F_1	
FPDA6D_1	0	1
0	0	16
1	0	2

Estadísticos de contraste[b]

	FPDA6D_1 y FPDA6F_1
N	18
Sig. exacta (bilateral)	.000[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Problema 13

FPDA13D_1 y FPDA13F_1

	FPDA13F_1	
FPDA13D_1	0	1
0	3	11
1	1	3

Estadísticos de contraste[b]

	FPDA13D_1 y FPDA13F_1
N	18
Sig. exacta (bilateral)	.006[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Problema 3

FPDA3D_1 y FPDA3F_1

	FPDA3F_1	
FPDA3D_1	0	1
0	3	13
1	1	1

Estadísticos de contraste[b]

	FPDA3D_1 y FPDA3F_1
N	18
Sig. exacta (bilateral)	.002[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Problema 8

FPDA8D_1 y FPDA8F_1

	FPDA8F_1	
FPDA8D_1	0	1
0	3	11
1	2	2

Estadísticos de contraste[b]

	FPDA8D_1 y FPDA8F_1
N	18
Sig. exacta (bilateral)	.022[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Problema 4

FPDA4D_1 y FPDA4F_1

	FPDA4F_1	
FPDA4D_1	0	1
0	2	12
1	1	3

Estadísticos de contraste[b]

	FPDA4D_1 y FPDA4F_1
N	18
Sig. exacta (bilateral)	.003[a]

a. Se ha usado la distribución binomial.

b. Prueba de McNemar

Decisión.

En razón de que la probabilidad calculada para los problemas 6, 13, 3, 8 y 4 es (.000), (.006), (.002), (.022) y (.003) respectivamente y son menores que 0.05, caen en el nivel de significancia, hay suficiente evidencia para rechazar Ho en cada uno de los problemas.

Interpretación.

Hay evidencia que respalde el hecho de que la unidad didáctica combinatoria haya ejercido cambios en los estudiantes del grupo de control, al utiliza otras estrategias diferentes a la de enumeración de elementos en tablas o sumar o multiplicar los datos del enunciado, para resolver los problemas 6, 13, 3, 8 y 4.En razón de que en la probabilidad calculada (.000), (.006), (.002), (.022) y (.003) son menores que .005, caen en el nivel de significancia, hay suficiente evidencia para rechazar Ho en cada uno de estos problemas.

RESUMEN.

Con el fin de sintetizar los resultados presentados anteriormente construimos la Tabla 16R. En ella utilizamos las siglas UD para designar a la Unidad Didáctica y UT para referirnos a la Unidad Tradicional. NO, significa que los estudiantes, después de cursar la Unidad Didáctica o Unidad Temática, no cambiaron su estrategia de enumeración de elementos en tabla o sumar o multiplicar datos dados en el enunciado, para resolver el problema. Y SI, que usaron otras estrategias heurísticas como: diagramas de árbol, diagramas de caja (regla del palomar), fórmulas u otras. Por lo que, se observa:

- Los estudiantes eligen más estrategias heurísticas, en todos los tipos de problema, que antes de cursar la Unidad Didáctica.

- Los estudiantes no eligen más estrategias heurísticas en los problemas de partición que se resuelven mediante una combinación. En todos los demás casos eligen más estrategias heurísticas que antes de tomar la Unidad Tradicional.

Cuadro Resumen de Resultados

USAN MAS ESTRATEGIAS HEURISTICAS DESPUES DE CURSAR LAS UNIDADES.						
	Selección		Colocación		Partición	
	6	13	3	8	5	4
UD	SI	SI	SI	SI	SI	SI
UT	SI	SI	SI	SI	NO	SI

Tabla 16R: Problemas donde los estudiantes usan otras estrategias heurísticas para resolver el problema después de cursar la unidad didáctica o la unidad tradicional.

En la Tabla 17R observamos la frecuencia de uso de cada una de las siguientes estrategias heurísticas por parte de los estudiantes que cursaron la unidad didáctica (grupo experimental). Cada renglón de la tabla corresponde a una de las siguientes estrategias heurísticas: (MD) Multiplicación o suma de datos del enunciado, (T) tablas para el conteo sistemático, (F) fórmulas, (PA) diagramas de caja o regla del palomar, (DA) diagramas de árbol y (OTR) varias operaciones con los datos que no conducen al resultado.

Grupo Experimental

	Problema 6 Combinación	Problema 13 Ordenación	Problema 3 Combinación	Problema 8 Ordinación	Problema 5 Combinación	Problema 4 Ordenación
MD	7%	29%	29%	28%	7%	14%
T	43%	21%	14%	7%	36%	21%
F	21%	14%	14%	7%	0%	7%
PA	21%	21%	14%	21%	7%	14%
DA	43%	72%	71%	64%	71%	79%
OTR	0%	0%	0%	0%	7%	0%

Tabla 17R: Frecuencia de uso de algunas estrategias heurísticas para la resolución de problemas.

El uso de los diagramas de árbol fue la estrategia heurística más demandada por los estudiantes en el proceso de resolución de problemas seguida por el uso de tablas de enumeración de elementos, las estrategias menos usadas fueron el principio del palomar y las fórmulas. Además, los estudiantes dejaron de ejecutar operaciones, sin explicación aparente, con los datos (Tabla 17R).

También observamos que utilizaron todas las estrategias heurísticas que se aplicaron durante el desarrollo de la unidad didáctica (Tablas de enumeración de elementos, Diagramas de árbol, Principio del Palomar y Fórmulas). (Tabla 17R)

En la Tabla (18R) en el renglón denominado DA, está la información relacionada con la frecuencia con la que los estudiantes recurrieron a los diagramas de árbol para resolver un problema y en el renglón señalado con DAYRC la relacionada con las veces que esa estrategia heurística los condujo a la solución del problema.

Problema	6F	13F	3F	8F	5F	4F	SUMA F
DA	6	10	10	9	10	11	56
DAYRC	0	3	0	2	0	1	6

Tabla 18R: Uso de los diagramas de árbol en el examen final por parte de los estudiantes del grupo experimental y efectividad del mismo para encontrar la solución del problema.

De los 56 diagramas de árbol que construyeron los estudiantes que tomaron la unidad didáctica (grupo experimental), solo 6 de ellos condujeron al estudiante al resultado correcto. Esto es, la efectividad de los diagramas de árbol construidos por los estudiantes del grupo experimental para encontrar la solución correcta del problema es de apenas el 11% (Tabla 18R)

Lo anterior muestra, por un lado, que los estudiantes se sienten muy cómodos aplicando los diagramas de árbol para resolver problemas y por otro, que no lograron madurar la construcción de diagramas de árbol en el tiempo que duró la unidad didáctica.

En la Tabla 19R observamos la frecuencia de uso de cada una de las siguientes estrategias heurísticas por parte de los estudiantes que cursaron la unidad temática (grupo de control). Cada renglón de la tabla corresponde a una de las siguientes estrategias heurísticas: (MD) Multiplicación o suma de datos del enunciado, (T) tablas para el conteo sistemático, (F) fórmulas, (PA) diagramas de caja o regla del palomar, (DA) diagramas de árbol y (OTR) varias operaciones con los datos que no conducen al resultado.

Grupo de Control

	Problema 6 Combinación	Problema 13 Ordenación	Problema 3 Combinación	Problema 8 Ordinación	Problema 5 Combinación	Problema 4 Ordenación
MD	17%	11%	17%	0%	6%	6%
T	0%	11%	17%	33%	33%	22%
F	78%	28%	22%	44%	39%	22%
PA	17%	56%	56%	44%	28%	61%
DA	0%	0%	0%	0%	0%	6%
OTR	6%	0%	0%	0%	0%	0%

Tabla 19R: Frecuencia de uso de algunas estrategias para la resolución de problemas

En el caso de los estudiantes que cursaron la unidad tradicional (Grupo de Control) observamos que las estrategias heurísticas que más emplearon en la resolución de problemas, fueron las fórmulas propias de la combinatoria (combinaciones y ordenaciones) y el principio del palomar. (Tabla 19R). Esto se debe a que el profesor enseñó explícitamente el uso de estas dos estrategias heurísticas de resolución de problemas.

En la Tabla (20R) en el renglón denominado F, está la información relacionada con la frecuencia con la que los estudiantes recurrieron a las fórmulas para resolver un problema y en el renglón señalado con FYRC la relacionada con las veces que esa estrategia heurística los condujo a la solución del problema.

Problema	6F	13F	3F	8F	5F	4F	SUMA
F	14	5	4	8	7	4	42
FYRC	11	1	2	2	4	0	20

Tabla 20R: Uso de las fórmulas en el examen final por parte de los estudiantes del grupo de control y efectividad del uso de estas para encontrar la solución del problema

Como lo mencionamos en páginas anteriores el profesor menciona a sus estudiantes durante su conferencia lo siguiente: "…los problemas que piden sacar una muestra de un conjunto de elementos dados, necesariamente se resuelven usando la fórmula de combinaciones y la mayoría de estos problemas son sin repetición de elementos…" o "…las ordenaciones son los problemas donde el orden de los elementos es importante y los problemas se pueden resolver usando el principio del palomar…". Es posible que esta declaración del profesor también justifique el hecho de que en el problema 6 el 78% de los estudiantes aplicaron la fórmula de combinaciones para resolverlo y que el

79% de estos estudiantes obtuvieron la solución correcta. Este problema se ajusta perfectamente a la obtención de una muestra de un conjunto de elementos dados. (Tabla 20R)

Además, la estrategia heurística que no se utilizó en la resolución de problemas por estos estudiantes fue el diagrama de árbol, debido a que el profesor no lo menciono durante sus exposiciones durante la clase.

4.8 PREGUNTA 8

OBJETIVO: Conocer las dificultades que tienen los estudiantes después de cursar la unidad didáctica o la unidad temática

PREGUNTA: ¿Cuáles son los errores más frecuentes que comete un estudiante cuando utiliza un método de conteo sistemático?

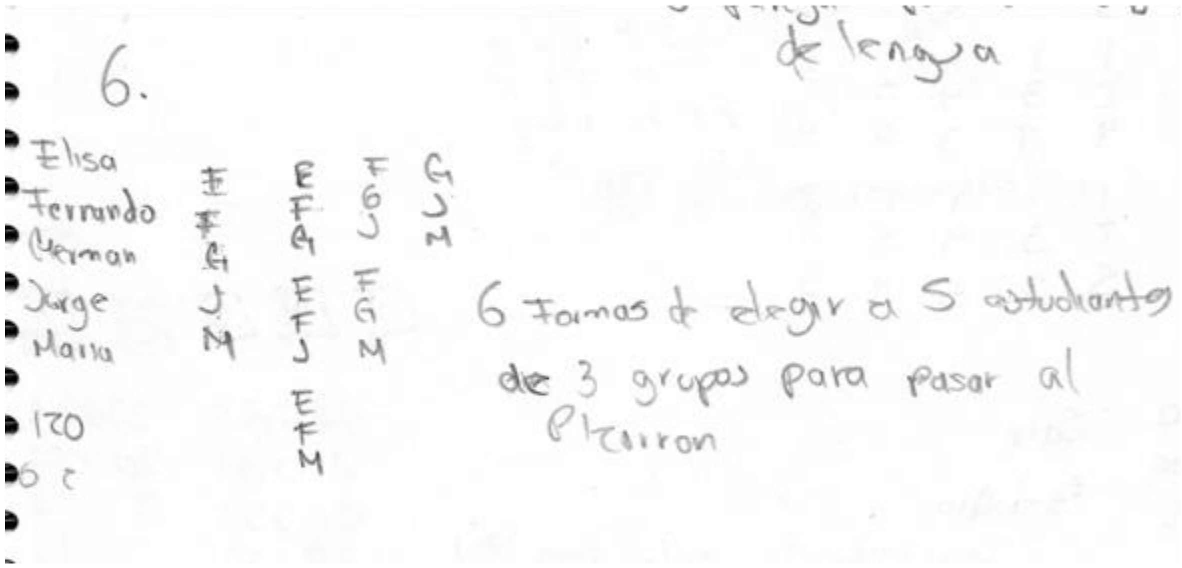
4.8.1 No considera algunos elementos

No considera algunos elementos del conjunto solución porque se olvida de variar, en el conteo sistemático, un elemento del conjunto ordenado.

Por ejemplo, en el problema 6 del cuestionario se pide encontrar el numero de ternas que se pueden formar con 5 estudiante (E, F, G, J y M) para borrar el pizarrón. El estudiante (GL), usando conteo sistemático, construye una tabla con 6 casos. (Dibujo 1R)

GL inicia la construcción de la tabla con las ternas que se forman con el estudiante E como primer elemento y variando el tercer elemento de la terna. De esta manera logra construir los siguientes elementos: EFG, EFJ, EFM, sin embargo, se olvida de variar el segundo elemento de la terna dando por resultado el no considerar los elementos EGJ, EGM y EJM. (Dibujo 6R)

En consecuencia comete el mismo error cuando considera como primer elemento de la terna al estudiante F y varía los elementos del tercer elemento, obteniendo las ternas FGJ, FGM dejando a un lado la terna FJM. (Dibujo 1R)



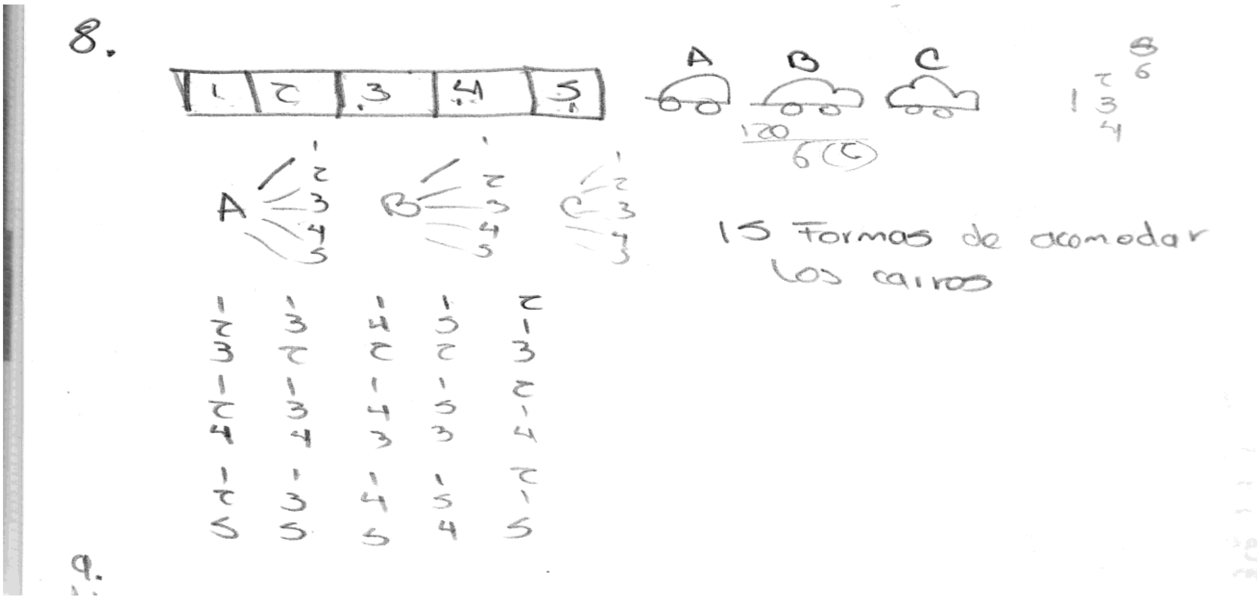
Dibujo 6R: Copia de la resolución del problema 6 realizada por el estudiante GL.

Cuando se construyen ternas algunos estudiantes, que todavía no maduran esta estrategia heurística denominada “conteo sistemático”, cometan el error de olvidarse de variar el término medio de la terna. Cuando se trata de formar grupos de más de tres elementos, los estudiantes olvidan variar algunos de los términos centrales.

4.8.2 Se basa en el producto de los datos

Sólo escribe en la tabla el número de elementos producto de multiplicar los datos del enunciado.

En el problema 8 se pide a los estudiantes encontrar el número de formas diferentes en que se pueden estacionar 3 vehículos en 5 lugares diferentes En este caso, GL muestra que puede aplicar conteo sistemático para encontrar las posibles soluciones del problema, al lograr escribir todas las ternas posibles de estacionar los vehículos, suponiendo que uno de ellos se coloca en el lugar número 1. Sin embargo, al construir las ternas que suponen un vehículo estacionado en el lugar número 2, solo pone 3 posibilidades de las 12 existentes y omite las que resultan de estacionar un vehículo en el lugar número 3, en el 4 y en el 5. (Dibujo 7R)



Dibujo 7R: Copia de la resolución del problema 8 realizada por el estudiante GL.

Asumimos que GL antes de iniciar la construcción de la tabla que contiene las posibles soluciones al problema, considera que la solución es 15, ya que multiplica 5 lugares por 3 vehículos. Esto hace que al llegar a 15 elementos en la tabla de por concluido el proceso. Esta conjetura se fortalece al observar que 5 problemas del cuestionario diagnóstico los resuelve sólo haciendo la multiplicación de los datos proporcionados en el enunciado. (Dibujo 7R)

4.9 PREGUNTA 9

OBJETIVO: Conocer las dificultades que tienen los estudiantes después de cursar la unidad didáctica o la unidad temática

PREGUNTA: ¿Cuáles son los errores más frecuentes que comete un estudiante cuando utiliza un diagrama de árbol para resolver un problema?

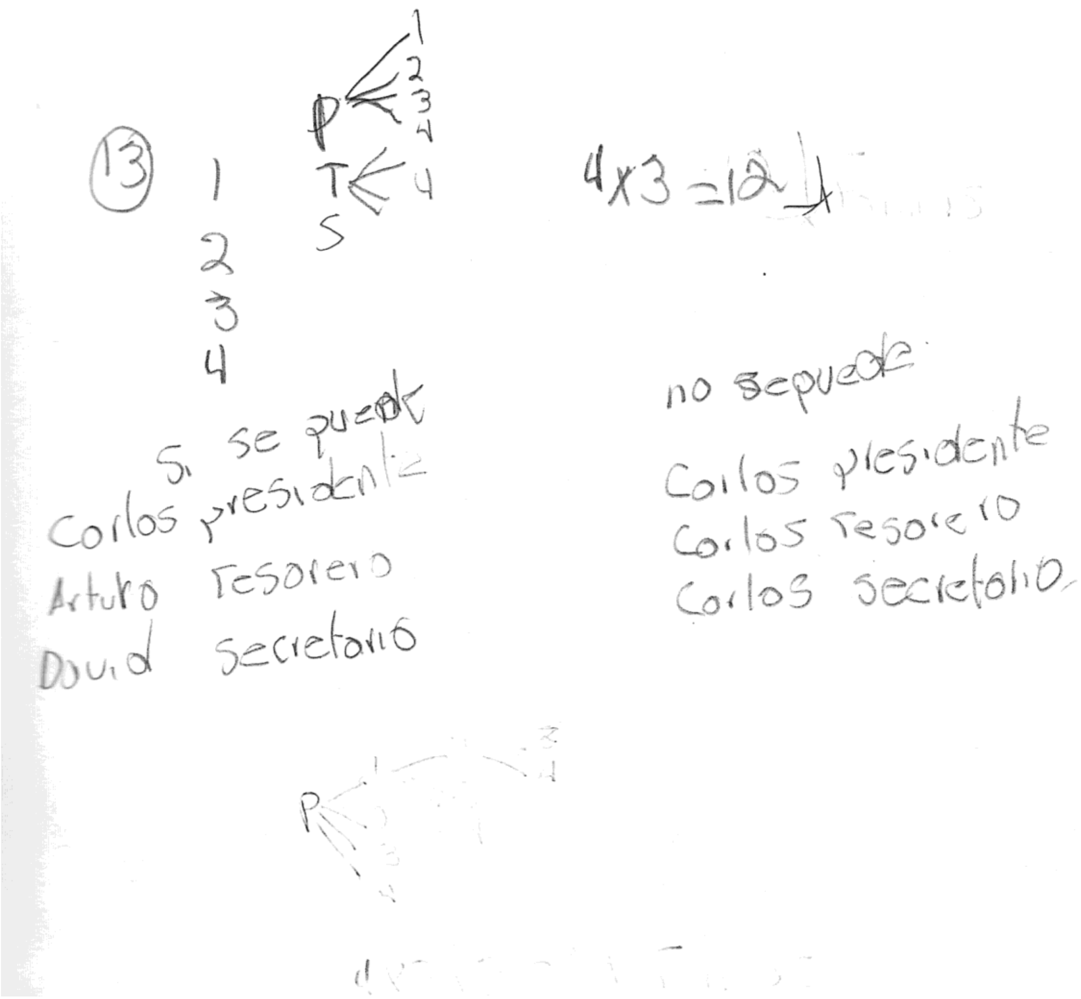
4.9.1 Considera un diagrama de árbol de dos ramas

Considera un diagrama de árbol de dos ramas, en los nodos de una rama coloca los elementos del primer conjunto, dado en el enunciado del problema, y en los nodos de la otra rama coloca los elementos del segundo conjunto.

