



**Memoria de tesis doctoral para la obtención de título de Doctor
en Matemáticas por la Facultad de Ciencias Experimentales de
la Universidad de Almería.**

Doctorado en Matemáticas

Estudio de propiedades analíticas de polinomios ortogonales no estándar

**(Analytical properties of nonstandard orthogonal
polynomials)**

Juan Francisco Mañas Mañas

Directores: Dr. Juan José Moreno Balcázar

(Universidad de Almería)

Dr. Francisco José Marcellán Español

(Universidad Carlos III de Madrid)

Diciembre 2018

AGRADECIMIENTOS

Durante la realización de esta etapa investigadora de mi vida he sido muy afortunado de contar con la ayuda y el apoyo de multitud de personas.

En primer lugar, agradecer el trabajo del Dr. Juan José Moreno Balcázar, sin su gran paciencia, apoyo y esfuerzo durante todos estos años la realización de esta tesis doctoral no hubiera sido posible. No tengo palabras para describir mi infinita gratitud hacia él. Siempre le estaré agradecido por iniciarme en el apasionante mundo de los polinomios ortogonales.

Por supuesto he de destacar la gran labor y apoyo recibidos por el Dr. Francisco José Marcellán Español, gracias a sus comentarios, reflexiones y revisiones esta memoria ha sido posible.

Es necesario destacar también la ayuda financiera de distintas instituciones públicas españolas, cuyas aportaciones son imprescindibles para que haya una investigación de calidad en este país. En primer lugar agradezco al Plan Propio de la Universidad de Almería su contratación y su confianza depositada en mí, gracias a una beca predoctoral he podido realizar esta memoria y obtener todos los resultados científicos aquí expuestos. También agradecer al programa de estancias del Vicerrectorado de Investigación de la UAL la ayuda económica recibida para realizar una estancia de investigación de 3 meses en Baylor University (Texas, EEUU) y otra estancia de un mes en la Universidad de Dresden (Alemania). Estas estancias también han sido parcialmente financiadas por el grupo de investigación TAPO, al que volveré a hacer mención en estos agradecimientos.

Me gustaría también mencionar al Departamento de Matemáticas y a la Facultad de Ciencias Experimentales de la UAL, cuyos profesores, y en los últimos años compañeros, han contribuido en mi formación, tanto académica como personal. También dar las gracias al Departamento de Matemáticas por la ayuda económica recibida a la hora de asistir a congresos o a cursos. Finalmente, en este plano económico, dar las gracias a los proyectos de investigación “Aproximación y ortogonalidad: de la teoría a las aplicaciones” con código MTM2014-53963-P del Ministerio de Economía y Competitividad de España y al proyecto “Aproximación constructiva: análisis, algoritmos y aplicaciones” con código MTM2017-89941-P del Ministerio de Economía y Competitividad de España por el apoyo económi-

co para asistir a congresos. Por supuesto dar las gracias a uno de sus IPs, Andrei Martínez Finkelshtein, con el que he tenido una gran relación, además de poder aprender mucho de él al tenerlo como profesor.

No puedo olvidarme en esta sección de agradecimientos a los profesores Dr. Lance L. Littlejohn de Baylor University (Texas, EEUU) y Dra. Galina Filipuk de la Universidad de Varsovia (Polonia) cuyos recibimientos e invitaciones a realizar estancias de investigación han sido muy productivos. Con ellos pude investigar, trabajar y conocer nuevas líneas de investigación.

Vuelvo a mencionar al grupo de investigación TAPO (Teoría de Aproximación y Polinomios Ortogonales) y añadido al grupo de investigación GOYA (Grupo en Ortogonalidad y Aplicaciones) de las universidades de Almería y Granada, respectivamente, cuyos miembros me acogieron todos con gran cariño desde el principio, y con los que he mantenido una gran relación.

No puedo terminar esta sección sin mencionar a ciertas personas que durante estos años han hecho que esta etapa investigadora haya sido más fácil. En primer lugar a mi compañera de despacho María Morales por sus ánimos y amabilidad. A todos los “becarios” del Departamento de Matemáticas, gracias a nuestras reuniones científicas la investigación se hace más amena y divertida. A mis compañeros del Master de Ingeniería Matemática de la UC3M, ese apoyo psicológico y esa comprensión que tan necesario es durante la realización de una tesis doctoral. Y por último, y no por ello menos importante, a mis padres, a mi hermana y mi novia por toda la paciencia que han depositado en mí durante estos años.

Muchas gracias a todas y todos

Juan Francisco Mañas Mañas

Diciembre 2018

RESUMEN

Este documento constituye la memoria de tesis doctoral para optar al grado de Doctor en Matemáticas. En ella se recogen las principales aportaciones del candidato al campo de la ortogonalidad Sobolev. En particular, el objetivo es el estudio de propiedades asintóticas de polinomios de Sobolev discretos, especialmente en el caso variante.

Las aportaciones originales de esta memoria se recogen en los Capítulos 2 al 5. A modo de introducción el Capítulo 1 establece el marco teórico en el que se va a desarrollar este trabajo. De esta forma se realiza un recorrido por aspectos esenciales de la teoría clásica de polinomios ortogonales. A continuación, se introduce la ortogonalidad Sobolev, dedicando algunas páginas a su motivación, a aspectos generales de esta teoría y a los resultados más relevantes y necesarios para esta memoria. Se ha pretendido que este capítulo sea el hilo conductor de los restantes.

El resto de los capítulos se divide en dos partes.

La primera de estas partes corresponde a los capítulos 2 al 4. En ellos el objetivo es la obtención de fórmulas asintóticas tipo Mehler–Heine para polinomios de Sobolev discretos variantes. Estas fórmulas asintóticas son importantes ya que describen con detalle el comportamiento asintótico local de los polinomios de Sobolev alrededor del punto en el que hemos colocado la perturbación. Además, como consecuencia de estas fórmulas, se deduce el comportamiento asintótico de los ceros de dichos polinomios ortogonales.

El término variante aparece al introducir una sucesión de masas variantes $\{M_n\}_{n \geq 0}$ en el producto escalar, es decir, se considera

$$(f, g) = \int f(x)g(x)d\mu + M_n f^{(j)}(c)g^{(j)}(c),$$

donde μ es una medida de Borel positiva con soporte en un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$, j es un entero no negativo y $c \in \mathbb{R}$. La sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ está formada por números reales no negativos.

Se probará cómo el comportamiento asintótico de $\{M_n\}_{n \geq 0}$ influye en el comportamiento asintótico local de los polinomios ortogonales con respecto al anterior producto escalar, es decir, la influencia que el tamaño de la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ tiene en la asintótica tipo Mehler–Heine y, por tanto, en el comportamiento asintótico

y la ubicación de los ceros de estos polinomios ortogonales de Sobolev discretos (también llamados polinomios ortogonales tipo Sobolev).

En los Capítulos 2 y 3 se consideran los polinomios ortogonales tipo Laguerre–Sobolev y tipo Jacobi–Sobolev, respectivamente. La técnica usada en el Capítulo 2 para obtener los resultados es una técnica particular que no es viable en un enfoque general. Es en el Capítulo 4 donde, usando nuevas técnicas que aparecen en la literatura reciente, se aborda el caso general permitiendo que la medida μ pertenezca a contextos más generales como, por ejemplo, clase de Nevai o relativa a pesos de Freud generalizados.

Además, se mostrará que la asintótica local tipo Mehler–Heine es la que permite encontrar las diferencias asintóticas entre estos polinomios de Sobolev discretos y los polinomios ortogonales con respecto a μ . De hecho la asintótica relativa exterior correspondiente a estas dos familias de polinomios ortogonales es exactamente igual a 1, es decir, asintóticamente no se diferencian en $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\mu)$.

La segunda parte de esta memoria, que corresponde al Capítulo 5, surge a partir de una estancia de investigación de más de 3 meses con el Prof. Dr. Lance L. Littlejohn en Baylor University (Texas, EEUU). Esta parte de la memoria se centra en estudiar el comportamiento asintótico de los autovalores de un operador diferencial del que una familia de polinomios ortogonales de Gegenbauer–Sobolev discretos son autofunciones.

Realmente, la motivación para considerar este problema fue la determinación de un valor asintótico que involucra a la norma infinito de los polinomios ortonormales de Gegenbauer–Sobolev discretos y a los autovalores anteriormente citados.

Las técnicas usadas en este capítulo nos hacen pensar que podemos abordar este problema en contextos más generales.

Finalmente, el Capítulo 6 está dedicado a unas breves conclusiones y a una lista de problemas abiertos, algunos de los cuales ya se han comenzado a estudiar.

Respecto a las publicaciones ligadas a esa memoria de tesis doctoral indicar que los capítulos del 2 al 5 han sido publicados en [112], [118], [119] y [120]. Más detalles sobre la producción científica realizada se encuentran en el Anexo A.

ABSTRACT

This document constitutes the doctoral thesis to aim for a PhD degree in Mathematics. Thus, it contains the main contributions made on Sobolev orthogonality by the PhD candidate. In this way, the objective of this document is the study of the asymptotic properties of discrete Sobolev orthogonal polynomials, especially in the varying case.

The main contributions are included in Chapters 2 to 5. In the Chapter 1 we establish the framework where we are going to develop our work. So, first we carry out a review of the basic aspects of the theory of standard orthogonal polynomials. Next, we introduce the Sobolev orthogonality, paying attention to general aspects of this nonstandard orthogonality as well as to its historical motivation. The results in Chapter 1 will be useful and necessary along this thesis.

The other chapters are divided into two parts.

The first part corresponds to the Chapters 2 to 4. The aim in these chapters is to obtain the Mehler–Heine type asymptotics for varying discrete Sobolev orthogonal polynomials. These asymptotic formulae are relevant because they describe in detail the local asymptotic behavior of the Sobolev orthogonal polynomials around the point where we have located the perturbation of the standard inner product. Furthermore, as a consequence of these formulae, the asymptotic behavior of the (scaled) zeros of these varying discrete Sobolev orthogonal polynomials is deduced.

The varying term is determined by introducing a sequence of varying masses $\{M_n\}_{n \geq 0}$ in the inner product, that is, we consider

$$(f, g) = \int f(x)g(x)d\mu + M_n f^{(j)}(c)g^{(j)}(c),$$

where μ is a positive Borel measure with support on an infinite subset of $\mathbb{R}$, j is a nonnegative integer and $c \in \mathbb{R}$. The sequence $\{M_n\}_{n \geq 0}$ is a sequence of nonnegative real numbers.

We will prove that the asymptotic behavior of $\{M_n\}_{n \geq 0}$ influences the local asymptotic behavior of the orthogonal polynomials with respect to the above inner product, that is, it influences the Mehler–Heine type asymptotics and, therefore,

the asymptotic behavior of the zeros of these varying discrete Sobolev orthogonal polynomials (also called Sobolev type orthogonal polynomials).

In Chapters 2 and 3 we consider the varying Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials and the varying Jacobi–Sobolev orthogonal polynomials, respectively. The technique used in Chapter 2 to obtain the results is a particular technique that it is not adequate when we want to make a general approach. Thus, in the Chapter 4 we obtain general results using a new technique based on a one developed for non-varying discrete Sobolev orthogonal polynomials. With this new approach we recover the results obtained in the previous chapters and, moreover, these results hold for a wide class of measures such as measures in the Nevai class or related to generalized Freud weights.

In addition, it will be shown that the Mehler–Heine type asymptotics is the most appropriate one to establish the asymptotic differences between these varying discrete Sobolev orthogonal polynomials and the orthogonal polynomials with respect to μ . In fact, the outer relative asymptotics corresponding to these two families of orthogonal polynomials is exactly equal to 1, that is, they are the same asymptotically on compact subsets of $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\mu)$.

The second part corresponds to Chapter 5. The research in this chapter is motivated by an over three-month stay with Dr. Lance L. Littlejohn at Baylor University (Texas, USA). Now, we consider a differential operator whose eigenfunctions are a family of discrete Gegenbauer–Sobolev orthogonal polynomials. Our objective is to get the asymptotic behavior of the corresponding eigenvalues.

Actually, the motivation to consider this problem is the computation of an asymptotic value that involves the uniform norm of the discrete Gegenbauer–Sobolev orthonormal polynomials and the eigenvalues aforementioned.

The techniques used in this chapter suggest that we can tackle this problem in more general frameworks.

Finally, Chapter 7 is devoted to give the conclusions and pose a list of open problems some of which we hope to study in the next future.

The results of this doctoral thesis have led to several publications. In this way, Chapters 2 to 5 have been published in [112], [118], [119] and [120]. More information about the scientific production of the PhD candidate can be found in the Appendix A.

ÍNDICE GENERAL

	Página
1. ORTOGONALIDAD SOBOLEV	1
1.1. Teoría básica de polinomios ortogonales estándar	1
1.1.1. Ortogonalidad estándar	2
1.1.2. Recurrencia	3
1.1.3. Propiedades generales de los ceros	6
1.1.4. Polinomios ortogonales clásicos en la recta real	6
1.1.5. Polinomios clásicos de Jacobi y Gegenbauer	8
1.2. Asintótica	11
1.3. Motivación y resultados fundamentales sobre polinomios ortogonales de Sobolev	13
1.4. Polinomios ortogonales de Sobolev continuos	19
1.4.1. Propiedades asintóticas y el caso balanceado	21
1.5. Polinomios ortogonales de Sobolev discretos o tipo Sobolev	26
1.5.1. Propiedades asintóticas	28
1.6. Ceros de polinomios ortogonales de Sobolev discretos	33
1.7. Ecuaciones diferenciales asociadas a polinomios ortogonales de Sobolev	36
1.8. Consideraciones finales	38
2. POLINOMIOS ORTOGONALES TIPO LAGUERRE-SOBOLEV VARIANTES	39
2.1. Introducción y objetivo	39
2.2. El caso variante	40
2.3. Asintótica Relativa exterior y asintótica fuerte	48
2.4. Asintótica tipo Mehler–Heine	49
2.5. Estudio de los ceros	55
2.6. Experimentación numérica	61
3. POLINOMIOS ORTOGONALES TIPO JACOBI-SOBOLEV VARIANTES	67
3.1. Introducción y objetivo	67
3.2. Propiedades de los polinomios $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$	69
3.3. Asintótica tipo Mehler–Heine y ceros	82

3.4. Experimentos numéricos	88
4. POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV DISCRETOS VARIAN- TES	97
4.1. Introducción	97
4.2. Polinomios ortonormales de Sobolev discretos variantes	99
4.3. Asintótica tipo Mehler–Heine	106
4.3.1. Caso no simétrico	106
4.3.2. El caso simétrico	111
4.4. Comportamiento asintótico de los ceros	115
4.5. Otros resultados asintóticos	118
4.6. Experimento numérico	121
5. POLINOMIOS ORTOGONALES DE GEGENBAUER-SOBOLEV DIS- CRETOS COMO AUTOFUNCIONES DE UN OPERADOR DIFEREN- CIAL	129
5.1. Motivación y definición del valor r_0	130
5.2. Propiedades asintóticas de los polinomios $C_n^{(\alpha)}$ y estudio de los po- linomios ortogonales Gegenbauer-Sobolev discretos	134
5.3. Comportamiento asintótico de los autovalores del operador diferen- cial. Determinación de r_0	142
5.4. Asintótica tipo Mehler–Heine	147
6. CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS	151
6.1. Problemas abiertos	155
7. CONCLUSIONS AND OPEN PROBLEMS	157
7.1. Open problems	161
A. SCIENTIFIC RESULTS	163
BIBLIOGRAFÍA	167

ÍNDICE DE FIGURAS

	Página
2.1. Caso $\beta < 2j + \alpha + 1$	61
2.2. Caso $\beta < 2j + \alpha + 1$	62
2.3. Caso $\beta > 2j + \alpha + 1$	62
2.4. Caso $\beta > 2j + \alpha + 1$	62
2.5. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 6$	64
2.6. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 6$	64
2.7. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = \frac{405\sqrt{\pi}}{128}$	64
2.8. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = \frac{405\sqrt{\pi}}{128}$	65
2.9. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 5$	65
2.10. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 5$	65
3.1. Caso $\gamma = 25 > 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Representación de $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ alrededor de $x = 1$	89
3.2. Caso $\gamma = 25 > 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Función ϕ_α y polinomios reescalados.	90
3.3. Caso $\gamma = 2 < 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Representación de $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ alrededor de $x = 1$	91
3.4. Caso $\gamma = 2 < 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Función $\varphi_{3,3}$ y polinomios reescalados	92
3.5. Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Representación de $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ alrededor de $x = 1$ con $M < V$	93
3.6. Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Función $\psi_{\alpha,3}$ y polinomios reescala- dos con $M < V$	94
3.7. Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Representación de $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ alrededor de $x = 1$ con $M > V$	94
3.8. Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Función $\psi_{\alpha,3}$ y polinomios reescala- dos con $M > V$	95
3.9. Funciones límite en la asintótica (3.17). Funciones ϕ_α , $\varphi_{3,3}$, y además, $\psi_{3,3}$ con diferentes valores de M	95
4.1. Figura de $\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, L}$ para diferentes valores de L . Caso par.	128
4.2. Figura de $\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, L}^*$ para diferentes valores de L . Caso impar.	128

4.3.	Figura de $\Phi_{\frac{-1}{2},4,L}$ para diferentes valores de M	128
------	--	-----

ÍNDICE DE TABLAS

	Página
1.1. Ceros de los polinomios ortogonales con respecto a (1.22)	15
2.1. Caso $\beta < 2j + \alpha + 1$	61
2.2. Caso $\beta > 2j + \alpha + 1$	63
2.3. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$	63
2.4. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$	66
2.5. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$	66
3.1. Caso $\gamma = 25 > 2(\alpha + 2j + 1) = 20, j = 3, \alpha = 3, \beta = 1, M_n =$ $\frac{3e^n}{(6e^n+4)n^\gamma}$	89
3.2. Caso $\gamma = 25 > 2(\alpha + 2j + 1) = 20, j = 3, \alpha = 3, \beta = 1, M_n =$ $\frac{3e^n}{(6e^n+4)n^\gamma}$	90
3.3. Caso $\gamma = 2 < 2(\alpha + 2j + 1) = 20, j = 3, \alpha = 3, \beta = 1, M_n =$ $\frac{7\ln(n+1)+5}{(3+2\ln(n))n^\gamma}$	91
3.4. Caso $\gamma = 2 < 2(\alpha + 2j + 1) = 20, j = 3, \alpha = 3, \beta = 1, M_n =$ $\frac{7\ln(n+1)+5}{(3+2\ln(n))n^\gamma}$	91
3.5. Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20, M = 15000000000 < V, j = 3, \alpha =$ $3, \beta = 1, M_n = \frac{15000000000n^2(n-1/2)(n+2)}{n^{\gamma+4}}$	93
3.6. Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20, M = 15000000000 < V, j = 3, \alpha =$ $3, \beta = 1, M_n = \frac{5n^2(n-1/2)(n+2)}{n^{\gamma+4}}$	93
3.7. Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20, M = 3 \times 10^{10} > V, j = 3, \alpha =$ $3, \beta = 1, M_n = \frac{3 \times 10^{10} n^2(n-1/2)(n+2)}{n^{\gamma+4}}$	94
3.8. Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20, M = 3 \times 10^{10} > V, j = 3, \alpha =$ $3, \beta = 1, M_n = \frac{3 \times 10^{10} n^2(n-1/2)(n+2)}{n^{\gamma+4}}$	95
4.1. Caso par. $j = 8$	126
4.2. Caso Impar. $j = 9$	127

ORTOGONALIDAD SOBOLEV

Los polinomios ortogonales de Sobolev se han estudiado extensamente en las últimas décadas. La investigación en este campo se ha extendido en varias direcciones y ha generado una gran cantidad de publicaciones. Este capítulo contiene unas pinceladas de la extensa literatura que hay sobre este tema de investigación. El objetivo es identificar las ideas fundamentales y los desarrollos en este campo para entender y ubicar los resultados obtenidos en el resto de la memoria.

1.1 TEORÍA BÁSICA DE POLINOMIOS ORTOGONALES ESTÁNDAR

Antes de comenzar con la teoría sobre polinomios ortogonales de Sobolev, se hará un pequeño recordatorio de propiedades básicas y resultados más importantes sobre la teoría de polinomios ortogonales estándar. La literatura sobre polinomios ortogonales estándar es muy extensa puesto que lleva desarrollándose de forma ininterrumpida desde el siglo XIX. Algunas referencias básicas usadas en la elaboración de esta memoria son [19], [58], [84], [90], [103], [109], [116], [151], [152], [168], [169], [170] y [171].

A lo largo de esta sección se enunciarán varios resultados clásicos cuyas demostraciones se pueden encontrar en las referencias anteriores. Estos resultados son necesarios para poder abordar con un adecuado conocimiento la teoría de polinomios ortogonales de Sobolev. Sirven, a su vez, para visualizar las sustanciales diferencias entre los polinomios de ortogonalidad estándar y los polinomios de Sobolev que presentan una ortogonalidad no estándar.

1.1.1 Ortogonalidad estándar

Sea μ una medida de Borel finita positiva con soporte contenido en la recta real. Diremos que una función f pertenece al espacio $L_\mu^p[a, b]$ si

$$\int_a^b |f(x)|^p d\mu(x) < \infty.$$

Cuando $p = 1$ escribiremos simplemente $f \in L_\mu[a, b]$.

Definición 1.1.1 Se define el producto escalar estándar de dos funciones f y g pertenecientes a $L_\mu^2[a, b]$, y se denota por (f, g) , como la integral de Stieltjes-Lebesgue del producto de ambas funciones, es decir,

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)d\mu(x). \quad (1.1)$$

Definición 1.1.2 Si μ es una medida, diremos que dos funciones $f, g \in L_\mu^2[a, b]$ son ortogonales con respecto a μ si su producto escalar estándar es nulo, es decir,

$$(f, g) = 0.$$

Se denota mediante $\mathbb{P}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y por $\mathbb{P}_n[x]$ el subespacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n .

Definición 1.1.3 Sean $f \in L_\mu^2[a, b]$ y el producto escalar definido en (1.1). Se define la norma de f mediante

$$\|f\| := +\sqrt{(f, f)} = +\sqrt{\int_a^b f^2(x)d\mu(x)}.$$

A continuación daremos la definición de sucesión de polinomios ortogonales respecto a un producto escalar (1.1).

Definición 1.1.4 Dada una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n \geq 0}$, diremos que es una sucesión de polinomios ortogonales (**SPO**) con respecto a un producto escalar (1.1) si se cumple que:

1. P_n es un polinomio de grado exactamente n ,
2. $(P_n, P_m) = 0, \quad m \neq n, \text{ para } n, m \geq 0,$

3. $(P_n, P_n) > 0$, para todo $n \geq 0$.

Por otra parte, si $(P_n, P_n) = 1$ para todo $n \geq 0$ se dice que la sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es ortonormal y si el coeficiente líder de P_n es 1 para todo $n \geq 0$ se dice que la sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es mónica.

El siguiente teorema (ver, por ejemplo, [58, p. 8]) es una caracterización de las SPO.

Teorema 1.1.1 *Dado el producto escalar (1.1) y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios tal que $\text{gr}[P_n] = n$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una SPO respecto al producto (1.1).
2. $(P_n, q) = 0$, para todo polinomio q de grado $m < n$,
 $(P_n, q) \neq 0$ si q es un polinomio de grado exactamente n .
3. $(P_n, x^m) = k_n \delta_{n,m}$, donde $k_n \neq 0$, $m = 0, 1, \dots, n$ y $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker.

El siguiente resultado (ver, entre otros, [58, p. 9]) nos asegura que una SPO forma una base del espacio de polinomios $\mathbb{P}[x]$,

Teorema 1.1.2 *Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una SPO respecto a (1.1). Entonces, para cualquier polinomio q de grado n se tiene que*

$$q(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x), \quad \text{donde} \quad c_k = \frac{(q, P_k)}{\|P_k\|^2}.$$

Los coeficientes c_k de este desarrollo se denominan **coeficientes de Fourier** de q en la base $\{P_0, \dots, P_n\}$ del espacio vectorial $\mathbb{P}_n[x]$. Por otra parte, cada polinomio P_n de la SPO está determinado de manera única, salvo un factor multiplicativo. Por ello, a lo largo de esta memoria cada vez que se trabaje con una familia de polinomios se especificará qué normalización se está usando.

1.1.2 Recurrencia

Una de las características más importantes de los polinomios ortogonales estándar es el hecho de que cualesquiera tres polinomios consecutivos satisfacen una relación de recurrencia a 3 términos (o ecuación en diferencias lineal de segundo orden). Para ello se tienen los dos siguientes teoremas (ver, entre otros, las páginas 18 y 21 de [58]).

Teorema 1.1.3 Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un producto escalar (1.1). Entonces la SPO $\{P_n\}_{n \geq 0}$ satisface una relación de recurrencia a tres términos de la forma

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.2)$$

con $\gamma_n \neq 0$. Imponiendo que $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = 1$, la SPO queda determinada de forma única dadas las sucesiones $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$.

Antes de enunciar el recíproco del teorema anterior es necesario definir el concepto de *funcional de momentos*.

Definición 1.1.5 Un funcional es una aplicación lineal

$$\mathcal{L} : L_\mu[a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

satisfaciendo que $\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y las funciones f y g en $L_\mu[a, b]$. Diremos que $\mathcal{L}$ es un funcional de momentos determinado por una sucesión de números reales $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, donde α_n se denomina momento de orden n , si $\mathcal{L}$ es lineal en el espacio de polinomios y $\mathcal{L}[x^n] = \alpha_n$, con $n \geq 0$.

Además, $\mathcal{L}$ es un funcional de momentos definido positivo si $\mathcal{L}[q] > 0$ para cualquier polinomio q no negativo y no estrictamente igual a cero en el intervalo $[a, b]$.

El siguiente resultado es conocido en la literatura como Teorema de Favard.

Teorema 1.1.4 Sean $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ dos sucesiones cualesquiera de números reales y la sucesión de polinomios mónicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$ definidos por la siguiente relación de recurrencia,

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

asumiendo $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = 1$.

Entonces existe un único funcional de momentos de manera que la sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales si, y solamente si, $\gamma_n \neq 0$ con $n \geq 0$. Además, dicho funcional es definido positivo si $\gamma_n > 0$ para todo $n \geq 0$.

Definición 1.1.6 Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales mónicos que satisface la relación de recurrencia a tres términos (1.2). Se define el polinomio núcleo de grado n , y se denota por K_n , como

$$K_n(x, y) := \sum_{i=0}^n \frac{P_i(x)P_i(y)}{\|P_i\|^2}, \quad n \geq 0. \quad (1.3)$$

A lo largo de esta memoria, estos polinomios núcleo serán usados frecuentemente, así como sus derivadas que denotaremos por $K_n^{(i,j)}(x, y)$, esto es,

$$K_n^{(i,j)}(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{P_k^{(i)}(x)P_k^{(j)}(y)}{\|P_k\|^2},$$

para todo $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Obsérvese que el polinomio núcleo definido en (1.3) no depende de la normalización escogida para la familia $\{P_n\}_{n \geq 0}$. Los polinomios núcleo pueden expresarse a través de la fórmula de Christoffel-Darboux (ver demostración, por ejemplo, en [58, p. 23] o [169, p. 43]).

Teorema 1.1.5 (Fórmula de Christoffel-Darboux) Si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos que satisface la relación de recurrencia a tres términos (1.2), entonces

$$K_n(x, y) = \frac{1}{\|P_n\|^2} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x - y}, \quad n \geq 0.$$

A partir de dicha fórmula, se obtiene (ver, por ejemplo, en [58, p. 24] o [169, p. 43]):

Corolario 1.1.1 (Fórmula confluyente de Christoffel-Darboux) Si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos que satisface la relación de recurrencia a tres términos (1.2), entonces

$$K_n(x, x) = \sum_{i=0}^n \frac{P_i^2(x)}{\|P_i\|^2} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)}{\|P_n\|^2}, \quad n \geq 0.$$

Es importante destacar que el Teorema 1.1.3 y la fórmula de Christoffel-Darboux se han obtenido gracias a que el producto escalar (1.1) es **estándar**, esto es, se verifica la siguiente propiedad para cualesquiera dos funciones $f, g \in L^2_\mu[a, b]$,

$$(xf, g) = (f, xg).$$

En la siguiente sección, cuando se introduzca la ortogonalidad Sobolev, se verá cómo esta propiedad no se cumple y, por tanto, todos los resultados que se deriven de ella no son ciertos en el marco de la ortogonalidad no estándar.

1.1.3 Propiedades generales de los ceros

Vamos a presentar algunos resultados generales relativos a ceros de polinomios ortogonales. Son resultados bien conocidos y las demostraciones pueden encontrarse en las referencias básicas citadas en la página 1.

Teorema 1.1.6 *Sea I el soporte de una medida μ de Borel positiva y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ una SPO respecto a (1.1). Entonces,*

1. *Todos los ceros de P_n son reales, simples y se encuentran en el interior de la envoltura convexa de I .*
2. *P_n y P_{n+1} no tienen ningún cero en común. Es más, denotando por $x_{n,j}$ a los ceros del polinomio P_n en orden creciente, esto es, $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$, entonces $x_{n+1,j} < x_{n,j} < x_{n+1,j+1}$, con $j = 1, \dots, n$, es decir, los ceros de P_n y P_{n+1} están entrelazados.*

1.1.4 Polinomios ortogonales clásicos en la recta real

Tras la introducción de algunas propiedades básicas de polinomios ortogonales estándar, vamos a centrarnos en las denominadas familias *clásicas* de polinomios pues juegan un papel relevante en los siguientes capítulos de esta memoria.

Supongamos que la medida μ se puede expresar como $d\mu(x) = \rho(x)dx$, es decir, μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. A la función ρ se le denomina función peso y habitualmente al referirnos a los polinomios ortogonales con respecto a μ se dice polinomios ortogonales con respecto a ρ .

En la literatura podemos encontrar varias caracterizaciones de las familias *clásicas* de polinomios ortogonales pero, quizás, una de las más conocidas es que los polinomios ortogonales clásicos satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden

$$\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda_n y(x) = 0, \quad (1.4)$$

donde σ y τ son polinomios de grados a lo sumo 2 y exactamente 1, respectivamente, y $\lambda_n \neq 0$ no depende de x . Esta ecuación se denomina *ecuación diferencial*

hipergeométrica, pues satisface la llamada condición de hipergeometricidad, consistente en que si y es solución de (1.4) entonces su m -ésima derivada, con $m \geq 1$, que denotaremos por $y^{(m)}(x) \equiv y_m(x)$, satisface una ecuación diferencial del mismo tipo:

$$\sigma(x)y_m''(x) + \tau_m(x)y_m'(x) + \mu_m y_m(x) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \tau_m(x) &= \tau(x) + m\sigma'(x), \\ \mu_m(\lambda_n) &= \lambda_n + \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i'(x) = \lambda_n + m\tau'(x) + m(m-1)\frac{\sigma''(x)}{2}. \end{aligned}$$

Este resultado se puede probar fácilmente usando el método de inducción. Las familias clásicas quedan caracterizadas en el siguiente teorema (ver [3], [19], [41], [87] y [122]):

Teorema 1.1.7 *Sea ρ una función peso y $\{P_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a ρ , entonces son equivalentes:*

1. *Existen dos polinomios Φ y Ψ con $\text{gr}(\Phi) \leq 2$ y $\text{gr}(\Psi) = 1$ tales que ρ satisface una ecuación tipo Pearson, esto es,*

$$(\Phi(x)\rho(x))' = \Psi(x)\rho(x),$$

con $x^k \Phi(x)\rho(x)|_a^b = 0$, siendo a y b los extremos inferior y superior de la envoltura convexa del soporte de la medida y para todo $k \geq 0$.

2. *P_n satisface la fórmula de Rodrigues:*

$$P_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\Phi^n(x)\rho(x)], \quad n \geq 0,$$

$$\text{con } C_n = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (\Psi'(x) + \frac{1}{2}(n+k-1)\Phi''(x))}.$$

3. *Para cada $n \geq 1$, existe una constante no nula $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tal que el polinomio P_n satisface la ecuación diferencial de segundo orden:*

$$\Phi(x)y''(x) + \Psi(x)y'(x) = \lambda_n y(x),$$

donde

$$\lambda_n = n \left[\Psi'(x) + \frac{n-1}{2} \Phi''(x) \right], \quad n \geq 1.$$

4. La sucesión de polinomios $\left\{ \frac{P'_{n+1}}{n+1} \right\}_{n \geq 0}$ es una SPO mónica asociada al peso $\Phi(x)\rho(x)$.

5. Existe un polinomio $\Phi \in \mathbb{P}_2[x]$ y números reales a_n , b_n y $c_n \neq 0$ verificando

$$\Phi(x)P'_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

6. Existen parámetros reales d_n y e_n tales que

$$P_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + d_n \frac{P'_n(x)}{n} + e_n \frac{P'_{n-1}(x)}{n-1}, \quad n \geq 2.$$

A continuación, enumeramos las 3 familias que cumplen el anterior resultado en la recta real.

1. **Jacobi:** Esta familia es ortogonal con respecto a $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, con soporte el intervalo $[-1, 1]$ y siendo $\alpha > -1$ y $\beta > -1$. Se denotan por $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Si nos referimos a distribuciones de probabilidad, los polinomios de Jacobi son ortogonales con respecto a la distribución beta.
2. **Laguerre:** Estos polinomios son ortogonales con respecto a $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, donde $\alpha > -1$ y el soporte es el intervalo $[0, +\infty)$. Se denotan por $L_n^{(\alpha)}(x)$. Si nos referimos a distribuciones de probabilidad, los polinomios de Laguerre son ortogonales con respecto a la distribución gamma.
3. **Hermite:** Estos polinomios son ortogonales con respecto a $\rho(x) = e^{-x^2}$ con soporte el intervalo $(-\infty, +\infty)$. Se denotan por $H_n(x)$. Si nos referimos a distribuciones de probabilidad, los polinomios de Hermite son ortogonales con respecto a la distribución normal.

Es importante destacar que la SPO mónica $\left\{ \frac{P'_{n+1}}{n+1} \right\}_{n \geq 0}$, respecto a la función peso $\Phi(x)\rho(x)$, vuelve a ser clásica y del mismo tipo que la sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$. De aquí, se tiene que cualquier orden de derivada de una SPO clásica, sigue siendo clásica.

Las propiedades básicas de estas familias clásicas se pueden consultar, por ejemplo, en [19], [58], [100], [101], [116] y [169].

1.1.5 Polinomios clásicos de Jacobi y Gegenbauer

Para los resultados de los capítulos 3 y 5 necesitaremos una serie de propiedades de los polinomios de Jacobi y Gegenbauer, respectivamente, que vamos a dar a continuación.

1.1.5.1 Polinomios de Jacobi

A lo largo del Capítulo 3 consideramos los polinomios clásicos de Jacobi con la normalización dada en (ver [169, f. (4.21.2)]), es decir,

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{2^n \Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} x^n + \text{términos de grado inferior.}$$

Estos polinomios son ortogonales con respecto al producto escalar

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad \alpha, \beta > -1. \quad (1.5)$$

Las derivadas de los polinomios de Jacobi verifican (ver [169, f. (4.21.7)])

$$\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(k)}(x) = \frac{1}{2^k} \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + k + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} P_{n-k}^{(\alpha+k, \beta+k)}(x). \quad (1.6)$$

Además, se tiene (ver [169, f. (4.1.1)])

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n + \alpha}{n} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(\alpha + 1)}. \quad (1.7)$$

Así, de (1.6) y (1.7) se deduce que

$$\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(k)}(1) = \frac{1}{2^k} \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + k + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n - k + 1) \Gamma(\alpha + k + 1)}, \quad (1.8)$$

donde $\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(k)}(1)$ denota la k -ésima derivada de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ evaluada en $x = 1$.

De igual manera, conviene recordar que el cuadrado de la norma de un polinomio de Jacobi (ver [169, f. (4.3.3)]), viene dado por

$$||P_n^{(\alpha, \beta)}||^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}. \quad (1.9)$$

1.1.5.2 Polinomios de Gegenbauer

En el Capítulo 5 se usa un producto escalar donde se involucra al peso de Gegenbauer. En [169] los polinomios clásicos de Gegenbauer son los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx, \quad \lambda > -1/2.$$

Estos polinomios se suelen denotar por $P_n^{(\lambda)}$ con la normalización

$$P_n^{(\lambda)}(1) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\lambda)}.$$

En dicho capítulo se tomará $\alpha := \lambda - 1/2$ y se considerarán la sucesión de polinomios los polinomios $\left\{ \frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{P_n^{(\lambda)}(1)} \right\}_{n \geq 0}$. Se denotará por $\{C_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ a esta sucesión de polinomios (esta normalización fue usada en [81]). En este sentido, es obvio que los polinomios $C_n^{(\alpha)}$ son ortogonales con respecto a

$$(f, g)_\alpha := \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^\alpha dx,$$

con $C_n^{(\alpha)}(1) = 1$, y usando las propiedades de simetría de estos polinomios, se tiene que $C_n^{(\alpha)}(-1) = (-1)^n$.

Ahora, se recuerdan algunas propiedades de los polinomios de Gegenbauer. Estas propiedades pueden encontrarse en [81] o [169], entre otras referencias.

- Derivadas:

$$\left(C_n^{(\alpha)} \right)^{(k)}(x) := \frac{d^k C_n^{(\alpha)}(x)}{dx^k} = \frac{(-1)^k (n+2\alpha+1)_k (-n)_k}{2^k (\alpha+1)_k} C_{n-k}^{(\alpha+k)}(x), \quad (1.10)$$

con $k = 0, 1, \dots$, donde $(a)_k$ denota el símbolo de Pochhammer dado por (ver, por ejemplo, [101, f. (1.3.1)])

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = \prod_{i=1}^k (a+i-1), \quad k \geq 1. \quad (1.11)$$

- Ecuación diferencial:

$$(x^2 - 1) \left(C_n^{(\alpha)} \right)''(x) + 2(\alpha+1)x \left(C_n^{(\alpha)} \right)'(x) = \lambda_n C_n^{(\alpha)}(x),$$

con

$$\lambda_n = n(n + 2\alpha + 1). \quad (1.12)$$

- Coeficiente líder:

$$k_n(\alpha) := \frac{(n + 2\alpha + 1)_n}{2^n(\alpha + 1)_n} = \frac{\Gamma(2n + 2\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)}{2^n\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + 2\alpha + 1)}. \quad (1.13)$$

- Cuadrado de la norma:

$$\|C_n^{(\alpha)}\|_\alpha^2 := \frac{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(n + 1)}{(2n + 2\alpha + 1)\Gamma(n + 2\alpha + 1)}. \quad (1.14)$$

1.2 ASINTÓTICA

El objetivo de esta memoria es obtener propiedades asintóticas de los polinomios de Sobolev. Por tanto, es conveniente no sólo dar propiedades algebraicas y diferenciales de los polinomios estándar sino alguna propiedad asintótica que se usará a lo largo de esta memoria. Además, esto permitirá comparar la asintótica de los polinomios estándar y la de los polinomios de Sobolev.

Definición 1.2.1 ([169], p. 121) *Una medida μ , con soporte el intervalo $[-1, 1]$ y con parte absolutamente continua ρ , se dice que satisface la condición de Szegő en $[-1, 1]$ si*

$$\int_{-1}^1 \frac{\log(\rho(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx > -\infty.$$

Esta condición se suele denotar por $\mu \in \mathcal{S}$.

A una medida que verifica la condición de Szegő en $[-1, 1]$ se le puede asociar la conocida función de Szegő (ver [153, p. 118]) definida mediante

$$D(z, \mu) := \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log(\psi(\theta)) d\theta \right\}, \quad |z| < 1,$$

donde

$$\psi(\theta) := \pi\rho(\cos(\theta))|\sin(\theta)| \in L_\mu[0, 2\pi].$$

Teorema 1.2.1 ([169], cap. 13) *Sea μ una medida que satisface la condición de Szegő en $[-1, 1]$ y $D(z, \mu)$ la función de Szegő asociada. Entonces:*

1. *La sucesión $\{p_n\}_{n \geq 0}$ de polinomios ortonormales con respecto a μ tiene la siguiente asintótica fuerte exterior,*

$$p_n(x) = \frac{\varphi^n(x)}{\sqrt{2\pi}D\left(\frac{1}{\varphi(x)}, \mu\right)}(1 + o(1)),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, con

$$\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad (1.15)$$

donde $\sqrt{x^2 - 1} > 0$ cuando $x > 1$.

2. Si denotamos por h_n el coeficiente líder del polinomio p_n ortonormal con respecto a μ se tiene que

$$h_n = \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}D(0, \mu)}(1 + o(1)).$$

En esta memoria van a jugar un papel central las fórmulas asintóticas tipo Mehler–Heine. Este tipo de asintótica relaciona los polinomios ortogonales con la función de Bessel de primera especie, que se denotará por J_α y viene dada por (ver definición y propiedades, por ejemplo, en [154, f. (10.2.2)]):

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}. \quad (1.16)$$

Entre las varias propiedades de la función de Bessel de primera especie, destacamos la siguiente relación de recurrencia que será usada en varias ocasiones en los capítulos siguientes (ver, por ejemplo, [1, f. (10.6.1)]):

$$J_\alpha(2\sqrt{x}) - \frac{\alpha + 1}{\sqrt{x}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) = -J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}). \quad (1.17)$$

Volviendo a las fórmulas de Mehler–Heine, éstas fueron introducidas en el siglo XIX. A continuación, se muestran dichas fórmulas para las familias clásicas de Jacobi y Laguerre, usando las normalizaciones de [169], (ver [169, p. 192] y [169, p. 193], respectivamente):

Sean α y β números reales, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)}{n^\alpha} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(x), \quad (1.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{n}\right)}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}), \quad (1.19)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. La correspondiente para los polinomios clásicos de Hermite se deduce fácilmente de la relación entre los polinomios de Laguerre y los de Hermite (ver, por ejemplo, [169, p. 106]).

Estas fórmulas asintóticas son especialmente útiles para estudiar el comportamiento asintótico de los ceros gracias al teorema de Hurwitz (ver, por ejemplo, [169, p. 22]). Posteriormente, profundizaremos en este aspecto.

1.3 MOTIVACIÓN Y RESULTADOS FUNDAMENTALES SOBRE POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV

El punto de partida de los polinomios ortogonales de Sobolev se remonta al artículo [111]. El autor planteó el problema de encontrar la mejor aproximación polinómica simultánea a una función y a sus derivadas. Lo cual se puede expresar como

$$\min_{P \in \mathbb{P}_n[x]} \sum_{k=0}^j \int_a^b [f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)]^2 d\mu_k,$$

siendo μ_k medidas de Borel positivas con soporte en $I \subset \mathbb{R}$ y f satisfaciendo ciertas condiciones de regularidad.

De esta forma, el autor en [111] intentaba generalizar el problema clásico de aproximación por mínimos cuadrados, usando el producto escalar

$$(f, g)_S = \sum_{k=0}^j \int_a^b f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) d\mu_k,$$

que induce la norma

$$\|p\|_S = \sqrt{(p, p)_S}.$$

Así, se puede construir el espacio de Sobolev dado por

$$W_{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_j}^2(I) = \left\{ f : f^{(i)} \in L_{\mu_i}^2[I], i \in \{0, 1, \dots, j\}, \|f\|_S^2 < +\infty \right\}.$$

Por tanto, el problema planteado por el autor en [111] se enmarca en la aproximación mínimo cuadrática en el anterior espacio de Sobolev. Nótese que en dicho trabajo no se menciona explícitamente el uso de polinomios ortogonales.

Este espacio se introduce en [59]. $W_{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_j}^2(I)$ es un espacio de Hilbert y, por tanto, podemos plantear el problema de encontrar la mejor aproximación por

mínimos cuadrados a elementos de $W_{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_j}^2(I)$ en $\mathbb{P}_n[x]$, esto es, dado $f \in W_{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_j}^2(I)$ encontrar $p \in \mathbb{P}_n[x]$ tal que

$$\|f - p\|_S^2 = \min_{q \in \mathbb{P}_n[x]} \|f - q\|_S^2.$$

El primer artículo sobre polinomios ortogonales de Sobolev fue publicado en [17], que se motiva por el trabajo [111].

En 1962, se considera el producto

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)d\mu_0(x) + \int_{-1}^1 p'(x)q'(x)d\mu_1(x), \quad (1.20)$$

donde

$$d\mu_0(x) = dx, \quad d\mu_1(x) = \begin{cases} 10dx, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ dx, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

El autor prueba que el polinomio mónico ortogonal de segundo grado con respecto a (1.20), que puede ser calculado usando el algoritmo de Gram-Schmidt, viene dado por $S_2(x) = x^2 + \frac{27}{35}x - \frac{1}{3}$ y tiene una raíz en

$$-\frac{81 + \sqrt{21261}}{210} \approx -1,08005 \notin [-1, 1].$$

Este fue un resultado muy novedoso, al plantear de forma sencilla un aspecto de los polinomios ortogonales de Sobolev que no ocurre en la teoría de polinomios ortogonales estándar, ya que sabemos que los polinomios ortogonales estándar tienen todas sus raíces dentro de la envoltura convexa del soporte de la medida (ver Teorema 1.1.6).

En [17] también se consideró el producto escalar de Sobolev

$$(p, q)_A = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx + \lambda \int_{-1}^1 p'(x)q'(x)dx, \quad (1.21)$$

con $\lambda \geq 0$. Este producto recibe el nombre de producto escalar de Legendre-Sobolev pues las medidas involucradas corresponden a la medida de Lebesgue en $[-1, 1]$. Los polinomios ortogonales con respecto a (1.21) son generalizaciones de los polinomios clásicos de Legendre, puesto que éstos se obtienen cuando $\lambda = 0$.

Debido a que uno de los objetivos de esta memoria es estudiar ceros de polinomios de Sobolev, merece la pena destacar la influencia que el parámetro λ tiene en la localización de los ceros, incluso en el número de ceros reales. Sea

$$(f, g) = \int_{-1}^3 f(x)g(x)dx + \lambda \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)dx + \int_1^3 f'(x)g'(x)dx, \quad (1.22)$$

con $\lambda > 0$.

Se probó en [142] que, para $n \geq 2$ y par, si λ es lo suficientemente grande, los polinomios de Sobolev ortogonales con respecto a (1.22) tienen exactamente dos ceros reales, uno en el intervalo $(-3, -1)$ y otro en $(1, 3)$. Por otro lado, si n es impar con $n \geq 3$ y λ suficientemente grande solamente hay un cero real y está localizado en $(1, 3)$.

Estos resultados fueron ilustrados numéricamente en [84, tabla 2.30], y se muestra perfectamente cómo el valor de la constante λ afecta al número de ceros reales. Incluimos aquí dicha tabla para ilustrar dicha situación.

Tabla 1.1.: Ceros de los polinomios ortogonales con respecto a (1.22)

Grado del polinomio	λ	Número de ceros reales
2	$0 \leq \lambda \leq 10,333$	2
	$10,334 \leq \lambda < \infty$	2 en $[-3, -1] \cup [1, 3]$
4	$0 \leq \lambda \leq 7,4773$	4
	$7,4774 \leq \lambda \leq 61,754$	2
	$61,746 \leq \lambda \leq 153,23$	4
	$153,24 \leq \lambda < \infty$	2 en $[-3, -1] \cup [1, 3]$
6	$0 \leq \lambda \leq 45,011$	6
	$45,012 \leq \lambda \leq 50,226$	4
	$50,227 \leq \lambda \leq 41868,5$	2
	$41868,6 \leq \lambda \leq 42155,5$	4
	$42155,6 \leq \lambda \leq 43512,6$	6
	$43512,7 \leq \lambda \leq 43646,1$	4
	$43646,2 \leq \lambda < \infty$	2 en $[-3, -1] \cup [1, 3]$
3	$0 \leq \lambda \leq 21,461$	3
	$21,462 \leq \lambda < \infty$	1 en $[1, 3]$
5	$0 \leq \lambda \leq 10,193$	5
	$10,194 \leq \lambda \leq 1811,7$	3
	$1811,8 \leq \lambda \leq 2153,6$	5
	$2153,7 \leq \lambda \leq 2183,4$	3
	$2183,5 \leq \lambda < \infty$	1 en $[1, 3]$

Los polinomios ortogonales de Legendre-Sobolev fueron bien estudiados en [17]. Algunos de estos resultados fueron simplificados y extendidos en [164]. Estos trabajos previos mostraron varias características de los polinomios ortogonales de Sobolev. Denotando por $s_n(x; \lambda)$ el polinomio ortonormal con respecto a (1.21) de grado

n y tomando P_n el polinomio mónico de Legendre clásico de grado n , se tienen las siguientes propiedades:

(1) $\{s_n(x; \lambda)\}_{n \geq 0}$ satisface una ecuación diferencial de la forma

$$\lambda s_n''(x; \lambda) - s_n(x; \lambda) = A_n P_{n+1}'(x) + B_n P_{n-1}'(x),$$

donde A_n y B_n son dados de forma explícita.

(2) $\{s_n(x; \lambda)\}_{n \geq 0}$ verifica una relación de estructura de la forma

$$s_n(x; \lambda) - s_{n-2}(x; \lambda) = a_n (P_n(x) - P_{n-2}(x)).$$

(3) $s_n(x; \lambda)$ tiene n ceros reales, simples y localizados en $(-1, 1)$.

Para más detalles se pueden consultar estos artículos o el *survey* [143]. Estos polinomios $s_n(x; \lambda)$ ortogonales con respecto a (1.21) también fueron estudiados en [86] donde se obtiene un análogo a la fórmula de Rodrigues para polinomios estándar y en [59] se estudia el entrelazamiento de los ceros de $s_n(x; \lambda)$ con los ceros de los polinomios de Legendre clásicos.

En esta primera etapa, otros dos productos escalares que dieron pie al estudio de polinomios ortogonales de Sobolev, y son importantes de destacar, fueron:

$$(f, g) := \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx + \lambda \int_0^{+\infty} f'(x)g'(x)e^{-x}dx, \quad \lambda > 0, \quad (1.23)$$

$$(f, g) := \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \int_a^b f^{(j)}(x)g^{(k)}(x)v_{j,k}(x)w(x)dx, \quad (1.24)$$

donde $w(x)$ es una de las tres medidas clásicas: Jacobi, Laguerre y Hermite y $v_{j,k}$ es un polinomio verificando que $v_{j,k}(x) = v_{k,j}(x)$. En [45] el autor obtiene resultados similares a [17] para el producto (1.23). El producto (1.24) es estudiado en [165], los autores encuentran relaciones algebraicas entre S_n y P_n , bajo ciertas hipótesis para $v_{j,k}$ y condiciones para $(j, k) \in \mathbb{N}^2$. Además, se dan condiciones suficientes para que todos los ceros de los polinomios ortogonales con respecto a (1.24) sean simples y estén localizados en (a, b) .

Acabamos de hacer un muy breve repaso por los primeros artículos de polinomios ortogonales de Sobolev, con el objeto de presentar una motivación histórica. A continuación, se resumen algunos aspectos esenciales de esta teoría.

Una primera observación, como ya hemos visto, es que el Teorema 1.1.6 no tiene por qué verificarse en los productos escalares (1.20)-(1.24). Esto es debido a que se trabaja con productos escalares **no estándar**, es decir, en estos productos

$$(xf, g) \neq (f, xg).$$

Esto se debe al hecho de introducir derivadas en el producto escalar.

Durante esta memoria se va a trabajar con productos escalares de Sobolev que involucran medidas cuyo soporte se encuentra en la recta real. En general, estos productos escalares pueden ser escritos como

$$(f, g)_S = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu_0 + \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x)g^{(k)}(x)d\mu_k, \quad (1.25)$$

donde μ_k , con $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, son medidas de Borel positivas con soporte en $\mathbb{R}$.

Esencialmente, hay tres tipos:

- **Polinomios ortogonales de Sobolev continuos:** Cuando todas las medidas μ_i , $i = 0, 1, \dots, m$, tienen parte absolutamente continua no nula.
- **Polinomios ortogonales de Sobolev discretos** (o también llamados **Polinomios ortogonales tipo Sobolev**): Se dan cuando la medida μ_0 tiene parte absolutamente continua no nula y las medidas μ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, tienen como soporte un subconjunto finito de $\mathbb{R}$.
- **Polinomios ortogonales de Sobolev discretos–continuos:** Se dan cuando la medida μ_m tiene parte absolutamente continua no nula y las medidas μ_i , $i = 0, 1, \dots, m - 1$, tienen como soporte un subconjunto finito de $\mathbb{R}$.

A lo largo de la memoria se va a trabajar con productos de Sobolev discretos, en particular, en los capítulos 2 a 4 se consideran productos de Sobolev discretos variantes. La motivación de introducir productos de Sobolev discretos variantes viene por el estudio del caso balanceado en productos de Sobolev continuos, los cuales serán abordados más adelante. Por todo ello en este capítulo solamente vamos a considerar los dos primeros tipos de productos escalares de Sobolev. Para más información sobre los polinomios de Sobolev discretos–continuos consultar, por ejemplo, [16], [46] o [93], y las referencias allí incluidas. Es interesante mencionar que este tipo de productos permiten dotar de ortogonalidad Sobolev a familias de polinomios clásicos con parámetros no clásicos que hacen que el funcional no sea cuasi-definido (ver, por ejemplo, [4], [16], [18], [107], [158] y [163]).

Por otro lado, es importante aclarar que los polinomios ortogonales de Sobolev han sido estudiados en diferentes contextos. En esta memoria trabajaremos con polinomios ortogonales de Sobolev discretos y cuyas medidas tienen soporte en el eje real. Sin embargo, es interesante mencionar que también hay una amplia literatura en varias variables (ver, entre otros, [2], [44], [68], [79], [108], [172] y [173]), en la circunferencia unidad (ver, entre otros, [37]-[40], [47], [48], [133]) o incluso cuando todas las medidas son discretas, aunque ya no estaríamos en el marco propiamente de la ortogonalidad Sobolev, ya que el operador derivada es reemplazado por el operador diferencia Δ o el operador $\mathfrak{D}_q$ derivada. Algunos ejemplos de este tipo de trabajos son [24]-[28], [61], [95], [149], [150] o [166], entre otros; por tanto, nos encontraríamos en el ámbito de la ortogonalidad $\mathcal{D}$ -Sobolev (ver, por ejemplo, [60]).

La teoría de polinomios ortogonales de Sobolev es una teoría joven y aún no existen enfoques tan generales como los existentes para los polinomios ortogonales estándar, si bien en los últimos años han aparecido algunos trabajos con un enfoque más general (ver los surveys [127] y [135]). También el trabajo [128] es una breve descripción introductoria al “mundo de la ortogonalidad Sobolev”.

En el desarrollo de este capítulo se darán una serie de resultados, sin demostración, aparecidos en artículos relevantes sobre esta teoría, y que serán motivadores para el objetivo de esta memoria.

En [84] podemos encontrar algunos resultados básicos sobre polinomios ortogonales de Sobolev que enunciaremos a continuación.

Teorema 1.3.1 *Si el producto escalar (1.25) es definido positivo en $\mathbb{P}[x]$, existe una única sucesión, que denotaremos por $\{S_n\}_{n \geq 0}$, de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev.*

Definición 1.3.1 *Se dice que el producto escalar de Sobolev (1.25) es simétrico, si cada medida μ_k tiene un soporte simétrico y con todas las medidas de Borel simétricas y positivas.*

Teorema 1.3.2 *Si el producto escalar anterior (1.25) es simétrico, entonces*

$$S_n(-x) = (-1)^n S_n(x), \quad n \geq 0.$$

Como ya se ha dicho anteriormente, un producto escalar de Sobolev es un producto escalar no estándar y por tanto, los polinomios ortogonales respecto a este producto no satisfacen una relación de recurrencia a tres términos. Sin embargo, los polinomios ortogonales mónicos satisfacen una relación de la forma:

$$xS_n(x) = S_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^n \beta_{n,k} S_{n-k}(x),$$

donde

$$\beta_{n,k} = \frac{(xS_n, S_{n-k})_S}{(S_{n-k}, S_{n-k})_S}, \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad n \geq 0.$$

Si (1.25) es un producto escalar simétrico entonces $\beta_{n,2k} = 0$, con $k = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]$.

Si consideramos la matriz de Hessenberg de tamaño $n \times n$ (ver [84, p. 42])

$$\mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} \beta_{0,0} & \beta_{1,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{n-2,n-2} & \beta_{n-1,n-1} \\ 1 & \beta_{1,0} & \beta_{2,1} & \dots & \beta_{n-2,n-3} & \beta_{n-1,n-2} \\ 0 & 1 & \beta_{2,0} & \dots & \beta_{n-2,n-4} & \beta_{n-1,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{0,n-2} & \beta_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_{n-1,0} \end{pmatrix}$$

y el vector $\mathcal{S}(x) = [S_0(x), \dots, S_{n-1}(x)]$, entonces se puede probar (ver, [84, p. 42]) el siguiente resultado que es similar al existente para polinomios ortogonales estándar.

Teorema 1.3.3 *Sean $y_{n,k}$, con $k = 1, 2, \dots, n$, los ceros de $S_n(x)$. Entonces, $y_{n,k}$ es un valor propio de $\mathcal{H}_n$ y $\mathcal{S}(y_{n,k})$ es el vector propio a la izquierda asociado al valor propio $y_{n,k}$.*

Es importante observar que los valores propios de $\mathcal{H}_n$ pueden ser complejos y de aquí los ceros de S_n . En [84] se pueden encontrar diversos algoritmos para calcular los valores propios de esta matriz de Hessenberg.

1.4 POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV CONTINUOS

A lo largo de la Sección 1.3 se han mostrado varios productos escalares (1.20)–(1.24) donde se han enunciado propiedades de los correspondientes polinomios ortogonales de Sobolev continuos con medidas de soporte acotado y no acotado, así como unas notas sobre localización de los ceros para ciertos casos particulares. El estudio de los polinomios ortogonales de Sobolev continuos tuvo un desarrollo espectacular a partir de la introducción del concepto de *par coherente* asociado a un producto escalar de Sobolev. Este concepto fue definido en el primigenio trabajo [89] en 1991. A continuación, describimos los aspectos esenciales de los pares

coherentes y su repercusión en el estudio de los polinomios ortogonales de Sobolev continuos. Considérese el producto escalar

$$(f, g)_\lambda = \int_a^b f(x)g(x)d\mu_0(x) + \lambda \int_a^b f'(x)g'(x)d\mu_1(x), \quad \lambda \geq 0, \quad (1.26)$$

donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, siendo μ_0 y μ_1 medidas de Borel positivas en la recta real.

Definición 1.4.1 Sea $P_n(x; \mu_i)$, con $i \in \{0, 1\}$ el polinomio ortogonal mónico de grado n con respecto a μ_i . El par $\{\mu_0, \mu_1\}$ es un par coherente si existe una sucesión de números reales $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$ distintos de cero tal que

$$P_n(x; \mu_1) = \frac{P'_{n+1}(x; \mu_0)}{n+1} + \sigma_n \frac{P'_n(x; \mu_0)}{n}, \quad n \geq 1.$$

Si $[a, b] = [-c, c]$ en (1.26) y las dos medidas μ_0 y μ_1 son ambas simétricas, entonces el par $\{\mu_0, \mu_1\}$ es un par simétricamente coherente si se verifica que

$$P_n(x; \mu_1) = \frac{P'_{n+1}(x; \mu_0)}{n+1} + \sigma_n \frac{P'_{n-1}(x; \mu_0)}{n-1}, \quad n \geq 2.$$

A raíz de esta definición hay una amplia variedad de trabajos donde se obtienen propiedades algebraicas y asintóticas, pero antes, se debe citar el trabajo [144] donde se prueba que, necesariamente, una de las dos medidas de un par coherente ha de ser clásica. Además, en dicho trabajo se hace una clasificación de los pares coherentes:

- **Tipo I:** La medida μ_1 en (1.26) es clásica.
- **Tipo II:** La medida μ_0 en (1.26) es clásica.

Desde el punto de vista asintótico, algunas referencias significativas son [139] y [146] para el caso donde una de las medidas es la de Jacobi y [123] para el caso simétrico involucrando a la medida de Gegenbauer. Para el caso en el cual una de las medidas es la de Laguerre citamos [15], [125], [126] y [145] y en el caso Hermite y Freud [14], [49], [50] y [147].

Una consecuencia fundamental de la coherencia es la posibilidad de establecer una relación algebraica entre los polinomios mónicos $P_n(x; \mu_0)$ y los polinomios $S_n(x; \lambda)$ mónicos ortogonales con respecto a (1.26) (ver, por ejemplo [157, Prop. 5.4.3] o [89, f. (2.15)] con otra estandarización).

Proposición 1.4.1 Si $\{\mu_0, \mu_1\}$ es un par coherente, entonces

$$S_n(x; \lambda) - \alpha_n S_{n-1}(x; \lambda) = P_n(x; \mu_0) - \sigma_n \frac{n}{n-1} P_{n-1}(x; \mu_0), \quad n > 1,$$

donde

$$\alpha_n = \sigma_n \frac{n}{n-1} \frac{d_{n-1}}{\tilde{d}_{n-1}} \neq 0, \quad n > 1,$$

con $d_n = \int_a^b P_n^2(x; \mu_0) d\mu_0(x)$ y $\tilde{d}_n = (S_n, S_n)_\lambda$.

Un resultado similar se puede encontrar para un par simétricamente coherente cualquiera (ver, por ejemplo, [89, Teo. 4] o [123, Prop. 6]).