En el problema 13 se pide a los estudiantes que encuentren los posibles modos de formar un comité de 3 miembros (presidente, tesorero y secretario) con 4 personas.

El estudiante VR construye un diagrama de árbol de dos ramas, en los nodos de la primera rama coloca los 3 puestos (presidente, tesorero y secretario) y en los nodos de la otra las 4 personas (1, 2, 3 y 4), luego aplica la regla del producto (4 personas x 3 puestos = 12) (Dibujo 3R)

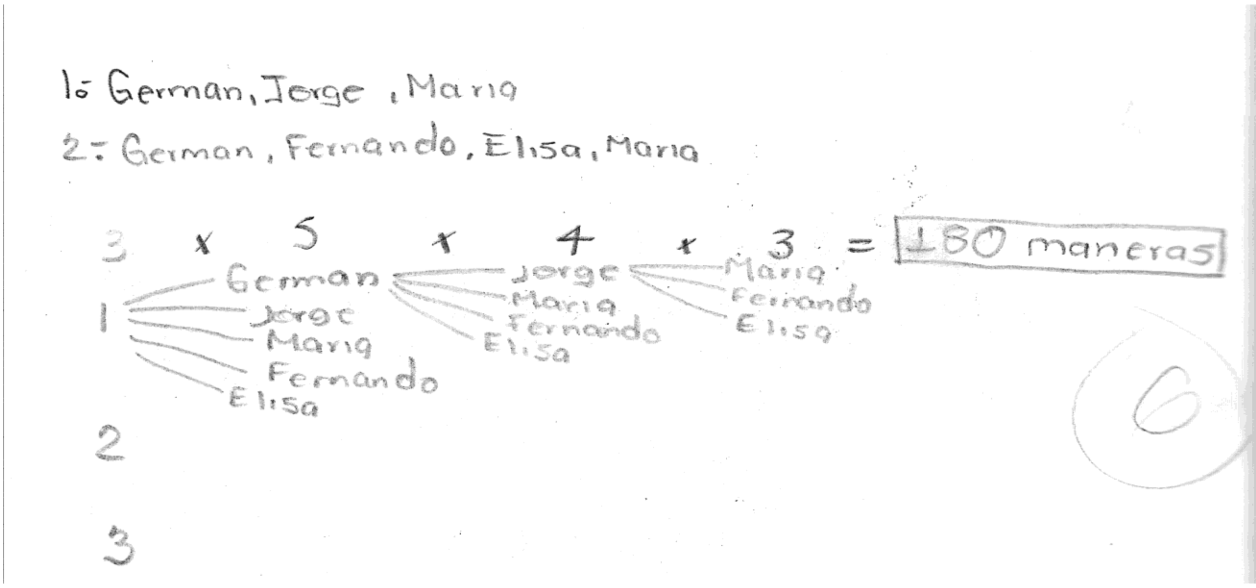
Es posible que el estudiante piense en multiplicar los datos para dar la respuesta y luego busca la justificación de este procedimiento en la construcción del diagrama de árbol.



Dibujo 8R: Copia de la resolución del problema 13 realizada por el estudiante VR.

4.9.2 Dibuja diagramas con nodos de diferentes conjuntos (diagramas de árbol con más de dos ramas)

En el problema 6 el estudiante CM construye un diagrama de árbol donde la primera rama tiene nodos los vehículos, la segunda, tercera y cuarta ramas tienen nodos las personas, luego aplica la regla del producto para encontrar las diferentes posibilidades.



Dibujo 9R: Copia de la resolución del problema 6 realizada por el estudiante CM.

Podemos observar en lo que escribe el estudiante que al aplicar la regla del producto obtiene 180 formas diferentes de acomodar los vehículos. Sin embargo, si el estudiante CM en la construcción del diagrama de árbol no considera la primera rama obtiene un resultado correcto (60 formas diferentes). (Dibujo 9R) Por lo tanto en la construcción del diagrama de árbol los nodos de las ramas los ocupan los elementos de un conjunto y el número de ramas los determina el número de elementos del otro conjunto. Esto es, en el caso que nos ocupa, el árbol tiene como nodos los elementos del conjunto de personas y el número de ramas debía ser los puestos que hay.

4.10 PREGUNTA 10

OBJETIVO: Conocer las dificultades que tienen los estudiantes después de cursar la unidad didáctica o la unidad temática

PREGUNTA: ¿Cuáles son los errores más frecuentes que comete un estudiante cuando utiliza el principio del palomar (diagrama de caja) para resolver un problema?

Cuando un estudiante utiliza el principio del palomar y conocen el modelo combinatorio al que pertenece el problema este no cometen errores en el uso de esta estrategia heurística.

4.11 PREGUNTA 11

OBJETIVO: Conocer las dificultades que tienen los estudiantes después de cursar la unidad didáctica o la unidad temática

PREGUNTA: ¿Cuáles son los errores más frecuentes que comete un estudiante cuando utiliza una fórmula para resolver un problema?

Los estudiantes que emplearon la fórmula adecuada en la resolución del problema no cometieron errores en su uso.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Nuestra investigación se centró en identificar las dificultades que enfrentan estudiantes de la licenciatura en informática antes y después de haber cursado la unidad didáctica de combinatoria. En este sentido la pregunta que orientó la recolección y el análisis de los datos planteaba la necesidad de conocer y comprender:

¿Cómo se puede desarrollar una unidad didáctica vinculada con el curso de matemáticas discretas para el aprendizaje de los conceptos básicos de la combinatoria. Además esta unidad estaba caracterizada por el uso de una metodología de enseñanza que permite al estudiante apropiarse de los conocimientos a través de la resolución de problemas y que se erija en herramienta que oriente el trabajo del profesor?

Una vez analizados los datos, hemos estructurado las conclusiones según los resultados se refieran a la situación los estudiantes antes de la experimentación, después de la puesta en práctica de la unidad de resolución de problemas o después de la unidad tradicional. Además, hemos dedicado un epígrafe de este capítulo a conclusiones relacionadas con el papel del profesor en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

5.1 Sobre el diagnóstico inicial antes de la experimentación

5.1.1 Dificultades de los estudiantes en un marco de resolución de problemas

En general, todos los estudiantes que participaron en la investigación habían recibido enseñanza escolar principalmente a través de un método tradicional. Esto es debido a que apenas en 2007 se llevó a cabo la reforma de planes y programas de estudio de la educación básica y media superior en México (www.sep.gob.mx), que incluían explícitamente formas de enseñanza de corte constructivista. Es con esta reforma que las metodologías en torno a los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática sufrieron cambios sustantivos, al pasar de enfoques cognoscitivistas cuyo centro de interés era el profesor y el dominio de la disciplina, a enfoques constructivistas donde los estudiantes son los actores y en torno a ellos se deben diseñar las secuencias didácticas. No obstante esta investigación pone de manifiesto que la renovación de los planes de estudio y en consecuencia, el cambio en los enfoques didácticos no siempre se traduce en un cambio en las prácticas de los profesores. Para el caso de la didáctica de las matemáticas la resolución de problemas constituye uno de los métodos cuyos enfoques enfatizan esta visión constructivista.

5.1.2 Elección del modelo

Antes de que los estudiantes tomaran la Unidad Didáctica o el Curso Tradicional, la mayoría de ellos no lograban identificar el modelo combinatorio en el que se inscribía el problema. En algunos casos como el problema 13, el 22% de los estudiantes hacia la elección correcta y en otros, como el problema 5 en donde el 69% hacia la elección correcta (Tabla 3R).

Una causa posible de este escaso avance es que la mayoría de los estudiantes usó una multiplicación de datos del enunciado del problema o bien realizaron operaciones nada efectivas para la resolución (Tabla 3R). Esto condujo a incluir a estos estudiantes en el grupo que erraron la elección del modelo combinatorio al que pertenece el problema elevando el porcentaje de estudiantes en este grupo. Esto coincide con los hallazgos del trabajo de Fischbein y Gazit (1988) en el que señalan el tipo de errores encontrados por estudiantes en la resolución de problemas combinatorios:

- Multiplican los datos dados en el enunciado del problema.
- Uno de los datos del problema es dado como la solución al problema.
- La persona da un dato como resultado del problema sin que aparentemente tenga relación con los datos.

En los problemas 13 y 8, que corresponden a ordenaciones, aparece el menor número de errores al elegir correctamente el modelo combinatorio al que pertenece cada problemas, con el 78% y el 75% respectivamente (Tabla 3R). Por otro lado, en los problemas 3 y 5, que corresponden a combinaciones, los estudiantes se equivocan más al elegir el modelo combinatorio al que pertenece el problema, con el 53% y 31% de errores respectivamente (Tabla 3R)

Estos resultados obtenidos con estudiantes que inician sus estudios universitarios son similares a los hallazgos de Fischbein y Gazit (1988) que encuentran que los problemas más difíciles, antes de recibir un instrucción en combinatoria son los problemas de permutaciones, luego los de ordenaciones con repetición, ordenaciones sin repetición y los menos difíciles las combinaciones.

5.1.3 Estrategias Heurísticas

El uso de tablas de enumeración de elementos del conjunto solución de un problema, los diagramas de árbol y el principio del palomar o de Dirichlet son las estrategias heurísticas observadas en el proceso de resolución de problemas por parte de los estudiantes.

Las estrategias más utilizada por los estudiantes antes de recibir la instrucción fue el uso de tablas de enumeración de elementos del conjunto solución del problema con hasta el 69% de los estudiantes para los problemas 3, 4 y 5. Ningún estudiante utilizó fórmulas ni el principio del palomar y el uso de los diagramas de árbol fue escaso.

Estos resultados muestran que la mayoría de estudiantes no son capaces de utilizar estrategias heurísticas pertinentes cuando no han recibido instrucción en el uso de las mismas en los años que le anteceden en su educación. Esto se puede confirmar al analizar los programas de estudio de la educación básica, y de la educación media superior (www.sep.gob.mx) en los programas de estudio anteriores a 2005 de la educación básica y a 2007 los que se refieren a la educación media superior.

5.1.4 Ejemplos y contraejemplos pedidos a los estudiantes

Los ejemplos y contraejemplos del conjunto solución, dados o pedidos a los estudiantes por el monitor o en el enunciado del problema durante la resolución del mismo, no garantizan que el estudiante conozca el modelo combinatorio al que pertenece el problema según los resultados obtenidos al aplicar la prueba de McNemar.

En la sección denominada Pregunta 3 del capítulo de resultados (poner ver pag, #) demostramos que cuando un estudiante da un ejemplo y/o un contraejemplo del conjunto solución de un problema no modifica la posibilidad de elegir el modelo combinatorio adecuando.

Sin embargo, es posible pedirle a un estudiante que determine si dos o más elementos forman parte del conjunto solución de un problema. También es posible formular dos problemas que sólo sean diferentes en el modelo combinatorio al que pertenecen y pedir a un estudiante un par de elementos que pertenezcan a uno de los problemas y no al otro. Esto nos permite saber si el estudiante conoce el modelo combinatorio al que pertenece el problema.

Un ejemplo que ilustra esta propuesta didáctica sería el siguiente:

Dados los problemas:

1. De cuantas maneras diferentes se pueden entregar 3 lapiceros idénticos a los estudiantes Alexis, Mariano, Inés, Matilde y Elisa, si cada uno de los estudiantes elegidos para darle lapicero solo puede recibir uno.

2. De cuantas maneras diferentes se pueden entregar un lapicero verde, uno amarillo y uno rojo a los estudiantes Alexis, Mariano, Inés, Matilde y Elisa, si cada uno de los estudiantes elegidos para darle lapiceros solo puede recibir uno.

Dar dos ejemplos del conjunto solución del problema 2 de manera que uno de ellos no sea del conjunto solución del problema 1

5.1.5 Ejemplos dados en el enunciado de un problema

Los ejemplos dados en el enunciado de un problema como estrategia para ayudar al estudiante a entender el problema pueden alejar al estudiante de la elección correcta del modelo combinatorio al que pertenece este.

Recordemos el problema 2 del cuestionario del que transcribimos el enunciado a continuación:

Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas, con la condición de que siempre estén alineadas las tres figuras? Ejemplo: sota, caballo, rey, 1.

Antes de iniciar la resolución del problema, se pide al estudiante que escriba un ejemplo de alineación de cartas, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otra alineación que no.

Observamos que el ejemplo a tomar en consideración (sota, caballo, rey, 1) y la palabra alinear, pueden inducir otros aspectos que restringen la solución. Por ejemplo, en nuestra investigación el 75% los condujo a pensar en la posibilidad de que las cartas deben estar en el orden (sota, caballo, rey, cualquier número) o (cualquier número, sota, caballo, rey). Dejando fuera elementos del conjunto solución como (caballo, sota, 3, rey). Es posible que este último elemento del conjunto solución sea un mejor ejemplo que el dado en el enunciado del problema 2 del cuestionario.

5.2 Sobre los resultados después de la experimentación de la Unidad Didáctica

5.2.1 Uso de la multiplicación de datos

Antes de que los estudiantes realizaran la unidad didáctica la mayoría de ellos utilizaba la multiplicación de los datos del enunciado, o bien tablas de enumeración de elementos del conjunto solución, para dar respuesta a los problemas.

La aplicación de la unidad didáctica no logró que algunos estudiantes modificaran significativamente la práctica de multiplicar los datos del enunciado del problema según la prueba de McNemar aplicada a la información obtenida antes y después de tomar la unidad didáctica (Tabla 15R).

Para evitar estas situaciones, la Unidad Didáctica podía considerar que cada vez que se resuelva un problema combinatorio, se muestre a los estudiantes que realizar la suma o multiplicación de los datos no necesariamente conduce a su solución. Este proceso llevaría a los estudiantes a rechazar algunas de sus ideas originales y luego, modificar, refinar o consolidar sus argumentos originales.

En este sentido consideramos que la unidad didáctica debe contemplar como tema inicial problemas que tengan como única finalidad determinar el modelo combinatorio al que pertenece un determinado problema. De esta manera se logrará centrar la atención del estudiante en el proceso que lleva a la determinación del modelo combinatorio al que pertenece el problema.

Una posibilidad para llevar a cabo esta propuesta es que el profesor plantee dos problemas muy parecidos. Por ejemplo veamos los siguientes casos:

A. En un salón de clases hay cuatro estudiantes (Pedro, Juan, Mario y Saúl). El profesor tiene que elegir a 3 estudiantes para leer 3 libros idénticos. ¿De cuántas maneras diferentes puede elegir a los 3 estudiantes?

B. En un salón de clases hay cuatro estudiantes (Pedro, Juan, María y Sofía). El profesor tiene que elegir a 3 estudiantes para leer 3 libros (Historia, Filosofía y Matemáticas). El primero en ser elegido lee el libro de Historia el segundo en ser elegido lee el de Filosofía y el tercero el de Matemáticas. ¿De cuántas maneras diferentes puede elegir a los 3 estudiantes?

Una vez planteados los dos problemas se pide a cada estudiante que dé un ejemplo de un elemento del conjunto solución de cada problema, argumentando su respuesta. Si después de haber escuchado los ejemplos dados por los estudiantes no se logra que diferencien los modelos combinatorios (combinaciones y ordenaciones) de cada problema, se procede de manera diferente.

Ahora, el profesor da dos ejemplos del conjunto solución de cada problema y pide a los estudiantes que determinen a qué conjunto solución pertenecen. Por ejemplo, para los dos problemas dados en párrafos anteriores puede plantear el siguiente problema:

Problema: Determina cuál de las siguientes ternas que aparecen a continuación puede ser elemento del conjunto solución del Problema A y cuáles elementos del conjunto solución del problema B.

(Pedro, Juan, María), (Pedro, María, Juan) y (Sofía, María, Juan)

Adicionalmente, y de acuerdo con Moses, Bjork y Goldenberg (1993) consideramos necesaria la creación de problemas combinatorios con el fin de mejorar su comprensión de la estructura de los problemas combinatorios, dado que para lograrlo necesitan considerar el diseño del problema, esto es, los componentes que hacen construir el problema, tal como el conocimiento o desconocimiento de la información, los objetivos a ser alcanzados y cualquier condición para alcanzarlos.

5.2.2 Tablas de enumeración de elementos

Las tablas de enumeración de elementos como estrategia heurística en la resolución de problemas de combinatoria tienen una gran importancia, sobre todo si los problemas que se han de resolver son de los llamados problemas de enumeración (problemas en los que se pueden enumerar los elementos del conjunto solución).

En torno a este aspecto podemos identificar que antes de iniciar la unidad didáctica, la mayoría de los estudiantes aplicó en alguno de los problemas una tabla de enumeración de datos al intentar escribir en una tabla cada uno de los elementos que conforman el conjunto solución del problema (Tabla 7R).

Sin embargo, al terminar el curso tradicional algunos estudiantes que se inclinaban por el uso de la multiplicación de datos del enunciado y/o por la enumeración de elementos en tablas para resolver problemas, optaron por usar otro tipo de estrategias heurísticas como diagramas de árbol, fórmulas y el principio del palomar propias de la combinatoria (Tabla 17R).

Se observó que algunos estudiantes que tomaron la unidad didáctica, y que utilizan un método de conteo sistemático, cometieron dos tipos de error al enumerar los elementos del conjunto solución del problema que resuelven:

Error 1. Dar por concluido el conteo cuando el número de elementos encontrado coincide con el resultado de multiplicar los datos dados en el enunciado del problema (Dibujo 7R).

Error 2. Omitir algún elemento o elementos del conjunto solución. Es decir, comenten alguno de los errores mencionados por English (1993 a y b) (Dibujo 6R).

Por lo antes mencionado pensamos que el monitor debe estar atento a este tipo de errores los cuales dificultan que los estudiantes logren la solución del problema. Además es necesario que el monitor alerte a los estudiantes sobre este tipo de errores, los cuales se cometen con mucha frecuencia durante el uso del conteo sistemático.

5.2.3 Diagramas de árbol:

Antes de que los estudiantes tomaran la unidad didáctica la mayoría de ellos (84%) no usaban los diagramas de árbol como estrategia heurística en la resolución de problemas (Tabla 9R).

Sin embargo, al terminar la unidad didáctica algunos estudiantes que se inclinaban por el uso de la multiplicación de datos del enunciado y/o por la enumeración de elementos en tablas para resolver problemas, optaron por usar otro tipo de estrategias heurísticas como los diagramas de árbol (hasta el 79% de los estudiantes) (Tabla 17R). Así, pudimos identificar que después de tomar la unidad didáctica los diagramas de árbol se convirtió en la estrategia heurística más utilizada por los estudiantes en el proceso de resolución de problemas. En este sentido al pasar a utilizar esta estrategia, los estudiantes dejaron de ejecutar operaciones, sin explicación aparente, con los datos (Tabla 17R). A pesar de los avances antes mencionados, algunos estudiantes siguieron utilizando la práctica de multiplicar los datos dados en el enunciado.

A pesar del avance que significa el uso de heurísticas, es necesario constatar que la utilización de diagramas de árbol, que fue la estrategia más utilizada, tuvo una efectividad muy baja, menor al 10% (Tabla 18R). El resultado es coherente con los hallazgos de Pesci (1994) quien afirma que los estudiantes encuentran dificultad para construir diagramas de árbol adecuados para representar situaciones problemáticas y por tanto, los diagramas son la causa de muchos errores.

Por otro lado, consideramos que es necesario que los estudiantes logren comprender el uso de esta herramienta para resolver problemas combinatorios porque según los hallazgos de Fischbein (1975) promueven el razonamiento recursivo, propio de la combinatoria. Sin embargo, puede tener sentido en estudiantes de educación superior lo señalado por Cañadasy Figueiras (2010) cuando sugieren que la instrucción de los diagramas de árbol sea posterior al inicio del estudiante en la resolución de problemas de combinatoria, cuando estén preparados para analizar el proceso inductivo que representa el crecimiento del diagrama.

Los estudiantes cometieron dos tipos de error en el uso de esta estrategia:

- Considerar un diagrama de árbol de dos ramas: en los nodos de una rama se colocan los elementos del primer conjunto dado en el enunciado del problema, y en los nodos de la otra rama se colocan los elementos del segundo conjunto (Dibujo 8R).

2. Dibujar diagramas con nodos de diferentes conjuntos (diagramas de árbol con más de dos ramas)

Consideramos que el profesor debe hacer referencia a este tipo de errores que cometen los estudiantes durante la resolución de problemas algo que puede hacer utilizando como ejemplo situaciones en las que los estudiantes hayan cometido alguno de estos errores.

5.2.4 Principio del palomar

Tanto esta estrategia como la siguiente fueron poco utilizadas por los estudiantes.

Antes de que los estudiantes tomaran la unidad didáctica, no usaban el principio del palomar como estrategia heurística de resolución de problemas. Al término de la unidad didáctica hasta el 21% la usaron en la resolución de problemas.

Esto muestra que se lograron avances al pasar de la nula utilización de dicha estrategia a la utilización por una determinada proporción. Sin embargo, los que conocían el modelo combinatorio las usaron adecuadamente.

5.2.5 Fórmula

En el caso del uso de las fórmulas, al inicio de la unidad didáctica no las utilizaron y al término de la unidad didáctica hasta el 21% de los estudiantes la usaron para resolver algunos problemas.

Esto muestra que se lograron avances al pasar de la nula utilización de dicha estrategia a la utilización por una determinada proporción. Sin embargo, los que conocían el modelo combinatorio las usaron adecuadamente.

5.3 Sobre los resultados después de la experimentación del curso tradicional

Después del curso tradicional la mayoría de los estudiantes la mayoría usaron como estrategias heurísticas para resolver problemas: el principio del palomar y las fórmulas propias de la combinatoria.

5.3.1 Uso de la multiplicación de datos

Antes de que los estudiantes tomaran el curso tradicional la mayoría de ellos utilizaba la multiplicación de los datos del enunciado, o bien tablas de enumeración de elementos del conjunto solución para dar respuesta a los problemas (Tabla 8R y 9R).

En este grupo no se logró que algunos estudiantes modificaran significativamente la práctica de multiplicar los datos del enunciado problema según la prueba de McNemar aplicada a la información obtenida antes y después de la clase tradicional (Tabla 15R).

Por tanto, la unidad didáctica y la clase tradicional no lograron que los estudiantes modificaran esta práctica.

5.3.2 Tablas de enumeración de elementos

En torno a este aspecto podemos identificar que antes de iniciar la unidad didáctica, la mayoría de los estudiantes aplicó en alguno de los problemas una tabla de enumeración de datos al intentar escribir en una tabla cada uno de los elementos que conforman el conjunto solución del problema (Tabla 7R).

Sin embargo, al terminar el curso tradicional algunos estudiantes que se inclinaban por el uso de la multiplicación de datos del enunciado y/o por la enumeración de elementos en tablas para resolver problemas, optaron por usar otro tipo de estrategias heurísticas como el principio del palomar y las fórmulas propias de la combinatoria (Tabla 19R).

5.3.3 Diagramas de árbol

Antes de que los estudiantes tomaran la unidad didáctica la mayoría de ellos (83%) no usaban los diagramas de árbol como estrategia heurística en la resolución de problemas (Tabla 8R).

Sin embargo, al terminar del curso tradicional prácticamente ninguno (un estudiante para resolver el problema 4) de los estudiantes uso los diagramas de árbol como estrategia heurística para resolver problemas (Tabla 19R)

5.3.4 Principio del palomar

Antes de que los estudiantes tomaran la unidad didáctica, no usaban el principio del palomar como estrategia heurística de resolución de problemas. Al término de la unidad didáctica hasta el 78% la usaron en la resolución de problemas.

Esto muestra que se lograron avances al pasar de la nula utilización de dicha estrategia a la utilización por una determinada proporción. Sin embargo, la efectividad del uso de esta es muy bajo (21%)

5.3.5 Fórmula

Antes de que los estudiantes tomaran el curso tradicional ningún de ellos usaban fórmulas como estrategia heurística en la resolución de problemas (Tabla 8R).

Sin embargo, al terminar la unidad didáctica algunos estudiantes que se inclinaban por el uso de la multiplicación de datos del enunciado y/o por la enumeración de elementos en tablas para resolver problemas, optaron por usar otro tipo de estrategias heurísticas como fórmulas (hasta el 78% de los estudiantes lo usaron para resolver el problema 6) y el principio del palomar (hasta el 61% lo usaron para resolver el problema 4) (Tabla 19R). Así, pudimos identificar que después de tomar la unidad didáctica las fórmulas se convirtieron en la estrategia heurística más demandada por los estudiantes en el proceso de resolución de problemas, seguida por el principio del palomar y luego las tablas de enumeración de elementos. En este sentido y con el uso de estas estrategias los estudiantes dejaron de ejecutar operaciones con los datos, sin explicación aparente (Tabla 19R). A pesar de los avances antes mencionados, algunos estudiantes siguieron utilizando la práctica de multiplicar los datos dados en el enunciado.

Además, el uso de fórmulas, que fue la estrategia más utilizada tuvo una efectividad media, del 50% (Tabla 20R).

A partir de estos resultados, entendemos que es necesario revisar la metodología de enseñanza tradicional y adaptarla a la propuesta en la unidad didáctica para enseñar el uso de fórmulas.

5.4 Sobre el método de enseñanza

5.4.1 Sobre el profesor

El análisis realizado en torno a la influencia que tuvo el método de enseñanza-aprendizaje utilizado nos permite derivar conclusiones que tienen que ver con el papel del profesor

Los profesores del área de matemáticas de la facultad de informática de la Universidad Veracruzana no han tenido experiencias ni como estudiantes ni como profesores con un método de enseñanza-aprendizaje constructivista basado en la resolución de problemas como medio de aprendizaje. No obstante y a pesar de que el profesor encargado del grupo que utilizaría la unidad didáctica recibió instrucciones para apoyar su papel de monitor, le fue muy complicado desarrollar esta función. Este método de corte constructivista en donde el estudiante es el centro de este proceso y que utiliza la resolución de problemas como eje central para llevar a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje le ocasiona varias dificultades. Las que consideramos más significativas observadas durante esta investigación son:

a) El profesor en algunas ocasiones está dispuesto a dar la idea central de la resolución del problema a los estudiantes, quitándoles la oportunidad para aprender a través de la formulación por ellos mismos. Para Polya (1965) las preguntas orientadoras están pensadas para que sirvan como una ayuda que favorezca cumplimentar la resolución del problema y ha de ser equilibrada. Es decir, no debe ser excesiva pero tampoco ha de ser limitada ni limitante al grado de hacer desistir a los resolutores en su propósito (Anexo 3).

b) La ayuda que ofrece al equipo de estudiantes al que se acerca para identificar si la requieren es excesiva. Frecuentemente permanece con ellos por espacio de más de 15 minutos. En algunos casos se pudo observar que con esta ayuda los estudiantes obtienen la idea central de la resolución del problema (Anexo 3).

   Por otra parte, las investigaciones de Schoenfeld (1988) ponen de manifiesto que los estudiantes que habían recibido una instrucción a través de cursos tradicionales dedican en promedio 11.7 minutos a la resolución de un problema antes de abandonarlo. En consecuencia el hecho de que el profesor se dedique a un solo equipo durante tanto tiempo da lugar a que los otros equipos, que no han logrado avanzar en la resolución del problema, ya no mantengan la atención en el proceso de resolución, dedicándose a desarrollar otras actividades personales.

Estos indicadores nos llevan a pensar que los profesores requieren una mayor preparación para enfrentar este tipo de metodología de enseñanza. Consideramos pertinente que como parte de sus cursos teóricos-prácticos de desarrollo y mejoramiento académico pueda encontrar información y estrategias que al menos le puedan dar respuesta a preguntas como las siguientes:

- ¿Cómo plantear y resolver problemas desde un enfoque constructivista?
- ¿En qué momento debe intervenir un monitor para ayudar a un equipo de

estudiantes a avanzar en la resolución de un problema?

- ¿Cómo diseñar una sesión de clase para un grupo de estudiantes organizados en equipos, usando un modelo constructivista de enseñanza-aprendizaje, tomando como eje central de enseñanza la resolución de problemas?

5.4.2 Elección del modelo

Algunos de los estudiantes que formaron parte de la investigación no lograron los objetivos planteados en la unidad didáctica. En general se pudo observar que:

a) Los estudiantes que cursaron la unidad didáctica fueron alentados para utilizar diferentes estrategias heurísticas (modelos y representaciones) y explicar el uso de ellas (Anexo X). Para Bharath (2004) es importante que los estudiantes tengan libertad para utilizar diferentes representaciones y modelos y que estos sean alentados a describir y explicar sus acciones. Alentar tal flexibilidad y el análisis crítico de la construcción elegida es una base para estudios más avanzados en matemáticas.

Los estudiantes de la clase tradicional fueron instruidos para resolver los problemas utilizando fórmulas acompañadas de una serie de reglas para aplicarlas en diferentes modelos combinatorios (Anexo 4). En torno a este aspecto Polya (1965) opina que un profesor que usa su tiempo en ejercitar a sus estudiantes en operaciones que son rutinarias no estimula el interés y la curiosidad, e impedirá el desarrollo intelectual.

b) Los estudiantes que cursaron la unidad didáctica, en general se mantuvieron atentos al proceso de resolución del problema, participando activamente dentro de su equipo, compartiendo sus hallazgos, y cuando se les requirió la compartición ante la totalidad del grupo (Anexo 3). Bharath (2004) recomienda que los estudiantes compartan la solución de los problemas combinatorios con sus pares. Para ello, se requiere que describan y expliquen cómo llegaron a la solución y por qué consideran que su solución es verdadera y única. Esta práctica de compartir significa que la solución que los estudiantes generan debe sostenerse bajo el escrutinio de otros estudiantes. Además, cuando los estudiantes comparten su solución, nos proporcionan conocimiento sobre su comprensión de la combinatoria. Reconocemos estas prácticas como unas de las que mejores efectos tienen en el aprendizaje y la comprensión en la resolución del problema.

Por otro lado, algunos estudiantes de la clase tradicional se mantuvieron atentos a las explicaciones del profesor y participaron individualmente en la resolución de problemas. A petición del profesor, algunos de ellos (muy pocos), socializaron con el grupo la solución del problema y en raras ocasiones el proceso de resolución (Anexo Y).

5.4.3 Sobre la potencialidad del método

A pesar de que los resultados no son los esperados, se pueden destacar algunas conclusiones importantes sobre los logros del método de enseñanza plasmado en la unidad didáctica:

- Mayor riqueza de estrategias
- No siempre los ejemplos son una ayuda en la resolución de problemas.
- Dar un ejemplo y/o un contraejemplo de un elemento del conjunto solución no indica que el resolutor conozca el modelo combinatorio al que pertenece el problema.
- Buscan justificar el producto de los datos del enunciado del problema.
- Si los estudiantes conocen el modelo combinatorio al que pertenece el problema, logran la solución cuando usan las fórmulas propias de la combinatoria o el principio del palomar.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, V.; González Carmona, A. y Sáenz, O. (1988). Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticas en el Ciclo Medio de la E. G. B. *Enseñanza de las Ciencias*, 6 (3), pp. 251-264.

Arrieta, J. J. (1989). La resolución de problemas y la educación matemática. Hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(1), pp. 63-71.

Barratt, B. B. (1975). Training and transfer in combinatorial problem solving: The development of formal reasoning during early adolescence. *Developmental Psychology*, 11 (6): 700-704.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1995). The use of implicative and correspondence analysis for assessing pupils´combinatorial reasoning. En; R. Gras (Ed.), *Méthodes d´analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des mathematiques* (pp. 245-256). Rennes: IRMAR.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1997a). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1997 b). Assessing combinatorial reasoning. En I. Gal y J. Garfield (Eds.). *The assesment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. e I.O.S. Press.207

Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1998). A study on the stability of the equiprobability bias in 10-14 year-old children. En L. Pereira-Mendoza y cols. (Eds.), *Proceedings of the V International Conference on Teaching Statistics*.. Singapore: IASE.

Batanero, C. y Navarro-Pelayo, V. (1991). La enseñanza de la combinatoria en los niveles no universitarios. *Guadalbullón*, 6: 41-49.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Bosch, M. y Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), pp. 314-332.

Brousseau, G.. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2):33-155.

Brown, C. A. y Edward, A. S. (1990). Discrete mathematics. En N.C.T.M. (Eds.), Results from the fourth mathematics asssesment of National Assesment of Educational Progress. Reston, Va: N.C.T.M.

Brown, Stephen L., and Marion Walter. (1993). *Problem Posing: Reflections and Applications*. Hillsdale, N.J.: Lawerence Erlbaum,

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(2), pp. 249-258

Callejo, M. L. (1998). "*Les «Col-leccions de problems matemàtics» en llibres de text de matemàtiques com un indicador del canvi*" BIAIX, 7; pp 18-21.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: Ideas, tendencias e influencias en España. En: Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, XIX Seminário de Investigação em Educação Matemática, XVIII Encontro de Investigação em Educação Matemática. Castro, E.; Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias*, 10(3), pp. 243-253.

Cobo Lozano, P., (1996). "Análisis de las Actuaciones de Alumnos de 3º de BUP en la Resolución de Problemas que Comparan Áreas de Figuras Geométricas", *Enseñanza de las Ciencias*, 14 (2), 195-207

Cerdán, F. y Puig, L. (1983). Los problemas de matemáticas en el currículo de E. G. B. (Ciclo medio): un estudio cuantitativo / descriptivo desde el punto de vista de su potencial heurístico. *Enseñanza de las Ciencias*, 1(3), pp. 168-185.

Deulofeu, J. Gorgorió, N. Bichop, A. (coordinador). (2000). "Matemáticas y educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional". Abreu, G. *Materiales para la innovación educativa; 14*. Matemáticas 154. Barcelona: Graó

Deulofeu, J. (2002). G.P.P. Matemáticas (diciembre 2005) 2. RESOLUCION DE PROBLEMAS. Programa de estudios del Diplomado de Educación, Problemas.Dubois, J.G. (1984). Une sistématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, 15: 37-57.

Dubinsky, E. (1991). "Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics." In: Leslie P. (Ed.). *Epistemological Fundations of Mathematical Experience*, edited by, pp. 160-87. New York: Springer-Verlag, Dubois, J. G.: (1984), 'Une systematique des configurations combinatoires simples.' *Educational Studies in Mathematics* 15 (1), 37–57.

Engel, A. (1973). *Probabilidad y Estadística*. Valencia: Mestral Universidad.

Engel, A., Varga, T. y Walser, W. (1976). *Hasard ou strategie?*. París: O.C.D.L.

English, L.D. (1991). Young children´s combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*. 22, pp.451-474.

English, L.D. (1993). Children´s strategies for solving two-and-three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (3): 255-273.

English, L.D. (1998). “Children´s Problem Posing within Formal and Informal Contexts.” *Journal for Research in Mathematics Education* 29 (1998): 83-106

English, L.D. (1999). “Assessing for Structural Understanding in Children´s Combinatorial Problem Solving.” *Focus on Learning Problems in Mathematics* 21: 63-82.

English, L.D. (2003). “Engaging Students in Problem Posing in an Inquiry-Oriented Mathematics Classroom.” In: Frank K. Lester Jr. and Randall I. Charles. *Teaching Mathematics through Problem Solving, Prekindergarten-Grade 6*, edited by, pp.187-98. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Fischbein, E. Pampu, I, y Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. En: E. Fischein (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Reide.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5: 193-198.

Fischbein, E., Sainiti, M., y Sciolis, M. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22: 523-549.

Fischbein, E. y Grossman, A. (1997 a). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 27-47.

Fischbein, E. y Grossmann, A. (1997 b). Tacit mechanism of combinatorial intuitions. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 265-272). Lahti: Lahti Research and Training Centre.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal of Research in Mathematics Education* 28(1), 96-105.

Fuson, Karen C. (1992). “Research on Learning and Teaching Addition and Subtraction of Whole Numbers.” *In:* Gaea Leinhardt, Ralph Putman, and Rosemary A. Hattrup, *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, edited by pp. 53-188. Hissdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Assoc., Gascón, J. (1985). El aprendizaje de la resolución de problemas de planteo algebraico. *Enseñanza de las Ciencias*, 3(1), pp. 18-27.

Gascón, J. (1988). El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de Matemáticas. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Glaymann, M. y Varga, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela. Barcelona*: Teide.

Godino, J. D. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática. VIII Congreso internacional de la Asociación Española de Semiótica. Granada.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Navarro Pelayo, V. y Batanero, C. (1992). Analysis of student's errors and difficulties in solving combinatorial problems. Proceedings of the XVI P.M.E., (v.1, pp. 241 248). Durham:University of New Hampshire.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado personal e institucional de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, pp. 417-424). Universidad de Valencia, España.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). A semiotic and anthropological approach to research in mathematics education. Philosophy of Mathematics *Education Journal 10* URL:http://www.ex.ac.uk/ ~PErnest/pome10/art7.htm

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1999). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En: I. Vale y J. Portela (Eds), *Actas IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática* (pp. 25-46). Guimaraes: Associaçao de Profesores de Matemática.

Green, D.R. (1981). Probability concepts in school pupils aged 11-16 years. Ph. D. Thesis. Loughborough University.

Grimaldi, R. P. (1989). *Discrete and combinatorial mathematics: an applied introduction*. Reading, Ma: Addison- Wesley.

Guisasola, J. y Barragués, J. I. (2002). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias,* 20(2), pp. 285-302.

Hadar, N.y Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, 12: 435-443.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187 205.

Hiebert, James. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* Hillsdale, N.J.: Lawerence Erlbaum Assoc.,

Hung, D. (1998a). "Meanings, Contexts and Mathematical Thinking: The Meaning-Contexts Model." *Journal of Mathematical Behavior* 16 (3): 311-44.

Hung, D. (1998b). "Epistemological Change through Peer Apprenticeship Learning From Rule Based to Idea-Based Social Constructivism." International Journal of Computers for Mathematical Learning 3 (1/2): 45-80

Hung, D. (2000) "Some Insights into the Generallizing of Mathematical Meanings." *Journal of Mathematical Behavior* 19 : 63-82.

Huerta, M. P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias,* 20(1), pp. 75-86.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Barcelona: Paidós.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 3, 111-127.

Kenney, M. J. y Hirsch, C. R. (1991). *Discrete mathematics across the Curriculum, K-12.* Yearbook. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick, J. (1978). *Variables and methodologies in research on problem solving*.

Athens, GA: Hatfield y Bradbard.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past tewenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. Silver, *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 1-16). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Klein, M. (1978). *El Fracaso de la Matemática Moderna*. México: Siglo XXI..

Lecoutre, M.P. (1985). Effet d´informations de nature combinatoire et de nature frequentielle sur les jugéments probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6 (2-3): 193-213.

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Jugéments probabilistes et modéles cognitifs: étude d´une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (3): 357-368.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23: 557 - 568.

Lecoutre M. P. y Fischbein E. (1998). Évolution avec l'âge de "misconceptions" dans les intuitions probabilistes en France et en Israel. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,18 (1).