El concepto de coherencia ha sido generalizado a la (M, N) -coherencia (ver [63], [64] y [65]):

Definición 1.4.2 Sean M, N y m, n enteros no negativos. El par $\{\mu_0, \mu_1\}$ es un par (M, N) -coherente de orden (m, n) si, para $k \geq 0$,

$$\frac{P_{k+m}^{(m)}(x; \mu_0)}{(k+1)_m} + \sum_{i=1}^M a_{i,k} \frac{P_{k-i+m}^{(m)}(x; \mu_0)}{(k-i+1)_m} = \frac{P_{k+n}^{(n)}(x; \mu_1)}{(k+1)_n} + \sum_{i=1}^N b_{i,k} \frac{P_{k-i+n}^{(n)}(x; \mu_1)}{(k-i+1)_n}$$

donde $a_{i,k}$ y $b_{i,k}$ son números reales tales que $a_{M,k} \neq 0$ si $k \geq M$, $b_{N,k} \neq 0$ si $k \geq N$, y $a_{i,k} = b_{i,k} = 0$ si $i > k$ y con $(a)_k$ denotando el símbolo de Pochhammer (ver (1.11)).

El par coherente de la Definición 1.4.1, corresponde a la $(1, 0)$ -coherencia de orden $(1, 0)$. Algunos casos particulares fueron estudiados previamente, como la $(2, 0)$ -coherencia de orden $(1, 0)$ en [106], la $(M, 0)$ -coherencia de orden $(1, 0)$ o también llamada M -coherencia en [77] o [124].

1.4.1 Propiedades asintóticas y el caso balanceado

Uno de los aspectos de interés de los polinomios ortogonales de Sobolev continuos ha sido su comportamiento asintótico en diferentes regiones del plano complejo, así como la influencia del parámetro λ en este comportamiento. Una forma adecuada de establecer los diferentes comportamientos entre los polinomios de Sobolev y los estándar es considerar la asintótica relativa de ambas familias de polinomios. Como veremos, se probó que con λ fijo la medida μ_1 juega el rol principal en el comportamiento asintótico. Así se establece en el siguiente resultado:

Teorema 1.4.1 ([139]) Sean un par coherente $\{\mu_0, \mu_1\}$ de medidas con soporte acotado, $\{S_n(x, \lambda)\}_{n \geq 0}$ la SPO mónica con respecto a (1.26) y $\{P_n(x; \mu_1)\}_{n \geq 0}$ la SPO mónica con respecto a μ_1 . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(x; \lambda)}{P_n(x; \mu_1)} = \frac{2}{\varphi'(x)}, \quad (1.27)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, donde φ fue definida en (1.15).

Un resultado análogo en el caso de la coherencia simétrica fue establecido en [123, Teo. 7]. De (1.27) se desprende la asintótica fuerte exterior de los polinomios de Sobolev $S_n(x; \lambda)$ una vez conocida la de los polinomios estándar $P_n(x; \mu_1)$.

La asintótica (1.27) sigue siendo cierta en contextos más generales, en [136] se probó que basta que las medidas μ_0 y μ_1 pertenezcan a la clase de Szegő (ver Definición 1.2.1) para que (1.27) se satisfaga.

Del Teorema 1.4.1, y su posterior generalización en [136], se desprende como hemos comentado, que la medida relevante en el comportamiento asintótico de los polinomios de Sobolev cuando $n \rightarrow +\infty$ es μ_1 . Esto motiva la pregunta de cómo equilibrar (**balancear**) la influencia de dichas medidas y que ambas jueguen un papel en el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales de Sobolev continuo con soporte acotado.

Parece natural la idea de hacer variar el parámetro λ en función de n , esto es, considerar el producto de Sobolev variante

$$(f, g)_{\lambda_n} = \int_a^b f(x)g(x)d\mu_0(x) + \lambda_n \int_a^b f'(x)g'(x)d\mu_1(x), \quad \lambda_n \geq 0, \quad (1.28)$$

de forma que el comportamiento asintótico de λ_n influya de forma determinante en la relevancia de ambas medidas en el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales de Sobolev.

En los productos escalares estándar el hacer variante la medida y estudiar las propiedades de los correspondientes polinomios ortogonales es un tema ampliamente considerado en la literatura donde citamos, entre otros, [22], [42], [66], [67], [69], [105], [138], [140] o [167], junto al reciente libro [110] y las referencias allí incluidas.

En el ámbito de la ortogonalidad Sobolev el primer acercamiento a considerar productos escalares variantes es debido a [10]. Se considera el producto escalar va-

riante (1.28) y se busca determinar qué condiciones ha de satisfacer la sucesión $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ para que el producto escalar esté equilibrado en el sentido que se ha comentado anteriormente. Así, los autores imponen las siguientes condiciones a la sucesión decreciente $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \lambda_n = L \in [0, +\infty], \quad (1.29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\lambda_{n-1} - \lambda_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - 1 \right) = 0. \quad (1.30)$$

La elección de n^2 en la condición (1.29) parece natural ya que al derivar un polinomio mónico de grado n aparece n como coeficiente líder de su derivada.

Si $\{\mu_0, \mu_1\}$ es un par coherente de tipo Jacobi, esto es, una de las medidas corresponde al peso clásico de Jacobi en $[-1, 1]$ los autores probaron

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int P_n^2(x; d\mu_0) d\mu_0(x)}{(S_n(x; \lambda_n), S_n(x; \lambda_n))_{\lambda_n}} = k(L) \in [0, 1],$$

y establecieron la siguiente asintótica relativa:

Teorema 1.4.2 ([10]) *Sean un par coherente $\{\mu_0, \mu_1\}$ de medidas con soporte acotado, $\{S_n(x, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$ la SPO mónica con respecto a (1.28), $\{P_n(x; \mu_0)\}_{n \geq 0}$ la SPO mónica con respecto a μ_0 y la sucesión $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ satisfaciendo (1.29) y (1.30). Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n, \lambda_n}(x)}{P_n(x; d\mu_0)} = \frac{\Psi(x)}{k(L)\Psi(x) + (1 - k(L))\varphi'(x)/2'}$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, donde $\varphi(x)$ fue definida en (1.15), $\Psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(x; \mu_1)}{P_n(x; \mu_0)}$, siendo $\Psi(x)$ analítica en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Cuando $\lambda_n = \lambda > 0$, para todo $n \geq 0$, entonces $L = +\infty$ y se prueba que $k(\infty) = 0$ y, de esta forma, el Teorema 1.4.2 generaliza el Teorema 1.4.1. Además, los autores probaron que en el caso de ser $\{\mu_0, \mu_1\}$ un par coherente, con μ_1 absolutamente continua, los polinomios de Sobolev balanceados tienen asintótica fuerte exterior exactamente igual a la de los polinomios ortogonales con respecto a una medida μ^* en $[-1, 1]$ que puede ser descrita como

$$d\mu^* = \left(\mu'_0(x) + L|\varphi'(x)|^2 \mu'_1(x) \right) dx,$$

donde $\mu'_i(x)$, $i = 0, 1$, denotan las partes absolutamente continuas de las medidas μ_i .

Sería intuitivo pensar que ese factor n^2 en el caso no acotado también equilibrará la influencia de ambas medidas en el comportamiento asintótico de los polinomios de Sobolev. Pero en [11] los autores demostraron que esta idea intuitiva no era correcta. De hecho, es necesario recurrir a los conocidos números de Mhaskar–Rakhmanov–Saff, que denotaremos por a_n con $n \geq 1$. Estos números son las raíces positivas de la ecuación (ver [109, f. (1.11)])

$$n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 a_n t Q'(a_n t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

donde $Q(t)$ es una función par y convexa definida en $\mathbb{R}$.

El resultado más relevante de [11], es la obtención del comportamiento asintótico de λ_n para equilibrar la influencia de ambas medidas. Los autores prueban que

$$\lambda_n n^2 \sim a_{n+1}^2, \quad (1.31)$$

donde $f_n(x) \sim g_n(x)$ en un dominio D significa que existen dos constantes positivas C_1 y C_2 de manera que $C_1 g_n(x) \leq f_n(x) \leq C_2 g_n(x)$ para n suficientemente grande y para todo $x \in D$.

Para ejemplificar los resultados obtenidos en [11] se considera

$$d\mu(x) = d\mu_0(x) = d\mu_1(x) = e^{-x^4} dx.$$

Entonces, se tiene

$$(S_n(x; \lambda_n), S_n(x; \lambda_n))_{\lambda_n} = \int_{\mathbb{R}} S_n^2(x; \lambda_n) e^{-x^4} dx + \lambda_n \int_{\mathbb{R}} (S'_n)^2(x; \lambda_n) e^{-x^4} dx,$$

con $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión decreciente de números reales positivos tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \lambda_n = L \in [0, +\infty], \quad (1.32)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{7/4} (\lambda_{n-2} - \lambda_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/4} \left(\frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_n} - 1 \right) = 0. \quad (1.33)$$

La condición (1.32) viene del hecho de que para la función peso e^{-x^4} los números de Mhaskar–Rakhmanov–Saff se comportan como $n^{1/4}$. Por tanto, para verificar la condición (1.31) es necesario que λ_n se comporte como $n^{-3/2}$. En estas condiciones se establece

Teorema 1.4.3 ([11]) Sean un par coherente $\{\mu_0, \mu_1\}$ de medidas con soporte acotado, $\{S_n(x, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$ la SPO mónica con respecto a (1.28), $\{P_n(x; \mu_0)\}_{n \geq 0}$ la SPO mónica con respecto a μ_0 y $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión decreciente de números reales positivos verificando (1.32) y (1.33). Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x; \lambda_n)}{P_n(x; \mu)} = \begin{cases} 1, & \text{si } L = 0, \\ \frac{1}{1 - \left[\varphi\left(\frac{20L+3\sqrt{3}}{12L}\right) \right]^{-1}}, & \text{si } 0 < L < \infty, \\ 3/2, & \text{si } L = +\infty, \end{cases}$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Como acabamos de ver, en el Teorema 1.4.3 aparecen 3 diferentes comportamientos asintóticos en función del tamaño de la sucesión $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$. Algo similar sucederá cuando se estudien productos de Sobolev discretos variantes en los Capítulos 2–4.

Para finalizar la sección, vamos a considerar la asintótica tipo Mehler–Heine. Como ya se ha dicho anteriormente, este tipo de asintótica relaciona los polinomios ortogonales con funciones de Bessel de primera especie J_α (ver (1.16)), y su estudio para polinomios ortogonales de Sobolev discretos variantes es uno de los principales objetivos de esta memoria.

En el caso continuo este tipo de asintótica local ha sido ampliamente estudiada desde principios del siglo XXI. Entre otros, podemos citar las siguientes referencias [15], [21], [43], [50], [77], [78], [126], [147].

A modo de ilustración, describiremos esta asintótica para polinomios de Laguerre–Sobolev. El resultado fue obtenido en un ámbito más general.

Teorema 1.4.4 ([126]) Sea $\{S_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a

$$(p, q)_S = \int_0^{+\infty} p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + \lambda \int_0^{+\infty} p'(x)q'(x)x^\alpha e^{-x} dx,$$

con $\alpha > -1$ y $\lambda > 0$. Entonces, el polinomio ortogonal mónico S_n verifica la siguiente asintótica Mehler–Heine,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n S_n(x/n)}{n! n^{\alpha-1}} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda} + \lambda}{2\lambda} x^{-(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(2\sqrt{x}),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Se puede ver que varía sustancialmente con respecto a la asintótica Mehler–Heine de los polinomios de Laguerre dada en (1.19). Evidentemente, esto tiene implicaciones en los ceros reescalados de los polinomios de Laguerre-Sobolev.

1.5 POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV DISCRETOS O TIPO SOBOLEV

Un producto escalar de Sobolev discreto, o tipo Sobolev, que aparece usualmente en la literatura y de gran interés para los capítulos siguientes, es de la forma

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)d\mu(x) + \sum_{k=0}^j M_k f^{(k)}(c)g^{(k)}(c), \quad (1.34)$$

donde μ es una medida absolutamente continua con soporte en el eje real, $c \in \mathbb{R}$, $M_k \geq 0$, con $k = 0, 1, \dots, j-1$, y $M_j > 0$.

Bajo diferentes hipótesis relativas a la medida μ , los polinomios ortogonales con respecto a (1.34) han sido ampliamente estudiados. Citamos los surveys [121], [127], [135] y [137] y las referencias allí incluidas como fuente de documentación.

Los productos escalares del tipo (1.34) han sido generalizados en diferentes direcciones y se han estudiado las propiedades de los correspondientes polinomios ortogonales. Algunos trabajos relevantes en este sentido han sido [76], [115], [160] y [161].

Vamos a considerar algunos casos particulares de (1.34) que nos servirán de motivación para los siguientes capítulos. Los primeros estudios en este sentido consideraron μ una medida asociada a un peso clásico. En [96] se trabaja con la medida normalizada de Laguerre, esto es, $d\mu(x) = \frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)} dx$, con $\alpha > -1$ y siendo $c = 0$. Así el producto (1.34) queda de la forma:

$$(f, g) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx + \sum_{i=0}^j M_i f^{(i)}(0)g^{(i)}(0). \quad (1.35)$$

El autor probó que el n -ésimo polinomio ortogonal mónico de Sobolev, S_n , se puede expresar como

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{\min(n, j+1)} (-1)^k A_{n,k} L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x),$$

siendo $L_{n-k}^{(\alpha+k)}$ los polinomios clásicos de Laguerre y $A_{n,k}$ constantes determinadas a través de un sistema de ecuaciones. Esta expresión se analizará con más detalle en el Capítulo 2, donde se darán explícitamente los valores de $A_{n,k}$.

El caso en el cual μ es la medida de Gegenbauer fue considerado en [34] y [35]. Los autores trabajan con el producto simétrico de Sobolev discreto dado por

$$(f, g)_S = \int_{-1}^1 f(x)g(x) (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx + M_0[f(1)g(1) + f(-1)g(-1)] \\ + M_1[f'(1)g'(1) + f'(-1)g'(-1)], \quad (1.36)$$

con $\lambda > -1/2$. Denotamos mediante S_n los polinomios ortogonales con respecto a este último producto escalar y con una normalización adecuada, los autores obtienen una relación algebraica dada por

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^2 a_{k,n} x^k C_{n-k}^{(\lambda+k)}(x),$$

donde $a_{0,n}$, $a_{1,n}$ y $a_{2,n}$ son constantes apropiadas independientes de x y los polinomios $C_{n-k}^{(\lambda+k)}$ son los polinomios de Gegenbauer clásicos con la normalización $C_n^{(\lambda)}(1) = 1$. Por otro lado, en los trabajos [34], [35] y [96], para los productos escalares (1.35)-(1.36), los autores encuentran relaciones algebraicas entre S_n y P_n , y además, relaciones de recurrencia de más de tres términos para los polinomios ortogonales S_n .

Volviendo al producto de Sobolev discreto (1.34), si tomamos $M_k = 0$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ nos queda

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)d\mu + M_j f^{(j)}(c)g^{(j)}(c), \quad (1.37)$$

con $c \in \mathbb{R}$ y $M_j > 0$. Uno de los resultados algebraicos más destacados, que se usará con frecuencia a lo largo de esta memoria, fue obtenido en [132]. Sea $\{P_n\}_{n \geq 0}$ la SPO mónica con respecto a μ y $\{S_n\}_{n \geq 0}$ la SPO mónica con respecto a (1.37), entonces

$$S_n(x) = P_n(x) - \frac{M_j P_n^{(j)}(c)}{1 + M_j K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} K_{n-1}^{(0,j)}(x, c). \quad (1.38)$$

La fórmula (1.38) fue obtenida previamente en [104] para $j = 0$ y usando las tres medidas clásicas, en [132] fue generalizado el resultado.

1.5.1 *Propiedades asintóticas*

El objetivo de los capítulos del 2 al 4 de esta memoria es estudiar propiedades asintóticas de polinomios de Sobolev discretos variantes. Por tanto, vamos a mostrar algunos resultados importantes en este contexto. Se comenzará la sección con la asintótica relativa y la asintótica fuerte exterior y, posteriormente, se abordará la asintótica tipo Mehler–Heine, justificando la relevancia de este tipo de asintótica en el estudio de estos polinomios.

Previamente al estudio de propiedades asintóticas, vamos introducir la denominada clase de Nevai.

Definición 1.5.1 Una medida μ con soporte en el intervalo $[-1, 1]$ se dice que pertenece a la clase de Nevai y se denota por $\mu \in M(0, 1)$ si la sucesión de polinomios ortonormales $\{p_n\}_{n \geq 0}$ asociados a la medida μ satisfacen una relación de recurrencia

$$xp_n = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x),$$

con los coeficientes verificando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

Un primer trabajo en asintótica de polinomios ortogonales de Sobolev discretos fue [134] donde se consideró el producto escalar

$$(f, g)_S = \int_{-1}^1 f(x)g(x)d\mu(x) + Mf'(c)g'(c), \quad (1.39)$$

con $c \in \mathbb{R}$, $M > 0$ y la medida μ perteneciente a la clase de Nevai $M(0, 1)$. Los autores obtienen la asintótica relativa de los polinomios mónicos S_n ortogonales con respecto a (1.39) y los polinomios mónicos $P_n(x; \mu)$ ortogonales con respecto a la medida μ . Concretamente, si $c \in \mathbb{R} \setminus \text{sop}(\mu)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(x)}{P_n(x; \mu)} = \frac{(\varphi(x) - \varphi(c))^2}{2\varphi(x)(x - c)},$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\mu)$ y con $\varphi(x)$ definido en (1.15). Si $c \in \text{sop}(\mu)$, entonces la asintótica relativa es 1.

Una primera extensión a este resultado fue dada en [9]. En este artículo se considera el producto escalar:

$$(p, q)_S = \int p(x)q(x)d\mu + \mathcal{P}(c)^t A \mathcal{Q}(c),$$

donde

$$\mathcal{P}(c) = \begin{pmatrix} p(c) \\ p'(c) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}(c) = \begin{pmatrix} q(c) \\ q'(c) \end{pmatrix},$$

y A es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 . Suponiendo que $\mu \in M(0, 1)$ y siendo r el rango de la matriz A , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(x)}{P_n(x; \mu)} = \left(\frac{(\varphi(x) - \varphi(c))^2}{2\varphi(x)(x - c)} \right)^r,$$

uniformemente en subconjuntos compactos fuera del soporte de la medida y con φ definido en (1.15).

Una segunda extensión de la anterior asintótica relativa aparece en [115] y [129] para el producto

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)d\mu(x) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{N_j} f^{(k)}(c_j) \mathfrak{L}_{j,k}(g; c_j);$$

donde, $\mu \in M(0, 1)$, $\{c_k\}_{k=1}^N$ son números complejos localizados fuera del soporte de la medida y $\mathfrak{L}_{j,k}(g; c_j)$ es la evaluación en c_j del operador diferencial ordinario actuando sobre g y de manera que $\mathfrak{L}_{j,N_j}$ no es idénticamente nula para $j = 1, 2, \dots, N$. Entonces (ver Teorema 4 de [115]), si denotamos por I_i el número de ceros de S_n que son atraídos por c_i , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^{(k)}(x)}{P_n^{(k)}(x; \mu)} = \prod_{i=1}^N \left(\frac{(\varphi(x) - \varphi(c_i))^2}{2\varphi(x)(x - c_i)} \right)^{I_i}, \quad k \geq 0,$$

uniformemente en subconjuntos compactos $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\mu)$, con φ definido en (1.15), y donde las familias de polinomios $S_n(x)$ y $P_n(x; \mu)$ son mónicas.

También es destacable el trabajo [7] donde se obtiene la fórmula asintótica tipo Mehler–Heine para un producto tipo Jacobi–Sobolev discreto.

En el caso de soporte no acotado empezaremos con un caso particular correspondiente a la medida asociada al peso de Laguerre. En [20] los autores consideran el producto escalar de Sobolev discreto

$$(p, q)_S = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^{+\infty} p(x)q(x)x^{-\alpha}e^{-x}dx + M_0p(0)q(0) + M_1p'(0)q'(0), \quad (1.40)$$

con $M_0, M_1 \geq 0$ y $\alpha > -1$.

Se denota por $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ la SPO de Laguerre clásicos y por $\{S_n\}_{n \geq 0}$ la SPO de Laguerre-Sobolev discretos. Ambas familias normalizadas de forma que el coeficiente líder del correspondiente polinomio de grado n sea $\frac{(-1)^n}{n!}$. De hecho, en [20] no se considera la misma normalización en ambas familias y las expresiones de las asintóticas obtenidas son menos compactas; es en el survey [127] donde se escogen de esta forma. Las asintóticas obtenidas son las siguientes:

- Asintótica relativa exterior

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} = 1,$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

- Asintótica relativa exterior tipo Plancherel-Rotach

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(nx)}{L_n^{(\alpha)}(nx)} = 1,$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$.

- Asintótica tipo Mehler-Heine

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(x/n)}{n^\alpha} = \begin{cases} -g_1(x), & M_0 > 0, M_1 = 0, \\ \frac{1}{\alpha+2} (g_2(x) - (\alpha+2)g_1(x) - g_0(x)), & M_0 = 0, M_1 > 0, \\ g_2(x), & M_0, M_1 > 0, \end{cases} \quad (1.41)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ donde

$$g_i(x) = x^{-\alpha/2} J_{\alpha+2i}(2\sqrt{x}),$$

y J_α denota la función de Bessel de primera especie (ver (1.16)).

En dicho trabajo también se obtiene la asintótica en compactos de $(0, +\infty)$. Al igual que la asintótica tipo Mehler–Heine, se producen 3 situaciones diferentes en función de los 3 posibles casos determinados por las constantes M_0 y M_1 .

La asintótica tipo Mehler–Heine (1.41) es el primer resultado de este tipo que se obtiene en el contexto de polinomios discretos de Sobolev con medidas de soporte no acotado. Esta clase de asintótica local, uno de los objetivos de esta tesis, proporciona una información que las otras asintóticas no pueden dar. Nos indica detalladamente cómo la perturbación introducida en el producto escalar estándar afecta al comportamiento asintótico de los nuevos polinomios ortogonales en un entorno de dicha perturbación. Entendemos por “perturbación” al término *discreto* del producto escalar (1.40), en este caso $M_0 p(0)q(0) + M_1 p'(0)q'(0)$. En este sentido es importante recordar que la fórmula de Mehler–Heine para los polinomios de Laguerre clásicos es (ver (1.19))

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x/n)}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Se puede observar como difiere de la obtenida en (1.41) para los polinomios de Sobolev.

En [20] también se planteó una conjetura relativa a la asintótica Mehler–Heine de los polinomios ortogonales con respecto al producto de Sobolev discreto

$$(p, q)_S = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^{+\infty} p(x)q(x)x^{-\alpha}e^{-x}dx + \sum_{i=0}^j M_i p^{(i)}(0)q^{(i)}(0),$$

con $\alpha > -1$ y $M_i > 0$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, j\}$. Esta conjetura fue probada años más tarde en [12].

Teorema 1.5.1 ([12]) *Sea $\{S_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al producto escalar (1.35) con $M_i > 0$, $i = 0, \dots, j$. Entonces,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!n^\alpha} S_n(x/n) = (-1)^{j+1} x^{\frac{-\alpha}{2}} J_{\alpha+2j+2}(2\sqrt{x})$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Además en [12] se obtienen los correspondientes resultados asintóticos para los polinomios de Hermite-Sobolev generalizados gracias al anterior teorema y a la conexión entre los polinomios de Laguerre y los polinomios de Hermite generalizados (ver [58, p. 43]).

Otras referencias sobre resultados asintóticos de polinomios de Laguerre-Sobolev discretos son [70], [71], [88] y [131].

Como hemos visto anteriormente el hecho de que algún M_i con $i \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ valga cero produce lo que se denomina en inglés *gap*. Esta situación hace cambiar sustancialmente la asintótica tipo Mehler–Heine. En [12], siendo uno de los resultados más importantes del trabajo, se establece la asintótica tipo Mehler–Heine en esta situación, y que va a depender del tamaño del gap.

Sin embargo, volviendo al caso de todas las masas estrictamente positivas, un artículo especialmente relevante y que será de gran utilidad en esta memoria es [156].

En él las autoras obtienen la asintótica Mehler–Heine para los polinomios s_n ortonormales con respecto al producto escalar

$$(p, q)_S = \int p(x)q(x)d\mu(x) + \sum_{i=0}^j M_i p^{(i)}(c)q^{(i)}(x), \quad (1.42)$$

donde μ es una medida finita positiva de Borel con soporte en un subconjunto infinito de la recta real, $c \in \mathbb{R}$ y $M_i > 0$ con $i \in \{0, 1, \dots, j\}$.

Teorema 1.5.2 ([156]) Sean $\{p_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la medida μ y $\{p_n^{[2i]}\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la medida $d\mu_{2i}(x) = (x - c)^{2i}d\mu(x)$ con $i \geq 0$. Supongamos que la sucesión $\{p_n^{[2i]}\}_{n \geq 0}$ satisface uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ la siguiente fórmula asintótica tipo Mehler–Heine

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{a_n^{1/2}}{b_n^i} p_n^{[2i]} \left(c + \frac{z^2}{b_n} \right) = z^{-(\alpha+2i)} J_{\alpha+2i}(2z),$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^{-1/2}}{A n^a} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{B n^b} = 1, \quad A, B, b > 0, \quad \alpha > -1,$$

y

$$2a + 1 = b(\alpha + 1),$$

entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n a_n^{1/2} s_n \left(c + \frac{z^2}{b_n} \right) = (-1)^{j+1} z^{-\alpha} J_{\alpha+2j+2}(2z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

El anterior resultado tiene su análogo cuando la medida μ es simétrica (Teorema 6 en [156]). También es conveniente resaltar que las condiciones impuestas en el Teorema 1.5.2, o en su análogo para medidas simétricas, son satisfechas por un amplio abanico de medidas tales como la clase de Nevai, Laguerre o Freud generalizado.

Nota 1.5.1 *En la demostración de este teorema se usa que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{a_n^{1/2}}{b_n^i} p_n^{[2i]} \left(c + \frac{z^2}{b_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{a_n^{1/2}}{b_n^i} p_n^{[2i]} \left(c + \frac{z^2}{b_{n+\ell}} \right)$$

para cualquier número entero ℓ fijo. Esto se puede asegurar gracias al Corolario 1 de [13] donde los autores prueban un resultado más general para funciones holomorfas usando técnicas de análisis complejo. Dicho corolario también será usado en varias ocasiones en esta memoria.

1.6 CEROS DE POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV DISCRETOS

Si bien dedicamos la Sección 1.4 a los polinomios ortogonales de Sobolev continuos, motivados por ser los primeros en el contexto Sobolev donde se introdujeron sucesiones variantes de parámetros, en este caso nos centraremos solamente en los ceros de polinomios ortogonales de Sobolev discretos, que en el caso variante, serán objeto de estudio en esta memoria. Algunos resultados iniciales sobre ceros de polinomios ortogonales continuos se han presentado en la Sección 1.3.

En primer lugar, hemos de mencionar que en este contexto de Sobolev discreto los ceros no tienen por qué verificar el Teorema 1.1.6.

En [8], se considera el producto

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x)d\mu + M_0 f(c)g(c) + M_1 f'(c)g'(c),$$

donde $M_i \geq 0$, con $i \in \{0, 1\}$, I es un intervalo acotado y $c \in \mathbb{R}$. Se estudian los ceros de los correspondientes polinomios S_n y su ubicación con respecto a c .

Proposición 1.6.1 ([8]) *Si $M_1 > 0$ y $n \geq 3$, $S_n(x)$ tiene al menos $n - 2$ ceros diferentes con multiplicidad impar en el interior de I . Además, si $c = \sup I$ o $c = \inf I$, entonces los ceros de $S_n(x)$ son reales y simples y al menos $n - 1$ de ellos están en el interior de I .*

En [141] se introduce el producto escalar

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x)d\mu(x) + Mf^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad M \geq 0, \quad j \geq 1, \quad (1.43)$$

donde μ es una medida con soporte en el semieje real positivo. Denotando por S_n los polinomios ortogonales con respecto a (1.43) se establece el siguiente resultado:

Teorema 1.6.1 ([141]) *Los polinomios S_n tienen n ceros reales y simples y a lo más uno se encuentra fuera de $(0, \infty)$. En este último caso, ese cero se encuentra en $(-\infty, 0]$, para $n \geq j + 1$.*

También se encuentran condiciones relativas a la existencia de un cero real negativo de los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar (1.43).

Teorema 1.6.2 ([141]) *Se puede definir una sucesión $\{\alpha_n\}_{n \geq j+1}$, creciente tal que*

- a) Si $0 \leq \alpha_n M < 1$, entonces todos los ceros de S_n son positivos.*
- b) Si $\alpha_n M \geq 1$, entonces hay un cero en $(-\infty, 0)$.*
- c) Si S_n tiene un cero negativo para $n = n_0$, entonces S_n tiene un cero negativo para cada $n > n_0$.*

Se han presentado estos resultados particulares obtenidos en [141] puesto que en el Capítulo 2 se va a trabajar con un producto similar a (1.43) pero introduciendo masas variantes, esto es, la constante M en el producto escalar (1.43) variará en función del grado del polinomio.

Otro resultado bastante general fue dado en [62], donde se estudiaron los ceros de los polinomios ortogonales S_n con respecto al producto

$$(f, g)_s = \int_0^a f(x)g(x)d\mu(x) + M_1 f^{(r)}(0)g^{(r)}(0) + M_2 f^{(s)}(0)g^{(s)}(0),$$

con M_1 y M_2 estrictamente positivas. El autor encontró que S_n tiene exactamente $n - 2$ ceros reales y simples en $(0, a)$. Si $s = r + 1$, entonces S_n tiene un par de ceros conjugados complejos de la forma $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha < 0$ y $\beta \neq 0$. Si $s > r + 1$, entonces S_n tiene o dos raíces complejas conjugadas de la forma $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha < 0$ y $\beta \neq 0$ o dos ceros negativos en $(-\infty, 0)$.

Estos resultados, junto con el Teorema 1.6.2, ponen de manifiesto que pequeñas variaciones en los parámetros producen cambios significativos en el comportamiento de los ceros de polinomios de Sobolev discretos. Esto será ilustrado en los Capítulos del 2 al 4 para diferentes familias de polinomios de Sobolev discretos variantes.

Consideremos ahora un producto escalar tipo Sobolev general,

$$(f, g)_S = \int_I f(x)g(x)d\mu(x) + \left(f(c), f'(c), \dots, f^{(j)}(c) \right) \mathcal{A} \left(g(c), g'(c), \dots, g^{(j)}(c) \right)^T, \quad (1.44)$$

donde la medida μ es absolutamente continua, $j \geq 0$ y $\mathcal{A}$ una matriz de coeficientes reales de tamaño $(j+1) \times (j+1)$.

Vamos a destacar varios casos particulares de este producto (1.44). Si $\mathcal{A}$ es diagonal y $j = 1$ estamos en el caso considerado en [8]. Si denotamos por $x_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, los ceros en orden creciente de los polinomios S_n ortogonales con respecto a (1.44), con $c = \sup(I)$ y además no se dan las circunstancias de que $S_n(c) > 0$ ni $S'_n(c) > 0$, entonces $c \leq x_{n,n} < c + \frac{c+x_{n,1}}{n-1}$. Más aún, denotando mediante $\mathcal{A}_{i,k}$ los coeficientes de la matriz $\mathcal{A}$, si $\mathcal{A}_{1,1} \neq 0$ entonces $x_{n,n} - c < \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{A}_{2,2}}{\mathcal{A}_{1,1}} \right)^{1/2}$. Haciendo un cambio de variable $x \rightarrow -x$ se puede hacer un análisis similar siendo $c = \inf(I)$.

En las hipótesis anteriores, el caso en el cual c se encuentra fuera del soporte de μ se analizó en [130] con $\mathcal{A}_{1,1} = 0$. En esta situación S_n nuevamente tiene ceros reales, simples y al menos $n-1$ de ellos pertenecen al interior de I . Además, si I es un intervalo acotado, entonces para n suficientemente grande y $c > \sup(I)$, S_n tiene un cero mayor que c . Este cero converge a c cuando n tiende a infinito. Por otro parte, los ceros de los polinomios ortogonales con respecto a μ y los ceros de S_n se entrelazan.

El caso $\mathcal{A}$ no diagonal y definida positiva con $j = 1$ fue estudiado en [9]. Entonces se probó que si I es acotado y $c > \sup(I)$, existe un número natural n_0 de manera que, para todo $n \geq n_0$, los ceros de S_n son reales, simples y todos, salvo el mayor de ellos, se encuentran en el intervalo $(\inf(I), c)$, y el mayor cero es más grande que c .

Finalmente, asumiendo $j > 1$ y $\mathcal{A}$ una matriz diagonal en el producto (1.44), en [5] los autores prueban que si c no pertenece al interior de I , entonces, S_n tiene al menos $n-j-1$ ceros con multiplicidad impar en el interior de I cuando $n \geq j+1$. Más aún, si $\bar{n}$ denota el número de términos en la parte discreta de (1.44), es decir, puede haber gaps o, en otras palabras, algún término de la diagonal $\mathcal{A}_{k,k} = 0$, entonces S_n tiene al menos $n - \bar{n}$ ceros en el interior de I . Esta última afirmación será usada en los próximos capítulos.

Sobre el comportamiento asintótico de los ceros de los polinomios de Sobolev discretos, las fórmulas de Mehler–Heine anteriormente consideradas nos dan bastante

información. Así, volviendo a citar uno de los teoremas más generales para fórmulas tipo Mehler–Heine en el campo de polinomios ortogonales de Sobolev discretos, ver el Teorema 1.5.2, se deduce que los ceros de los polinomios ortogonales P_n con respecto a (1.42) y que denotaremos por $x_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, verifican

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(x_{n,k} - c) &= 0 & 1 \leq k \leq j+1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(x_{n,k} - c) &= \left(\frac{j_{\alpha+2j+2,k-j-1}}{2} \right)^2 & k \geq j+2, \end{aligned}$$

donde b_n cumple las condiciones del Teorema 1.5.2 y $j_{\alpha,k}$ denota el k -ésimo cero positivo de la función J_α .

1.7 ECUACIONES DIFERENCIALES ASOCIADAS A POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV

Por último, se incluye en este capítulo una pequeña sección sobre algunos resultados sobre operadores diferenciales asociados a polinomios ortogonales de Sobolev discretos. Esto viene motivado porque uno de los objetivos del Capítulo 5 es el estudio del comportamiento asintótico de los autovalores del operador diferencial cuyas autofunciones son una familia de polinomios ortogonales con respecto a un producto Gegenbauer-Sobolev discreto.

Los trabajos [97], [99], [102] fueron de los primeros en buscar un operador diferencial donde los polinomios de Sobolev discretos fueran autofunciones de dicho operador para diferentes productos escalares. Los autores trabajan con el producto escalar (1.40). En estos trabajos se obtuvo, entre otras propiedades, el operador diferencial para el cual los polinomios ortogonales son autofunciones. Dicho operador viene dado por

$$\begin{aligned} M_0 \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) D^{(i)} + M_1 \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x) D^{(i)} + M_0 M_1 \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x) D^{(i)} \\ + x D^{(2)} + (\alpha + 1 - x) D + n I, \end{aligned}$$

donde $D^{(i)}$ indica el operador derivada de orden i , con $D^{(1)} = D$, I es el operador identidad, y $a_i(x)$, $b_i(x)$ y $c_i(x)$ son polinomios, independientes de n , de grado a lo más i . Además, se obtuvo que, en el caso de $M_0 = 0$ y $M_1 > 0$, la ecuación

diferencial es de orden $2\alpha + 8$ si α es un número entero no negativo y de orden infinito en caso contrario. Más aún, si $M_0 > 0$ y $M_1 > 0$, entonces el operador diferencial es de orden $4\alpha + 10$ si α es un entero no negativo y de orden infinito en caso contrario. Para α entero no negativo esto se estableció en [97] y el caso general se demostró en [99]. Más recientemente, en [74] se ha extendido este resultado y se ha llegado a construir el operador diferencial asociado a los polinomios ortogonales de Sobolev con respecto a la forma bilineal

$$(f, g)_S = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)x^{\alpha-j}e^{-x}dx + \left(f(0), f'(0), \dots, f^{(j-1)}(0)\right) \mathcal{M} \left(g(0), g'(0), \dots, g^{(j-1)}(0)\right)^T, \quad (1.45)$$

donde $\mathcal{M}$ es una matriz de tamaño $j \times j$ con $j \geq 2$ y $j \leq \alpha \in \mathbb{N}$.

Un análisis similar, aunque fuera del marco de la ortogonalidad Sobolev, fue dado en [97] y [98] para los polinomios ortogonales Jacobi-Krall, donde los autores obtienen como principal resultado el orden del operador diferencial en función de los parámetros M y N del siguiente producto escalar

$$(f, g)_S = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Mf(1)g(1) + Nf(-1)g(-1).$$

Los autores obtienen, además de una expresión para el operador diferencial, los órdenes de este operador en función de M y N , (ver [98, Sect. 8])

$$\text{Orden del operador} = \begin{cases} 2\beta + 4, & \text{si } M > 0, N = 0 \text{ y } \beta \in \{0, 1, 2, \dots\}; \\ 2\alpha + 4, & \text{si } M = 0, N > 0 \text{ y } \alpha \in \{0, 1, 2, \dots\}; \\ 2\alpha + 2\beta + 6, & \text{si } M > 0, N > 0 \text{ y } \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, \dots\}. \end{cases}$$

En [75] este resultado se ha extendido para un producto similar a (1.45) en el caso acotado involucrando la medida de Jacobi.

Por último, destacar los trabajos [31]-[35] para diferentes familias. Dado un producto escalar de la forma

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)d\mu(x) + M\mathcal{D}^{(j)}f(c)\mathcal{D}^{(j)}g(c),$$

con $\mathcal{D}$ denotando el operador derivada o el operador en diferencias si la medida μ es discreta, se consigue encontrar un algoritmo de construcción del operador diferencial asociado a los polinomios ortogonales con respecto a este producto escalar. Es más, se consigue probar que dadas unas constantes $\{\hat{\lambda}_i\}_{i=0}^{j+1}$ arbitrarias el ope-

rador diferencial es único, así como también se obtienen los autovalores de dicho operador diferencial, que denotaremos por $\hat{\lambda}_n$ con $n > j + 1$, dadas las cantidades arbitrarias $\{\hat{\lambda}_i\}_{i=0}^{j+1}$. Estos trabajos [31]-[35] serán muy útiles para la obtención de los resultados del Capítulo 5.

1.8 CONSIDERACIONES FINALES

Para no ser reiterativo en los capítulos, indicamos aquí la notación común, no mencionada previamente, que usaremos con frecuencia en esta memoria.

Sean a_n y b_n dos sucesiones de números reales, entonces diremos que $a_n \approx b_n$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Finalmente, la estructura del resto de la memoria es la que se describe a continuación. En los capítulos 2 y 3 se estudian los polinomios Laguerre–Sobolev variantes y Jacobi–Sobolev variantes, respectivamente. Los resultados han sido publicados en [118] y [119]. En el Capítulo 4 se abordan, con una técnica más general, polinomios tipo Sobolev variantes para un amplio rango de medidas. Los resultados de este capítulo han sido publicados en [120]. En el Capítulo 5 se estudia un producto de Sobolev discreto que involucra a un peso de Gegenbauer y sus resultados han sido recientemente publicados en [112].

POLINOMIOS ORTOGONALES TIPO LAGUERRE-SOBOLEV VARIANTES

2.1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

En el capítulo anterior se introdujo la ortogonalidad no estándar conocida como tipo Sobolev. En este sentido, se va a trabajar con un producto escalar de Sobolev discreto o tipo Sobolev de la forma (1.34), es decir,

$$(f, g) = \int f(x)g(x)\rho(x)dx + \sum_{k=0}^j M_k f^{(k)}(c)g^{(k)}(c).$$

Concretamente, se considera el producto escalar no estándar

$$(f, g)_{LS,n} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x}dx + M_n f^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad (2.1)$$

donde $j \geq 0$ es un número entero no negativo prefijado, $\alpha > -1$ y $\{M_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de masas con ciertas propiedades que estableceremos más adelante. Denotaremos por $L_n^{(\alpha, M_n)}$ los polinomios ortogonales con respecto a (2.1) con coeficiente líder $(-1)^n/n!$.

El objetivo de este capítulo es obtener distintos tipos de asintóticas para los polinomios ortogonales con respecto a (2.1). De hecho, se obtendrá la asintótica fuerte exterior en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ así como que la asintótica relativa exterior con respecto a los polinomios clásicos de Laguerre es 1, resultado que ya fue observado en [12] para $M_n = M$ para todo n . Sin embargo, el objetivo fundamental será obtener la asintótica local tipo Mehler-Heine que describirá con detalle el comportamiento de estos polinomios ortogonales alrededor del origen, que es donde se ha colocado la perturbación, así como la influencia que la sucesión de masas $\{M_n\}_{n \geq 0}$ tiene en este comportamiento. Esencialmente, aparecerán 3 casos que dependen del tamaño de la sucesión de masas $\{M_n\}_{n \geq 0}$. Si el tamaño de

$\{M_n\}_{n \geq 0}$ es suficientemente grande, esta sucesión influirá de forma determinante en la asintótica tipo Mehler–Heine de estos polinomios variantes. Si por el contrario el tamaño de $\{M_n\}_{n \geq 0}$ es despreciable, la asintótica tipo Mehler–Heine de los polinomios de Laguerre–Sobolev y de los polinomios de Laguerre coincidirá. El tercer caso se obtiene cuando el tamaño de $\{M_n\}_{n \geq 0}$ toma un valor concreto que involucra los parámetros α y j , y entonces esta asintótica local será una combinación lineal convexa de los dos casos anteriores. Una interpretación en términos de los polinomios núcleo se realizará en el Capítulo 4 cuando se aborde el caso general.

Como consecuencia de estos resultados, y como ya se comentó en la Sección 1.2, se podrá describir el comportamiento asintótico de los ceros de estos polinomios en términos de los ceros de determinadas funciones especiales que involucran funciones de Bessel de primera especie (ver (1.16)). Estos resultados se ilustrarán numéricamente. Los resultados de este capítulo fueron publicados en [118].

De acuerdo a estos objetivos, la estructura del capítulo es la siguiente. En la Sección 2.2 introducimos los polinomios tipo Laguerre–Sobolev variantes y algunas de sus propiedades básicas. En las secciones 2.3 y 2.4 probamos los principales resultados sobre propiedades asintóticas de los polinomios $L_n^{(\alpha, M_n)}$. Finalmente, en la Sección 2.5 se hace un estudio de la distribución y el comportamiento asintótico de los ceros de $L_n^{(\alpha, M_n)}$ y en la Sección 2.6 mostraremos algunos experimentos numéricos para ilustrar los resultados obtenidos.

2.2 EL CASO VARIANTE

Tal y como se ha comentado al inicio del capítulo, se considera el producto escalar variante,

$$(f, g)_{LS, n} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx + M_n f^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad (2.2)$$

con $j \geq 0$, $\alpha > -1$ y donde $\{M_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de números reales no negativos verificando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n n^\beta = M > 0, \quad \text{con } \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Antes de continuar con el desarrollo del capítulo es importante realizar ciertas observaciones sobre el producto escalar (2.2).

La primera de ellas es mencionar que la introducción de la constante $\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$ en la función peso, $\rho(x)$, hace que se obtenga una medida de probabilidad, es decir,

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)} dx = 1.$$

En este capítulo consideramos la sucesión de los polinomios ortogonales clásicos de Laguerre, que denotaremos por $L_n^{(\alpha)}(x)$, respecto a la función peso $\rho(x) = \frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}$ con coeficiente líder $\frac{(-1)^n}{n!}$, i. e.

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + a_{n,n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{n,0}.$$

Por otro lado, en [72] y en [131] se consideran algunos casos particulares, pero convenientes para ubicar nuestro problema. En estos trabajos, los autores consideran el producto escalar

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx + N f^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad \alpha > -1, \quad (2.4)$$

con $j \geq 0$ y $N > 0$, estableciendo ciertas propiedades de los correspondientes polinomios ortogonales. En lo que respecta a propiedades asintóticas los resultados obtenidos quedan incluidos dentro de los obtenidos en [12], en un ámbito más general. Hay que destacar que si la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ en (2.2) fuera constante, esto es, $M_n = M$, para todo $n \geq 0$, entonces $\Gamma(\alpha+1)(f, g)_{LS,n} = (f, g)$ donde el último producto escalar es el producto definido en (2.4) con $N = \Gamma(\alpha+1)M$. Esta observación tiene importancia a la hora de verificar que los resultados que se obtienen en este capítulo generalizan los obtenidos en [72] y en [131]. Asimismo, se debe de prestar atención a que cuando trabajamos con productos variantes, realmente tenemos una tabla de polinomios ortogonales. Esto es, si se denota por $L_n^{(\alpha, M_n)}$ el n -ésimo polinomio ortogonal con respecto (2.2), entonces $\left(L_n^{(\alpha, M_n)}, x^i\right)_{LS,n} = 0$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$, pero $\left(L_n^{(\alpha, M_n)}, x^i\right)_{LS,n-1}$ puede ser distinto de cero. Así, se forma una tabla de polinomios ortogonales dada por $\{L_k^{(\alpha, M_n)}\}_{k \geq 0}$. Aclarar que trabajaremos con la diagonal de dicha tabla, esto es

$$\{L_n^{(\alpha, M_n)}\}_{n \geq 0} = \{L_0^{(\alpha, M_0)}, L_1^{(\alpha, M_1)}, \dots, L_i^{(\alpha, M_i)}, \dots\}.$$

También resaltar que, como ya se dijo en el capítulo anterior, estos productos tipo Sobolev no son productos escalares estándar salvo para $j = 0$; por tanto, $(xf, g)_{LS,n} \neq (f, xg)_{LS,n}$, y esto hace que se pierdan propiedades tan importantes como la relación de recurrencia a tres términos, la fórmula de Christoffel–Darboux, la propiedad de ubicación de los ceros en el interior de la envoltura convexa del so-

porte de la medida, etc. Por último, se ha de mencionar que si la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ es idénticamente nula, obtenemos los polinomios $L_n^{(\alpha,0)}$ que son los polinomios clásicos de Laguerre denotados por $L_n^{(\alpha)}$.

A continuación, se va a establecer una relación entre los polinomios de Laguerre clásicos, $L_n^{(\alpha)}(x)$, y los polinomios ortogonales con respecto a (2.2), $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$. Para ello nos basamos en las ideas desarrolladas en [131], adaptándolas a nuestra situación.

Proposición 2.2.1 Sea $L_{-1}^{(\alpha)}(x) \equiv 0$ y $\alpha > -1$. Entonces, para cada $n \geq j$,

$$L_n^{(\alpha, M_n)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) + \sum_{k=1}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x), \quad (2.5)$$

donde

$$B_{n,k}^{[j]} = \frac{A_{n,k}^{[j]}}{A_{n,0}^{[j]}}, \quad (2.6)$$

con

$$A_{n,k}^{[j]} = \frac{(-1)^k j! \Gamma(\alpha+1) M_n}{\Gamma(\alpha+j+1)} \binom{n+\alpha}{n-j} \binom{n-k}{j+1-k} \quad k = 1, \dots, j+1, \quad (2.7)$$

$$A_{n,0}^{[j]} = 1 + \frac{j! \Gamma(\alpha+1) M_n}{\Gamma(\alpha+j+1)} \sum_{k=1}^{\min\{n-j, j+1\}} (-1)^{k+1} \binom{n+\alpha}{n-j-k} \binom{n-k}{j+1-k}. \quad (2.8)$$

Demostración: Sea $Q_n(x) := L_n^{(\alpha)}(x) + \sum_{k=1}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)$ el polinomio de grado n con coeficiente líder $\frac{(-1)^n}{n!}$, y los coeficientes definidos como en (2.6)-(2.8). Vamos a demostrar que estos polinomios son ortogonales con respecto al producto definido en (2.2). Sea $p_{\ell+j+1}(x) = x^{j+1} q_\ell(x)$, $\ell = 0, 1, \dots, n - (j+2)$, donde $q_\ell(x)$ es un polinomio de grado exactamente ℓ . Se sigue que los polinomios $1, x, x^2, \dots, x^j$ y $p_{\ell+j+1}(x)$, con $\ell = 0, 1, \dots, n - (j+2)$, constituyen una base de $\mathbb{P}_{n-1}[x]$. Entonces, para $n \geq j+2$,

$$\begin{aligned} (p_{\ell+j+1}(x), Q_n(x))_{LS,n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty x^{j+1} q_\ell(x) L_n^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=1}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} \int_0^\infty x^{j+1-k} q_\ell(x) L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x) x^{\alpha+k} e^{-x} dx = 0. \end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia de la ortogonalidad de los polinomios clásicos de Laguerre.

Ahora definimos las cantidades $I_{k,i}$ de la siguiente forma

$$I_{k,i} := \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty L_{n-i}^{(\alpha+i)}(x) x^{\alpha+k} e^{-x} dx.$$

Considerando la expresión [169, f. (5.1.6)] se tiene

$$L_{n-i}^{(\alpha+i)}(x) = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+\alpha}{n-i-j} \frac{(-x)^j}{j!}. \quad (2.9)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I_{k,i} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty L_{n-i}^{(\alpha+i)}(x) x^{\alpha+k} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+\alpha}{n-i-j} \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^\infty x^j x^{\alpha+k} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-i-j+1)\Gamma(\alpha+i+j+1)} \frac{(-1)^j}{j!} \Gamma(j+k+\alpha+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{\Gamma(n-k)\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(i-k)\Gamma(n+1-i)} = \binom{n-k-1}{n-i} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Veamos ahora que los polinomios $Q_n(x)$ son ortogonales respecto la base canónica de $\mathbb{P}_j[x]$. Para ello usaremos la ortogonalidad de los polinomios clásicos de Laguerre y el valor de $I_{k,i}$ obtenido en (2.10).

$$\begin{aligned} (1, Q_n(x))_{LS,n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty Q_n(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k=0}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} \int_0^\infty L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &= B_{n,0}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,1}^{[j]} \cdot I_{0,1} + B_{n,2}^{[j]} \cdot I_{0,2} + \cdots + B_{n,j}^{[j]} \cdot I_{0,j} + B_{n,j+1}^{[j]} \cdot I_{0,j+1}, \\ (x, Q_n(x))_{LS,n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty x Q_n(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &= B_{n,0}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,1}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,2}^{[j]} \cdot I_{1,2} + \cdots + B_{n,j}^{[j]} \cdot I_{1,j} + B_{n,j+1}^{[j]} \cdot I_{1,j+1}. \end{aligned}$$

Análogamente, se tienen los casos para $2 \leq j \leq j-2$. Veamos los casos $j-1$ y j :

$$\begin{aligned}
(x^{j-1}, Q_n(x))_{LS,n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty x^{j-1} Q_n(x) x^\alpha e^{-x} dx \\
&= B_{n,0}^{[j]} \cdot 0 + \cdots + B_{n,j-1}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,j}^{[j]} \cdot I_{j-1,j} + B_{n,j+1}^{[j]} \cdot I_{j-1,j+1},
\end{aligned}$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned}
(x^j, Q_n(x))_{LS,n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty x^j Q_n(x) x^\alpha e^{-x} dx + M_n j! (Q_n(x))_{x=0}^{(j)} \\
&= B_{n,0}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,1}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,2}^{[j]} \cdot 0 + \cdots + B_{n,j}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,j+1}^{[j]} \cdot I_{j,j+1}, \\
&\quad + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \sum_{k=0}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} L_{n-k-j}^{(\alpha+k+j)}(0).
\end{aligned}$$

Para concluir, usando las expresiones (2.7), (2.8) y (2.10), el valor de los polinomios de Laguerre en el origen (ver (2.9)), $L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}$, y la expresión de $B_{n,k}^{[j]}$ se tiene que $(x^m, Q_n(x))_{LS,n} = 0$ para $m = 0, \dots, j$. Veámoslo para el caso $m = j$, dado que los demás casos se demuestran de forma análoga.

$$\begin{aligned}
(x^j, Q_n(x))_{LS,n} &= B_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \sum_{k=0}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} L_{n-k-j}^{(\alpha+k+j)}(0) \\
&= \frac{1}{A_{n,0}^{[j]}} \left(A_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \sum_{k=0}^{j+1} A_{n,k}^{[j]} L_{n-k-j}^{(\alpha+k+j)}(0) \right).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Bastará con probar que el paréntesis de la expresión anterior es 0.

$$\begin{aligned}
&A_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \sum_{k=0}^{j+1} A_{n,k}^{[j]} L_{n-k-j}^{(\alpha+k+j)}(0) \\
&= A_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&\quad + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{\min\{n-j,j+1\}} (-1)^{k+1} \frac{j! M_n \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \binom{n+\alpha}{n-j-k} \binom{n-k}{j+1-k} \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&\quad + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \sum_{k=1}^{\min\{n-j,j+1\}} A_{n,k}^{[j]} L_{n-k-j}^{(\alpha+k+j)}(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&\quad + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{\min\{n-j, j+1\}} (-1)^{k+1} \frac{j! M_n \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \binom{n+\alpha}{n-j-k} \binom{n-k}{j+1-k} \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&\quad + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{\min\{n-j, j+1\}} (-1)^k \frac{j! M_n \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \binom{n+\alpha}{n-j} \binom{n-k}{j+1-k} \binom{n+\alpha}{n-k-j}.
\end{aligned}$$

Los coeficientes de los dos últimos sumandos vemos que son exactamente iguales pero de signo contrario, por lo que se pueden eliminar y, usando (2.10), tenemos que la expresión (2.11) queda como

$$\begin{aligned}
&A_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&= \frac{(-1)^{j+1} j! M_n \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \binom{n+\alpha}{n-j} \binom{n-j-1}{j+1-j-1} \\
&\quad \times \binom{n-j-1}{n-j-1} \frac{\Gamma(\alpha+j+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&= (-1)^{j+1} M_n j! \binom{n+\alpha}{n-j} + (-1)^j M_n \Gamma(j+1) \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 1.1.2 una sucesión de polinomios ortogonales es única salvo una constante multiplicativa, y como hemos visto que los polinomios Q_n y los $L_n^{(\alpha, M_n)}$ tienen el mismo coeficiente líder se concluye la demostración. ■

Nota 2.2.1 El resultado obtenido en [131] para el caso no variante utiliza estandarizaciones diferentes para las familias de polinomios $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ y $\{L_n^{(\alpha, M_n)}\}_{n \geq 0}$, lo que complica las expresiones de los resultados que se puedan obtener a partir de él.

Nota 2.2.2 Los coeficientes de este resultado se han expresado de manera que puedan ser calculados e introducidos directamente en un ordenador.

Proposición 2.2.2 Sean $B_{n,k}^{[j]}$ los coeficientes definidos en la Proposición 2.2.1, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k B_{n,k}^{[j]} = \begin{cases} 0, & \text{si } \beta > 2j + \alpha + 1, \\ \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) M \Gamma(j + 1) \Gamma(\alpha + 1)}{C_{\alpha,j,M} \Gamma(j - k + 2)}, & \text{si } \beta = 2j + \alpha + 1, \\ \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) \Gamma(j + 1)}{\Gamma(j - k + 2)}, & \text{si } \beta < 2j + \alpha + 1, \end{cases} \quad (2.12)$$

con $C_{\alpha,j,M} = (\alpha + 2j + 1) \Gamma^2(\alpha + j + 1) + M \Gamma(\alpha + 1)$.

Demostración: Para demostrar el resultado vamos a usar (2.3) y la fórmula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{b-a} \Gamma(n + a)}{\Gamma(n + b)} = 1, \quad (2.13)$$

que se deduce directamente de la bien conocida fórmula de Stirling (ver, por ejemplo, [30, f. (5.11.13)]).

Analizamos en primer lugar los coeficientes $A_{n,k}^{[j]}$ para $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} A_{n,k}^{[j]} &= \frac{(-1)^k j! \Gamma(\alpha + 1) M_n}{\Gamma(\alpha + j + 1)} \binom{n + \alpha}{n - j} \binom{n - k}{j + 1 - k} \\ &= \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(j + 1) M_n}{\Gamma(\alpha + j + 1)} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n - j + 1) \Gamma(\alpha + j + 1)} \frac{\Gamma(n - k + 1)}{\Gamma(j - k + 2) \Gamma(n - j)} \\ &= \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(j + 1) n^\beta M_n}{\Gamma(\alpha + j + 1) n^\beta} \frac{n^{-j-\alpha}}{n^{-j-\alpha}} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n - j + 1) \Gamma(\alpha + j + 1)} \\ &\quad \times \frac{n^{-j+k-1}}{n^{-j+k-1}} \frac{\Gamma(n - k + 1)}{\Gamma(j - k + 2) \Gamma(n - j)}. \end{aligned}$$

Aplicando (2.13),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\beta-2j-\alpha-1+k} A_{n,k}^{[j]} = \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(j + 1) M}{\Gamma^2(\alpha + j + 1) \Gamma(j - k + 2)}. \quad (2.14)$$

Ahora se va a proceder a analizar el comportamiento de $A_{n,0}^{[j]}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si n es suficientemente grande, se tiene que $\min\{n - j, j + 1\} = j + 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
A_{n,0}^{[j]} &= 1 + \frac{j!\Gamma(\alpha+1)M_n}{\Gamma(\alpha+j+1)} \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k+1} \binom{n+\alpha}{n-j-k} \binom{n-k}{j+1-k} \\
&= 1 + \frac{M_n\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k+1} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-j-k+1)\Gamma(\alpha+j+k+1)} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(j-k+2)\Gamma(n-j)} \\
&= 1 + \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+1)n^\beta M_n}{n^\beta\Gamma(\alpha+j+1)} \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k+1} \frac{n^{-j-k-\alpha}}{n^{-j-k-\alpha}} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-j-k+1)\Gamma(\alpha+j+k+1)} \frac{n^{-j+k-1}}{n^{-j+k-1}} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(j-k+2)\Gamma(n-j)}.
\end{aligned}$$

Entonces, $A_{n,0}^{[j]} = 1 + D_n$, donde

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\beta-2j-\alpha-1} D_n &= \frac{M\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(\alpha+j+k+1)\Gamma(j-k+2)} \\
&= \frac{M\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{(\alpha+j+1)}{(\alpha+2j+1)\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+j+2)} \\
&= \frac{M\Gamma(\alpha+1)}{(\alpha+2j+1)\Gamma^2(\alpha+j+1)}.
\end{aligned}$$

De aquí obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\beta-2j-\alpha-1} A_{n,0}^{[j]} = \begin{cases} \infty, & \text{si } \beta > 2j + \alpha + 1, \\ 1 + \frac{M\Gamma(\alpha+1)}{(\alpha+2j+1)\Gamma^2(\alpha+j+1)}, & \text{si } \beta = 2j + \alpha + 1, \\ \frac{M\Gamma(\alpha+1)}{(\alpha+2j+1)\Gamma^2(\alpha+j+1)}, & \text{si } \beta < 2j + \alpha + 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Usando (2.14) y (2.15) se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k B_{n,k}^{[j]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta-2j-\alpha-1+k} A_{n,k}^{[j]}}{n^{\beta-2j-\alpha-1} A_{n,0}^{[j]}} = \begin{cases} 0, & \text{si } \beta > 2j + \alpha + 1, \\ \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) M \Gamma(j + 1) \Gamma(\alpha + 1)}{C_{\alpha,j,M} \Gamma(j - k + 2)}, & \text{si } \beta = 2j + \alpha + 1, \\ \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) \Gamma(j + 1)}{\Gamma(j - k + 2)}, & \text{si } \beta < 2j + \alpha + 1, \end{cases}$$

con $C_{\alpha,j,M} = (\alpha + 2j + 1) \Gamma^2(\alpha + j + 1) + M \Gamma(\alpha + 1)$. ■

2.3 ASINTÓTICA RELATIVA EXTERIOR Y ASINTÓTICA FUERTE

Como se indicó en la introducción del capítulo, el objetivo principal es encontrar las fórmulas asintóticas tipo Mehler-Heine para los polinomios ortogonales $L_n^{(\alpha, M_n)}$ con respecto al producto (2.2). El interés de este tipo de asintótica local viene motivado por el hecho que permite describir de forma detallada las diferencias entre los polinomios tipo Laguerre-Sobolev y los polinomios clásicos de Laguerre. Sin embargo, disponemos de las técnicas para probar otras asintóticas. Por ejemplo, se puede obtener la asintótica relativa entre las sucesiones de polinomios $\{L_n^{(\alpha, M_n)}\}_{n \geq 0}$ y $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$, y de aquí, usando el Teorema de Perron (ver [169, Teo. 8.22.3]) se deduce la asintótica fuerte exterior de los polinomios $L_n^{(\alpha, M_n)}$.

En el siguiente resultado se mostrará la asintótica relativa exterior de la sucesión $\{L_n^{(\alpha, M_n)}\}_{n \geq 0}$ con respecto a $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Proposición 2.3.1 *Se tiene que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} = 1,$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Demostración: Del Teorema de Perron relativo a la asintótica fuerte exterior de los polinomios clásicos de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}$, se deduce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{(\ell-j)/2} \frac{L_{n+k}^{(\alpha+j)}(x)}{L_{n+h}^{(\alpha+\ell)}(x)} = (-x)^{(\ell-j)/2}, \quad j, \ell \in \mathbb{R}, \quad h, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.16)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. De la Proposición 2.2.1 se sigue que

$$\frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{j+1} n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)}{n^{k/2} L_n^{(\alpha)}(x)} \frac{1}{n^{k/2}}.$$

Tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{j+1} n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)}{n^{k/2} L_n^{(\alpha)}(x)} \frac{1}{n^{k/2}} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{j+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)}{n^{k/2} L_n^{(\alpha)}(x)} \frac{1}{n^{k/2}} \right). \end{aligned}$$

Teniendo presente que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k B_{n,k}^{[j]}$ está acotado para todo $\beta \in \mathbb{R}$ (ver (2.12)), usando que, por (2.16), $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)}{n^{k/2} L_n^{(\alpha)}(x)}$ está acotado en compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ y para cualquier $k \in \{1, 2, \dots, j+1\}$ se obtiene el resultado buscado. ■

De lo anterior se deduce directamente la asintótica fuerte exterior de los polinomios $L_n^{(\alpha, M_n)}$ que, por la Proposición 2.3.1, es la misma que la de los polinomios de clásicos de Laguerre.