Lester, F. K. (1987). *Why is problem solving such a problem? Reactiones to a Set of Research Papers.* PME: Montreal.

Lester, F. K. (1987). "Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994". *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25(6), pp.660-675

Maher, Carolyn A. and Amy M. Martino. (1996a) "The Development of the Idea of Mathematical Proof: A Five-Year Case Study." *Journal for Research in Mathematics Education 27* 194-214

Maher, Carolyn A. and Amy M. Martino. (1996b). "Young Children Invent Methods of Proof: The 'Gang of Four.' *In:* Leslie P. Steffe, Pearla Nesher, Paul Cobb, Gerald A. Goldin, and Bria Greer. *Theoris of Mathematical Learning*, , pp. 431-47. Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum Assoc.

Maher, Carolyn A. and Amy M. Martino. (1997). "Conditions for Conceptual Change: Frou Pattern Recognition to Theory Posing." *In:* H. Mansfield. *You Children and Mathematics: Concepts and Their Representations*, , pp. 58-81. Durham, N.H.: Australian Association Mathematics Teachers.

Maher, Carolyn A., and Bob Speiser. (1977). "How Far C. You Go with Block Towers? Stephanie´s Intellectual Development." *Journal of Mathematical Behavior* 16 (2): 125-32.

Martino, Amy M. and Carolyn A. Maher. (1999). "Teacher Questioning to Promote Justification and Generalization in Mathematics: What Research Practice Has Taught Us." *Journal of Mathematical Behavior* 18 (1): 53-78.

Marchand, H. M. (1994). The resolution of two combinatorial tasks by mathematics teachers. Proceedings of the 18 PME Conference, Lisbon (Short oral presentation).

Martino Amy M. and Carolyn A. Maher. (1999). “Teacher Questioning to Promote Justification and Generalization in Mathematics: What Research Practice Has Taught Us.” *Journal of Mathematical Behavior* 18 (1): 53-78.

Mason, J. Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. M.E.C. –Labor. [Versión en español de la obra *Thinking Mathematically*, publicada por Addison-Wesley originalmente en 1982 y revisada en 1985].

Maury, S. (1986). Contribution à l´étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la rèsolution des problèmes. Thèse d´État. Université de Montpellier II.

Maury, S. y Fayol, M. (1986). Combinatoire et résolution de problemes au cours moyens première et deuxième annés. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (1): 63-104.

Mendelsohn, P. (1981). Analyse procedurale et analyse structurale des activités de permutation d´objets. Archives de Psychologie, 49: 171-197.

Moses, Barbara, Elizabeth Bjork, and E. Paul Goldenberg. (1993). “Beyond Problem Solving: Problem Posing.” In: Stephen I. Brown and Marion Walter. *Problem Posing: Reflections and Applications*, , pp. 178-88. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Assoc.,.

Muter, Ethel M. and Carolyn A. Maher. (1998). “Recongnizen Isomorphism and Bulding Proof: Revisiting Earlie Ideas.” *Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the north American Chapter of the international Grup for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 461-67. Releigh, N.C.:

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).(2000). *Principles and Standards for School Mathematics. Reston*, Va.: NCTM,

N.C.T.M. (1980). An Agenda For Action. NCTM, Reston. Virginia.

N.C T.M. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, Va: N. C. T. M.

N.C.T.M. (1991). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Traducción de la SAEM THALES. Sevilla. (Versión original en inglés de 1989)

Navarro-Pelayo, V. y Batanero, C. (1991). La combinatoria en los textos de bachillerato. *Investigación en el aula* 14: 123-127.

Navarro-Pelayo, V. (1991). La enseñanza de la combinatoria en el bachillerato. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Navarro-Pelayo, V. (1994). Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de Bachillerato. *Educación Matemática*, 8(1), 26-39.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación matemática*, 8(1): 26-39.

Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: ICE de la Universidad Autónoma.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). La génèse de l´idée de hasard chez l´enfant. Paris: Presses Universitaires de France.

PIAGET, J. e Inhelder, B. (1951). *La genese de l'ideé de hasard chez l'enfant*. [La génesis de la idea de azar en el niño]. París: Presses Universit é France.

Pifarré, M. y Sauny, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: Un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), pp. 297-308.

Polya, G. (1965). *Como plantear y resover problemas*. Trillas, México. [Version en español de la obra *How to solve it* publicada por Princeton University Press en 1945]

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*. New York:.John Wiley and Sons.

Puig, L., (1996). *Elementos de resolución de problemas.* España: Comares.

Puig, L. (1998). Clasificar y significar. En: L. Rico & M. (Eds.) Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 113-127). Granada: SEIEM / Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas Resolución de problema en la investigación y el curículo. En: Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, XIX Seminário de Investigação em Educação Matemática, XVIII Encontro de Investigação em Educação Matemática. Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias*

Radatz, H. C. (1980). Students' errors in the mathematical learning: a survey. *For the learning of mathematics,* 1(1): 16 20.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (1996 a). Strategies in solving combinatorial problems by students with advanced mathematical background. En A. Gutiérrez y L. Puig (Eds.), Proceedings of the XX PME Conference, Valencia.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (1996 b). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, 36, 433-446.

Roa, R.: (2000). *Razonamiento Combinatorio en Estudiantes con Preparaci´on Matem´atica*

Avanzada (*Combinatorial Reasoning in Students with Advanced Mathematical Training*), Unpublished Ph.D. Dissertation, University of Granada, Spain.

Sierpinska, A. (1994)., *Understanding in Mathematics*, London: The Falmer Press,.

Scardamalia, M. (1977). Information processing capacity and the problem of horizontal décalage: A demonstration using combinatorial reasoning tasks. Child Development, 48 (1): 28-37.

Schoenfeld, A., (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando, EEUU: Academic Press

Schoenfeld, A. (1992). *"Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics"*, en Grouws, D.A. (ed): *Handbook of research in Mathematics Teaching and Learning.* Pp.334-389. New York: McMillan.

Sriraman, B. (2002a). "How Do Mathematically Gifted Students Abstract and Generalize Mathematical Concepts? *NAGC 2002 Research Briefs* 16: 83-87

Sriraman, B. (2002b). "Generalization Processes in Combinatorial Problem Solving Situations." *Proceedings of XXIV Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 1411-14. Athens, Ga.:

Sriraman, B-.. (2003a). "Mathematical Giftedness, Problem Solving, and the Ability to Formulate Generalizations." *Journal of Secondary Gifted Education* : 151-65.

Sriraman B.. (2003b). "Discovering Mathematical Generalizationes via Problem Solving" *Beitrage zum Mathematikunterricht (Dortmund). In Proceedings of the Thirty-seventh Annual Conference of the Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (GDM), pp. 613-6. Dortmund, Germany,.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J.y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento estocástico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 10 (1): 7-25.

Torralbo, M.; Fernández, A.; Rico, L.; Maz, A. y Gutiérrez, M. P. (2003). Tesis doctorales españolas en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias,* 21(2), 295-306.

Varga, T. y Dumont, M. (1973). *Combinatoire, statistiques et probabilités de 6 à 14 ans*. París: O.C.D.L.

Vila, Corts, A. (2001), "Resolución de problemas de matemàtiques: identifcaciò origen i formaciò dels sisteme de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes" Directors: M. Luz Callejo de la Vega y Jordi Deulofeu Piquet. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Bellaterra

Vila Corts, A. y Callejo de la Vega, M., (2004). *Matemáticas Para Aprender A Pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid, España: Narcea.

ANEXO M3

UNIDAD DIDÁCTICA COMBINATORIA

Introducción

Una unidad didáctica es fundamentalmente un ejercicio de planificación del proceso enseñanza-aprendizaje de un objeto concreto de conocimiento. En torno de dicho objeto se concretan y organizan los elementos más relevantes que contextualizan una práctica docente situada. En el diseño de una unidad didáctica no basta con precisar cuál es el objeto de conocimiento y cuáles son los objetivos que se persiguen. Su diseño está condicionado por elementos tan importantes como: a quién va dirigido; cuántas sesiones la integran o en qué tiempo se espera alcanzar sus objetivos. Este tipo de factores se hacen precisos con el propósito de disponer de una planificación concreta y detallada de uno de los componentes del currículum.

La presente unidad didáctica corresponde al área de la matemática y se centra en el estudio de la Combinatoria. La decisión de diseñar un trabajo de este tipo en esta rama de las matemáticas responde, en principio, al interés particular de este autor. Responde también a la necesidad de disponer de una planeación adecuada y precisa para enfrentar, con mayores expectativas de éxito, el aprendizaje de la Combinatoria en dos cursos del plan de estudios vigente de las licenciaturas donde realizo mi práctica docente. Me refiero a los cursos de *Probabilidad* y *Matemáticas Discretas*.

Estos cursos se imparten a estudiantes de la licenciatura en Ciencias y Técnicas de la Estadística y de la licenciatura en Informática en la Universidad Veracruzana (México). Tienen asignadas cinco horas a la semana para su enseñanza, de un total de 15 para la Unidad. Ambos cursos tienen carácter obligatorio para los estudiantes de las dos licenciaturas. Normalmente, los estudiantes de las mencionadas licenciaturas se ven estimulados a tomar estos cursos durante uno de los dos primeros períodos semestrales. En caso contrario, se ven impedidos para continuar determinados cursos de semestres superiores.

A menudo, los profesores que atienden estos cursos suelen reproducir el modelo de enseñanza que tradicionalmente se ha adoptado y en el cual pueden identificarse tres fases:

- Introducción del tema
- Ejemplos realizados por el profesor

- Resolución de ejercicios semejantes a los ejemplificados por el profesor

A pesar de la ineficacia de este modelo de enseñanza, se sigue reproduciendo por causas que no abordamos en este espacio. En consecuencia, el diseño de la presente unidad didáctica describe un plan de trabajo concreto que tiene el propósito de que los estudiantes de los cursos arriba citados, adquieran un aprendizaje significativo de la combinatoria a través de la resolución de problemas.

En tanto que estrategia didáctica, la resolución de problemas reside fundamentalmente en la reflexión y la creatividad. Por tanto, nos proponemos que como consecuencia de la aplicación de esta unidad didáctica, los estudiantes desarrollen y mejoren aquellas habilidades que facilitan la apropiación de nuevos conocimientos que, en este caso, se centra en la Combinatoria.

Nos referimos a habilidades como: observar, enumerar sistemáticamente los elementos de un conjunto dado; definir, en palabras del estudiante, los conceptos de arreglos con y sin repetición, permutaciones y combinaciones, clasificar los problemas de acuerdo a estos conceptos; aplicar herramientas heurísticas para la resolución de problemas combinatorios; conjeturar las fórmulas de cada uno de los conceptos combinatorios; particularizar; generalizar.

Además, el profesor ha de desempeñar el papel de guía facilitador del aprendizaje. Para ello, debe estimular procesos de razonamiento que favorezcan el desarrollo de heurísticas en tanto que técnicas de indagación y de descubrimiento necesarios en la resolución de problemas. Una manera de estimular el trabajo de los estudiantes consiste, en valorar la solución de un problema. Así como, valorar el avance logrado en la búsqueda de una solución o de *la* solución del problema.

La génesis de alguna heurística demanda en el profesor conocimientos y experiencia suficientes que le permitan ponderar las acciones de los estudiantes, que eventualmente puedan conducir a resultados plausibles, sin importar si son correctos. En esta tarea, resulta conveniente que el discurrir de los estudiantes vaya acompañado de una breve explicación o comentario en relación al camino elegido en la resolución. En la tarea metacognitiva de darse cuenta de tal avance, los estudiantes comprenden mejor el tema a estudiar y su conocimiento adquiere mayor significatividad.

Por otra parte, resulta conveniente que el profesor induzca a los estudiantes a valorar los procesos que pueden ser explicados por sus compañeros y que ayude a los estudiantes a buscar una explicación en aquellos procesos que no han logrado hacerlo. En todo caso, los pasos que parezcan trucos sacados de la manga, merecen un tratamiento valorativo diferenciado. En esta tarea, el papel del monitor exige una atención cuidadosa para captar el trabajo global que desarrollen los estudiantes que individualmente o en equipo, trabajen en la resolución de un problema.

El profesor podría ayudar a los estudiantes en situaciones puntuales como las siguientes (Mason, 1988):

- Cuando el estudiante hace patente que no puede avanzar en la resolución del problema.
- Cuando sea evidente que el estudiante está enredado en un entresijo de cálculos inconexos que le resulten complicados de manejar.
- Cuando el desarrollo elegido por el estudiante no conduzca a la solución.
- Cuando las conjeturas sean palmariamente inválidas

La ayuda del profesor ha de alentar a los estudiantes para que se planteen interrogantes y hagan sugerencias. La ayuda debe ser tal que favorezca cumplimentar la resolución del problema y ha de ser equilibrada. Es decir, no debe ser excesiva pero tampoco ha de ser limitada ni limitante al grado de hacer desistir a los resolutores en su propósito.

Esta práctica puede hacer que los estudiantes consigan resolver problemas de una complejidad adecuada a su nivel, sin la ayuda del profesor. El proceso de reflexión y el planteamiento de interrogantes se desarrollan y son mejorados a través de una práctica continua en la resolución de problemas.

Un aspecto importante que ha de tener en cuenta el profesor que ejerza como monitor es que, en general, los estudiantes, en promedio, mantienen la atención en la resolución de un problema, en períodos que pocas veces superan los 11.7 minutos, antes de considerar que no podrán resolverlo (Schoenfeld, 1992). Esta conducta la mantienen particularmente estudiantes cuya experiencia en la resolución de problemas ha consistido tan sólo en el desarrollo de ejercicios rutinarios.

En resumen, un método que proponemos y que puede ayudar a los estudiantes en la resolución de problemas, tiene las siguientes características (Gómez, 2008):

- El uso de las cuatro fases de Polya (1965) para, mediante preguntas, hacer avanzar a los alumnos en el proceso de resolución de problemas.
- Las sugerencias de Mason (1988) que nos permiten determinar el momento en que se debe prestar la ayuda a los alumnos en la resolución de problemas.
- El tiempo que debe esperar el docente, antes de suponer que el estudiante considere que no podrá resolver el problema (Schoenfeld, 1992).

La unidad didáctica que presentamos aquí incluye una serie de problemas para ser resueltos por los estudiantes. Como tales problemas pueden tratar aspectos diversos de la combinatoria en situaciones diferentes, la selección que se haga debe incluir problemas de una complejidad gradual. El aprendizaje de la *combinatoria*, a través de la resolución de problemas requiere que los participantes tengan los conocimientos propios de estudiantes que han concluido el bachillerato. De manera particular, es importante que los estudiantes recuerden:

- Operaciones elementales con expresiones algebraicas

- Deberían tener ciertos hábitos básicos propios de la resolución de problemas. Por lo menos algunas heurísticas elementales como particularizar, simplificar el problema, resolver problemas análogos.

Sin embargo, es difícil poder garantizar dichos hábitos, por lo que la unidad está diseñada partiendo de la idea que muchos estudiantes, posiblemente, no tengan estas habilidades.

El conjunto de problemas que hemos seleccionado para esta unidad didáctica así como las actividades propuestas la hemos dividido en 5 sesiones de trabajo. El orden en que presentamos los diferentes tópicos de la unidad, es con el fin de mejorar el aprendizaje de los estudiantes en la enseñanza de la combinatoria (Fischbein y Gazit, 1988).

En cada sesión iniciamos pidiendo a los estudiantes que resuelvan problemas que contienen elementos simbólicos, de números y letras, con el fin de facilitar la resolución de estos (Fischbein y Gazit, 1988). No obstante, cuando los estudiantes ya han entendido los conceptos objeto de la sesión, los problemas que se les pide resolver son de toda índole.

En los primeros problemas que aparecen en cada sesión, según nuestra experiencia docente, describimos el proceso de resolución que pueden seguir algunos grupos de estudiantes. No obstante, habrá otros grupos, que sorprenderán al profesor con procesos de resolución creativos y novedosos. Por lo antes dicho, el profesor debe evitar intervenir directamente en la resolución de los problemas, como ya lo hemos mencionado en párrafos anteriores. Por lo que, la razón para describir uno de los proceso de resolución de estos problema es proporcionarle la mayor información relacionada con este tipo de cursos, sobre todo a los docentes que no tiene experiencia en la enseñanza de la combinatoria usando la resolución de problemas.

El contenido de cada sesión incluye el o los temas que se muestra en la siguiente tabla:

SESIÓN	TEMA	TIEMPO
1	Diagrama de Árbol y Regla de la Multiplicación.	150
2	Arreglos con repetición. Construir grupos de *k* elementos de un número de *n* elementos dados, si los elementos se pueden usar tantas veces como se quiera. La fórmula es $A_k^n = n^k$	50
3	Construir grupos de *k* elementos de un número de *n* elementos dados, si cada elemento solo se puede usar una sola vez. La fórmula es $A_k^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ Caso particular $k=n$, (Permutaciones) $P_n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$	100
4	Combinaciones: Construir conjuntos de *k* elementos de un grupo de *n* elementos dados. En este caso no pueden repetirse los elementos y no se deben remplazar. La fórmula es $$C_k^n = \frac{A_k^n}{P_k^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$	100
5	Problemas de combinatoria en general.	100

Tabla 1. **Distribución de los temas considerados para el aprendizaje de la combinatoria**

Los problemas a resolver, por los estudiantes en cada sesión, están pensados para cumplir con los siguientes objetivos:

Desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, en particular el pensamiento propio de la combinatoria, que pueden resumirse en: observar, enumerar sistemáticamente, definir, clasificar, aplicar, conjeturar, particularizar y generalizar; utilizar algunas estrategias heurísticas para la resolución de problemas.

Los problemas seleccionados no han de ser necesariamente sencillos. La condición fundamental que requieren para ser propuestos a los estudiantes, es que puedan ser entendidos por los estudiantes; ser susceptibles de ser resueltos sin necesidad de trucos y ser generalizables.

Recomendaciones generales para cada sesión.

Antes de iniciar las Sesiones, el profesor deberá explicar a los estudiantes la mecánica del curso. Pondrá énfasis en el trabajo que alumnos y profesor desarrollarán en el aula.

Además, el profesor pedirá a los estudiantes, al menos, realizar las siguientes actividades, como trabajo extra escolar. Estas actividades se pedirán, preferentemente, en cada sesión:

- Resolver un problema, que no haya sido resuelto en el aula. durante las sesiones. El problema puede ser elegido de la lista de problemas a ser resueltos como trabajo individual, que aparece al final de la sesión.

- Construir y resolver un problema que requiera la aplicación de los conceptos dados en la sesión y que esté relacionado con su área de estudio de interés (Informática o Estadística).

- Describir el proceso que han seguido para verificar el resultado del problema que haya resuelto.

Consideramos necesario que el profesor o monitor programe en cada sesión, las siguientes actividades: Intervención del profesor; exposición de los estudiantes; trabajo en equipo; trabajo individual y discusión general (Arcavi, A., Kessel, C., Meira, L., y Smith, J., 1998).

A continuación, hacemos una breve descripción de cada una de estas actividades. Cabe mencionar que el orden en que las presentamos, no guarda relación con su importancia. La descripción de las actividades no supone que deban seguirse exhaustivamente en una clase de 50 minutos.

- **Intervención del profesor**

Las intervenciones del profesor, al introducir un tema, han de ser cortas. En todo caso, han de producirse con la finalidad de orientar a los estudiantes en aspectos concretos como: a) Establecer los objetivos particulares; b) Describir la forma de organizar el trabajo de los equipos y en el aula; c) Explicar procedimientos, hechos o heurísticas que permitan a los estudiantes avanzar en la resolución de un problema.

- **Exposiciones de los estudiantes**

Las intervenciones de los estudiantes pueden ser de manera individual o por equipos para a) Presentar sus argumentos; b) Dirimir ideas que puedan parecer contrarias entre uno o más miembros del equipo; c) Presentar el proceso de resolución de un problema; d) Presentar el proceso de resolución de algún problema dado como trabajo extra escolar; e) Presentar trabajos o tareas a desarrollar fuera del aula.