Corolario 2.3.1 *Se tiene que*

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha, M_n)}(x) &\approx \frac{1}{2} \pi^{-1/2} e^{x/2} (-x)^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} e^{2(-nx)^{1/2}} \\ &\quad \times \left[\sum_{k=0}^{p-1} C_k(x) n^{-k/2} + O(n^{-p/2}) \right], \end{aligned}$$

en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, donde $C_k(x)$ es independiente de n .

2.4 ASINTÓTICA TIPO MEHLER–HEINE

Acabamos de ver que la parte discreta del producto (2.2) no influye en la asintótica fuerte exterior de la sucesión de polinomios $L_n^{(\alpha, M_n)}$. Entonces, ¿cómo influye esta parte discreta? La perturbación que se ha introducido en el producto escalar estándar ha sido en el origen. Así, intuitivamente parece razonable pensar

que esa perturbación afecte asintóticamente, alrededor del origen, a los polinomios. Además, surge la cuestión sobre si el tamaño de la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ influirá en dicha asintótica y si lo hace, cómo será esta influencia. La respuesta viene dada por la asintótica local conocida como fórmula tipo Mehler-Heine.

Teorema 2.4.1 Sean $\alpha > -1$ y $\{M_n\}_{n \geq 0}$ satisfaciendo (2.3). Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x/n)}{n^\alpha} = \begin{cases} d_{\alpha, j}(x), & \text{si } \beta < 2j + \alpha + 1, \\ \lambda d_{\alpha, j}(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha, 0}(x), & \text{si } \beta = 2j + \alpha + 1, \\ c_{\alpha, 0}(x), & \text{si } \beta > 2j + \alpha + 1, \end{cases} \quad (2.17)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, con

$$\lambda = \frac{M\Gamma(\alpha + 1)}{(\alpha + 2j + 1)\Gamma^2(\alpha + j + 1) + M\Gamma(\alpha + 1)}, \quad (2.18)$$

donde J_α es la función de Bessel de primera especie (ver (1.16)), y donde denotamos

$$c_{\alpha, k}(x) = x^{-\frac{\alpha-k}{2}} J_{\alpha+k}(2\sqrt{x}),$$

$$d_{\alpha, j}(x) = c_{\alpha, 0}(x) + (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1) \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j - k + 2)} c_{\alpha, k}(x).$$

Demostración: Para demostrar este resultado debemos de comenzar reescalando la variable $x \mapsto x/n$ de la relación algebraica entre las familias de polinomios ortogonales $L_n^{(\alpha, M_n)}$ y $L_n^{(\alpha)}$ dada en la Proposición 2.2.1. Así pues, para $n \geq j$,

$$\begin{aligned} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x/n)}{n^\alpha} &= \frac{L_n^{(\alpha)}(x/n)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{j+1} B_{n, k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x/n)}{n^\alpha} \\ &= \frac{L_n^{(\alpha)}(x/n)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{j+1} n^k B_{n, k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x/n)}{(n-k)^{\alpha+k}} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{\alpha+k}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

La demostración del resultado se obtiene siguiendo los siguientes pasos:

1. Utilizar la Proposición 2.2.2.
2. Tener en cuenta la fórmula de Mehler-Heine para los polinomios de Laguerre clásicos (ver (1.19) y la Nota 1.5.1), con k un número entero no negativo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha+k)}(x/n)}{(n-k)^{\alpha+k}} = x^{-\frac{\alpha-k}{2}} J_{\alpha+k}(2\sqrt{x}),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Usando lo anterior en cada uno de los sumandos de (2.19) se tiene el resultado buscado. Veámoslo, por ejemplo, para el caso $\beta = 2j + \alpha + 1$. El resto de los casos se demuestra de manera análoga.

Partimos de la expresión de los polinomios $L_n^{(\alpha, M_n)}$ con la variable reescalada, es decir, de (2.19).

$$\frac{L_n^{(\alpha)}(x/n)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{j+1} n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x/n)}{(n-k)^{\alpha+k}} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{\alpha+k}.$$

Aplicando límites

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{L_n^{(\alpha)}(x/n)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{j+1} n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x/n)}{(n-k)^{\alpha+k}} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{\alpha+k} \right) \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) M \Gamma(j+1) \Gamma(\alpha+1)}{C_{\alpha,j,M} \Gamma(j-k+2)} x^{-\frac{\alpha-k}{2}} J_{\alpha+k}(2\sqrt{x}) \\ &= c_{\alpha,0}(x) + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) M \Gamma(j+1) \Gamma(\alpha+1)}{C_{\alpha,j,M} \Gamma(j-k+2)} c_{\alpha,k}(x) \\ &= c_{\alpha,0}(x) + (\alpha + 2j + 1) \Gamma(j+1) \lambda \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j-k+2)} c_{\alpha,k}(x), \end{aligned}$$

donde λ fue definido en (2.18).

Sumando y restando $\lambda c_{\alpha,0}(x)$ en la expresión anterior obtenemos $\lambda d_{\alpha,j}(x) + (1 - \lambda) c_{\alpha,0}$ como queríamos probar. ■

Nota 2.4.1 Es importante aclarar la interpretación de este resultado. Por (2.3) se tiene que, asintóticamente, la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ se comporta como $M_n \approx Mn^{-\beta}$. El Teorema 2.4.1 establece que existe un valor, $2j + \alpha + 1$, que depende del orden de la derivada que hemos introducido en el producto escalar (2.2) y del parámetro α , tal que si la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ es suficientemente pequeña, esto es, $\beta > 2j + \alpha + 1$, entonces la parte discreta del producto escalar (2.2) no ejerce ninguna influencia en el comportamiento asintótico local alrededor del origen. Sin embargo, si es suficientemente grande ($\beta < 2j + \alpha + 1$) entonces sí influye en la asintótica local, esto es, la asintótica tipo Mehler-Heine varía significativamente y la función límite es una combinación lineal de $j + 2$ funciones de la forma $x^{-\frac{\alpha-k}{2}} J_{\alpha+k}(2\sqrt{x})$.

El caso de transición aparece cuando $\beta = 2j + \alpha + 1$. Entonces, la función límite es una combinación convexa de las dos funciones límites de los casos $\beta < 2j + \alpha +$

1 y $\beta > 2j + \alpha + 1$. Este es el único caso donde la constante M determinada por (2.3) tiene influencia en el comportamiento asintótico.

Posteriormente en el Capítulo 4, con una técnica más general, veremos cómo estas cantidades $2j + \alpha + 1$ realmente vienen determinadas por el comportamiento asintótico de los polinomios núcleo.

Para ejemplificar estos comentarios, supongamos $j = 3$ y $\alpha = 2$. En este caso, $2j + \alpha + 1 = 9$. Entonces, las fórmulas tipo Mehler-Heine dadas en el Teorema 2.4.1 serán iguales para las sucesiones con término general

$$M_n = \frac{5}{n^7}, \quad M_n = \frac{4}{n^2}, \quad M_n = 8 \quad \text{o} \quad M_n = n^{1000}.$$

Por otra parte, las sucesiones de término general

$$M_n = \frac{3}{n^{10}}, \quad M_n = \frac{5}{n^{100} + 3} \quad \text{o} \quad M_n = \frac{6}{n^{1000} + 1},$$

tienen la misma fórmula Mehler-Heine que la que se obtiene para los polinomios clásicos de Laguerre.

También es importante mencionar que este teorema obviamente generaliza los resultados obtenidos en [53] y en [52] para los casos $j = 0$ y $j = 1$, respectivamente (ver también la tesis doctoral [51]).

Para su verificación usaremos la misma notación de [53] y [52]. Sean

$$g_{\alpha,i}(x) = x^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha+2i}(2\sqrt{x}),$$

$$h_{\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha + 2} (g_{\alpha,2}(x) - (\alpha + 2)g_{\alpha,1}(x) - g_{\alpha,0}(x)),$$

$$k_{\alpha}(x) = \frac{(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 4)g_{\alpha,0}(x) + M(\alpha + 2)h_{\alpha}(x)}{(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 4) + M(\alpha + 2)}.$$

En la siguiente proposición resumimos las fórmulas para los casos $j = 0$ y $j = 1$, (ver [53] y [52], respectivamente).

Proposición 2.4.1 Sea $\alpha > -1$,

- Caso $j = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x/n)}{n^\alpha} = \begin{cases} -g_{\alpha,1}(x), & \text{si } \beta < \alpha + 1, \\ \frac{\Gamma(\alpha + 2) g_{\alpha,0}(x) - M g_{\alpha,1}(x)}{\Gamma(\alpha + 2) + M}, & \text{si } \beta = \alpha + 1, \\ g_{\alpha,0}(x), & \text{si } \beta > \alpha + 1. \end{cases}$$

- Caso $j = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x/n)}{n^\alpha} = \begin{cases} h_\alpha(x), & \text{si } \beta < \alpha + 3, \\ k_\alpha(x), & \text{si } \beta = \alpha + 3, \\ g_{\alpha,0}(x), & \text{si } \beta > \alpha + 3, \end{cases}$$

en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración: La demostración se hará por separado en cada uno de los tres casos.

Para mostrar el resultado sólo es necesario recordar la relación de recurrencia de las funciones de Bessel, (ver (1.17)),

Caso $j = 0$.

- Si $\beta > \alpha + 1$, entonces $g_{\alpha,0}(x) = x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) = c_{\alpha,0}(x)$.
- Si $\beta < \alpha + 1$, entonces del Teorema 2.4.1 y (1.17) tenemos que

$$\begin{aligned} d_{\alpha,j}(x) &= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) - (\alpha + 1)x^{-\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}} \left(J_\alpha(2\sqrt{x}) - (\alpha + 1)x^{-\frac{1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \right) \\ &= -x^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) = -g_{\alpha,1}(x). \end{aligned}$$

- Si $\beta = \alpha + 1$, para demostrar este caso escribimos cómo quedaría la expresión (2.17) en el Teorema 2.4.1 y luego desarrollamos el resultado obtenido en [53], y veremos que ambos coinciden.

Por el Teorema 2.4.1, al ser $j = 0$ se tiene que $\lambda = \frac{M}{\Gamma(\alpha+2)+M}$,

$$\begin{aligned} \lambda d_{\alpha,j}(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x) &= \lambda (c_{\alpha,0}(x) - (\alpha + 1)c_{\alpha,1}(x)) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x) \\ &= c_{\alpha,0}(x) - (\alpha + 1)\lambda c_{\alpha,1}(x) \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) - \frac{M(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 2) + M} x^{-\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Desarrollando la expresión dada en [53], obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+2)x^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha}(2\sqrt{x}) - Mx^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha+2}(2\sqrt{x})}{\Gamma(\alpha+2) + M} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+2)x^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha}(2\sqrt{x}) + Mx^{-\frac{\alpha}{2}}\left(J_{\alpha}(2\sqrt{x}) - (\alpha+1)x^{-\frac{1}{2}}J_{\alpha+1}(2\sqrt{x})\right)}{\Gamma(\alpha+2) + M} \\
&= x^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha}(2\sqrt{x}) - \frac{M(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2) + M}x^{-\frac{\alpha-1}{2}}J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

Caso $j = 1$.

- Si $\beta > \alpha + 3$, entonces $g_{\alpha,0}(x) = x^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha}(2\sqrt{x}) = c_{\alpha,0}(x)$.
- Si $\beta < \alpha + 3$, en primer lugar, observemos que iterando (1.17) se obtiene

$$\begin{aligned}
J_{\alpha+4}(2\sqrt{x}) &= (\alpha+3)(\alpha+2)x^{-\frac{2}{2}}J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \\
&\quad - (\alpha+3)x^{-\frac{1}{2}}J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) - J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}). \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Vamos a comenzar con la expresión obtenida en [52] y veamos que podemos recuperar la obtenida en el Teorema 2.4.1. Para simplificar la notación, denotaremos

$$J_{\alpha+k} := J_{\alpha+k}(2\sqrt{x}).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
h_{\alpha}(x) &= -\frac{x^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha} + (\alpha+2)x^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha+2} - x^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha+4}}{(\alpha+2)} \\
&= -x^{-\frac{\alpha}{2}}\frac{J_{\alpha} + (\alpha+2)J_{\alpha+2} - (\alpha+3)(\alpha+2)x^{-1}J_{\alpha+2}}{(\alpha+2)} \\
&\quad - x^{-\frac{\alpha}{2}}\frac{(\alpha+3)x^{-\frac{1}{2}}J_{\alpha+1} + J_{\alpha+2}}{(\alpha+2)} \\
&= -x^{-\frac{\alpha}{2}}\frac{J_{\alpha} + (\alpha+3)J_{\alpha+2} + (\alpha+3)x^{-\frac{1}{2}}J_{\alpha+1} - (\alpha+3)(\alpha+2)x^{-1}J_{\alpha+2}}{(\alpha+2)} \\
&= -x^{-\frac{\alpha}{2}}\frac{-(\alpha+2)J_{\alpha} + (\alpha+2)(\alpha+3)x^{-\frac{1}{2}}J_{\alpha+1} - (\alpha+2)(\alpha+3)x^{-1}J_{\alpha+2}}{(\alpha+2)} \\
&= x^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha} - (\alpha+3)x^{-\frac{\alpha-1}{2}}J_{\alpha+1} + (\alpha+3)x^{-\frac{\alpha-2}{2}}J_{\alpha+2} = d_{\alpha,j}(x).
\end{aligned}$$

- Si $\beta = \alpha + 3$, para demostrar este caso escribimos cómo quedaría la expresión dada en el Teorema 2.4.1 y luego comenzamos con la expresión de [52], y veremos que ambas coinciden. Usaremos la notación anterior donde $J_{\alpha+k} = J_{\alpha+k}(2\sqrt{x})$ para, de nuevo, simplificar la notación.

$$\begin{aligned}
& \lambda d_{\alpha,j}(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x) \\
&= \lambda c_{\alpha,0}(x) + \lambda(\alpha + 3)(-c_{\alpha,1}(x) + c_{\alpha,2}(x)) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x) \\
&= c_{\alpha,0}(x) - \frac{M(\alpha + 3)c_{\alpha,1}(x)}{(\alpha + 3)(\alpha + 1)^2\Gamma(\alpha + 1) + M} + \frac{M(\alpha + 3)c_{\alpha,2}(x)}{(\alpha + 3)(\alpha + 1)^2\Gamma(\alpha + 1) + M} \\
&= x^{\frac{-\alpha}{2}}J_{\alpha} - \frac{M(\alpha + 3)x^{\frac{-\alpha-1}{2}}J_{\alpha+1}}{(\alpha + 1)^2(\alpha + 3)\Gamma(\alpha + 1) + M} + \frac{M(\alpha + 3)x^{\frac{-\alpha-2}{2}}J_{\alpha+2}}{(\alpha + 1)^2(\alpha + 3)\Gamma(\alpha + 1) + M}.
\end{aligned}$$

Ahora partimos de la expresión de [52] y veamos que recuperamos esta última expresión. Al igual que el caso anterior vamos a usar las expresiones (1.17) y (2.20).

$$\begin{aligned}
k_{\alpha}(x) &= \frac{((\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 4) - M)x^{\frac{-\alpha}{2}}J_{\alpha} - M(\alpha + 2)x^{\frac{-\alpha}{2}}J_{\alpha+2} + Mx^{\frac{-\alpha}{2}}J_{\alpha+4}}{(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 4) + M(\alpha + 2)} \\
&= \frac{((\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 4) - M)x^{\frac{-\alpha}{2}}J_{\alpha} - M(\alpha + 2)x^{\frac{-\alpha}{2}}J_{\alpha+2} + Mx^{\frac{-\alpha}{2}}J_{\alpha+4}}{(\alpha + 2)((\alpha + 3)(\alpha + 1)^2\Gamma(\alpha + 1) + M)} \\
&= \frac{((\alpha + 1)^2(\alpha + 2)(\alpha + 3)\Gamma(\alpha + 1) + M(\alpha + 2))x^{\frac{-\alpha}{2}}J_{\alpha}}{(\alpha + 2)((\alpha + 1)^2(\alpha + 3)\Gamma(\alpha + 1) + M)} \\
&\quad + \frac{-M(\alpha + 3)(\alpha + 2)x^{\frac{-\alpha-1}{2}}J_{\alpha+1} + M(\alpha + 3)(\alpha + 2)x^{\frac{-\alpha-2}{2}}J_{\alpha+2}}{(\alpha + 2)((\alpha + 1)^2(\alpha + 3)\Gamma(\alpha + 1) + M)}.
\end{aligned}$$

Simplificando de forma directa esta expresión recuperamos la misma que hemos obtenido anteriormente. Así queda probado este caso. ■

Nota 2.4.2 El Teorema 2.4.1 prueba la conjetura formulada en [52] sobre el comportamiento asintótico tipo Mehler-Heine de la sucesión de polinomios ortogonales $\{L_n^{(\alpha, M_n)}\}_{n \geq 0}$ en el caso general.

2.5 ESTUDIO DE LOS CEROS

En esta sección se demostrará que los ceros de los polinomios tipo Laguerre-Sobolev, $L_n^{(\alpha, M_n)}$, son reales, simples y a lo más uno se encuentra en el exterior del intervalo $(0, \infty)$. Posteriormente veremos qué ocurre con los ceros de las funciones

límite estudiadas en el Teorema 2.4.1 con el objeto de analizar el comportamiento asintótico de los ceros de $L_n^{(\alpha, M_n)}$.

Para el siguiente resultado usaremos las técnicas de [141, Teo. 4.1], y además [5, Lema 2], donde se estableció este resultado para el caso de productos escalares no variantes. En este capítulo incluimos la demostración en el caso variante, por completitud, pero en los siguientes capítulos la omitiremos.

Proposición 2.5.1 *El polinomio $L_n^{(\alpha, M_n)}$ tiene n ceros reales y simples y, a lo más, uno de ellos se encuentra en el intervalo $(-\infty, 0]$.*

Demostración: Sean $\xi_{n,1} < \xi_{n,2} < \dots < \xi_{n,k}$ los ceros positivos y de orden impar de $L_n^{(\alpha, M_n)}$. Entonces definimos $\varphi(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_k)$. Por tanto, $\varphi L_n^{(\alpha, M_n)}$ no cambia de signo en el intervalo $(0, \infty)$. Queremos ver que el grado de φ es n o $n - 1$. Lo vamos a probar por reducción al absurdo. Supongamos que grado de $\varphi \leq n - 2$. Usando el hecho que la derivada j -ésima de $x\varphi$ evaluada en $x = 0$ es $j\varphi^{(j-1)}(0)$, así como la ortogonalidad de $L_n^{(\alpha, M_n)}$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 = (\varphi(x), L_n^{(\alpha, M_n)}(x))_{LS, n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty \varphi(x) L_n^{(\alpha, M_n)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &\quad + M_n \varphi^{(j)}(0) \left(L_n^{(\alpha, M_n)} \right)^{(j)}(0), \\ 0 = (x\varphi(x), L_n^{(\alpha, M_n)}(x))_{LS, n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty x\varphi(x) L_n^{(\alpha, M_n)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &\quad + j M_n \varphi^{(j-1)}(0) \left(L_n^{(\alpha, M_n)} \right)^{(j)}(0). \end{aligned}$$

Puesto que $\varphi L_n^{(\alpha, M_n)}$ es positivo en el intervalo $(0, \infty)$, las integrales son positivas en ese intervalo. Entonces se tiene que $\varphi^{(j)}(0) \left(L_n^{(\alpha, M_n)} \right)^{(j)}(0) < 0$ así como $\varphi^{(j-1)}(0) \left(L_n^{(\alpha, M_n)} \right)^{(j)}(0) < 0$, lo que implica que $\varphi^{(j)}(0)$ y $\varphi^{(j-1)}(0)$ son del mismo signo. Pero esto es una contradicción con el hecho de que si $p(x)$ es un polinomio con ceros reales y simples en $(0, \infty)$ entonces $\text{sgn}(p^{(j)}(0)) = (-1)^j \text{sgn}(p(0))$. Por tanto, $\varphi^{(j)}(0)$ y $\varphi^{(j-1)}(0)$ han de tener signo distinto. Hemos llegado a una contradicción y, por tanto, el grado de φ es n o $n - 1$. ■

La intención ahora es estudiar los ceros de las funciones límite dados por $c_{\alpha,0}$, $d_{\alpha,j}$ y $\lambda d_{\alpha,j} + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}$ definidas en el Teorema 2.4.1. Usando la definición de la

función de Bessel de primera especie (ver (1.16)), las funciones $c_{\alpha,k}$ definidas en el Teorema 2.4.1 vienen dadas por

$$c_{\alpha,k}(x) = x^{-(\alpha+k)/2} J_{\alpha+k}(2\sqrt{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i! \Gamma(i + \alpha + k + 1)}.$$

A continuación probamos el siguiente resultado sobre ceros de las funciones límite en el Teorema 2.4.1.

Proposición 2.5.2 Sean $c_{\alpha,k}$ las funciones definidas en el Teorema 2.4.1. Entonces

- (a) Las funciones $c_{\alpha,k}$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, no tienen ningún cero en $(-\infty, 0]$.
- (b) Para $j \geq 1$, la función $d_{\alpha,j}$ tiene exactamente un cero negativo. En el caso $j = 0$, $d_{\alpha,0}$ tiene un cero en el origen.
- (c) Para $j \geq 1$, la combinación lineal convexa $\lambda d_{\alpha,j} + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}$ tiene un cero en $(-\infty, 0]$ si y sólo si

$$M \geq \frac{(1 + \alpha + 2j)(1 + \alpha + j)\Gamma^2(1 + \alpha + j)}{j\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Para $j = 0$, $\lambda d_{\alpha,0} + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}$ tiene solamente ceros positivos.

Demostración: (a) Puesto que $c_{\alpha,k}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i! \Gamma(i + \alpha + k + 1)}$, para todo $x \in (-\infty, 0]$ $c_{\alpha,k}(x) > 0$ y, por tanto, no hay ceros en $(-\infty, 0]$.

(b) En el caso $j = 0$, aplicando (1.17) se tiene que

$$\begin{aligned} d_{\alpha,0}(x) &= c_{\alpha,0}(x) - (\alpha + 1)c_{\alpha,1}(x) \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(2\sqrt{x}) - (\alpha + 1)x^{-\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}} \left(J_{\alpha}(2\sqrt{x}) - \frac{(\alpha + 1)}{\sqrt{x}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \right) \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) = -x c_{\alpha,2}(x), \end{aligned}$$

y, en consecuencia, $x = 0$ es un cero de $d_{\alpha,0}$, de donde se sigue el resultado.

Para demostrar el resto de este caso se sigue el siguiente esquema:

1. Probar que $d_{\alpha,j}(0) < 0$.
2. Probar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} d_{\alpha,j}(x) = +\infty$.

3. Probar que solamente puede haber un cero negativo.

Pasamos a obtener $d_{\alpha,j}(0)$.

$$\begin{aligned}
 d_{\alpha,j}(0) &= c_{\alpha,0}(0) + (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1) \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j - k + 2)} c_{\alpha,k}(0) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1) \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j - k + 2)\Gamma(\alpha + k + 1)} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1)}{\Gamma(j - k + 2)\Gamma(\alpha + k + 1)} \\
 &= -\frac{j}{(\alpha + j + 1)\Gamma(\alpha + 2)} < 0.
 \end{aligned}$$

En el siguiente paso,

$$\begin{aligned}
 d_{\alpha,j}(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + 1)} \\
 &\quad + (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1) \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j - k + 2)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + k + 1)} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + 1)} \\
 &\quad \times \left(1 + (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1) \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j - k + 2) \prod_{c=1}^k (i + \alpha + c)} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + 1)} \left(1 - \frac{\alpha + 2j + 1}{i + \alpha + j + 1} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{j+1} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + 1)} \left(1 - \frac{\alpha + 2j + 1}{i + \alpha + j + 1} \right) \\
 &\quad + \sum_{i=j+2}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + 1)} \left(1 - \frac{\alpha + 2j + 1}{i + \alpha + j + 1} \right).
 \end{aligned}$$

Tomando $x < 0$, podemos observar que el primer término en la última igualdad es un polinomio en x de grado $j + 1$ con coeficiente líder positivo, y el segundo término es una serie donde todos los términos son positivos cuando $x \in (-\infty, 0)$. Por tanto, $\lim_{x \rightarrow -\infty} d_{\alpha,j}(x) = +\infty$.

Dado que $d_{\alpha,j}(x)$ es una función continua podemos decir que al menos hay un cero en $(-\infty, 0)$. Para mostrar que solamente hay un cero basta con recordar que los

polinomios $L_n^{(\alpha, M_n)}$ tienen a lo más un cero negativo, de acuerdo con la Proposición 2.5.1. Aplicando el teorema de Hurwitz se tiene esta situación.

(c) Para demostrar este caso se va seguir el siguiente esquema, muy similar al caso (b).

1. Probar que $\lambda d_{\alpha, j}(0) + (1 - \lambda)c_{\alpha, 0}(0) < 0$ si

$$M > \frac{(1 + \alpha + 2j)(1 + \alpha + j)\Gamma^2(1 + \alpha + j)}{j\Gamma(\alpha + 1)}, \quad j \geq 1.$$

2. Probar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\lambda d_{\alpha, j}(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha, 0}(x)) = +\infty$.

3. Probar que solamente puede haber un cero negativo.

Al igual que en el caso anterior, el caso $j = 0$ se demuestra por separado. Sabemos que los ceros de los polinomios $L_n^{(\alpha, M_n)}$ son reales, simples y positivos cuando $j = 0$. Usando este hecho junto con

$$\lambda d_{\alpha, j}(0) + (1 - \lambda)c_{\alpha, 0}(0) = \left(1 - \frac{M}{M + \Gamma(\alpha + 2)}\right) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} > 0,$$

es suficiente aplicar el teorema de Hurwitz para deducir que, en este caso, $\lambda d_{\alpha, j}(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha, 0}(x)$ no tiene ceros negativos.

Para $j \geq 1$ calculamos $\lambda d_{\alpha, j}(0) + (1 - \lambda)c_{\alpha, 0}(0)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} & \lambda d_{\alpha, j}(0) + (1 - \lambda)c_{\alpha, 0}(0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &+ \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k \Gamma(j+1) M (\alpha + 2j + 1) \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(j - k + 2) \Gamma(\alpha + k + 1) (\Gamma^2(\alpha + j + 1) (\alpha + 2j + 1) + M \Gamma(\alpha + 1))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{(\alpha + 2j + 1) M}{(\alpha + j + 1) (M \Gamma(\alpha + 1) + (\alpha + 2j + 1) \Gamma^2(\alpha + j + 1))}. \end{aligned}$$

Entonces, $\lambda d_{\alpha, j}(0) + (1 - \lambda)c_{\alpha, 0}(0) < 0$ si y sólo si

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{(\alpha + 2j + 1) M}{(\alpha + j + 1) (M \Gamma(\alpha + 1) + (\alpha + 2j + 1) \Gamma^2(\alpha + j + 1))} < 0,$$

esto es,

$$M > \frac{(\alpha + 2j + 1)(\alpha + j + 1)\Gamma^2(\alpha + j + 1)}{j\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Usando los resultados de (a) y (b) y que $\lambda \in (0, 1)$ se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\lambda d_{\alpha,j}(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x)) = +\infty.$$

Finalmente, realizando un razonamiento similar al del caso (b), obtenemos

- Si $M > \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+1)j}$ podría haber 1, 3, 5, ... ceros negativos, pero aplicando el teorema de Hurwitz a lo más hay uno. Por tanto, deducimos que en este caso hay un solo cero negativo.
- Si $M < \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+1)j}$ podría haber 0, 2, 4, ... ceros negativos. Pero como sabemos que los polinomios $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$ tienen a lo más un cero negativo, y utilizando el teorema de Hurwitz concluimos que, para este valor de M , no hay ceros negativos.
- Si $M = \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{j\Gamma(\alpha+1)}$ la función límite $\lambda d_{\alpha,j}(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x)$ tiene un cero en $x = 0$.

■

En estos momentos ya estamos en condiciones de establecer el comportamiento asintótico de los ceros de $L_n^{(\alpha, M_n)}$. En concreto, presentamos el comportamiento asintótico de los ceros reescalados.

Proposición 2.5.3 Sean $s_{n,1} < s_{n,2} < \dots < s_{n,n}$ los ceros de $L_n^{(\alpha, M_n)}$. Entonces,

(a) Si $\beta < 2j + \alpha + 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ns_{n,i} = \mathfrak{d}_{\alpha,i},$$

donde $\mathfrak{d}_{\alpha,i}$ denota el i -ésimo cero real de la función $d_{\alpha,j}$.

(b) Si $\beta = 2j + \alpha + 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ns_{n,i} = t_{\alpha,i},$$

donde $t_{\alpha,i}$ denota el i -ésimo cero real de la función $\lambda d_{\alpha,j} + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}$.

(c) Si $\beta > 2j + \alpha + 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ns_{n,i} = \frac{j_{\alpha,i}^2}{4},$$

donde $j_{\alpha,i}$ son los ceros positivos de la función J_α .

Demostración: La demostración de este resultado es una consecuencia directa del teorema de Hurwitz, el Teorema 2.4.1 y la Proposición 2.5.2. ■

2.6 EXPERIMENTACIÓN NUMÉRICA

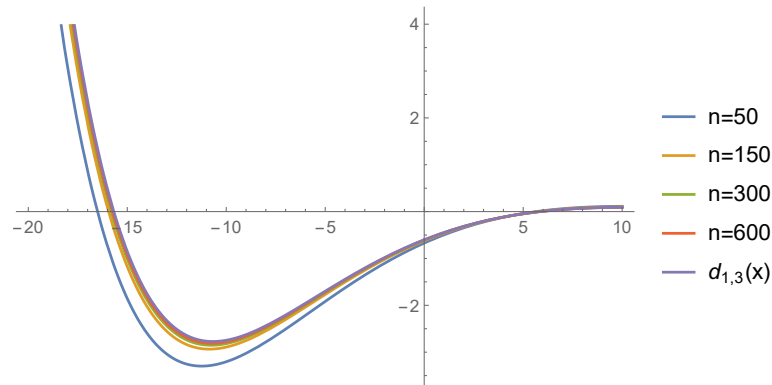
Las fórmulas tipo Mehler-Heine dadas en el Teorema 2.4.1 son especialmente adecuadas para describir el cero más pequeño de los polinomios $L_n^{(\alpha, M_n)}$. Usando el software *Mathematica* vamos a calcular los cuatro primeros ceros reescalados de dichos polinomios hasta el grado 600. En las siguientes tablas y figuras mostraremos ciertas experimentaciones numéricas, prestando especial atención a los diferentes casos descritos en las Proposiciones 2.5.2 y 2.5.3. También es importante aclarar que en todos ellos se han considerado las sucesiones de término general $M_n = \frac{M}{n^\beta}$.

Tabla 2.1.: Caso $\beta < 2j + \alpha + 1$

	$ns_{n,1}$	$ns_{n,2}$	$ns_{n,3}$	$ns_{n,4}$
$n = 50$	-16,499895	5,649929	17,916242	35,758173
$n = 150$	-15,941311	5,787543	18,270102	36,342549
$n = 300$	-15,808299	5,823032	18,362221	36,498456
$n = 600$	-15,742730	5,840946	18,408856	36,578796
Limit	$\mathfrak{d}_{1,1} = -15,677791$	$\mathfrak{d}_{1,2} = 5,858974$	$\mathfrak{d}_{1,3} = 18,455882$	$\mathfrak{d}_{1,4} = 36,658511$

Los valores utilizados son $\beta = 2/3$, $j = 3$, $\alpha = 1$, $M = 10$.

En la primera tabla se observa, de acuerdo con la Proposición 2.5.2, que $d_{\alpha,j}$ tiene un cero negativo. Además en las figuras 2.1 y 2.2 se pueden apreciar estos polinomios reescalados y la función límite. Hay que señalar que en la figura 2.2 se ha realizado un “zoom” para mostrar con más claridad el primer cero.

Figura 2.1.: Caso $\beta < 2j + \alpha + 1$

Veamos el caso $\beta > 2j + \alpha + 1$. De acuerdo con la Proposición 2.5.2, para este caso no hay ceros negativos como se puede ver en la tabla 2.2. Las figuras 2.3 y 2.4 muestran los resultados de esta tabla.

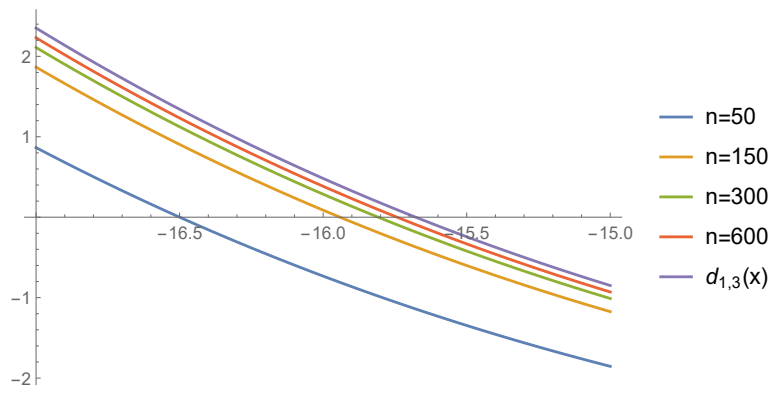


Figura 2.2.: Caso $\beta < 2j + \alpha + 1$

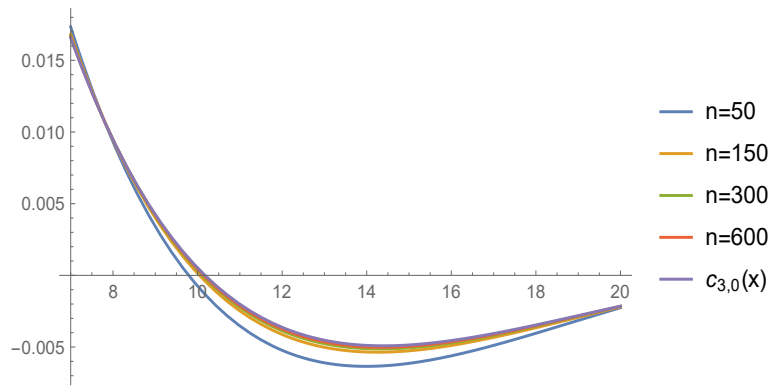


Figura 2.3.: Caso $\beta > 2j + \alpha + 1$

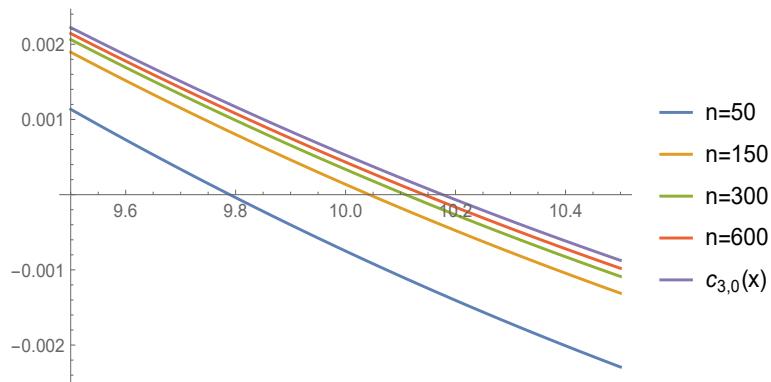


Figura 2.4.: Caso $\beta > 2j + \alpha + 1$

Tabla 2.2.: Caso $\beta > 2j + \alpha + 1$

	$ns_{n,1}$	$ns_{n,2}$	$ns_{n,3}$	$ns_{n,4}$
$n = 50$	9,789487	22,922933	40,778399	63,406163
$n = 150$	10,043227	23,508339	41,798630	64,950778
$n = 300$	10,109353	23,662250	42,070188	65,368620
$n = 600$	10,142840	23,740411	42,208618	65,582661
Limit	$\frac{j_{3,1}^2}{4} = 10,176616$	$\frac{j_{3,2}^2}{4} = 23,819393$	$\frac{j_{3,3}^2}{4} = 42,348862$	$\frac{j_{3,4}^2}{4} = 65,800214$

Los valores utilizados son $\beta = 20$, $j = 5$, $\alpha = 3$, $M = 32$.

Por último vamos a ilustrar el caso (c) de la Proposición 2.5.2. En esa Proposición se probó que la función $\lambda d_{\alpha,j} + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}$ tiene un cero negativo si $M > \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+1)^j}$. Si $M = \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+1)^j}$ la función límite tiene un cero en $x = 0$. Para ello tomaremos los valores $j = 2$, $\alpha = -0,5$ y $\beta = 2j + \alpha + 1 = 4,5$; para estos valores se realizará una experimentación con $M = 6$ (figuras 2.5 y 2.6), otra con $M = \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+1)^j} = \frac{405\sqrt{\pi}}{128} \simeq 5,60$ (figuras 2.7 y 2.8) y, finalmente, $M = 5$ (figuras 2.9 y 2.10).

Tabla 2.3.: Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$

	$ns_{n,1}$	$ns_{n,2}$	$ns_{n,3}$	$ns_{n,4}$
$n = 5$	0,361472	4,013769	13,273140	29,911532
$n = 25$	0,045234	3,322179	12,692342	27,484004
$n = 50$	-0,004229	3,265756	12,708104	27,510178
$n = 150$	-0,037898	3,232452	12,729267	27,562443
$n = 300$	-0,046386	3,224667	12,735899	27,579910
$n = 600$	-0,050639	3,220855	12,739418	27,589310
Limit	$t_{-0,5,1} = -0,054898$	$t_{-0,5,2} = 3,217098$	$t_{-0,5,3} = 12,743072$	$t_{-0,5,4} = 27,599156$

Los valores utilizados son $\beta = 4,5$, $j = 2$, $\alpha = -0,5$, $M = 6$.

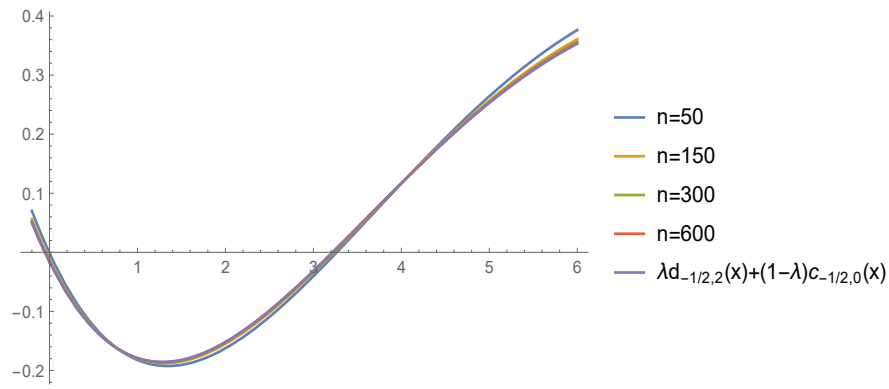


Figura 2.5.: Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 6$

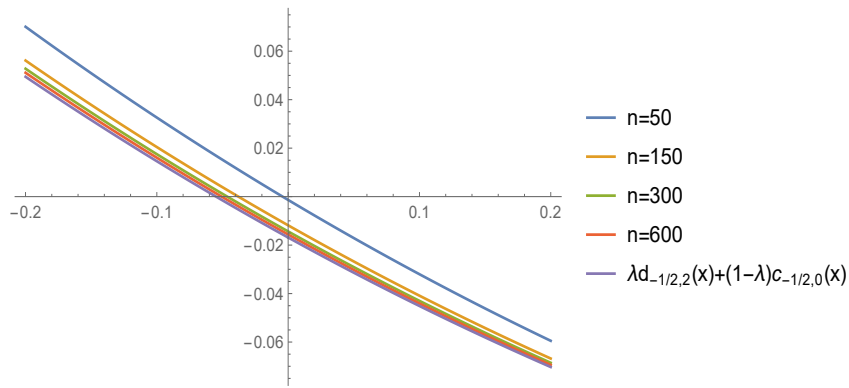


Figura 2.6.: Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 6$

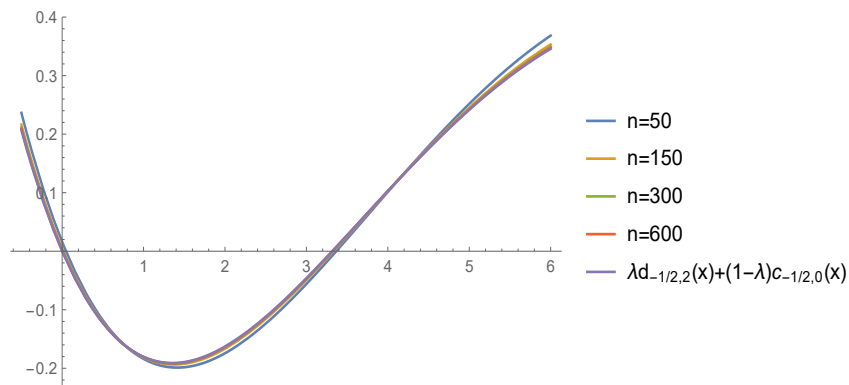


Figura 2.7.: Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = \frac{405\sqrt{\pi}}{128}$

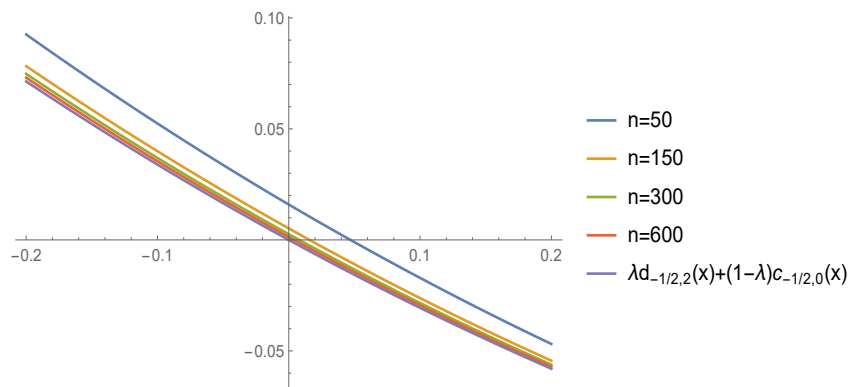


Figura 2.8.: Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = \frac{405\sqrt{\pi}}{128}$

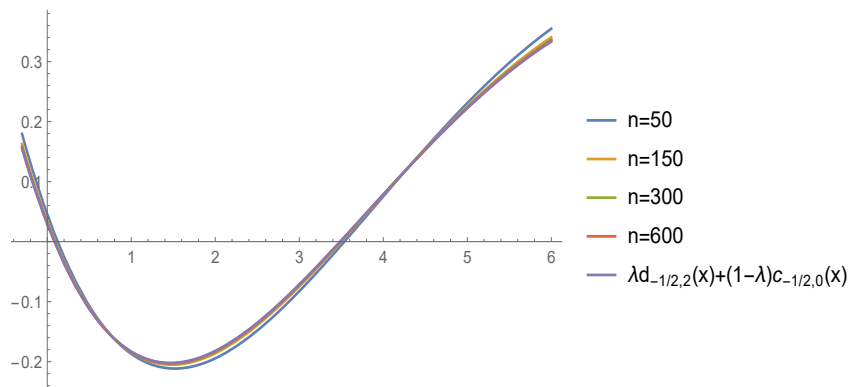


Figura 2.9.: Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 5$

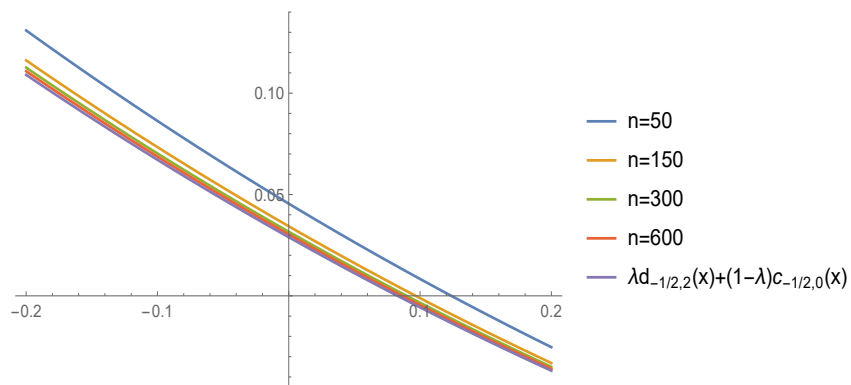


Figura 2.10.: Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 5$

Tabla 2.4.: Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$

	$ns_{n,1}$	$ns_{n,2}$	$ns_{n,3}$	$ns_{n,4}$
$n = 50$	0,046939	3,366935	12,798708	27,592451
$n = 150$	0,015775	3,332807	12,818347	27,643538
$n = 300$	0,007902	3,324785	12,824596	27,660707
$n = 600$	0,004400	3,320850	12,827923	27,669958
Limit	$t_{-0,5,1} = 0$	$t_{-0,5,2} = 3,316967$	$t_{-0,5,3} = 12,831384$	$t_{-0,5,4} = 27,679654$

Los valores utilizados han sido $\beta = 4,5$, $j = 2$, $\alpha = -0,5$, $M = \frac{405\sqrt{\pi}}{128}$.

Tabla 2.5.: Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$

	$ns_{n,1}$	$ns_{n,2}$	$ns_{n,3}$	$ns_{n,4}$
$n = 50$	0,123833	3,536847	12,953595	27,733338
$n = 150$	0,096668	3,502138	12,971011	27,782683
$n = 300$	0,089784	3,493918	12,976693	27,799408
$n = 600$	0,086323	3,489870	12,979735	27,808435
Limit	$t_{-0,5,1} = 0,082864$	$t_{-0,5,2} = 3,485872$	$t_{-0,5,3} = 12,982911$	$t_{-0,5,4} = 27,817907$

Los valores utilizados han sido $\beta = 4,5$, $j = 2$, $\alpha = -0,5$, $M = 5$.

POLINOMIOS ORTOGONALES TIPO JACOBI-SOBOLEV VARIANTES

3.1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

En el capítulo anterior se consideró el producto escalar variante asociado con un peso de Laguerre, dado por la expresión

$$(f, g)_{LS, n} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx + M_n f^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad j \geq 0.$$

En este capítulo se considera un producto escalar similar pero en esta ocasión involucrando al peso Jacobi. Concretamente, el objetivo es obtener propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales respecto al producto escalar variante

$$(f, g)_{JS, n} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + M_n f^{(j)}(1)g^{(j)}(1), \quad (3.1)$$

donde $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $j \geq 0$ y con M_n verificando una condición similar a la considerada en (2.3). Suponemos que M_n es una sucesión de números reales no negativos verificando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n n^\gamma = M > 0, \quad (3.2)$$

con $\gamma \in \mathbb{R}$. Denotaremos mediante $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ los polinomios ortogonales con respecto a (3.1), con coeficiente líder

$$\frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{2^n \Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}, \quad (3.3)$$

esto es,

$$P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x) = \frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{2^n \Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} x^n + \dots$$

En este caso no hemos podido establecer una relación análoga a (2.5) entre los polinomios $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ y los polinomios clásicos de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$ donde conozcamos explícitamente los coeficientes y así poder determinar su asintótica. Por ello, se van a usar las técnicas de los artículos [155] y [156] desarrolladas para el caso no variante, adaptándolas al caso variante. Este será el paso decisivo para abordar el caso general en el Capítulo 4.

Un resultado preliminar fue obtenido en [148] cuando $j = 0$ en el producto escalar (3.1). En dicha situación sí se pueden usar las técnicas del Capítulo 2. En dicho trabajo el autor considera el producto estándar variante,

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + M_n p(1)q(1), \quad \alpha, \beta > -1, \quad (3.4)$$

y la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ verificando (3.2). Si denotamos por $\hat{P}_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ los polinomios ortogonales mónicos con respecto a (3.4), éstos se pueden escribir (ver [148])

$$\hat{P}_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x) = \tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) + a_{n-1} \tilde{P}_{n-1}^{(\alpha+1, \beta)}(x),$$

donde $\tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)}$ denota el polinomio mónico clásico de Jacobi y a_{n-1} viene dado por

$$a_{n-1} = - \frac{M_n \tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)}(1)}{\int_{-1}^1 \tilde{P}_{n-1}^{(\alpha+1, \beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + M_n \tilde{P}_{n-1}^{(\alpha+1, \beta)}(1)}.$$

Centrándonos en las fórmulas asintóticas tipo Mehler–Heine, el autor encuentra que hay tres casos diferentes para $\hat{P}_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ dependiendo, al igual que en el capítulo anterior, del tamaño de la sucesión de masas $\{M_n\}_{n \geq 0}$. También estudia la localización de los ceros de $\hat{P}_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ y, ya que nos encontramos ante un producto escalar estándar, todos los ceros de $\hat{P}_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ se encuentran en el interior del intervalo $[-1, 1]$, pero su comportamiento asintótico también vendrá determinado por el correspondiente comportamiento de la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$.

Nuestro objetivo es establecer cómo el tamaño de la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ tiene influencia en el comportamiento asintótico de los polinomios $\{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\}_{n \geq 0}$. Veremos que esta influencia es solamente local, esto es, alrededor del punto donde hemos colocado la perturbación, en nuestro caso $x = 1$. Además, probamos que esta influencia depende del tamaño de la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$, del parámetro α y del orden de derivada en (3.1). Una vez establecida esta asintótica local tipo Mehler–Heine obtendremos como consecuencia la relación asintótica entre los ceros de los

polinomios tipo Jacobi–Sobolev variantes y los ceros de combinaciones lineales de funciones de Bessel de primera especie.

Recordamos, al igual que en el capítulo previo, que el producto escalar variante (3.1) induce una tabla de polinomios ortogonales, esto es $\{P_n^{(\alpha, \beta, M_k)}\}_{n \geq 0}$. Pero solamente vamos a trabajar con la diagonal de dicha tabla, esto es, $\{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\}_{n \geq 0} = \{P_0^{(\alpha, \beta, M_0)}, P_1^{(\alpha, \beta, M_1)}, P_2^{(\alpha, \beta, M_2)}, \dots\}$.

La estructura del capítulo es la siguiente: la Sección 3.2 se dedica a la obtención de propiedades algebraicas y asintóticas de la sucesión de polinomios $\{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\}_{n \geq 0}$ que serán de utilidad en la Sección 3.3 para obtener la asintótica tipo Mehler–Heine y, en consecuencia, el comportamiento asintótico de los ceros. Finalmente, en la Sección 3.4, se ilustrarán los resultados obtenidos con algunos experimentos numéricos.

3.2 PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$

Los polinomios clásicos de Jacobi constituyen una base del espacio $\mathbb{P}[x]$, por tanto, los polinomios tipo Jacobi–Sobolev, $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$, se pueden escribir como:

$$P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} P_i^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (3.5)$$

La idea ahora es conseguir una relación algebraica entre $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ y los polinomios clásicos de Jacobi. Siguiendo exactamente los mismos pasos que [132, Sect. 2] para un producto escalar no variante, (ver (1.38)), se llega a la expresión

$$P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \frac{M_n \left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(j)}(1)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(1, 1)} K_{n-1}^{(j,0)}(1, x). \quad (3.6)$$

De esta expresión (3.6), es fácil obtener que

$$\left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\right)^{(j)}(1) = \frac{\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(j)}(1)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(1, 1)}. \quad (3.7)$$

La fórmula (3.7) será necesaria posteriormente a la hora comparar las normas de los polinomios clásicos de Jacobi y los polinomios tipo Jacobi–Sobolev variantes.

El objetivo ahora es conocer algunos comportamientos asintóticos que, posteriormente, darán pie a obtener las fórmulas asintóticas tipo Mehler–Heine para la SPO $\{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\}_{n \geq 0}$.

Lema 3.2.1 Sean $\{P_n^{(\alpha,\beta,M_n)}\}_{n \geq 0}$ los polinomios ortogonales con respecto al producto (3.1) y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces

(A)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(P_n^{(\alpha,\beta,M_n)}\right)^{(k)}(1)}{\left(P_n^{(\alpha,\beta)}\right)^{(k)}(1)} = \begin{cases} \frac{k-j}{\alpha+j+k+1}, & \text{si } \gamma < 2(\alpha+2j+1), \\ \theta_{\alpha,\beta,j,k}, & \text{si } \gamma = 2(\alpha+2j+1), \\ 1, & \text{si } \gamma > 2(\alpha+2j+1), \end{cases} \quad (3.8)$$

donde $\theta_{\alpha,\beta,j,k}$ es una combinación lineal convexa de los otros dos casos dada por

$$\theta_{\alpha,\beta,j,k} = \lambda \frac{k-j}{\alpha+j+k+1} + 1 - \lambda,$$

con

$$\lambda = \frac{M}{M + \Gamma^2(\alpha+j+1)2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+2j+1)} \in (0,1). \quad (3.9)$$

(B) $\left(P_n^{(\alpha,\beta,M_n)}, P_n^{(\alpha,\beta,M_n)}\right)_{JS,n} \approx ||P_n^{(\alpha,\beta)}||^2.$

Nota 3.2.1 En el Lema 1 de [119] viene dado el valor explícito de $\theta_{\alpha,\beta,j,k}$ que es

$$\theta_{\alpha,\beta,j,k} = \frac{M(k-j) + \Gamma^2(\alpha+j+1)2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+2j+1)(\alpha+j+k+1)}{(\alpha+j+k+1)(M + \Gamma^2(\alpha+j+1)2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+2j+1))}.$$

Demostración: Primero vamos a comprobar, usando el criterio de Stolz, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}^{(j,k)}(1,1)}{n^{2\alpha+2j+2k+2}} \in \mathbb{R}.$$

Observemos que

$$n^{2\alpha+2j+2k+2} - (n-1)^{2\alpha+2j+2k+2} \approx (2\alpha+2j+2k+2)n^{2\alpha+2j+2k+1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}^{(j,k)}(1,1)}{n^{2\alpha+2j+2k+2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}^{(j,k)}(1,1) - K_{n-2}^{(j,k)}(1,1)}{n^{2\alpha+2j+2k+2} - (n-1)^{2\alpha+2j+2k+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\right)^{(j)}(1) \left(P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\right)^{(k)}(1)}{||P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}||^2 (2\alpha+2j+2k+2) n^{2\alpha+2j+2k+1}}. \end{aligned}$$

Seguiremos los siguientes pasos. En primer lugar utilizamos las fórmulas (1.8) y (1.9) y, finalmente, la fórmula de Stirling (2.13), obteniendo

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}^{(j,k)}(1,1)}{n^{2\alpha+2j+2k+2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}\right)^{(j)}(1) \left(P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}\right)^{(k)}(1)}{\|P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}\|^2 (2\alpha + 2j + 2k + 2) n^{2\alpha+2j+2k+1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^j} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+j)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n-j)\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{1}{2^k} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n-k)\Gamma(\alpha+k+1)}}{\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2(n+\alpha/2+\beta/2-1/2)} \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n)\Gamma(n+\alpha+\beta)} 2(\alpha+j+k+1) n^{2\alpha+2j+2k+1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+j)\Gamma(n+\alpha+\beta+k)\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n)C_{\alpha, \beta, j, k}}{\Gamma(n-j)\Gamma(n+\alpha+\beta)\Gamma(n-k)\Gamma(n+\beta)n^{2\alpha+2j+2k}} \\
&= C_{\alpha, \beta, j, k} \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

con $C_{\alpha, \beta, j, k}$ una constante que viene dada por

$$C_{\alpha, \beta, j, k} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+j+1)\Gamma(\alpha+k+1)2^{\alpha+\beta+j+k+1}(\alpha+j+k+1)}.$$

A continuación, se demostrará el apartado (A) del lema. De (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\right)^{(k)}(1)}{\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(k)}(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{M_n K_{n-1}^{(j,k)}(1,1)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(1,1)} \frac{\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(j)}(1)}{\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(k)}(1)} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{M_n n^\gamma \frac{1}{2^j} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+j+1)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{K_{n-1}^{(j,k)}(1,1)}{n^{2\alpha+2j+2k+2}} n^{2\alpha+2j+2k+2-\gamma}}{\frac{1}{2^k} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\alpha+k+1)} \left(1 + M_n n^\gamma \frac{K_{n-1}^{(j,j)}(1,1)}{n^{2\alpha+4j+2}} n^{2\alpha+4j+2-\gamma} \right)} \right). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Definimos las siguientes sucesiones convergentes:

$$\begin{aligned}
a_n &:= M_n n^\gamma \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M, \\
b_{n,j,k} &:= \frac{K_{n-1}^{(j,k)}(1,1)}{n^{2\alpha+2j+2k+2}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,j,k} = C_{\alpha, \beta, j, k}.
\end{aligned}$$

De esta forma el límite (3.10) puede expresarse como

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a_n b_{n,j,k} \frac{1}{2^j} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+j+1)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(\alpha+j+1)} n^{2\alpha+2j+2k+2-\gamma}}{\frac{1}{2^k} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\alpha+k+1)} (1 + a_n b_{n,j,j} n^{2\alpha+4j+2-\gamma})} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2^k \Gamma(\alpha+k+1)}{2^j \Gamma(\alpha+j+1)} a_n b_{n,j,k} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+j+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n-j+1)} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{n^{2\alpha+2j+2k+2-\gamma}}{(1 + a_n b_{n,j,j} n^{2\alpha+4j+2-\gamma})} \right) \\
&= 1 - \frac{2^{k-j} \Gamma(\alpha+k+1) C_{\alpha,\beta,j,k} M}{\Gamma(\alpha+j+1)} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2\alpha+4j+2-\gamma}}{(1 + a_n b_{n,j,j} n^{2\alpha+4j+2-\gamma})} \\
&= 1 - \frac{2^{k-j} \Gamma(\alpha+k+1) C_{\alpha,\beta,j,k} M}{\Gamma(\alpha+j+1)} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n^{2\alpha+4j+2-\gamma}} + M C_{\alpha,\beta,j,j}}.
\end{aligned}$$

Aparecen tres casos en función de $2(\alpha + 2j + 1)$.

1. $\gamma > 2(\alpha + 2j + 1)$. Entonces, se tiene

$$1 - \frac{2^{k-j} \Gamma(\alpha+k+1) C_{\alpha,\beta,j,k} M}{\Gamma(\alpha+j+1)} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n^{2\alpha+4j+2-\gamma}} + M C_{\alpha,\beta,j,j}}.$$

Puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n^{2\alpha+4j+2-\gamma}} + M C_{\alpha,\beta,j,j}} = 0,$$

se deduce el resultado.