- **Trabajo en equipo**

Los equipos podrán integrarse con dos o tres estudiantes. El trabajo en equipo tiene como propósito proporcionar a los estudiantes un contexto más o menos estable y continuo para enfrentar colectivamente la resolución de problemas. Se sugiere dedicar a esta actividad el tiempo suficiente en cada sesión para resolver los problemas planteados.

- **Trabajo individual**

El trabajo individual tiene como propósito evaluar el trabajo de cada estudiante fuera de la sesión. La frecuencia y grado de participación puede obtenerse a partir de la participación individual en el aula o bien, a partir de los reportes escritos que formen parte del portafolio de trabajo de cada estudiante.

- **Discusión general**

Esta actividad ha de permitir a los estudiantes escuchar y valorar las preguntas y comentarios de sus compañeros; corregir errores cometidos en el proceso de resolución de un problema o aprender a sustentar sus ideas.

Un ejemplo de la utilización de estas actividades, puede ser como sigue: Después de que los estudiantes, agrupados en equipos de dos o tres personas *(Trabajo en equipo)*, intenten resolver algunos problemas utilizando sus propios recursos, el profesor y los estudiantes, escucharán algunos procedimientos de resolución elaborados por otros equipos, *(Exposiciones de los estudiantes y Discusión general).* Si ningún equipo usa como estrategia de conteo los *diagramas de árbol*, el profesor, si considera que es el momento, tomará la palabra (*Intervención del profesor)*, para explicar a los estudiantes el uso de estos o bien para hacer las preguntas pertinentes que pueda conducir a los estudiantes a los diagramas de árbol.

El trabajo cotidiano consiste fundamentalmente en la resolución de problemas de diferente grado de dificultad. La colección de problemas que proponemos puede facilitar el propósito del profesor. Los problemas que incluimos pueden servirle para organizar su trabajo docente, seleccionando aquellos que considere adecuados para valorar el avance de sus estudiantes con los trabajos extraescolares. Conviene precisar que el profesor puede plantear problemas de otra índole. No debe perderse de vista que, independientemente de los problemas que sean seleccionados, el propósito que nos anima es el de ayudar a los estudiantes a alcanzar los objetivos planteados en la unidad.

Los problemas de la lista de cada sesión pueden agruparse en problemas que se resuelven con la aplicación de una operación combinatoria y los que requieren más de una operación. Además, los podemos ubicar en las tres primeras categorías, de las cuatro categorías de problema, definidas por Polya, (1981) y modificadas para uso escolar por Gómez, (2008).

Estas categorías son:

1. Los problemas en los cuales la regla que hay que aplicar salta a la vista, porque la regla se da en la sesión donde se propone la resolución del problema;

2. Los problemas en los cuales hay que escoger la regla que hay que aplicar, se ha trabajado en clase y el problema se aplica inmediatamente después de haber terminado la última sesión en que se finalizó de ver las reglas necesarias para la solución del problema;

3. Los problemas en los cuales hay que escoger una combinación de reglas previamente estudiadas en algún curso o de forma independiente;

4. Los problemas en los cuales hay que investigar: se trata de problemas en los que la resolución de los cuales exige una combinación original de reglas y el uso de razonamiento plausible.

Finalmente, presentamos el contenido de cada una de las cinco sesiones, con los objetivos a alcanzar por los estudiantes y los problemas sugeridos para lograr tal fin.

SESIÓN 1

Diagrama de Árbol y Regla de la Multiplicación

Tiempo estimado: 150 minutos (tres clases de 50 minutos)

Se sugiere que se inicie la sesión con el planteamiento de un problema de combinatoria, que los estudiantes intentarán resolver; éste debe ser soluble aplicando alguna estrategia de conteo sistemático, o bien por ensayo y error. Es posible que algunos estudiantes no logren encontrar la solución al problema o bien den una solución errónea. Dando lugar con esto a que el estudiante tenga interés en conocer o construir alguna estrategia de conteo sistemático para enumerar las posibilidades, o bien, valorar las que el docente proponga (diagramas de árbol).

Como sabemos, los Diagramas de Árbol, son un recurso auxiliar en la resolución de problemas, como pueden ser los de la combinatoria. Su desconocimiento o el mal uso de esta estrategia pueden dificultar la resolución de algunos problemas. Este recurso puede sugerir la generalización de un problema y mirar los problemas con una perspectiva diferente.

Se espera que los estudiantes, después de resolver algunos problemas, consigan: aplicar un método de conteo sistemático, el uso de la regla del producto, la utilización de alguna estrategia heurística para la resolución de algunos problemas.

Para iniciar la sesión usaremos los siguientes problemas:

Problemas

a) Problemas para que los estudiantes, agrupados en equipos, resuelvan en clase.

Problema 1.

Se tienen dos bolas, numeradas con los dígitos 1 y 2, en una caja. Se saca una bola y se anota el dígito que tiene escrito y se regresa a la caja, en seguida se saca otra bola y se anota el dígito que tiene escrito, de tal forma que formemos números de dos dígitos. ¿Cuántos números diferentes podemos formar siguiendo este proceso y cuáles son estos?

Al extraer de la caja la primera bola podemos obtener alguno de los siguientes resultados (Diagrama 1.1):

Primera extracción

1

2

Diagrama 1.1

Ya que al después de extraer la bola esta es retornada a la caja, al sacar la segunda bola, nuevamente podíamos tener la posibilidad de sacar la bola 1 o la bola 2 (Diagrama 1.2):

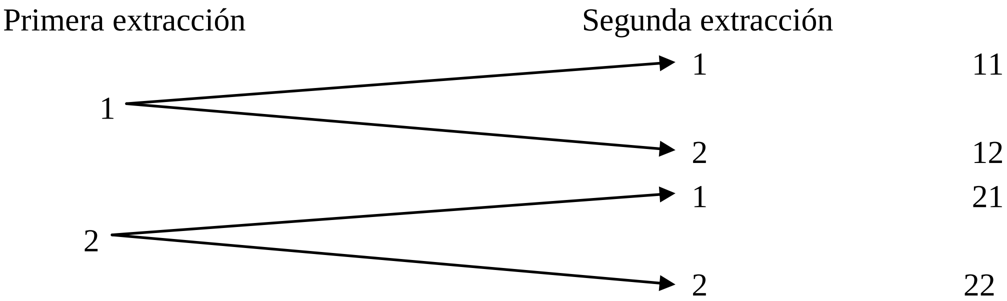


Diagrama 1.2

Por lo que podemos formar los siguientes números:

11, 12,

21, 22.

Por lo tanto, hay dos números de la primera extracción y dos de la segunda extracción, con lo que obtenemos 2x2=4 (aplicación de la regla del producto) números diferentes.

Problema 2.

Como en el Problema 1, ahora con 3 bolas rojas, numeradas del 1 al 3. ¿Cuántos números diferentes se pueden formar al extraer las tres bolas y cuáles son estos números?

Al extraer la primera bola roja, podemos obtener alguno de los siguientes números (Diagrama 1.3)

Primera extracción

1

2

3

Diagrama 1.3

Ya que al extraer la bola ésta es retornada a la caja, al sacar la segunda bola nuevamente podíamos tener la posibilidad de sacar la bola 1 o la bola 2 o la bola 3.

Esto es (Diagrama 1.4):

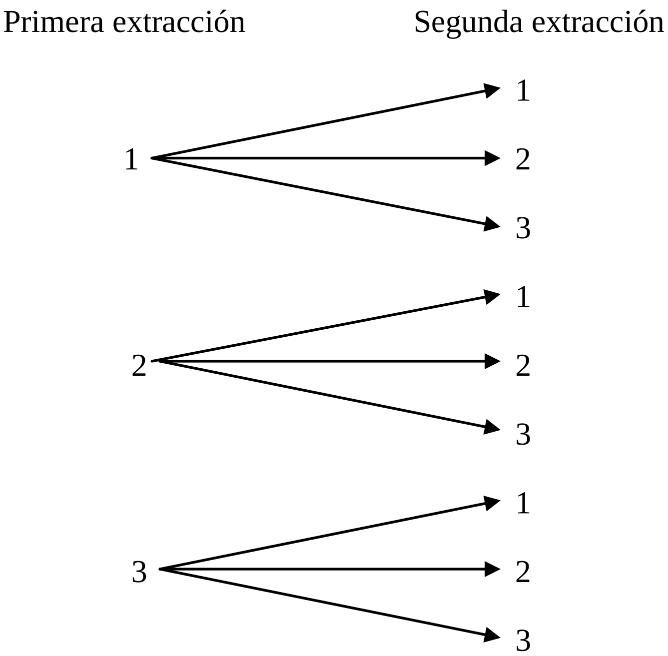


Diagrama 1.4

En la tercera y última extracción, debemos hacer uso de nuestra imaginación. Así que no dibujaremos el diagrama completo, por ser muy grande, por lo que imaginaremos lo que no aparece en las últimas líneas del diagrama 1.5 que representa gráficamente la extracción de las tres bolas de la urna y los números obtenidos en las tres bolas después de hacer las extracciones.

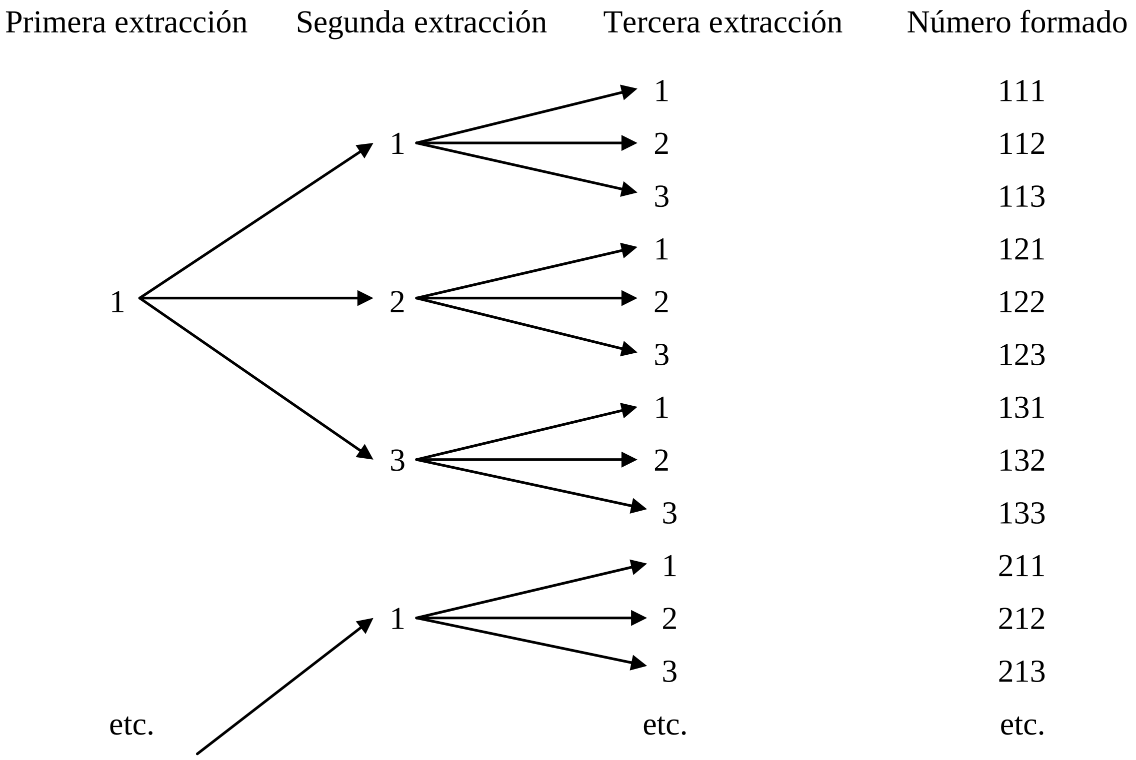


Diagrama 1.5

Observamos, en la primera extracción existen 3 posibilidades. En la segunda extracción existen tres posibilidades para cada una de la primera, esto es, 3x3 posibilidades. En la tercera y última extracción hay tres posibilidades, para cada una de la segunda extracción, es decir, existen en total 3x3x3=27 números diferentes que se pueden formar, algunos de ellos aparecen en la última columna del diagrama anterior. Se pueden deducir los números faltantes, completando mentalmente el diagrama anterior.

A continuación escribimos los 27 números diferentes que podemos formar**:**

111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133,

211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233,

311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333,

Problema 3

Un estudiante presenta 3 exámenes de una asignatura durante el curso. Las calificaciones que puede obtener son: 0, 1, 2, 3 y 4. ¿De cuántas maneras distintas pueden ser calificados los *3* exámenes?

En el primer examen el estudiante puede obtener cualquiera de las calificaciones 0, 1, 2, 3 y 4. (Diagrama 1.6):

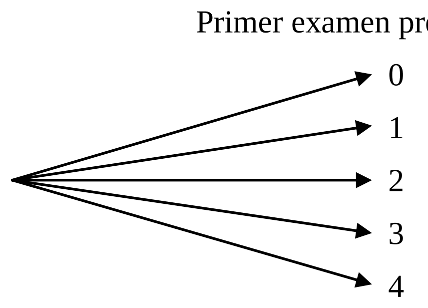


Diagrama 1.6: Calificaciones que pueden ser obtenidas en el primer examen

Para cada calificación obtenida por el estudiante en el primer examen presentado, en el segundo examen tiene también las posibilidades de obtener las calificaciones de 0, 1, 2, 3 y 4 (Diagrama 1.7).

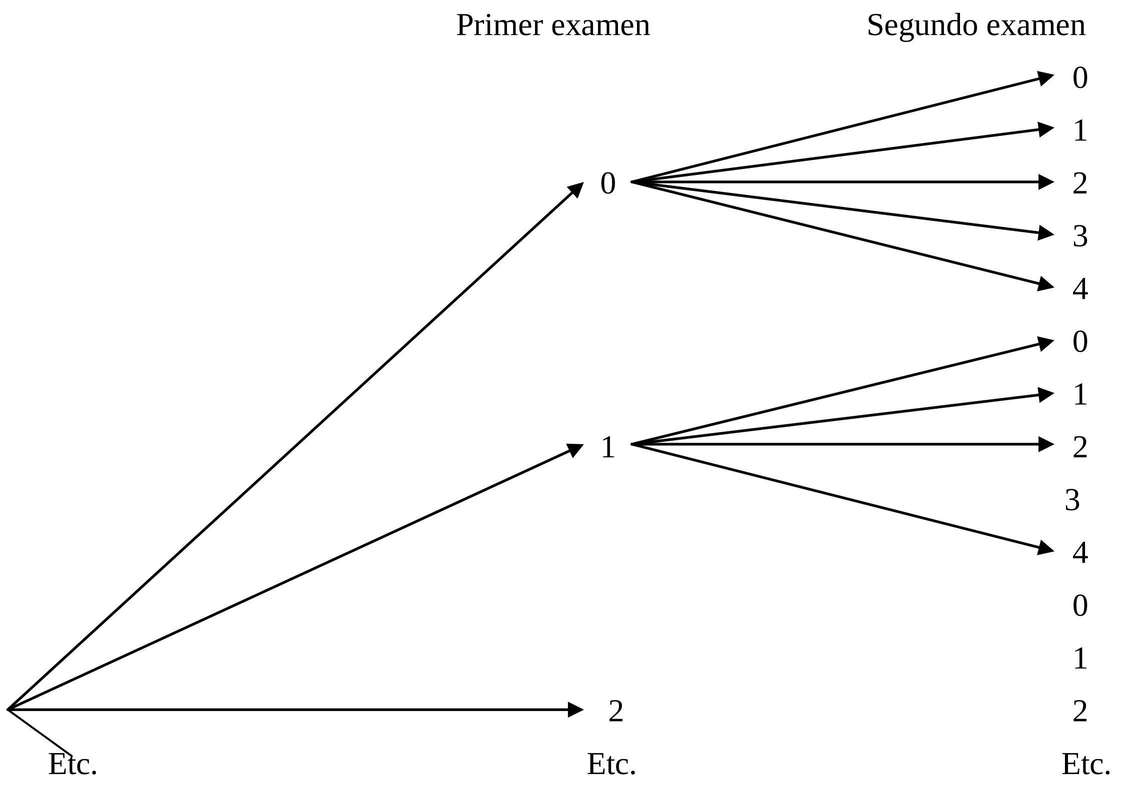


Diagrama 1.7: Calificaciones posibles en el primero y segundo examen

En el diagrama 1.8 presentamos las posibles calificaciones que puede obtener un estudiante en el tercer examen. En el diagrama se puede apreciar que el estudiantes tiene 5 posibilidades de obtener una calificación, en el segundo también tiene 5 posibilidades y en el tercero las mismas cinco.

Por lo tanto, existen 5x5x5=125 posibilidades de obtener calificaciones en los tres exámenes, sabiendo que estas pueden ser en cada examen cualquiera de las siguientes: 0, 1, 2, 3 y 4.

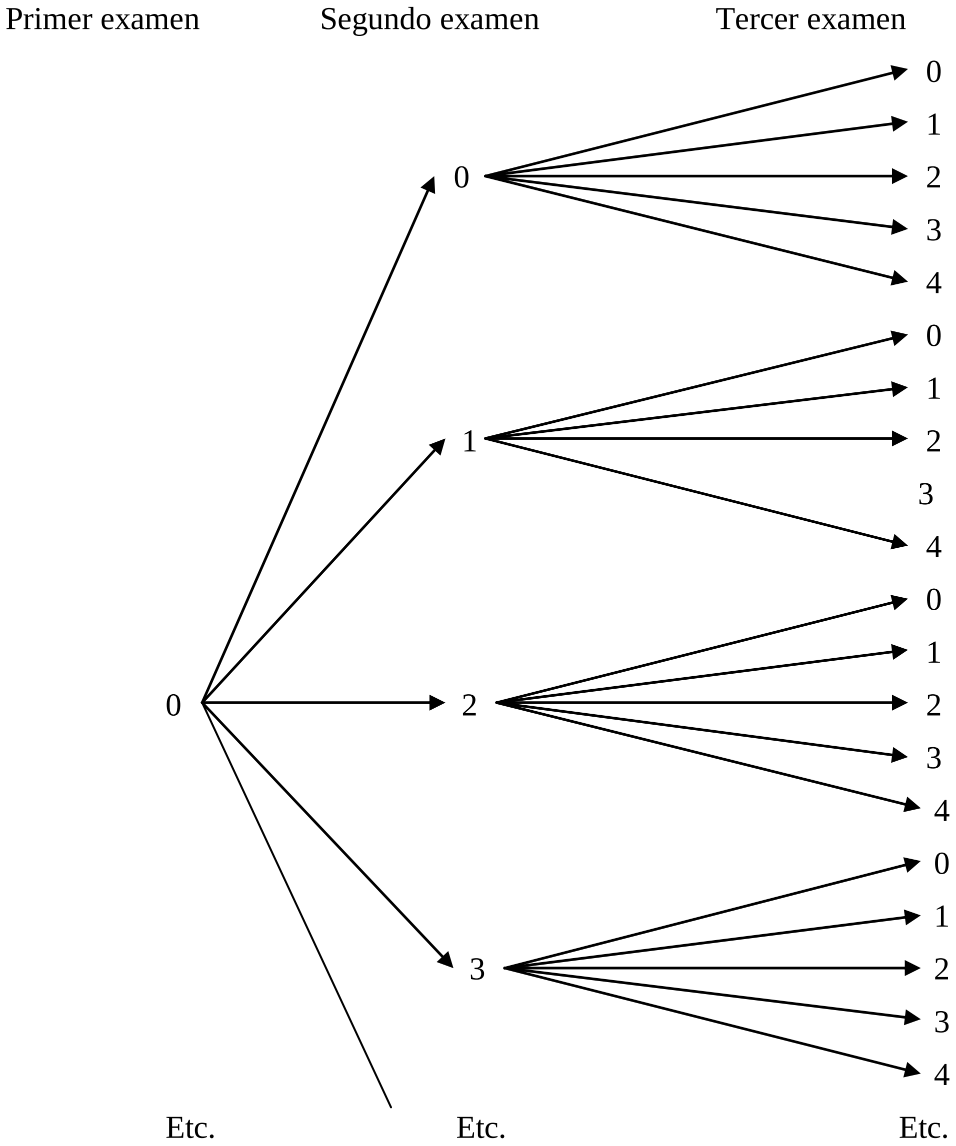


Diagrama 1.8: Calificaciones posibles en el primero, segundo y tercer examen

Problema 4

La Secretaría de Finanzas del Estado de Veracruz, requiere hacer credenciales para cada uno de sus trabajadores, de tal forma que cada credencial tenga un número de 4 dígitos diferentes formado por las cifras 3, 4, 5, 6, 8 y 9 ¿Cuántas credenciales diferentes puede hacer?