2. $\gamma < 2(\alpha + 2j + 1)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{2^{k-j} \Gamma(\alpha+k+1) C_{\alpha,\beta,j,k} M}{\Gamma(\alpha+j+1)} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n^{2\alpha+4j+2-\gamma}} + M C_{\alpha,\beta,j,j}} \\
&= 1 - \frac{2^{k-j} \Gamma(\alpha+k+1) C_{\alpha,\beta,j,k} M}{\Gamma(\alpha+j+1)} \times \frac{1}{M C_{\alpha,\beta,j,j}} \\
&= 1 - \frac{\alpha + 2j + 1}{\alpha + j + k + 1} \\
&= \frac{k - j}{\alpha + j + k + 1}.
\end{aligned}$$

3. $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{2^{k-j}\Gamma(\alpha+k+1)C_{\alpha, \beta, j, k}M}{\Gamma(\alpha+j+1)} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n^{2\alpha+4j+2-\gamma}} + MC_{\alpha, \beta, j, j}} \\
&= 1 - \frac{2^{k-j}\Gamma(\alpha+k+1)C_{\alpha, \beta, j, k}M}{\Gamma(\alpha+j+1)} \times \frac{1}{1 + MC_{\alpha, \beta, j, j}} \\
&= 1 - \frac{M}{\Gamma^2(\alpha+j+1)2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+j+k+1)} \\
&\quad \times \frac{\Gamma^2(\alpha+j+1)2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+2j+1)}{M + \Gamma^2(\alpha+j+1)2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+2j+1)} \\
&= \frac{M(k-j) + \Gamma^2(\alpha+j+1)2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+2j+1)(\alpha+j+k+1)}{(\alpha+j+k+1)(M + \Gamma^2(\alpha+j+1)2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+2j+1))} \\
&= \theta_{\alpha, \beta, j, k}.
\end{aligned}$$

Para concluir la demostración del Lema 3.2.1, se mostrará que la norma de los polinomios ortogonales con respecto a (3.1) y la norma de los Jacobi clásicos tienen el mismo comportamiento asintótico. Partimos de la expresión (3.5), es decir,

$$P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} P_i^{(\alpha, \beta)}(x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}, P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\right)_{JS, n} \\
&= \left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}, P_n^{(\alpha, \beta)}\right)_{JS, n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} \left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}, P_i^{(\alpha, \beta)}\right)_{JS, n} \\
&= \int_{-1}^1 \left(P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\right)^2 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_i^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\
&\quad + M_n \left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\right)^{(j)}(1) \left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(j)}(1) \\
&= \|P_n^{(\alpha, \beta)}\|^2 + \frac{M_n \left(\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(j)}(1)\right)^2}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(1, 1)}, \tag{3.11}
\end{aligned}$$

donde se ha usado la ortogonalidad de los polinomios $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ respecto al producto $(\cdot, \cdot)_{JS,n}$, la ortogonalidad de los polinomios de Jacobi (ver (1.5)) y la fórmula (3.7). Veamos ahora el comportamiento asintótico. De (3.11) se deduce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}, P_n^{(\alpha, \beta, M_n)})_{JS,n}}{\|P_n^{(\alpha, \beta)}\|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{M_n \left((P_n^{(\alpha, \beta)})^{(j)}(1) \right)^2}{\|P_n^{(\alpha, \beta)}\|^2 \left(1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(1, 1) \right)} \right).$$

Para probar el apartado (B) del lema basta con demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M_n \left((P_n^{(\alpha, \beta)})^{(j)}(1) \right)^2}{\|P_n^{(\alpha, \beta)}\|^2 \left(1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(1, 1) \right)} \right) = 0.$$

Para ello usamos las fórmulas (1.8), (1.9), (2.13), y el comportamiento asintótico de $K_{n-1}^{(j,j)}(1, 1)$ mostrado en la página 71.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M_n \left((P_n^{(\alpha, \beta)})^{(j)}(1) \right)^2}{\|P_n^{(\alpha, \beta)}\|^2 \left(1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(1, 1) \right)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M_n \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+j+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+j+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(\alpha+j+1)}}{\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \left(1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(1, 1) \right)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M_n \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+j+1)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+j+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{n^{-4j-2\alpha-\beta+\gamma}}{n^{-4j-2\alpha-\beta+\gamma}}}{\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{n^{-\beta}}{n^{-\beta}} \left(1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(1, 1) \frac{n^{2\alpha+4j+2-\gamma}}{n^{2\alpha+4j+2-\gamma}} \right)} \right). \end{aligned}$$

A continuación, se definen las siguientes sucesiones convergentes

$$\begin{aligned} a_n &:= M_n n^\gamma \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M, \\ b_n &:= \frac{\Gamma^2(n+\alpha+\beta+j+1)\Gamma(n+\alpha+1)n^{-4j-2\alpha-\beta}}{\Gamma(n-j+1)\Gamma^2(n+\alpha+\beta+1)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \\ c_n &:= \frac{\Gamma(n+\beta+1)n^{-\beta}}{\Gamma(n+1)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1, \\ d_n &:= M_n n^\gamma \frac{K_{n-1}^{(j,j)}(1, 1)}{n^{2\alpha+4j+2}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = MC_{\alpha, \beta, j, j}, \end{aligned}$$

y la constante $E_{\alpha, j}$,

$$E_{\alpha, j} := \frac{1}{2^{2j}} \frac{1}{\Gamma^2(\alpha + j + 1)}.$$

De esta forma el límite anterior se expresa como

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M_n \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+j+1)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+j+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{n^{-4j-2\alpha-\beta+\gamma}}{n^{-4j-2\alpha-\beta+\gamma}}}{\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{n^{-\beta}}{n^{-\beta}} \left(1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(1, 1) \frac{n^{2\alpha+4j+2-\gamma}}{n^{2\alpha+4j+2-\gamma}} \right)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{\alpha, j} a_n b_n n^{4j+2\alpha+\beta-\gamma}}{c_n \frac{2^{\alpha+\beta+1} n^\beta}{2n+\alpha+\beta+1} (1 + d_n n^{4j+2\alpha+2-\gamma})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{\alpha, j} a_n b_n (2n + \alpha + \beta + 1) n^{4j+2\alpha-\gamma}}{2^{\alpha+\beta+1} n^{4j+2\alpha+2-\gamma} \left(\frac{c_n}{n^{4j+2\alpha+2-\gamma}} + c_n d_n \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{\alpha, j} a_n b_n (2n + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha+\beta+1} n^2 \left(\frac{c_n}{n^{4j+2\alpha+2-\gamma}} + c_n d_n \right)} = 0, \end{aligned}$$

para cualquier valor de $\gamma \in \mathbb{R}$. ■

Corolario 3.2.1 Sean $\{p_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\}_{n \geq 0}$ los polinomios ortonormales con respecto al producto (3.1) y $\{p_n^{(\alpha, \beta)}\}_{n \geq 0}$ los polinomios clásicos de Jacobi ortonormales. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(p_n^{(\alpha, \beta, M_n)} \right)^{(k)}(1)}{\left(p_n^{(\alpha, \beta)} \right)^{(k)}(1)} = \begin{cases} \frac{k-j}{\alpha+j+k+1}, & \text{si } \gamma < 2(\alpha + 2j + 1), \\ \theta_{\alpha, \beta, j, k}, & \text{si } \gamma = 2(\alpha + 2j + 1), \\ 1, & \text{si } \gamma > 2(\alpha + 2j + 1). \end{cases}$$

Demostración: Es una aplicación inmediata del Lema 3.2.1. ■

Para abordar el problema de encontrar la fórmula asintótica tipo Mehler–Heine necesitamos expandir los polinomios tipo Jacobi–Sobolev discretos adecuadamente. Con este objetivo buscamos una expansión finita de estos polinomios en términos de polinomios de Jacobi clásicos, similar a la obtenida en (2.5). El siguiente resultado nos da dicha expansión. En contextos más generales fue establecido en [156, Teo. 1].

Proposición 3.2.1 Existe una familia de números reales no idénticamente nula, que denotamos por $\{b_i(n)\}_{i=0}^{j+1}$, de manera que se tiene la siguiente relación algebraica,

$$P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x) = \sum_{i=0}^{j+1} b_i(n) (1-x)^i P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)}(x), \quad n \geq j+1. \quad (3.12)$$

Demostración: En el caso variante la demostración es análoga al Teorema 1 de [156]. Así, incluimos un esquema de la demostración, y posteriormente, en el Capítulo 4 la demostración de un resultado similar será omitida.

La idea es formar un sistema homogéneo de $j + 1$ ecuaciones y $j + 2$ incógnitas de forma que $b_i(n)$ sean solución de dicho sistema. La particularidad de este caso es que se pueden calcular explícitamente las entradas de la matriz del sistema. Vamos a demostrar que existen números reales $\{d_i(n)\}_{i=0}^{j+1}$ no todos nulos, tales que el polinomio $R_n(x)$ dado por $R_n(x) := \sum_{i=0}^{j+1} d_i(n)(1-x)^i P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)}(x)$ satisface

$$\left(R_n(x), (1-x)^k\right)_{JS,n} = 0, \quad \text{con } 0 \leq k \leq n-1.$$

Una vez probado esto, los polinomios R_n y $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ se diferencian solamente en una constante multiplicativa.

En primer lugar, para $j+1 \leq k \leq n-1$, el producto $(R_n(x), (1-x)^k)_{JS,n}$ es siempre cero, independientemente del valor de $d_i(n)$. Solamente es necesario usar la ortogonalidad de los polinomios clásicos de Jacobi.

Ahora falta probar que $(R_n(x), (1-x)^k)_{JS,n} = 0$ para $k = 0, \dots, j$. De aquí obtenemos el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales $Ab = O$, donde

$$A = \begin{pmatrix} c_{0,j} & c_{1,j} & c_{2,j} & c_{3,j} & \cdots & c_{j,j} & I_{j+1,j} + c_{j+1,j} \\ 0 & I_{1,0} & I_{2,0} & I_{3,0} & \cdots & I_{j,0} & I_{j+1,0} \\ 0 & 0 & I_{2,1} & I_{3,1} & \cdots & I_{j,1} & I_{j+1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{j,j-1} & I_{j+1,j-1} \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} d_0(n) \\ d_1(n) \\ \vdots \\ d_j(n) \\ d_{j+1}(n) \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando la fórmula ET II 284 (2) de [85], se tiene

$$\begin{aligned} I_{i,k} &= \int_{-1}^1 P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)}(x)(1-x)^{\alpha+i+k}(1+x)^\beta dx \\ &= \frac{2^{\beta+\alpha+i+k+1} \Gamma(\alpha+i+k+1) \Gamma(\beta+n-i+1) \Gamma(n-k)}{(n-i)! \Gamma(i-k) \Gamma(\beta+\alpha+k+n+2)}, \\ c_{i,j} &= (-1)^j j! M_n \left((1-x)^i P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)}(x) \right)^{(j)} \Big|_{x=1}. \end{aligned}$$

En particular,

$$c_{0,j} = j! M_n \left(P_n^{(\alpha, \beta)} \right)^{(j)} (1).$$

Tenemos un sistema lineal homogéneo de $j+1$ ecuaciones y $j+2$ incógnitas y con elementos diagonales distintos de cero, por tanto podemos asegurar que tiene solución no trivial para $\{d_i(n)\}_{i=0}^{j+1}$. El coeficiente líder debe ser distinto de cero ya que en caso contrario la condición $(R_n(x), (1-x)^k)_{S,n} \neq 0$ no se cumpliría salvo si R_n es el polinomio idénticamente 0, pero esto sería una contradicción. Puesto que el coeficiente líder es distinto de cero, tenemos que $R_n(x) = c(n) P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x)$ y, finalmente, escribimos

$$P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x) = \sum_{i=0}^{j+1} b_i(n) (1-x)^i P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)}(x), \quad b_i(n) = \frac{d_i(n)}{c(n)}.$$

■

A continuación establecemos el comportamiento asintótico de los coeficientes $\{b_i(n)\}_{i=0}^{j+1}$.

Lema 3.2.2 Sean $\{b_i(n)\}_{i=0}^{j+1}$ los coeficientes en (3.12). Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_i(n) = b_i \in \mathbb{R} \quad i \in \{0, 1, \dots, j+1\}.$$

Demostración: Empezamos calculando la derivada k -ésima de la expresión (3.12), y para ello aplicamos la regla de Leibnitz,

$$\begin{aligned} & \left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)} \right)^{(k)}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{j+1} b_i(n) \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \left((1-x)^i \right)^{(s)} \left(P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)} \right)^{(k-s)}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{j+1} b_i(n) \sum_{s=0}^{\min\{i, k\}} \binom{k}{s} (-1)^s \frac{i!}{(i-s)!} (1-x)^{i-s} \left(P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)} \right)^{(k-s)}(x), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha tenido en cuenta que $\left((1-x)^i \right)^{(s)} = 0, s \geq i+1$.

Evaluando en $x = 1$ queda solamente un sumando, que es el caso correspondiente a $s = i$, y obtenemos

$$\left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)} \right)^{(k)}(1) = \sum_{i=0}^k b_i(n) \binom{k}{i} (-1)^i i! \left(P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)} \right)^{(k-i)}(1). \quad (3.13)$$

Por el Lema 3.2.1 se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)})^{(k)}(1)}{(P_n^{(\alpha, \beta)})^{(k)}(1)}$ es un número real y, por otro lado, tenemos que de (3.13)

$$\frac{(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)})^{(k)}(1)}{(P_n^{(\alpha, \beta)})^{(k)}(1)} = \sum_{i=0}^k b_i(n) \binom{k}{i} (-1)^i i! A_i(k, n) \quad (3.14)$$

con $A_i(k, n) = \frac{(P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)})^{(k-i)}(1)}{(P_n^{(\alpha, \beta)})^{(k)}(1)}$. Veamos la existencia del $\lim_{n \rightarrow \infty} A_i(k, n)$, de donde, posteriormente, se podrá asegurar que los coeficientes $b_i(n)$ son convergentes. Usando (2.13) y (1.8) se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_i(k, n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{k-i}} \frac{\Gamma(n-i+\alpha+2i+\beta+k-i+1)}{\Gamma(n-i+\alpha+2i+\beta+1)} \frac{\Gamma(n-i+\alpha+2i+1)}{\Gamma(n-i-k+i+1)\Gamma(\alpha+2i+k-i+1)}}{\frac{1}{2^k} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\alpha+k+1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^i \Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+i+k+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+k+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+i+1)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(n+\alpha+i+1)}{\Gamma(n-k+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^i \Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+i+k+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+k+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+i+1)} \frac{n^{i-k}}{n^{i-k}} \\ &= \frac{2^i \Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+i+k+1)} := A_i(k, \alpha). \end{aligned}$$

■

Nota 3.2.2 Sea $b_i := \lim_{n \rightarrow \infty} b_i(n)$ con $i \in \{0, 1, \dots, j+1\}$. Los coeficientes b_i se calculan recursivamente a partir de (3.14). De hecho,

- Paso 1. Para $k = 0$ obtenemos b_0 .
- Paso 2. Para $k = 1$ calculamos b_1 de (3.14) a partir del paso 1. Similarmente, para $k \geq 2$ aplicamos (3.14) de forma recursiva.

Proposición 3.2.2 Sea $k \in \{0, 1, \dots, j+1\}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_k(n) = \begin{cases} a_k, & \text{si } \gamma > 2(\alpha + 2j + 1), \\ \lambda c_k + (1 - \lambda)a_k, & \text{si } \gamma = 2(\alpha + 2j + 1), \\ c_k, & \text{si } \gamma < 2(\alpha + 2j + 1), \end{cases} \quad (3.15)$$

con λ definido en (3.9), $a_k = \delta_{k,0}$ y

$$c_k = (-1)^k \frac{\frac{k-j}{\alpha+j+k+1} - \sum_{i=0}^{k-1} b_i \binom{k}{i} (-1)^i i! \frac{2^i \Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+i+1)}}{k! \frac{2^k \Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+2k+1)}},$$

donde, por convenio, $\sum_{i=0}^{-1} = 0$.

Demostración: La demostración de (3.15) ha de realizarse atendiendo al valor de γ . Por tanto, se divide en 3 casos.

Caso $\gamma > 2(\alpha + 2j + 1)$. Vamos a probar que $a_0 = 1$ y $a_k = 0$ si $k \in \{1, 2, \dots, j+1\}$.

Calculamos a_k de (3.14). Si $k = 0$, entonces

$$\frac{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(1)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(1)} = b_0(n) A_0(0, n).$$

Usando el Lema 3.2.1 y tomando límites, se obtiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_0(n) = a_0 = 1$. Si $k = 1$, de acuerdo con el Lema 3.2.1, tenemos

$$\frac{\left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\right)^{(1)}(1)}{\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(1)}(1)} = b_0(n) A_0(1, n) - b_1(n) A_1(1, n).$$

Tomando límites,

$$1 = 1 - a_1 A_1(1, \alpha) \Rightarrow a_1 = 0.$$

Aplicando el proceso recursivo descrito en la Nota 3.2.2 se prueba que $a_k = 0$ para $k \in \{1, 2, \dots, j+1\}$. Veamos, a modo de ilustración, el valor a_{j+1} .

$$\begin{aligned} \frac{\left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\right)^{(j+1)}(1)}{\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(j+1)}(1)} &= b_0(n) A_0(j+1, n) + \sum_{i=1}^j b_i(n) \binom{j+1}{i} (-1)^i i! A_i(j+1, n) \\ &+ b_{j+1}(n) (-1)^{j+1} (j+1)! A_{j+1}(j+1, n). \end{aligned}$$

Tomando límites y aplicando que $a_k = 0$ para $k \in \{1, 2, \dots, j\}$, tenemos que

$$1 = 1 + a_{j+1} (-1)^{j+1} (j+1)! A_{j+1}(j+1, \alpha) \Rightarrow a_{j+1} = 0.$$

Caso $\gamma < 2(\alpha + 2j + 1)$. Vamos a seguir el mismo procedimiento que en el caso anterior.

$$\frac{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(1)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(1)} = b_0(n)A_0(0, n).$$

Tomando límites en la siguiente expresión, cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene

$$c_0 = \frac{-j}{\alpha + j + 1}.$$

Para $k \geq 1$, volvemos a usar el Lema 3.2.1. Así, calculamos los coeficientes c_k de forma recursiva a partir de (3.14), y se tiene

$$\frac{\left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\right)^{(k)}(1)}{\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(k)}(1)} = \sum_{i=0}^{k-1} b_i(n) \binom{k}{i} (-1)^i i! A_i(k, n) + b_k(n) (-1)^k k! A_k(k, n).$$

Tomando límites y despejando c_k obtenemos

$$c_k = \frac{\frac{k-j}{\alpha+j+k+1} - \sum_{i=0}^{k-1} b_i(n) \binom{k}{i} (-1)^i i! \frac{2^i \Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+i+1)}}{(-1)^k k! \frac{2^k \Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+2k+1)}}.$$

Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1)$.

Utilizando el hecho de que $\theta_{\alpha, \beta, j, k}$, definido en el Lema 3.2.1, viene dado como una combinación lineal convexa, vamos a ver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_k(n) = \lambda c_k + (1 - \lambda) a_k$ cuando $k = 0$ y $k = 1$ y, posteriormente, usaremos el procedimiento recursivo.

Si $k = 0$, tenemos

$$\frac{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(1)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(1)} = b_0(n)A_0(0, n).$$

Tomando límites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_0(n) = \theta_{\alpha, \beta, j, 0} = \lambda \frac{-j}{\alpha + j + 1} + (1 - \lambda) = \lambda c_0 + (1 - \lambda) a_0,$$

donde hemos usado (3.8).

Si $k = 1$, tenemos

$$\frac{\left(P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\right)^{(1)}(1)}{\left(P_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{(1)}(1)} = b_0(n)A_0(1, n) - b_1(n)A_1(1, n).$$

Volviendo a tomar límites,

$$\theta_{\alpha, \beta, j, 1} = -\frac{2\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha + 3)} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_1(n) + (\lambda c_0 + (1 - \lambda)a_0).$$

Usando el Lema 3.2.1,

$$\lambda \frac{1 - j}{\alpha + j + 2} + (1 - \lambda) = -\frac{2\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha + 3)} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_1(n) + (\lambda c_0 + (1 - \lambda)a_0),$$

y, despejando,

$$\lambda \left(\frac{1 - j}{\alpha + j + 2} - c_0 \right) + (1 - \lambda)(1 - a_0) = -\frac{2\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha + 3)} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_1(n).$$

Finalmente, dividiendo por $-\frac{2\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha + 3)}$ nos queda que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_1(n) = \lambda c_1 + (1 - \lambda)0 = \lambda c_1 + (1 - \lambda)a_1.$$

Para terminar la demostración, si hemos aplicado el procedimiento recursivo hasta $k - 1$ obteniendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{k-1}(n) = \lambda c_{k-1} + (1 - \lambda)a_{k-1}, \quad (3.16)$$

veamos qué ocurre para k . Tomando límites en (3.14) y usando (3.16), se tiene

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha, \beta, j, k} &= \sum_{i=0}^{k-1} (\lambda c_i + (1 - \lambda)a_i) \binom{k}{i} (-1)^i i! \frac{2^i \Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + k + i + 1)} \\ &+ (-1)^k k! \frac{2^k \Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 2k + 1)} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_k(n). \end{aligned}$$

Del Lema 3.2.1 deducimos

$$\begin{aligned} \lambda \frac{k - j}{\alpha + j + k + 1} + (1 - \lambda) &= \sum_{i=0}^{k-1} (\lambda c_i + (1 - \lambda)a_i) \binom{k}{i} (-1)^i i! \frac{2^i \Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + k + i + 1)} \\ &+ (-1)^k k! \frac{2^k \Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 2k + 1)} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_k(n). \end{aligned}$$

Despejando el $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_k(n)$ y sacando factor común λ y $(1 - \lambda)$, se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_k(n) = \lambda c_k + (1 - \lambda) a_k.$$

■

En [119, Teo. 2] vienen dados de forma explícita los valores $\lambda c_k + (1 - \lambda) a_k$ con $k \in \{0, 1, \dots, j + 1\}$. Sin embargo, esta combinación lineal convexa permitirá dar una expresión más compacta de la asintótica tipo Mehler–Heine.

3.3 ASINTÓTICA TIPO MEHLER–HEINE Y CEROS

Como se ha indicado al comienzo este capítulo, nuestro objetivo es conocer la asintótica tipo Mehler–Heine de los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar (3.1). Para ello vamos a utilizar el siguiente

Lema 3.3.1 *Sea $\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}$ la SPO clásica de Jacobi. Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2n^2}\right)^i P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)}{n^\alpha} = 2^i \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha+2i}(x),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ y donde J_α denota la función de Bessel de primera especie (ver (1.16)).

Demostración: De la asintótica tipo Mehler–Heine para los polinomios clásicos de Jacobi, (ver [169, Th. 8.1.1] o (1.18)), se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x^{2i}}{2^i n^{2i}}\right) P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)}{n^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2i} P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)}{2^i n^{\alpha+2i}} \frac{(n-i)^{\alpha+2i}}{(n-i)^{\alpha+2i}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2i} P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)}{2^i (n-i)^{\alpha+2i}} \frac{(n-i)^{\alpha+2i}}{n^{\alpha+2i}} \\ &= 2^i \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha+2i}(x). \end{aligned}$$

■

Teorema 3.3.1 *Para la familia de polinomios $\{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\}_{n \geq 0}$ se tiene la siguiente fórmula tipo Mehler–Heine*

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(\cos(x/n))}{n^\alpha} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)}{n^\alpha} = \begin{cases} \phi_\alpha(x), & \text{si } \gamma > 2(\alpha + 2j + 1), \\ \psi_{\alpha, j}(x), & \text{si } \gamma = 2(\alpha + 2j + 1), \\ \varphi_{\alpha, j}(x), & \text{si } \gamma < 2(\alpha + 2j + 1), \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, donde

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha(x) &:= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(x), \\
\varphi_{\alpha, j}(x) &:= \sum_{i=0}^{j+1} c_i 2^i \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha+2i}(x), \\
\psi_{\alpha, j}(x) &:= \lambda \varphi_{\alpha, j}(x) + (1 - \lambda) \phi_\alpha(x),
\end{aligned}$$

con λ definido en (3.9) y los coeficientes c_i con $i \in \{0, 1, \dots, j+1\}$ definidos en la Proposición 3.2.2.

Demostración: Reescalando la variable en la expresión (3.12)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)}{n^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{j+1} b_i(n) \left(\frac{x^2}{2n^2}\right)^i P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)}{n^\alpha} \\
&= \sum_{i=0}^{j+1} \lim_{n \rightarrow \infty} b_i(n) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2n^2}\right)^i P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)}{n^\alpha}.
\end{aligned}$$

Usando los Lemas 3.2.2 y 3.3.1 y la Proposición 3.2.2 se tiene el resultado. ■

A continuación, analizamos los ceros de los polinomios $\{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\}_{n \geq 0}$ ortogonales con respecto a (3.1). El siguiente resultado es consecuencia de [141, Teo. 4] y también de [5, Lema 2] (ver comentarios y demostración de la Proposición 2.5.1).

Proposición 3.3.1 *El polinomio $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$, $n \geq 1$, tiene n ceros reales y simples y a lo más uno de ellos se encuentra en el exterior del intervalo $[-1, 1]$. Más concre-*

tamente, en caso de haber un cero fuera del intervalo $[-1, 1]$, este se encontrará en $(1, +\infty)$.

El objetivo es establecer el comportamiento asintótico de los ceros de $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$. El caso $j = 0$ fue considerado en [148]. Destacar que, en este caso, todos los ceros están en el intervalo $(-1, 1)$ ya que se trata de un producto escalar estándar. Así, a partir de ahora vamos a asumir que $j > 0$ y denotaremos mediante $y_{n,1} < y_{n,2} < \dots < y_{n,n-1} < y_{n,n}$ los ceros de $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$.

Nota 3.3.1 *Por coherencia con la notación seguida en esta memoria los ceros se han tomado enumerados de forma creciente. En los correspondientes resultados publicados en [119] los ceros fueron enumerados de forma decreciente.*

Proposición 3.3.2 *Sea $\{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales con respecto al producto (3.1). Para n suficientemente grande y $j > 0$, tenemos*

- Si $\gamma > 2(\alpha + 2j + 1)$, todos los ceros de $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ están en el intervalo $(-1, 1)$.
- Si $\gamma < 2(\alpha + 2j + 1)$, entonces $y_{n,n} > 1$ y el resto de ceros se encuentran en $(-1, 1)$.
- Si $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1)$, entonces $y_{n,n} > 1$ si y solo si

$$M > \frac{2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha + j + 1)(\alpha + 2j + 1)\Gamma^2(\alpha + j + 1)}{j},$$

y el resto de ceros se encuentran en $(-1, 1)$.

Demostración: Distinguimos tres casos en función del parámetro γ . Para la demostración básicamente se usa el apartado (A) del Lema 3.2.1 con $k = 0$ y el hecho de que el coeficiente líder de $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ (ver (3.3)) es positivo. Entonces,

- Si $\gamma > 2(\alpha + 2j + 1)$, del Lema 3.2.1 se tiene $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(1) > 0$ para n suficientemente grande. Además, usando la Proposición 3.3.1 tenemos que todos los ceros han de estar en $(-1, 1)$, porque al ser $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(1) > 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x) = +\infty$, sería necesario que hubiera 2, 4, 6, ... cambios de signo en el intervalo $(1, +\infty)$, pero esto contradice la Proposición 3.3.1. Por tanto, se concluye que todos los ceros están en $(-1, 1)$.

- Si $\gamma < 2(\alpha + 2j + 1)$, entonces $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(1) < 0$ para n suficientemente grande. Con esto, y con el hecho que $\lim_{x \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x) = +\infty$, se asegura que al menos hay un cambio de signo en el intervalo $(1, +\infty)$. De la Proposición 3.3.1 se sigue que solamente hay un cero.
- Si $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1)$, entonces $y_{n,n} > 1$ si y sólo si $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(1) < 0$ para n suficientemente grande. Esto ocurre si y sólo si

$$M > \frac{2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+j+1)(\alpha+2j+1)\Gamma^2(\alpha+j+1)}{j}.$$

Para terminar la demostración se razona de forma análoga a los casos anteriores.

■

Proposición 3.3.3 Sean $y_{n,1} < y_{n,2} < \dots < y_{n,n-1} < y_{n,n}$ los ceros en orden creciente de $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ y ϕ_α , $\varphi_{\alpha,j}$, $\psi_{\alpha,j}$ las funciones definidas en el Teorema 3.3.1. Asumiendo $j > 0$,

1. Si $\gamma > 2(\alpha + 2j + 1)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{2(1 - y_{n,n-i+1})} = j_{\alpha,i}, \quad i \geq 1,$$

donde $j_{\alpha,i}$ denota el i -ésimo cero positivo de la función de Bessel de primera especie.

2. Si $\gamma < 2(\alpha + 2j + 1)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{2(1 - y_{n,n-i+1})} = s_{\alpha,i-1}, \quad i \geq 2,$$

donde $s_{\alpha,i}$ denota el i -ésimo cero positivo de la función $\varphi_{\alpha,j}$.

3. Si $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1)$, tenemos los dos siguientes casos:

- a) Si $M \leq \frac{2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+j+1)(\alpha+2j+1)\Gamma^2(\alpha+j+1)}{j}$, entonces $y_{n,n} \leq 1$, para n suficientemente grande, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{2(1 - y_{n,n-i+1})} = t_{\alpha,i}, \quad i \geq 1,$$

donde $t_{\alpha,i}$ denota el i -ésimo cero positivo de la función $\psi_{\alpha,j}$.

b) Si $M > \frac{2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+j+1)(\alpha+2j+1)\Gamma^2(\alpha+j+1)}{j}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{2(1 - y_{n,n-i+1})} = t_{\alpha,i-1}, \quad i \geq 2,$$

donde $t_{\alpha,i}$ denota el i -ésimo cero positivo de la función $\psi_{\alpha,j}$.

Demostración: Solamente es necesario aplicar el Teorema 3.3.1, la Proposición 3.3.2, y el Teorema de Hurwitz (ver [169, Th. 1.91.3]). ■

Al igual que en el capítulo anterior, vamos a mostrar cómo nuestros resultados generalizan los resultados que encontramos en la literatura. Más concretamente, vamos a ver cómo nuestro Teorema 3.3.1 generaliza el resultado de [148] para $j = 0$.

En [148] el autor deduce las fórmulas tipo Mehler–Heine para el producto (3.1) cuando $j = 0$, usando los polinomios de Jacobi mónicos y, en nuestro caso, trabajamos con los polinomios de Jacobi de coeficiente líder $\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$.

Teniendo esto en cuenta, vamos a ver cómo recuperar el caso $j = 0$. Para ello usaremos la relación de recurrencia a tres términos de las funciones de Bessel de primer orden dada en (1.17) y la fórmula de duplicación de la función Gamma de Euler (ver, por ejemplo, [30, f. (5.5.5)]):

$$\Gamma(2z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})}{2^{1-2z}\sqrt{\pi}}. \quad (3.18)$$

En primer lugar, calculamos el comportamiento asintótico de nuestro coeficiente líder usando (2.13) y (3.18):

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{2^n\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{\Gamma\left(n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 1\right)}{2^n 2^{1-2n-\alpha-\beta-1} \Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1) \sqrt{\pi}} \\ &= \frac{2^{n+\alpha+\beta}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n + 1)} \frac{\Gamma\left(n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 1\right)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{2^{n+\alpha+\beta}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n + 1)} \frac{n^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}} \Gamma\left(n + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 1\right)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}} \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \frac{n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}}}{n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}}} \\ &\approx \frac{2^{n+\alpha+\beta}}{n^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Por otra parte, de [148] se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \hat{P}_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(\cos(x/n))}{n^{\alpha+1/2}} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\pi}}{2^\beta} x^2 z_{\alpha+2}(x), & \text{si } \gamma < 2\alpha + 2, \\ -\frac{\sqrt{\pi}}{2^\beta} (z_\alpha(x) + a_{\alpha, \beta, M} z_{\alpha+1}(x)), & \text{si } \gamma = 2\alpha + 2, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2^\beta} z_\alpha(x), & \text{si } \gamma > 2\alpha + 2, \end{cases} \quad (3.19)$$

donde,

$$\begin{aligned} z_\alpha(x) &= x^{-\alpha} J_\alpha(x) \\ a_{\alpha, \beta, M} &= \frac{-2M(\alpha + 1)}{M + 2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + 2) \Gamma(\alpha + 1)}, \end{aligned}$$

y $\{\hat{P}_n^{(\alpha, \beta, M_n)}\}_{n \geq 0}$ denota la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al producto (3.1) con $j = 0$.

Así pues, podemos escribir (3.19)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+\alpha+\beta} \hat{P}_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(\cos(x/n))}{n^{\alpha+1/2} \sqrt{\pi}} = \begin{cases} -\frac{1}{2^{-\alpha}} x^2 z_{\alpha+2}(x), & \text{si } \gamma < 2\alpha + 2, \\ \frac{1}{2^{-\alpha}} (z_\alpha(x) + a_{\alpha, \beta, M} z_{\alpha+1}(x)), & \text{si } \gamma = 2\alpha + 2, \\ \frac{1}{2^{-\alpha}} z_\alpha(x), & \text{si } \gamma > 2\alpha + 2, \end{cases}$$

y, además, observemos que

$$\frac{2^{n+\alpha+\beta} \hat{P}_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(\cos(x/n))}{n^{\alpha+1/2} \sqrt{\pi}} = \frac{\frac{2^{n+\alpha+\beta}}{n^{1/2} \sqrt{\pi}} \hat{P}_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(\cos(x/n))}{n^\alpha} = \frac{P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x)}{n^\alpha},$$

con la misma normalización que se usa en este capítulo. Así, basta probar que en los tres casos las funciones límite coinciden, cuestión que analizaremos a continuación.

■ Caso $\gamma > 2\alpha + 2$.

Esta situación es trivial pues las funciones límites coinciden directamente y el tamaño de la sucesión de masas no afecta a la asintótica tipo Mehler-Heine del producto escalar.

■ Caso $\gamma < 2\alpha + 2$.

Si usamos el Teorema 3.3.1, basta con calcular los valores de c_0 y c_1 y comprobar que tenemos la misma expresión usando (1.17).