El primer dígito del número de dichas credenciales puede tener 6 posibilidades (Diagrama 1.9):

Primer dígito

3

4

5

6

8

9

Diagrama 1.9

Suponiendo que el primer dígito del número es 3, entonces, el segundo dígito del número solo podrá ser 4, 5, 6, 8 o 9. Ya que los dígitos, según el problema, deben ser diferentes (Diagrama 1.10):

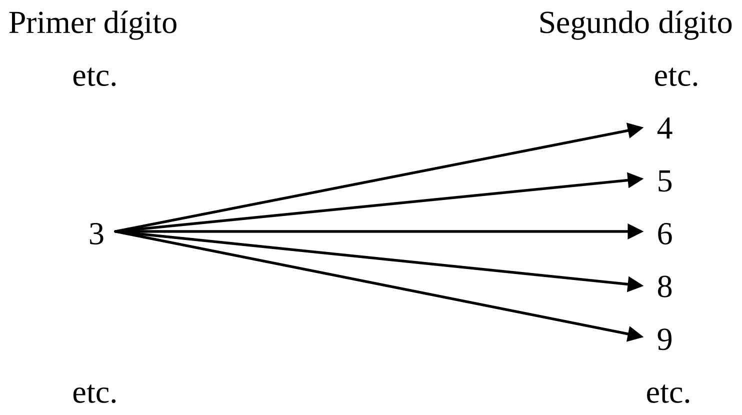


Diagrama 1.10

Para cada cifra del primer dígito, existen 5 posibilidades para el segundo dígito. Así que, como hay 6 posibilidades para el primer dígito y 5 para el segundo, tenemos que hay en total 6x5 dígitos diferentes de dos cifras.

Como lo mostramos en el diagrama 1.11, al tercer dígito del número solo le quedan 4 posibilidades. Ya que se asignaron, una al primer dígito y otra al segundo. Por ejemplo, si el primer dígito seleccionado es 3, y el segundo es 5, solo le quedan al tercer dígito las posibilidades de ser 4, 6, 8 o 9.

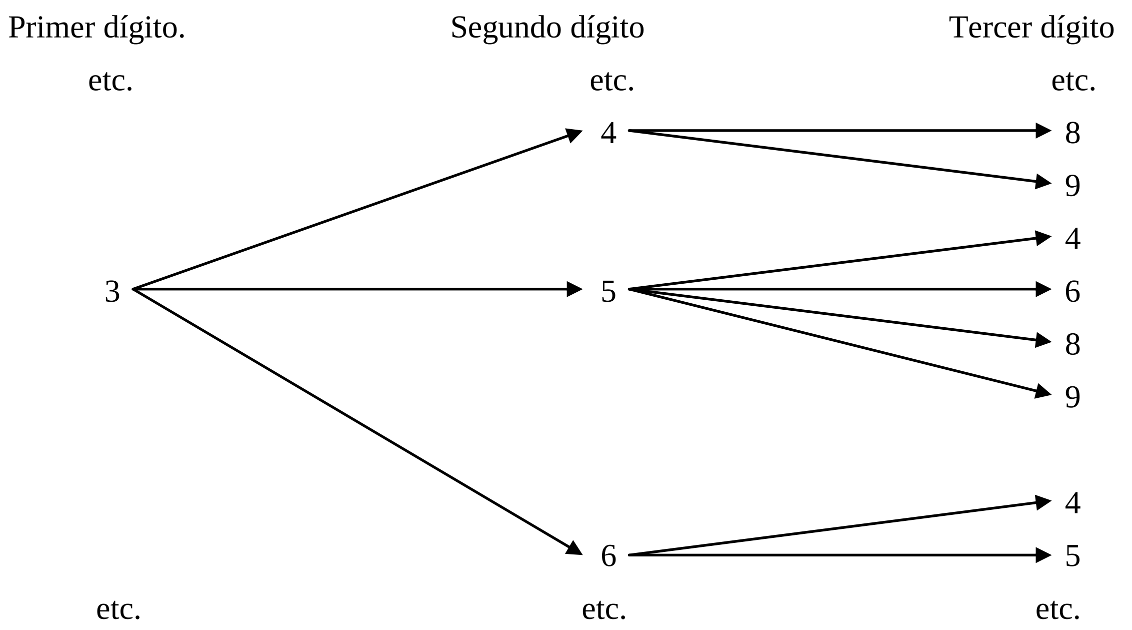


Diagrama 1.11

En resumen, el diagrama 1.11 nos muestra que, para la elección del primer dígito tenemos 6 posibilidades, para la del segundo dígito 5 posibilidades y para el tercer dígito 4 posibilidades. Por lo tanto, la cantidad de números diferente que podemos formar con los dígitos 3, 4, 5, 6, 8 y 9 es 6x5x4=120. Es decir, se pueden formar 120 números diferentes.

Problema 5

En la sala de juntas de la Dirección de Estadística e Informática hay una mesa rectangular con 7 sillas, para reuniones de todo tipo. El consejo técnico de las dos facultades consta de 7 miembros, incluyendo a la directora. ¿De cuántas formas diferentes se puede sentar cada uno de los miembros del consejo técnico si cada integrante se puede sentar en cualquier lugar?

Después de que los estudiantes hayan resuelto en clase y en equipo los problemas anteriores. Es posible que estén preparados para resolver los siguientes problemas:

b) Problemas para ser resueltos, de forma individual, por los estudiantes.

1) Se tienen 8 colores distintos y se desea pintar una pared, con 4 franjas de colores diferentes. ¿De cuántas maneras distintas lo podemos hacer?

2) Se tienen *n* colores distintos y se desea pintar una pared, con *r* franjas de colores diferentes ($r \leq n$). Suponemos que la pared es lo suficientemente ancha para pintar las *r* franjas. ¿De cuántas maneras distintas lo podemos hacer?

3) La clave de acceso al cajero bancario es de tres dígitos. Una clave es memorizable, si el primer dígito es igual al tercer dígito. ¿Cuántas claves memorizables hay?

4) Si consideramos todos los números comprendidos entre *50* y *200*, incluyendo ambos números.

a) ¿Cuántos números enteros hay en total?

b) ¿Cuántos son pares y Cuántos impares?

c) ¿Cuántos son mayores que 720?

d) ¿Cuántos son múltiplos de 5?

e) ¿Cuántos contienen dígitos diferentes?

f) ¿Cuántos contienen el dígito7?

g) ¿Cuántos no contienen el dígito 0?

h) ¿Cuántos son mayores que 101 y no contienen el dígito 6?

i) ¿Cuántos contienen dígitos en orden estrictamente creciente? (son ejemplo de tales números los siguientes: 13, 147 y 8.

5) Un estudiante presenta *n* exámenes de una asignatura durante el curso. Las calificaciones que puede obtener son: *p, q, r, s, t, u, v*. ¿De cuántas maneras distintas pueden ser calificados los *n* exámenes?

6) La clave de acceso a un banco, por internet, es de 9 dígitos. Una clave es memorizable si la secuencia $d_1d_2d_3d_4$ es igual a la secuencia $d_6d_7d_8d_9$ o a la secuencia $d_5d_6d_7d_8$, donde d_i representa el *i-ésimo* dígito del número. ¿Cuántas claves memorizables hay?

7) ¿Cuántas secuencias diferentes de tres letras que contengan las letras *a, b, c, d, e, f* pueden formarse?

a) con repetición de cualquiera de las letras

b) sin repetición de cualquier letra

c) sin repetición de cualquier letra y que contenga la letra e

d) con repetición y que contenga la letra (f) sin repetición y que contenga la letra (e) o (f) o ambas.

8) Si se lanzan *3* dados diferentes ¿Cuántas maneras distintas hay de que el mayor valor sea el doble del más pequeño?

9) Hay *50* cartas numeradas del *1* al *50*. Se eligen dos cartas diferentes al azar. ¿Cuántas elecciones posibles puede haber para que una carta sea el doble de la otra?

10) Una cadena de cartas se envía a *5* personas en la primera semana del año. La siguiente semana cada persona que recibe la carta la envía a 5 nuevas personas, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas han recibido cartas en las primeras *5* semanas?

11) Existen n formas diferentes de viajar de un lugar A a un lugar B y existen m formas diferentes de viajar del lugar B al lugar C.

a) ¿De cuántas formas diferentes se puede viajar del punto A al punto C pasando por B?

b) ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer el itinerario $A \to B \to C \to B \to A$?

c) ¿Cuántas rutas hay del tipo $A \to B \to C \to B \to A$ si se te pide que no repitas el camino $A \to C$ en tu viaje de regreso?

12) n personas van a laborar a una fábrica que tiene r secciones de trabajo. ¿De cuántas maneras diferentes puede el administrador de la empresa distribuir las n personas en las r secciones? (Ejemplo: Puede poner a todos en una sola sección)

SESIÓN 2

Arreglos con repetición.

Tiempo estimado: 50 minutos (una clase de 50 minutos)

Construir grupos de k elementos de un número de n elementos dados, si los elementos se pueden usar tantas veces como se quiera. La fórmula es $RA_k^n = n^k$

Durante esta sesión y después de resolver algunos problemas, los estudiantes intentarán expresar con sus propias palabras la definición de arreglo con repetición. Así mismo han de caracterizar problemas en los cuales el orden en que se coloquen los elementos es relevante. Además, se les pedirá conjeturar sobre la fórmula general de este concepto. Podrán distinguir entre problemas en los que pueden utilizar la fórmula y aquellos en los que no es posible su uso.

Problemas

a) Problemas para que los estudiantes, agrupados en equipos, resuelvan en clase.

Problema 1

Si tenemos 3 dígitos diferentes: 7, 4 y 3. ¿Cuántos números diferentes podemos formar con estos 3 dígitos? y ¿Cuáles son? (Sabemos que algunos de ellos son: 743 y 333)

El primer dígito se puede elegir de 3 maneras distintas (Diagrama 2.1).

Primer dígito

7

4

3

Diagrama 2.1

Ya que no existe la restricción de que los dígitos que forman el número sean diferentes, para la elección del segundo dígito, tenemos, también, las mismas elecciones: 7, 4 y 3 para cada elección del primer dígito (Diagrama 2.2).

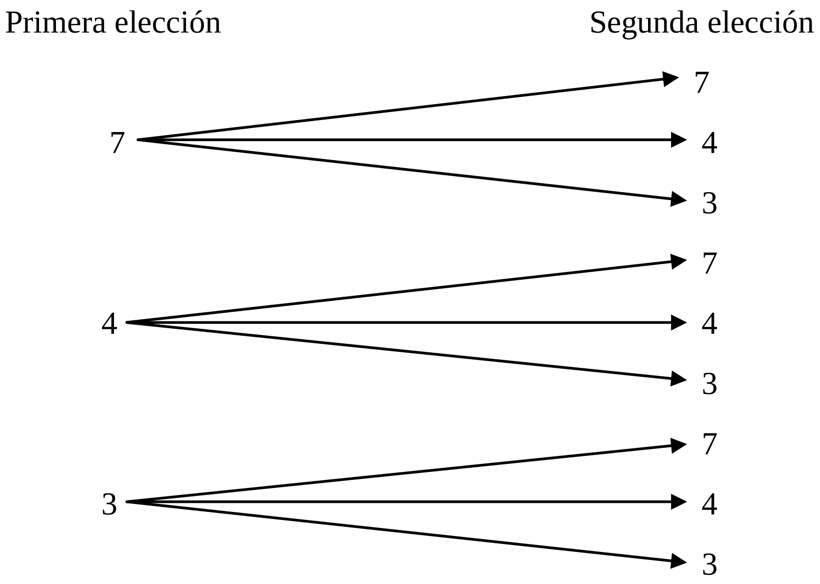


Diagrama 2.2

En el diagrama 2.2 observamos que, si elegimos 7 como primer dígito, entonces es posible elegir como segundo dígito cualquier de los dígitos 7, 4 y 3. Si seleccionamos como primer dígito 4, entonces podemos seleccionar como segundo dígito cualquiera de los dígitos 7, 4 o 3. Y por último, si tomamos como primer dígito 3, entonces cualquiera de los dígitos 7, 4 o 3 podrá ser seleccionado como segundo dígito.

Para la elección del tercer dígito, tenemos nuevamente, la posibilidad de elegir cualquiera de los tres dígitos 7, 4 y 3 como lo mostramos en el diagrama 2.3. El diagrama representa las tres selecciones y por razones de espacio no lo dibujamos completo.

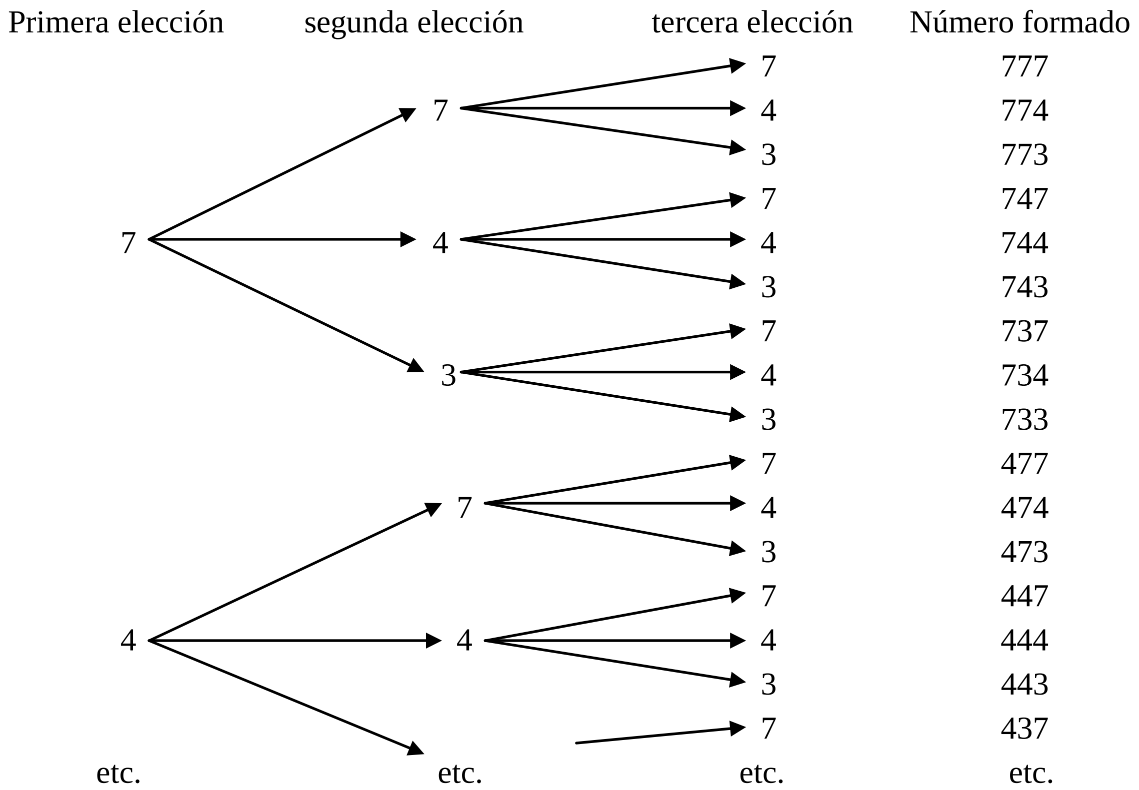


Diagrama 2.3

Finalmente, el diagrama nos muestra que, para la elección del primer dígito tenemos 3 posibilidades, para la del segundo dígito, otras tres posibilidades y para el tercer dígito también 3 posibilidades. Por lo tanto, la cantidad de números diferente que podemos formar con los dígitos 7, 4 y 3 es $3x3x3 = 3^3 = 27$. Por lo que, se pueden formar 27 números diferentes.

Del diagrama 2.3, en la última columna, observamos que estos 27 números son:

777, 774, 773, 747, 744, 743, 737, 734, 733,

477, 474, 473, 447, 444, 443, 437, 434, 433,

377, 374, 373, 347, 344, 343, 337, 334, 333.

Problema 2

El director de una fábrica quiere entregar tarjetas de identificaciones a sus 247 trabajadores. Espera que cada tarjeta contenga un número diferente por cada trabajador. El número deberá estar compuesto por 3 dígitos que serán cualquiera de las siguientes cifras: 1, 2, 3 y 4. ¿Puede el director entregar a los 247 trabajadores las tarjetas de identificación con un número diferente a cada uno de ellos?

Se necesita conocer, cuantos números diferentes de 3 dígitos pueden ser formados usando las cifras 1, 2, 3 y 4. Para esto, construimos un diagrama de árbol.

El primer dígito del número de tres cifras puede ser cualquiera de los números: 1, 2, 3 y 4 (Diagrama 2.4).

Primer dígito

1

2

3

4

Diagrama 2.4

Como en el enunciado del problema no aparece la restricción, de que los dígitos sean diferentes, podemos elegir a cualquiera de las cifras 1, 2, 3 y 4, como segundo dígito (Diagrama 2.5).

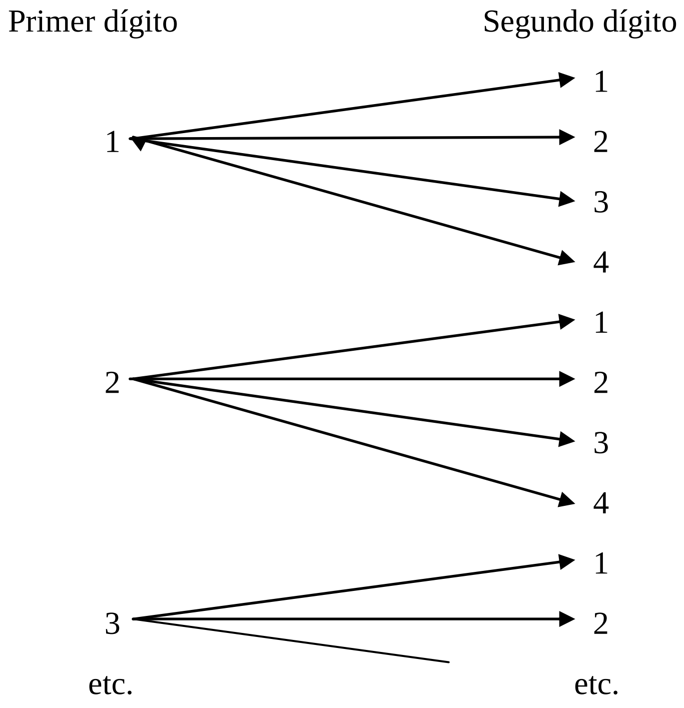


Diagrama 2.5

Para la elección del tercer dígito, existe nuevamente la posibilidad de elegir cualquiera de los cuatro dígitos 1, 2, 3 y 4. Como lo mostramos en el diagrama 2.6 en el que representamos las tres selecciones y que por razones de espacio no lo dibujamos completo.

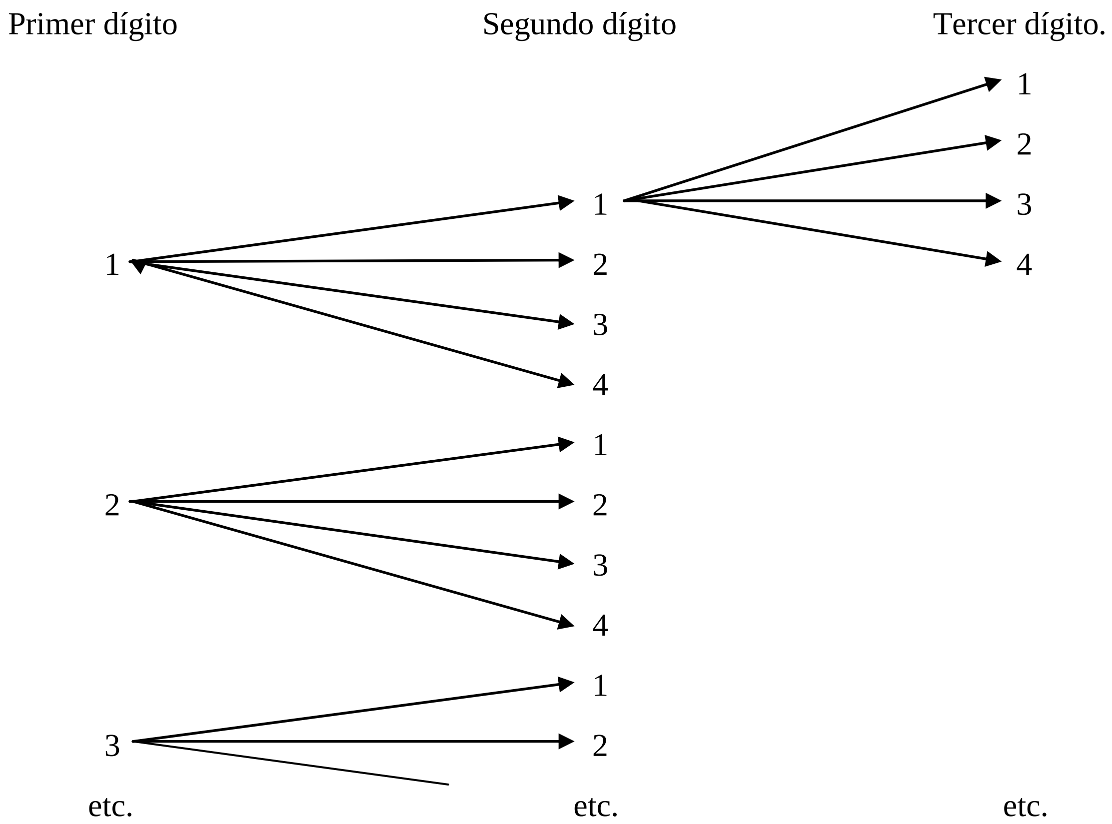


Diagrama 2.6

El diagrama 2.6 nos muestra que en la elección del primer dígito hay 4 posibilidades, para la del segundo dígito otras 4 posibilidades y para el tercer dígito también 4 posibilidades. Por lo que, la cantidad de números diferente que podemos formar con los dígitos 1, 2,3 y 4 es de: 4x4x4= 4^3 =64. De donde, el director de la empresa solo puede dar a 64 trabajadores tarjetas de identificación con números diferentes.

Posiblemente, después de observar los resultados $3^3\, y\ 4^3$ de los problemas 1 y 2, respectivamente, seremos capaces de hacer alguna conjetura sobre la solución de los Problemas 3 y 4.

Problema 3

¿Cuántos números diferentes de 4 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2 y 3, 5?

Problema 4

¿Cuántos números diferentes de 2 cifras se pueden construir con los dígitos 3, 4, 5, 7, 9?

Cuando hacemos referencia a que el estudiante conjeturara sobre la solución de los Problemas 3 y 4, queremos significar que además de dar una posible solución, también la soportara con argumentos. Las adivinanzas no serán valoradas por el docente, ya que para éstas no hay argumentos sólidos.

Es posible que algunos estudiantes, en este momento, no se encuentren preparados para hacer estas conjeturas. Siempre existe la oportunidad de elaborarla con la introducción de un problema adicional y la ayuda del diagrama de árbol.

Después, los estudiantes, resolverán los Problemas 5 y 6

Problema 5

¿Cuántos números diferentes de n dígitos se pueden formar con los números 2, 3 y 4?

Finalmente, los estudiantes podrán enfrentar el problema objeto de nuestra sesión:

Problema 6

¿Cuántos grupos diferentes de k elementos se pueden construir de un número de n elementos dados, si los elementos se pueden usar tantas veces como se quiera.

Consideramos, que éste es el momento de introducir una notación que nos permita representar arreglos con repetición. Proponemos el símbolo RA_k^n , para denotar arreglos de k elementos de un número de n elementos dados, si los elementos se pueden usar tantas veces como se quiera (con repetición). Además, el estudiante debe conocer la existencia de otros símbolos diferentes al propuesto para representar la misma idea.

b) Problemas para ser resueltos, de forma individual, por los estudiantes.

1) La Secretaría de Finanzas del Estado de Veracruz tiene en su nómina a 2080 trabajadores. Se requiere hacer credenciales para cada uno de ellos, de tal forma que cada credencial tenga un número de seis dígitos diferentes formado por las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6. ¿es posible hacerlo? Explique su respuesta.

2) ¿Cuántas quinielas distintas se pueden hacer? (se pueden tomar tantos 1, X y 2 como necesitemos)

3) ¿De cuántas maneras se pueden formar un equipo de baloncesto de 5 jugadores, si en la plantilla hay 12 jugadores?. (No se tiene en cuenta el puesto de cada jugador)

4) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9? Las cifras se pueden repetir. La cifra de las centenas no puede ser cero.

5) ¿Cuántos resultados diferentes se producen al lanzar 5 dados de distinto color y anotar los resultados de la cara superior?

6) Con un punto y una raya (símbolos clásicos del alfabeto Morse) ¿Cuántas señales distintas de 5 dígitos pueden hacerse?

SESIÓN 3

Arreglos sin repetición.

Tiempo estimado: 100 minutos (dos clases de 50 minutos).

Construir grupos de k elementos de un número de n elementos dados, si cada elemento solo se puede usar una sola vez. La fórmula es $A_k^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ Caso particular $k=n$, (Permutaciones) $A_k^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$

Durante esta sesión y después de resolver algunos problemas, los estudiantes intentarán expresar con sus propias palabras las definiciones de arreglos sin repetición y permutaciones. Así mismo han de caracterizar problemas en los cuales el orden en que se coloquen los elementos es relevante y si hay o no repetición de sus elementos. Además, se les pedirá que hagan conjeturas sobre la fórmula general acerca de estas ideas. Podrán distinguir los problemas en los que pueden utilizar las fórmulas.

Problemas

b) Problemas para que los estudiantes, agrupados en equipos, resuelvan en clase.

Problema 1

El maestro de matemáticas quiere repartir 3 problemas diferentes a 3 estudiantes de entre 4. ¿De cuántas maneras diferentes puede repartir los problemas?

Denotemos con P1, P2 y P3 a cada uno de los problemas y con E1, E2, E3 y E4 a cada uno de los cuatro estudiantes.

Así que, el problema (P1) lo puede tener cualquiera de los 4 estudiantes E1, E2 y E3 y E4 lo que describimos en el Diagrama 3.1

Entrega del P1

E1

E2

E3

E4

Diagrama 3.1

El problema P2, puede ser entregado a solo aquellos estudiantes que no hayan recibido el problema P1. Como se describe en el Diagrama 3.2

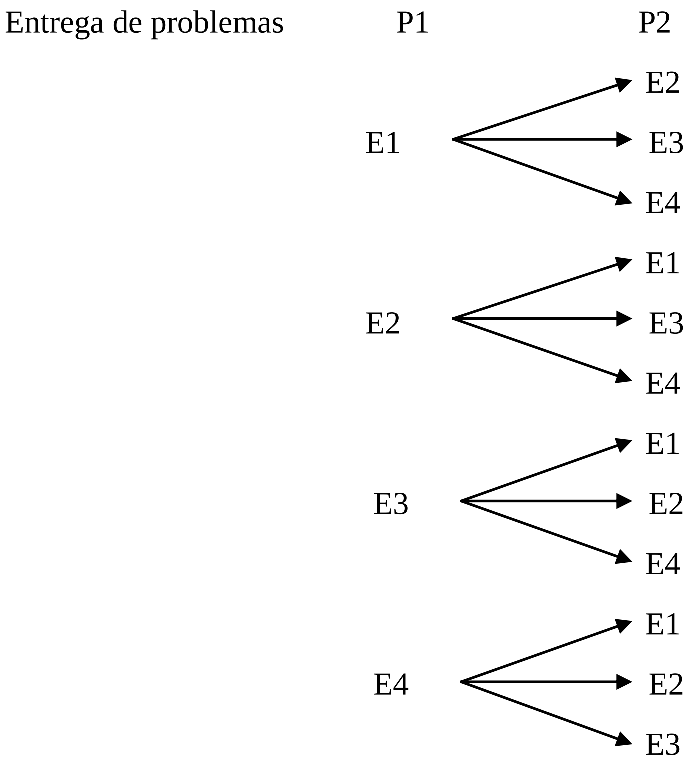


Diagrama 3.2

El problema P3, solo puede ser entregado a los estudiantes que no hayan recibido los problemas P1 y P2 (Diagrama 3.3).

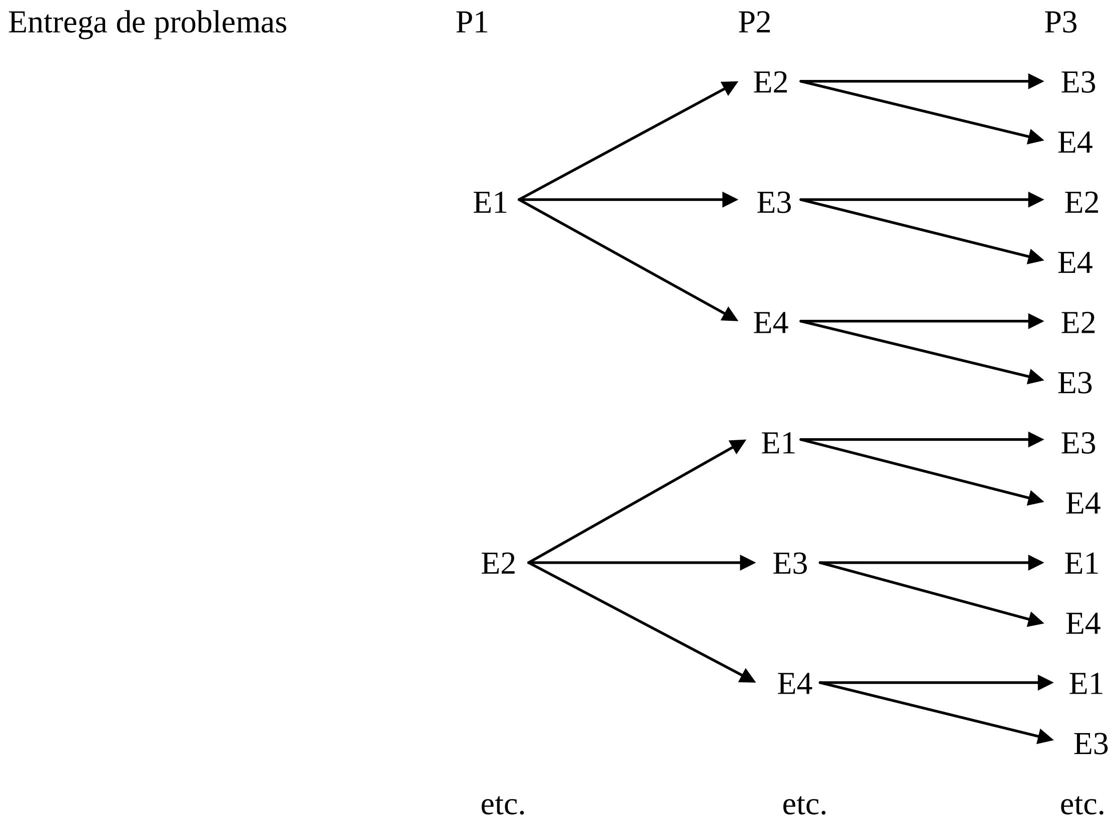


Diagrama 3.3

Observamos que el diagrama 3.3 ésta incompleto, ya que le faltan las ramas correspondientes a las opciones de los estudiantes E3 y E4 de la columna correspondiente a la entrega del problema P1. Completar este diagrama puede ser una tarea para los estudiantes.

En este diagrama podemos observar que si el estudiante E1 recibe el problema P1, hay tres opciones para entregar el problema P2, que son: el estudiante E2 reciba el problema P2, o que E3 sea el que lo reciba, o bien que E4 lo tenga. Note que hemos descartado al estudiante E1 como posible poseedor del problema P2, ya que él ya tiene el problema P1. En resumen, para cada una de las 4 opciones de entrega del problema P1, existen 3 opciones de entrega del problema P2 (4x3).

Por último, podemos observar en el mismo diagrama, que para cada estudiante poseedor del problema P2, existen 2 estudiantes que pueden tener el problema P3.

Esto es, hay 4x3x2 = 24 formas diferentes para repartir 3 problemas entre 4 estudiantes.

En el lenguaje matemático, se dice, que se han construido grupos de 3 elementos (E2, E3, E4) de un número de 4 elementos E1, E2, E3, E4 dados, si cada elemento solo se puede usar una sola vez y donde (E2, E3, E4) significa que al estudiante E2 se le ha entregado la prueba P1, a E3 la prueba P2 y que a E4 la prueba P3. Además, notamos que el orden en que se encuentran los estudiantes en los grupos formados es importante, ya que las ternas (E2, E3, E4) y (E3, E2, E4) representan distribuciones diferentes de pruebas a los mismos estudiantes.

Problema 2

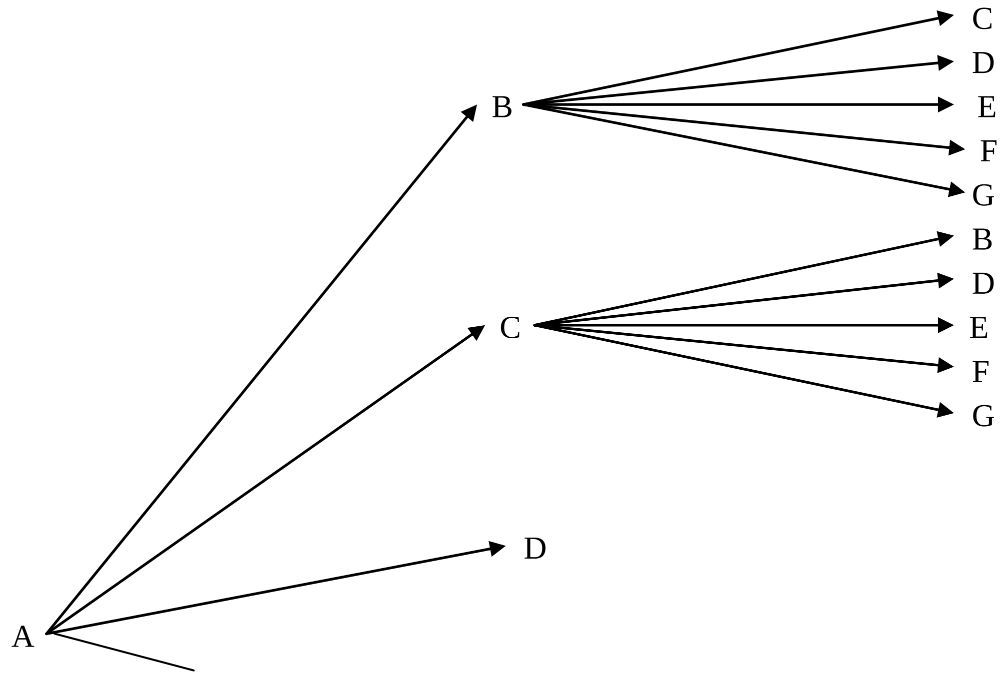
Se dispone de siete colores para diseñar una bandera que tiene tres franjas horizontales de igual ancho pero de distinto color. ¿Cuántas banderas se pueden diseñar que no tenga ningún color repetido?

Este es un problema en el que el orden en que se pongan los colores, cambia el diseño de la bandera, y además no se admite repetición de colores.

Para simplificar la escritura de colores, representaremos con las letras, A, B, C, D, E, F y G, a los 7 colores diferentes. Por una terna de estas letras, a las banderas. Así, por ejemplo, la terna (B, C, F) representa a la bandera que tiene en la franja superior el color B, en la franja central el color C y en la franja inferior el color F. Notamos que las ternas (A, C, D) y (C, A, D) representan banderas que tienen los mismos colores, pero en orden diferente, y por lo tanto, son banderas diferentes.

Un diagrama de árbol que nos ayuda a representar la cantidad de banderas diferentes de tres colores que podemos formar es el que representamos en el Diagrama 3.4.

Primer color | Segundo color | Tercer color



etc. | etc. | etc.

7 elecciones primer color | 6 elecciones segundo color | 5 elecciones tercer color

Diagrama 3.4

Observamos del Diagrama 3.3, que para el primer color tenemos 7 posibilidades de elección. Ya elegido el primer color de la bandera solo nos quedan 6 elecciones para la elección del segundo color. Para el tercer color solo nos quedaran 5 colores de los 7, porque 2 colores ya han sido elegidos para los dos colores anteriores. Por lo tanto, el número de banderas diferentes, de tres colores que podemos formar con 7 colores, es 7x6x5. Esto es 210 banderas diferentes, de tres franjas, formadas con 7 colores.

En términos matemáticos, lo podemos expresar de la siguiente forma: Se han construido grupos (banderas) de 3 elementos (colores) de un número de 7 elementos (colores) dados, si cada elemento solo se puede usar una sola vez.

Es posible que el estudiante logre conjeturar la solución al siguiente problema:

Problema 3

Se dispone de 36 colores para diseñar una bandera que tiene 6 franjas horizontales de igual ancho pero de distinto color. ¿Cuántas banderas se pueden diseñar que no tenga ningún color repetido?

Después, de haber resuelto el problema 3, es posible que el estudiante resuelva los Problema 4 y 5 en los siguientes términos:

Problema 4

¿Cuántos grupos de 6 elementos de un número de 36 elementos dados, se pueden formar, si cada elemento solo se puede usar una sola vez?

Problema 5

¿Cuántos grupos de k elementos de un número de n elementos dados, se pueden formar, si cada elemento solo se puede usar una sola vez?

Éste es el momento de introducir una notación para representar los arreglos de k elementos, sin repetición, como la forma abreviada A_k^n. Además, debemos aclarar a los estudiantes, que podemos encontrarnos, en algunos documentos, con otro tipo de símbolos que representan la misma idea.

Iniciamos con los problemas de arreglos de n elementos tomados de un grupo de n elementos, sin repetición. Creemos que el estudiante, por el momento, no necesita saber que el nombre que reciben estos arreglos es el de Permutaciones. Evitando con esto una posible confusión. Considero que resulta de mayor importancia que el estudiante, encuentre la equivalencia de este tipo de problemas (Permutaciones), con los arreglos sin repetición.

Plantearemos el Problema 5 y Problema 6 con la finalidad de que el estudiante resuelva problemas relacionados con arreglos sin repetición, con $k=n$. Entender que el proceso de resolución de estos problemas es el mismo que el de los arreglos de k elementos tomados de n, es el objetivo.

Problema 5

Con las letras de la palabra ABEDUL (árbol de la familia de las betuláceas que abunda en los bosques europeos) ¿Cuántas palabras diferentes de 6 letras no repetidas, con o sin significado, podemos formar?

Sabemos que para la elección de la primera letra contamos con 6 posibilidades (A, B, E, D, U y L). Elegida la primera letra de la palabra que queremos contar, nos quedan 5 posibles elecciones para la segunda letra. Para la tercera letra, solo tenemos 4 letras disponibles para hacer nuestra elección. Si seguimos eligiendo de esta manera, al hacer la elección de la última letra, solo tendremos 1 posibilidad.

Por lo tanto, podemos formar 6x5x4x3x2x1=720 palabras diferentes con las letras de la palabra ABEDUL.

Si el profesor lo considera necesario, pedirá a los estudiantes que traten hagan el diagrama de árbol que los conduzca la solución del problema.

Problema 6

¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 8 personas en una fila de 8 butacas del cine?

Como en el Problema 5. Hay 8 personas que podemos sentar en la butaca 1. En la butaca 2, quedan 7 personas, ya que hay una en la butaca 1. Para la butaca 3, se pueden elegir a 6 personas. Para la 4 hay posibilidades de elegir a 5 personas. De esta manera seguimos determinando el número de personas que podemos elegir, para sentar en cada una de las butacas restante. Al terminar, observamos que:

Hay la posibilidad de elegir a 8 personas para sentar en la butaca1.

Hay la posibilidad de elegir a 7 personas para sentar en la butaca 2.

Hay la posibilidad de elegir a 6 personas para sentar en la butaca 3.

Hay la posibilidad de elegir a 5 personas para sentar en la butaca 4.

Hay la posibilidad de elegir a 4 personas para sentar en la butaca 5.

Hay la posibilidad de elegir a 3 personas para sentar en la butaca 6.

Hay la posibilidad de elegir a 2 personas para sentar en la butaca 7.

Hay la posibilidad de elegir a 1 personas para sentar en la butaca 8.

De donde, existen 8x7x6x5x4x3x2x1 formas diferentes de sentar a 8 personas en 8 butacas del cine.

Ahora, creemos que los estudiantes se encuentren preparados para resolver el problema 7.

Problema 7

¿De cuántas formas distintas se pueden sentar *n* personas en una fila de *n* butacas del cine?

El problema anterior se puede escribir en términos generales de la siguiente forma: ¿Cuántos grupos diferentes de n elementos de un número de *n* elementos dados, se pueden construir, si cada elemento solo se puede usar una sola vez.

Consideramos, que es el momento de introducir una notación para representar las permutaciones, esta puede ser P_n, y una forma abreviada de escribir el producto $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$, como el factorial de n, representado por el símbolo $n!$. Además, debe ser claro, para el estudiante que podemos encontrarnos, en algunos documentos, con otro tipo de símbolos que representan la misma idea.

b) Problemas para que los estudiantes, agrupados en equipos, resuelvan en clase.

1) En una mesa para estudiantes hay 8 sillas. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar, si Juan y María siempre han de sentarse juntos.

2) En la sala de espera del Rector de la Universidad Veracruzana hay 12 estudiantes que quieren hablar con él. 4 son de la Facultad de Economía; 6 son de la facultad de ingeniería y 2, son de la facultad de Estadística.

a) ¿De cuántas formas distintas es posible ordenarlos

b) ¿De cuántas formas puede hacerlo, si los alumnos de cada facultad deben estar juntos?

c) ¿De cuántas formas puede hacerlo, si solamente los alumnos de la facultad de Estadística deben estar juntos?

3) Con la palabra ABEDUL (árbol de la familia de las betuláceas que abunda en los bosques europeos) ¿Cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que inicien con vocal?

4) ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 15 personas en una fila de 22 butacas del cine?

5) ¿Cuántas permutaciones de los números (1, 2, 3, 4, 5) dejan fijo exactamente dos números no consecutivos?

6) Un grupo de 7 estudiantes le pide a un compañero que vaya por 40 tacos para que puedan cenar mientras ellos pasan en limpio el trabajo que les encargó el profesor. En la taquería hay tres tipos de tacos: tacos de frijol, de chicharrón en salsa verde y de papas con rajas.

a) ¿De cuántas formas diferentes puede seleccionar los 40 tacos?

b) Si sabe que a la mayoría le gustan los de chicharrón en salsa verde y decide llevar solo 10. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacer la selección, con esta restricción, de los 40 tacos?

c) Si elige llevar 10 de chicharrón y 8 de frijol. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacer la selección, con esta restricción, de los 40 tacos?

7) En la sala de juntas de la Dirección de Estadística e Informática hay una mesa redonda para reuniones de todo tipo. El Consejo técnico de las dos facultades consta de 7 miembros, incluyendo a la directora. Si la directora y un profesor determinado siempre deben estar juntos. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar los miembros del consejo?

8) Siete amigos hacen cola para el cine. Al llegar sólo quedan 4 entradas. ¿De cuántas formas podrían repartirse estas entradas para ver la película? Combinaciones sin repetición. Solución: 35 formas distintas de reparto.

9) Un entrenador de fútbol dispone en la plantilla de su equipo de 7 delanteros de la misma calidad y que pueden actuar indistintamente en los tres puestos de ataque del equipo. ¿Cuántas delanteras distintas podría confeccionar? Variaciones sin repetición. Solución: 210 delanteras de ataque.

10) Un técnico de sonido tiene que unir 6 terminales en 6 conexiones. Si lo hiciera al azar, ¿de cuántas formas diferentes podría completar las conexiones? Permutaciones sin repetición. Solución: 720 conexiones diferentes

11) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir tres premios distintos entre Juan, Pedro, María, Alicia y Pilar?

SESIÓN 4

Combinaciones sin repetición.

Tiempo estimado: 100 minutos (dos clases de 50 minutos).

Construir conjuntos de *k* elementos de un grupo de *n* elementos dados. En este caso no pueden repetirse los elementos y no se deben remplazar. La fórmula es

$$C_k^n = \frac{A_k^n}{P_k^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

En esta sesión y después de resolver algunos problemas, los estudiantes intentarán expresar con sus propias palabras la definición de combinaciones sin repetición. Así mismo han de caracterizar problemas en los cuales el orden en que se coloquen los elementos no es relevante. Además, se les pedirá que hagan conjeturas sobre la fórmula general acerca de esta idea. Podrán distinguir entre problemas en los que pueden utilizar las fórmulas y los problemas que no corresponden al uso de dichas fórmulas.

Problemas

a) Problemas para que los estudiantes, agrupados en equipos, resuelvan en clase.

Problema 1

En una bodega hay en un estante hay cuatro tipos diferentes de botellas de refresco: Coca cola, Sidral, Pepsi cola y Pascual. ¿De cuántas formas se pueden elegir dos botellas diferentes, si el orden en que sean elegidas no nos interesa?

El hecho de que el estudiante encuentre imposible usar un diagrama de árbol como ayuda en la resolución de problemas que involucren combinaciones, le permitira apreciar la técnica descrita en la resolución del Problema 1.

Una forma de resolver el Problema 1 es suponer que si nos interesa el orden en que tomamos las botellas y procedemos de la manera usual.

Como el orden de las parejas de botellas de refrescos seleccionados nos interesa, el problema corresponde a arreglos sin repetición. Debemos, para resolver el problema, aplicar la fórmula $A_k^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$, donde $k=2$ y $n=4$. Por tanto, el número de estas parejas es de 12, ya que $A_2^4 = 4\cdot\ldots\cdot(4-2+1) = 4\cdot 3 = 12$. Esto es, hay 12 formas diferentes de elegir dos botellas de refresco, como lo mostramos a continuación:

(Coca cola, Sidral), (Coca cola, Pepsi cola), (Coca cola, Pascual),

(Sidral, Coca cola), (Pepsi cola, Coca cola), (Pascual, Coca cola)

(Pepsi cola, Sidral), (Pepsi cola Pascual),

(Sidral, Pepsi cola), (Pascual, Pepsi cola),

(Sidral, Pascual),

(Pascual, Sidral).

En las combinaciones el orden no es importante, es lo mismo elegir la pareja (Pascual, Sidral) que la pareja (Sidral, Pascual). Es decir, si queremos obtener las combinaciones, entonces debemos quitar, por ejemplo, todas las parejas que repiten elementos que ya están considerados en alguna pareja.

Esto es, en las 12 parejas, producto de considerar los arreglos de 2 botellas de donde hay 4, debemos quitar los arreglos que contienen los mismos elementos que alguna otra pareja. Como lo mostramos a continuación, tachando los elementos duplicados y señalados con una flecha la pareja que contiene los mismos elementos.

(Coca cola, Sidral), (Coca cola, Pepsi cola), (Coca cola, Pascual),

(~~Sidral, Coca cola~~), (~~Pepsi cola, Coca cola~~), (~~Pascual, Coca cola~~)

(Pepsi cola, Sidral), (Pepsi cola Pascual),

(~~Sidral, Pepsi cola~~), (~~Pascual, Pepsi cola~~),

(Sidral, Pascual),

(~~Pascual, Sidral~~).

De lo anterior, observamos que el número de formas en que se pueden elegir dos botellas de refresco, si el orden en que son elegidas no es importante es de 6. Estas son:

(Coca cola, Sidral), (Coca cola, Pepsi cola), (Coca cola, Pascual),

(Pepsi cola, Sidral), (Pepsi cola, Pascual)

(Sidral, Pascual)

Así que, las combinaciones posibles de 2 botellas de refresco tomadas de donde hay 4, son 6.

Problema 2

En la Facultad de Informática de la Universidad Veracruzana, se ofrecen 5 asignaturas. ¿De cuántas maneras diferentes puedo inscribir 3 materias diferentes en un semestre?

Es claro que en este problema el orden carece de importancia, por lo que estamos ante un problema de combinaciones. Para resolver este problema vamos a considerar que en el problema nos interesa el orden en que elegimos las materias.

Como el problema original se ha convertido en uno de arreglos sin repetición, usamos la fórmula para obtenerlos, en donde k=3 y n=5. De donde, $A_3^5 = 5 \cdot \ldots \cdot (5-3+1) = 5 \cdot \ldots \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Por lo tanto, hay 60 posibles formas diferentes de inscribir 3 materias de donde hay 5.

No debemos perder de vista, que en el problema original el orden en que inscribimos las materias no es importante.

Denotemos con las letras A, B, C, D, E y F a las cinco materias diferentes y acordemos que una terna de materias representa las tres materias elegidas y el orden en que fueron seleccionadas. Por ejemplo, la terna (A, E, F) representa que primero fue elegida la materia A, luego la materia E y finalmente la materia F.

A continuación escribimos algunas de estas 60 posibles formas de elegir las tres materias de las 5 que hay.

(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)

(A, B, D), (A, D, B), (B, A, D), (B, D, A), (D, A, B), (D, B, A)

(A, B, E), (A, E, B), (B, A, E), (B, E, A), (E, A, B), (E, B, A)

(A, B, F), (A, F, B), (B, A, F), (B, F, A), (F, A, B), (F, B, A)

(B, C, D), (B, D, C), (C, B, D), (C, D, B), (D, B, C), (D, C, B)

(B, C, E), (B, E, C), (C, B, E), (C, E, B), (E, B, C), (E, C, B)

etc.

Usando un poco de imaginación, tenemos una idea de las ternas faltantes. En la primera línea están todas las posibilidades de inscribir las tres materias A, B y C, en la segunda las posibilidades de inscribir las materias A, B y D y así sucesivamente.

Sin embargo, el Problema 1 pide las posibles combinaciones de inscribir 3 materias de donde hay 7. Por lo que, el orden resulta irrelevante para este problema. Así que, para obtener el resultado de estas combinaciones, debemos quitar todas las ternas que contienen las mismas materias pero en diferente orden.

A continuación mostramos las ternas que hemos tachado porque contienen las mismas materias pero en diferente orden.

(A, B, C), ~~(A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)~~

(A, B, D), ~~(A, D, B), (B, A, D), (B, D, A), (D, A, B), (D, B, A)~~

(A, B, E), ~~(A, E, B), (B, A, E), (B, E, A), (E, A, B), (E, B, A)~~

(A, B, F), ~~(A, F, B), (B, A, F), (B, F, A), (F, A, B), (F, B, A)~~

(B, C, D), ~~(B, D, C), (C, B, D), (C, D, B), (D, B, C), (D, C, B)~~

(B, C, E), ~~(B, E, C), (C, B, E), (C, E, B), (E, B, C), (E, C, B)~~

etc.

Observamos, que las ternas que fueron tachadas resultan ser las permutaciones de cada uno de los arreglos. Por tanto, si a los arreglos sin repetición los dividimos por las permutaciones de cada uno de los arreglos, obtenemos las combinaciones.

Denotando las combinaciones de k elementos, tomados de donde hay n por C_k^n, tenemos que la solución al Problema 2 es:

$$C_3^5 = \frac{A_3^5}{P_3} = \frac{5\cdot\ldots\cdot(5-3+1)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{5\cdot\ldots\cdot 3}{6} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

Hay 10 posibles combinaciones que se pueden formar de 3 materias tomadas de las 5 materias que hay. A continuación escribimos las 10 combinaciones.

(A, B, C), (A, B, D), (A, B, E), (A, B, F),

(B, C, D), (B, C, E), (B, C, F),

(C, D, E), (C, D, F),

(D, E, F).

Después, de haber resuelto el problema 2, es posible que el estudiante resuelva los Problema 3 y 4 en los siguientes términos:

Problema 3

¿Cuántos grupos de 6 materias se pueden formar, de un número de 36 materias dadas, si no importa el orden en que sean elegidas las materias?

Problema 4

¿Cuántos grupos de k elementos se pueden formar, de un número de n elementos dados, si no importa el orden en que sean elegidos los elementos?

b) Problemas para que los estudiantes, agrupados en equipos, resuelvan en clase.

1) ¿De cuántas maneras puedes elegir comprar 2 computadoras diferentes y 3 impresoras diferentes de un grupo de 8 computadoras y 7 impresoras?

2) De una baraja de 52 cartas (13 corazones, 13 tréboles, 13 diamantes y 13 picas):

   A) ¿Cuántas manos de cinco cartas (sin orden) se pueden dar?

   B) ¿Cuántas que tengan 4 ases?

   C) ¿Cuántas que tengan 4 cartas de la misma denominación (por ejemplo: que tengan 4 reyes)?

3) En este juego de azar, se eligen 5 números naturales de 28 disponibles.

   A) ¿Cuántas elecciones diferentes de estos 5 números distintos hay?

   B) Si el reintegro (o devolución del importe) se concede cuando se tienen dos aciertos y tres fallos. ¿Cuántas maneras diferentes, de sacar los cinco números diferentes de los 28 con esta situación, hay?

   C) Hay un premio de 100,000 pesos para el que tenga 3 aciertos de las 5 elecciones. ¿Cuántas maneras hay de obtener 3 aciertos?

   D) ¿De obtener 4 aciertos con premio de 300,000 pesos?

   E) ¿De obtener 4 fallos, es decir, 1 acierto con el que no se gana nada?

   F) ¿De obtener 5 fallas?

4) Una cadena binaria de longitud 16, es una sucesión binaria, formada por 16 números, que solo pueden ser 1_s y 0_s.

   A) ¿Cuántas de estas cadenas diferentes de longitud 16 hay, que contengan 4 veces el cero?

   B) ¿Cuántas contienen los 4 ceros juntos?

   C) ¿Cuántas contienen al menos 3 ceros?

5) El director de la escuela quiere repartir, entre 3 maestros, las 10 secciones que componen el reglamento de los derechos y obligaciones de los estudiantes. Espera con esta medida que cada profesor los analice, reciben cada profesor al menos 3 secciones de dicho reglamento. ¿De cuántas formas puede hacerse el reparto?

6) ¿Cuántos números naturales menores que 8730 no son capicúa? (Investigar que es un numero capicúa)

7) Un grupo de 40 estudiantes, de la facultad de informática, provienen de 4 estados diferentes de la república mexicana, 10 son de Veracruz, 10 de Tamaulipas, 10 de Tlaxcala y los restantes de Tabasco.

   A) ¿De cuántas maneras diferentes podemos elegir a 6 estudiantes del grupo?

   B) ¿Cuántas que todos sean del mismo estado?

   C) ¿Cuántas que contengan 4 de un estado y dos de otro?

8) De cuántas maneras puede elegirse un grupo de 13 del Partido Revolucionario Institucional (PRI), 15 del Partido Acción Nacional (PAN) y 25 del Partido de la Revolución Democrática (PRD), de un grupo de 30 miembros de PRI, 42 del PAN y 25 del PRD.

9) Para usar el procesador de la computadora de un banco, se requiere una clave alfanumérica compuesta por 9 caracteres. ¿Cuántas claves hay que tengan a lo sumo 4 números?

10) Un estudiante tiene 8 camisas diferentes, 3 pantalones diferentes y 4 zapatos de modelos diferentes. ¿Cuántos días del año puede ir a la escuela vestido de forma diferente? (si solo se cambia los zapatos, se vestirá de forma diferente)

11) Si X es un conjunto de n elementos y Y uno de m elementos, ¿Cuántas funciones hay de X en Y. Sabiendo que: una función de X en Y (f: X→Y) es una relación que asocia a cada elemento de X con uno y sólo uno de Y.

SESIÓN 5

Problemas de combinatoria en general.

Tiempo estimado: 100 minutos (dos clases de 50 minutos)

Resolver problemas con una o más operaciones combinatorias.

El profesor propondrá varios problemas a resolverse, a los estudiantes agrupados en equipos en el salón de clase, y otros mas para resolverlos de manera individual, como traba extra escolar. Así mismo, cada uno de los equipos construirá y resolverá algunos problemas que, después serán resueltos por los miembros de otro equipo.

Problemas.

ANEXO M1

PRUEBA DE PROBLEMAS

PRUEBA DE PROBLEMAS ANTES Y DESPUES DE LA APLICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA Y LA ENSEÑANZA TRADICIONAL

Navarro-Pelayo (1994)

(Modificado para su uso en esta Investigación)

Resuelve cada uno de los siguientes problemas en el cuadernillo que te hemos entregado y por favor intenta seguir cada una de las indicaciones siguientes:

a) Escribe en él, todas las operaciones que utilices en la resolución de cada problema.

b) No debes usar ninguna otra hoja adicional para escribir.

c) No borres operaciones que realices durante la resolución del problema, aunque te des cuenta que estas operaciones sean erróneas o no te conducen a la resolución del problema. Si has de tachar algo ponlo de manera que se pueda leer lo escrito.

d) Recuerda que tu calificación está en función del esfuerzo hecho para resolver los problemas y de los resultados obtenidos. La única forma de conocer el esfuerzo que has realizado para resolver los problemas, es el análisis de lo escrito en el cuadernillo.

e) Si se agotan las hojas del cuadernillo, pídele otro al aplicador del cuestionario.

PROBLEMAS:

1. En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha, y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de una ordenación de fichas, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otra ordenación que no forme parte de la solución.

2. Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuántas maneras se pueden alinear

cuatro de las doce cartas, con la condición de que siempre estén alineadas las tres figuras? Ejemplo: sota, caballo, rey, 1.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de alineación de cartas, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otra alineación que no forme parte de la solución.

3. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de colocación de las cartas que forme parte de la solución y otra que no forme parte de la solución.

4. Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede regalar los coches? Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de formas de regalar los diferentes coches, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otra forma que no

5. Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito puede hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de división del trabajo, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otra que no.

6. Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar el pizarrón. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de elección de estudiantes, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otra elección que no.

7. ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos. Ejemplo 88124.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de un número, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otro que no

8. El garaje de Ángel tiene cinco lugares. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Ángel puede estacionar su coche en el lugar número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen estacionar sus coches en la cochera?

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de forma posible de estacionarse, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otra que no.

9. Cuatro niños Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (sala y estudio) donde poder colocar a los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar a los cuatro niños en las dos habitaciones? (puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en la sala y Diana en el estudio.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de colocación de los niños, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otra que no.

10. María y Carmen tienen cuatro estampas numerados de 1 a 4. Deciden repartírselas entre las dos (dos estampas para cada una. ¿De cuántas formas se pueden repartir las estampas? Ejemplo: María puede quedarse con las estampas 1 y 2, y Carmen con las estampas 3 y 4.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de repartición de estampas, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otra que no.

11. En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se introduce en la urna. Se elige una segunda bola y se anota su número. La bola extraída se vuelve a introducir en la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números tres cifras podemos obtener? Ejemplo: se puede obtener el número 222.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de un número de tres cifras, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otro que no.

12. Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A, B, C, C y C. ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de la otra formando una hilera? Ejemplo: pueden estar colocadas de la siguiente forma ACBCC.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de colocación de estas cinco cartas, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otra que no.

13. Se quiere elegir un comité formado por tres miembros, presidente, tesorero y secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos? Ejemplo: que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

Antes de iniciar con la resolución del problema, escribe un ejemplo de comité, diferente al anterior, que forme parte de la solución y otro comité que no.