En este caso $c_0 = 0$ y $c_1 = -1/2$. Por tanto,

$$\varphi_{\alpha,0}(x) = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha+2}(x) = -\frac{1}{2^{-\alpha}} x^2 x^{-\alpha-2} J_{\alpha+2}(x) = \frac{-x^2}{2^{-\alpha}} z_{\alpha+2}(x).$$

■ Caso $\gamma = 2\alpha + 2$.

Usando el Teorema 3.3.1, se obtiene $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $c_0 = 0$ y $c_1 = -1/2$.

El valor de λ se obtuvo en (3.9). Así,

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha,0}(x) &= \lambda \varphi_{\alpha,0}(x) + (1 - \lambda) \phi_{\alpha}(x) \\ &= -\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha+2}(x) + (1 - \lambda) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha}(x) \\ &= -\frac{M}{M + \Gamma^2(\alpha + 1) 2^{\alpha+\beta+1} (\alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha+2}(x) \\ &\quad + \frac{\Gamma^2(\alpha + 1) 2^{\alpha+\beta+1} (\alpha + 1)}{M + \Gamma^2(\alpha + 1) 2^{\alpha+\beta+1} (\alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha}(x) \\ &= -\frac{M}{M + \Gamma(\alpha + 2) 2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha+2}(x) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\alpha + 2) 2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + 1)}{M + \Gamma(\alpha + 2) 2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha}(x) \\ &= -\frac{M}{M + \Gamma(\alpha + 2) 2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} \\ &\quad \times \left(-J_{\alpha}(x) + (\alpha + 1) \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} J_{\alpha+1}(x) \right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\alpha + 2) 2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + 1)}{M + \Gamma(\alpha + 2) 2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha}(x) \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha}(x) + \frac{2M(\alpha + 1)}{M + 2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + 1)^2 (\alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha-1} J_{\alpha+1}(x) \\ &= \frac{1}{2^{-\alpha}} (z_{\alpha}(x) + a_{\alpha,\beta,M} z_{\alpha+1}(x)). \end{aligned}$$

3.4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Para finalizar este capítulo se ilustrarán con ejemplos numéricos los resultados obtenidos en el Teorema 3.3.1 y en las Proposiciones 3.3.2–3.3.3. Las fórmulas tipo Mehler-Heine (3.17) son especialmente útiles para mostrar el comportamiento de los ceros alrededor del punto $x = 1$, y esto es lo que se pretende mostrar en las siguientes tablas y gráficas. Para ello usaremos el software *Mathematica*®. En estos ejemplos usaremos sucesiones que verifican la condición (3.2) y que especificare-

mos en cada apartado. En todos los apartados hemos fijado el valor de $j = 3$, $\alpha = 3$ y $\beta = 1$ y se han calculado los polinomios ortogonales con respecto al producto

$$(f, g)_{JS,n} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^3(1+x)dx + M_n f^{(3)}(1)g^{(3)}(1).$$

- Caso $\gamma > 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Los valores elegidos han sido:

$$\gamma = 25, \quad y \quad M_n = \frac{3e^n}{(6e^n + 4)n^\gamma}.$$

Como ya se probó en el Teorema 3.3.1 la fórmula asintótica tipo Mehler–Heine para los polinomios $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ es la misma que la de los polinomios clásicos de Jacobi. Este hecho nos dice que en este caso la sucesión de masas $\{M_n\}_{n \geq 0}$ no afecta al comportamiento asintótico. Además, la Proposición 3.3.3 nos dice todos los ceros están contenidos en el intervalo $(-1, 1)$, lo que podemos ver en la Tabla 3.1 y en la Figura 3.1. Los resultados relativos a las fórmulas Mehler–Heine los mostramos en la Tabla 3.2 y en la Figura 3.2.

Tabla 3.1.: Caso $\gamma = 25 > 2(\alpha + 2j + 1) = 20$, $j = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $M_n = \frac{3e^n}{(6e^n + 4)n^\gamma}$.

	$y_{n,n-3}$	$y_{n,n-2}$	$y_{n,n-1}$	$y_{n,n}$
$n = 150$	0,994346	0,99636	0,997952	0,999125
$n = 250$	0,997937	0,998672	0,999253	0,999681
$n = 500$	0,999479	0,999665	0,999811	0,999919

Cuatro mayores ceros de $P_n^{(3,1,M_n)}$.

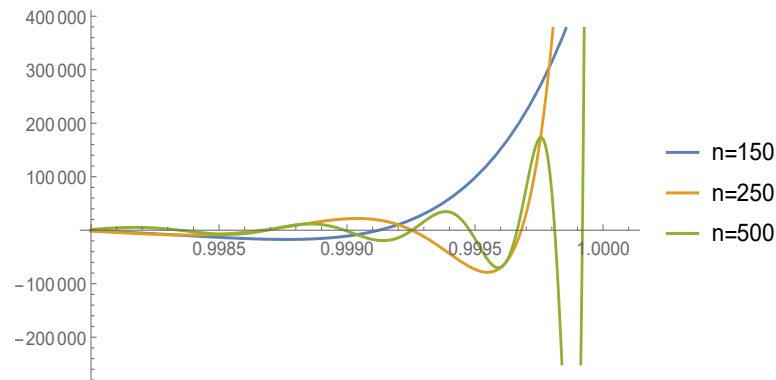


Figura 3.1.: Caso $\gamma = 25 > 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Representación de $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$ alrededor de $x = 1$.

Tabla 3.2.: Caso $\gamma = 25 > 2(\alpha + 2j + 1) = 20$, $j = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $M_n = \frac{3e^n}{(6e^n + 4)n^\gamma}$.

	$n\sqrt{2(1-y_{n,n})}$	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-1})}$	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-2})}$	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-3})}$
$n = 150$	6,27524	9,59956	12,7982	15,9503
$n = 250$	6,31687	9,66385	12,885	16,0602
$n = 500$	6,34839	9,71233	12,9501	16,1421
Límite	$j_{3,1} = 6,38016$	$j_{3,2} = 9,76102$	$j_{3,3} = 13,0152$	$j_{3,4} = 16,2235$

Ceros de ϕ_α y de los polinomios reescalados.

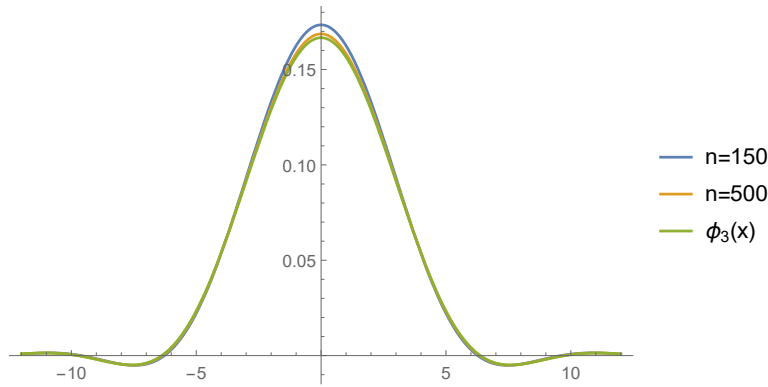


Figura 3.2.: Caso $\gamma = 25 > 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Función ϕ_α y polinomios reescalados.

■ Caso $\gamma < 2(\alpha + 2j + 1) = 20$.

De acuerdo con el Teorema 3.3.1 la fórmula de Mehler-Heine viene dada por la expresión $\varphi_{\alpha,3}(x) := \sum_{i=0}^4 c_i 2^i \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_{\alpha+2i}(x)$, donde

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{-3}{\alpha + 4}, & c_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{\alpha + 4} - \frac{3}{\alpha + 5}, \\
 c_2 &= \frac{3(\alpha + 7)}{4(\alpha + 5)(\alpha + 6)}, & c_3 &= \frac{-3}{4(\alpha + 4)(\alpha + 5)}, \\
 c_4 &= \frac{3}{8(\alpha + 4)(\alpha + 5)(\alpha + 6)}.
 \end{aligned}$$

Elegimos los siguientes valores:

$$\gamma = 2, \quad y \quad M_n = \frac{7\ln(n+1) + 5}{(3 + 2\ln(n))n^\gamma}.$$

En la Tabla 3.3 y en la Figura 3.3 podemos ver cómo el cero más grande es mayor que 1 para n suficientemente grande, tal y como se estableció en la Proposición 3.3.2. En la Tabla 3.4 y en la Figura 3.4 mostramos el comportamiento asintótico deducido en el Teorema 3.3.1.

Tabla 3.3.: Caso $\gamma = 2 < 2(\alpha + 2j + 1) = 20$, $j = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $M_n = \frac{7\ln(n+1)+5}{(3+2\ln(n))n^\gamma}$.

	$y_{n,n-3}$	$y_{n,n-2}$	$y_{n,n-1}$	$y_{n,n}$
$n = 150$	0,995185	0,997186	0,998743	1,00191
$n = 250$	0,998243	0,998973	0,999542	1,0007
$n = 500$	0,999556	0,999741	0,999884	1,00018

Cuatro mayores ceros de $P_n^{(3,1,M_n)}$.

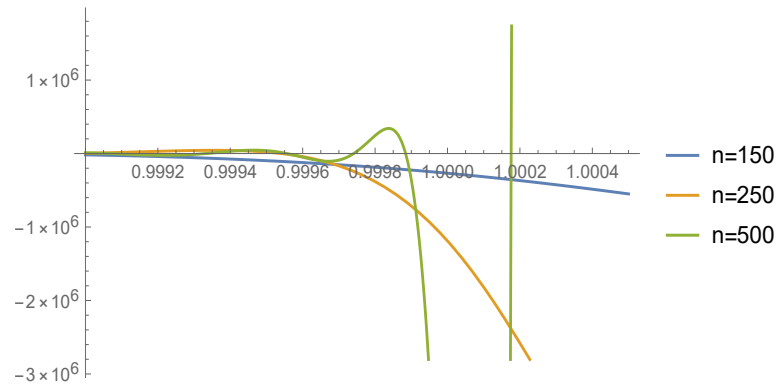


Figura 3.3.: Caso $\gamma = 2 < 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Representación de $P_n^{(\alpha,\beta,M_n)}$ alrededor de $x = 1$.

Tabla 3.4.: Caso $\gamma = 2 < 2(\alpha + 2j + 1) = 20$, $j = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $M_n = \frac{7\ln(n+1)+5}{(3+2\ln(n))n^\gamma}$.

	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-1})}$	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-2})}$	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-3})}$
$n = 150$	7,52032	11,2535	14,7196
$n = 250$	7,57031	11,3291	14,8199
$n = 500$	7,60812	11,386	14,895
Límite	$s_{3,1} = 7,64622$	$s_{3,2} = 11,4432$	$s_{3,3} = 14,9699$

Ceros de $\varphi_{\alpha,3}$ y de los polinomios reescalados.

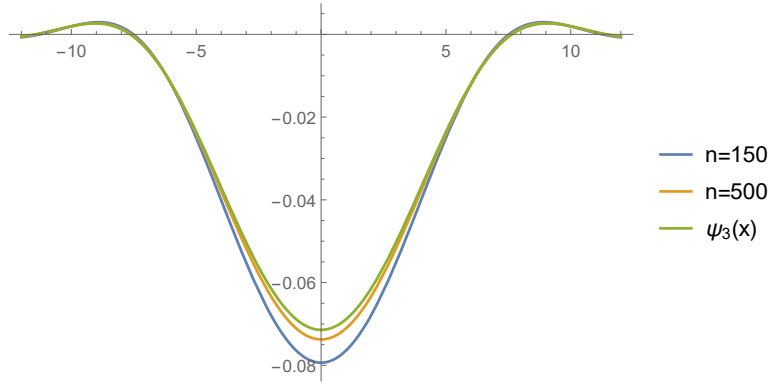


Figura 3.4.: Caso $\gamma = 2 < 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Función $\varphi_{3,3}$ y polinomios reescalados

■ Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$.

De acuerdo al Teorema 3.3.1 la fórmula de Mehler–Heine viene dada por $\psi_{\alpha,3}$. Denotamos por V la cantidad que aparece en la Proposición 3.3.3, dada por

$$V := \frac{2^{\alpha+\beta+2j+1}(\alpha+j+1)(\alpha+2j+1)\Gamma^2(\alpha+j+1)}{j}.$$

Así, con estos valores anteriores

$$V = 24772608000.$$

Ahora tomando

$$M_n = \frac{Mn^2(n-1/2)(n+2)}{n^{\gamma+4}} = \frac{Mn^2(n-1/2)(n+2)}{n^{24}}.$$

De acuerdo con la Proposición 3.3.3 tenemos dos posibles elecciones de M que determinan dos asintóticas diferentes, así como dos comportamientos diferentes para los ceros. Para el primer ejemplo tomaremos $M = 1500000000 \leq V$, lo mostramos en las tablas 3.5 y 3.6 y en las figuras 3.5 y 3.6.

Finalmente, mostramos el caso $M > V$ donde $M = 3 \times 10^{10}$. Entonces $y_{n,n} > 1$ para n suficientemente grande y esto se evidencia en las tablas 3.7 y 3.8, y en las figuras 3.7 y en 3.8.

Para finalizar los experimentos numéricos es interesante observar la última Figura 3.9. En ella se puede observar la transición de ϕ_3 a $\varphi_{3,3}$ en función del crecimiento de M .

Tabla 3.5.: Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$, $M = 1500000000 < V$, $j = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $M_n = \frac{1500000000n^2(n-1/2)(n+2)}{n^{\gamma+4}}$.

	$y_{n,n-3}$	$y_{n,n-2}$	$y_{n,n-1}$	$y_{n,n}$
$n = 150$	0,994465	0,996468	0,998039	0,999178
$n = 250$	0,997975	0,998706	0,999281	0,999687
$n = 500$	0,999488	0,999673	0,999818	0,999923

Cuatro mayores ceros de $P_n^{(3,1,M_n)}$.

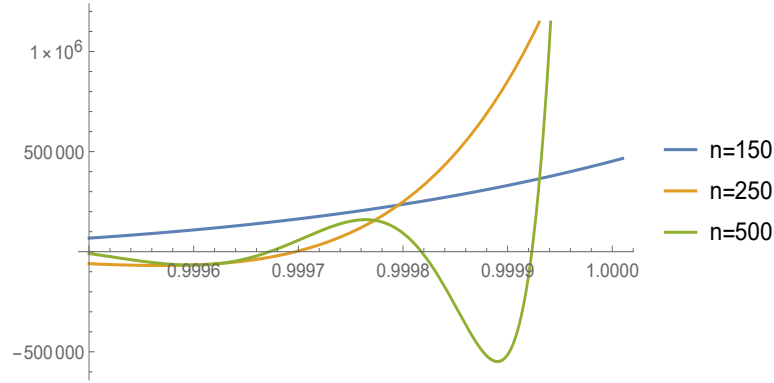


Figura 3.5.: Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Representación de $P_n^{(\alpha,\beta,M_n)}$ alrededor de $x = 1$ con $M < V$.

Tabla 3.6.: Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$, $M = 1500000000 < V$, $j = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $M_n = \frac{5n^2(n-1/2)(n+2)}{n^{\gamma+4}}$.

	$n\sqrt{2(1-y_{n,n})}$	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-1})}$	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-2})}$	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-3})}$
$n = 150$	6,08367	9,39401	12,6078	15,7815
$n = 250$	6,14991	9,48275	12,716	15,9097
$n = 500$	6,1979	9,54792	12,7959	16,0043
Limit	$t_{0,1} = 6,24461$	$t_{0,2} = 9,61199$	$t_{0,3} = 12,8748$	$t_{0,4} = 16,0976$

Ceros de $\psi_{\alpha,3}$ y de los polinomios reescalados con $M < V$.

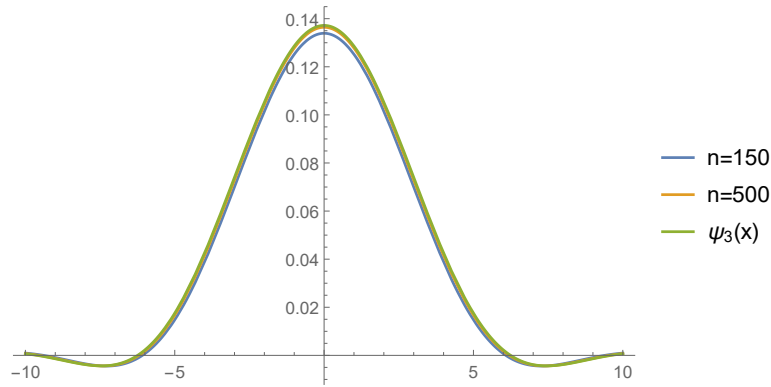


Figura 3.6.: Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Función $\psi_{\alpha,3}$ y polinomios reescalados con $M < V$.

Tabla 3.7.: Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$, $M = 3 \times 10^{10} > V$, $j = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $M_n = \frac{3 \times 10^{10} n^2 (n-1/2)(n+2)}{n^{\gamma+4}}$.

	$y_{n,n-3}$	$y_{n,n-2}$	$y_{n,n-1}$	$y_{n,n}$
$n = 150$	0,995035	0,997048	0,998633	1,00046
$n = 250$	0,998181	0,998916	0,999495	1,00012
$n = 500$	0,999539	0,999725	0,999871	1,00002

Cuatro mayores ceros de $P_n^{(3,1,M_n)}$.

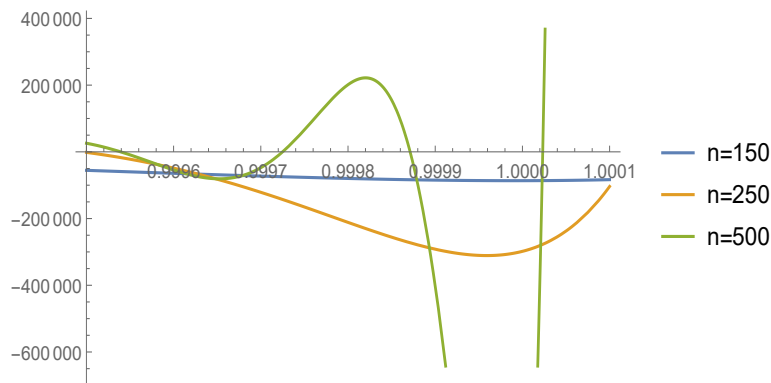


Figura 3.7.: Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Representación de $P_n^{(\alpha,\beta,M_n)}$ alrededor de $x = 1$ con $M > V$.

Tabla 3.8.: Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$, $M = 3 \times 10^{10} > V$, $j = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $M_n = \frac{3 \times 10^{10} n^2 (n-1/2)(n+2)}{n^{\gamma+4}}$.

	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-1})}$	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-2})}$	$n\sqrt{2(1-y_{n,n-3})}$
$n = 150$	7,84241	11,5252	14,9471
$n = 250$	7,94293	11,6385	15,0774
$n = 500$	8,02417	11,727	15,1773
Limit	$t_{0,1} = 8,11098$	$t_{0,2} = 11,8188$	$t_{0,3} = 15,2792$

Ceros de $\psi_{\alpha,3}$ y de los polinomios reescalados con $M > V$.

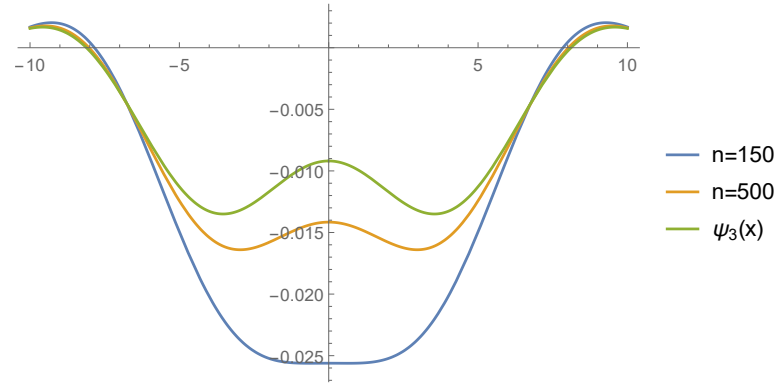


Figura 3.8.: Caso $\gamma = 2(\alpha + 2j + 1) = 20$. Función $\psi_{\alpha,3}$ y polinomios reescalados con $M > V$.

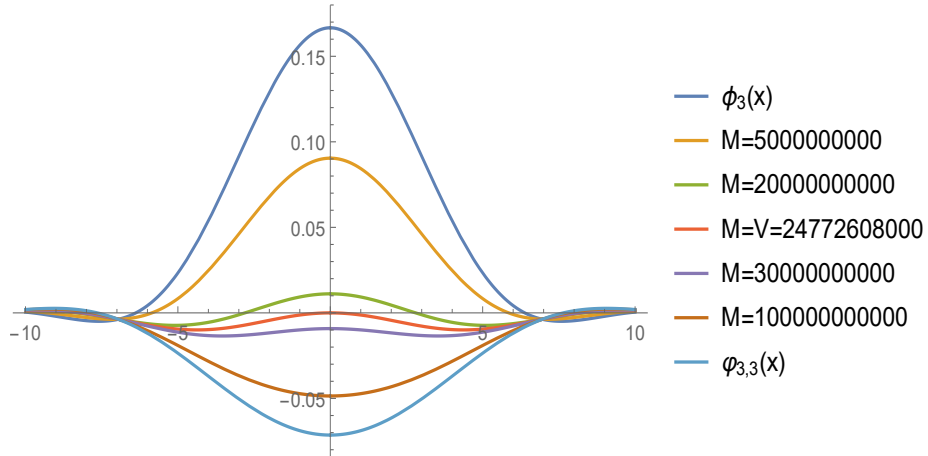


Figura 3.9.: Funciones límite en la asíntota (3.17). Funciones ϕ_α , $\phi_{3,3}$, y además, $\psi_{3,3}$ con diferentes valores de M .

POLINOMIOS ORTOGONALES DE SOBOLEV DISCRETOS VARIANTES

Una vez estudiados en los dos capítulos previos dos casos concretos de polinomios tipo Sobolev, en este capítulo se aborda el caso general. Esto es, siendo μ una medida finita positiva de Borel con soporte en un intervalo de la recta real, se considera el producto escalar

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)d\mu + M_n f^{(j)}(c)g^{(j)}(c),$$

donde c está adecuadamente situado en la recta real, $j \geq 0$, y $\{M_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de números reales no negativos satisfaciendo una condición muy general que será detallada más adelante. El objetivo principal de este capítulo es estudiar propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales con respecto a este producto escalar. Centraremos nuestra atención, al igual que en los capítulos anteriores, en las fórmulas asintóticas tipo Mehler–Heine, ya que éstas describen con detalle el comportamiento asintótico alrededor del punto c , que es justamente donde hemos colocado la perturbación en el producto escalar. Más aún, se estudiará el comportamiento asintótico de los ceros de dichos polinomios y, finalmente, se estudiarán otras asintóticas, como la asintótica relativa o la asintótica tipo Plancherel–Rotach para soportes de μ no acotados.

Los resultados de este capítulo han sido publicados en [120].

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo nuestra atención se centra en el estudio de propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales con respecto a

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)d\mu + M_n f^{(j)}(c)g^{(j)}(c), \quad j \geq 0, \quad (4.1)$$

donde c está adecuadamente localizado en el eje real. En este capítulo se generalizan los resultados obtenidos en los capítulos 2 y 3 (ver también [118] y [119]). Al igual que en dichos capítulos, focalizamos nuestro trabajo en estudiar las fórmulas asintóticas Mehler–Heine ya que éstas muestran en detalle las diferencias entre los polinomios ortogonales con respecto a (4.1) y los polinomios ortogonales con respecto a μ . Esta asintótica se obtendrá en el Teorema 4.3.1, que generaliza los resultados anteriores. El resultado obtenido será válido para un amplio abanico de medidas, tanto de soporte acotado como no acotado.

Las técnicas desarrolladas en [156] serán de gran utilidad para poder establecer los resultados de este capítulo. Si bien en [156] se consideran productos tipo Sobolev no variante, la adaptación de las técnicas al caso variante no será complicada.

Entrando en materia, se considera el producto escalar (4.1) donde $\{M_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de números reales no negativos satisfaciendo la siguiente condición,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c) = L \in [0, +\infty]. \quad (4.2)$$

Es importante destacar que la condición (4.2) es más general que las condiciones (2.3) y (3.2) consideradas en los capítulos previos. Se puede observar que $M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)$ es no negativo para cada n , así $K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)$ tiene un rol equivalente al que tenían las sucesiones n^β y n^γ en los capítulos 2 y 3, respectivamente. Además, la condición (4.2) admite que la sucesión $M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)$ sea divergente ($L = +\infty$).

Se probará, al igual que en los Capítulos 2 y 3, que aparecen 3 diferentes casos en la fórmula asintótica tipo Mehler–Heine en función de los posibles valores de L o, equivalentemente, en función del tamaño de la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$. Estos tres comportamientos asintóticos vendrán determinados por los casos $L = 0$, $L \in (0, +\infty)$ y $L = +\infty$.

Al igual que los productos escalares previos (2.2) y (3.1), en (4.1) se tiene una tabla de polinomios ortonormales para cada n , esto es, $\{q_k^{(M_n)}\}_{k \geq 0}$. En el capítulo se trabajará solamente con la diagonal de dicha tabla, es decir, con la sucesión de polinomios $\{q_n^{(M_n)}\}_{n \geq 0} := \{q_n\}_{n \geq 0}$. También denotaremos por $\{p_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a μ .

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la Sección 4.2 se presentarán propiedades algebraicas básicas y algunos resultados asintóticos para la sucesión de polinomios ortonormales q_n . En la Sección 4.3 se obtendrá la asintótica tipo Mehler–Heine para la sucesión de polinomios $\{q_n\}_{n \geq 0}$. Además, se distinguirán 2 casos: cuando μ es simétrica y cuando no lo sea. En la Sección 4.4 se deducirá el comportamiento asintótico de los ceros de q_n . En la Sección 4.5 se obtendrá la

asintótica relativa exterior entre las familias $\{q_n\}_{n \geq 0}$ y $\{p_n\}_{n \geq 0}$ cuando μ es una medida de la clase de Szegő ($\mu \in \mathcal{S}$) y también la asymptótica Plancherel–Rotach cuando el soporte de μ no es acotado. Finalmente, se ilustrará el comportamiento asintótico de los ceros en la Sección 4.6 con un ejemplo usando la distribución normal que es la medida de ortogonalidad para los polinomios de Hermite.

4.2 POLINOMIOS ORTONORMALES DE SOBOLEV DISCRETOS VARIANTES

Sean $\{p_n\}_{n \geq 0}$ con $p_n(x) = \gamma_n x^n + \dots$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la medida μ y donde $\gamma_n > 0$ denota el coeficiente líder, y $\{q_n\}_{n \geq 0}$ con $q_n(x) = \tilde{\gamma}_n x^n + \dots$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a (4.1) y donde $\tilde{\gamma}_n > 0$ denota su coeficiente líder. Además, en el desarrollo esta sección se considera la sucesión de polinomios ortonormales $\{p_n^{[2i]}\}_{n \geq 0}$ con respecto a la medida $d\mu_{2i}(x) = (x - c)^{2i} d\mu(x)$, $i \geq 0$ y $c \in \mathbb{R} \setminus \text{sop}(\mu)$.

Una relación algebraica entre las familias $\{q_n\}_{n \geq 0}$ y $\{p_n^{[2i]}\}_{n \geq 0}$ de polinomios se obtuvo en [156, Teo. 1] para polinomios ortogonales de Sobolev discretos no variantes. El resultado en el caso variante es análogo y, por tanto, se omite la demostración (ver comentarios a la Proposición 3.2.1, donde se aborda esta relación para el caso particular de la medida de Jacobi).

Lema 4.2.1 ([156]) *Asumiendo que $p_n(c)p_{n-1}^{[2]}(c) \dots p_{n-(j+1)}^{[2(j+1)]}(c) \neq 0$, entonces hay una familia de coeficientes $\{d_{i,n}\}_{i=0}^{j+1}$ no idénticamente nulos de manera que se tiene la siguiente relación:*

$$q_n(x) = \sum_{i=0}^{j+1} d_{i,n} (x - c)^i p_{n-i}^{[2i]}(x), \quad n \geq j + 1. \quad (4.3)$$

El objetivo de esta sección es establecer el comportamiento asintótico de los coeficientes $d_{i,n}$ en (4.3) cuando $n \rightarrow +\infty$. Para ello es necesario el siguiente resultado similar al Lema 3.2.1.

Lema 4.2.2 *Suponiendo que existe una función estrictamente creciente f , verificando que $2f(0) + 1 > 0$, de manera que los polinomios $\{p_n\}_{n \geq 0}$ satisfacen la condición*

$$p_n^{(k)}(c) \approx C_{k,0} (-1)^n n^{f(k)}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.4)$$

entonces, para $k \geq 0$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n^{(k)}(c)}{p_n^{(k)}(c)} = \theta_{k,j,L} := \frac{L(f(k) - f(j)) + f(k) + f(j) + 1}{(1 + L)(f(k) + f(j) + 1)} \quad (4.5)$$

donde $\theta_{k,j,+\infty} = \lim_{L \rightarrow \infty} \theta_{k,j,L}$.

Demostración: Tenemos la relación (ver [132, Sec. 2] o (1.38) con otra normalización):

$$q_n(x) = \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} \left(p_n(x) - \frac{M_n p_n^{(j)}(c)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} K_{n-1}^{(0,j)}(x, c) \right). \quad (4.6)$$

De donde,

$$q_n^{(j)}(c) = \frac{p_n^{(j)}(c)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)}. \quad (4.7)$$

Con el objetivo de probar este lema, en primer lugar se estudiará la existencia y el valor del siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}^{(k,j)}(c, c)}{n^{f(k)+f(j)+1}} \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta (4.4), y

$$n^{f(k)+f(j)+1} - (n-1)^{f(k)+f(j)+1} \approx (f(k) + f(j) + 1) n^{f(k)+f(j)},$$

basta aplicar el Criterio de Stolz para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}^{(k,j)}(c, c)}{n^{f(k)+f(j)+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}^{(k,j)}(c, c) - K_{n-2}^{(k,j)}(c, c)}{n^{f(k)+f(j)+1} - (n-1)^{f(k)+f(j)+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}^{(k)}(c) p_{n-1}^{(j)}(c)}{(f(k) + f(j) + 1) n^{f(k)+f(j)}} = \frac{C_{k,0} C_{j,0}}{f(k) + f(j) + 1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por otra parte, vamos a probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} = 1. \quad (4.9)$$

Usando (4.6) y (4.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
1 &= (q_n, q_n)_S \\
&= \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} \left(q_n, p_n(x) - \frac{M_n p_n^{(j)}(c)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} K_{n-1}^{(0,j)}(x, c) \right)_S \\
&= \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} (q_n, p_n)_S \\
&= \left(\frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} \right)^2 \int p_n(x) \left(p_n(x) - \frac{M_n p_n^{(j)}(c)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} K_{n-1}^{(0,j)}(x, c) \right) d\mu \\
&\quad + M_n q_n^{(j)}(c) p_n^{(j)}(c) \\
&= \left(\frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} \right)^2 + M_n q_n^{(j)}(c) p_n^{(j)}(c) \\
&= \left(\frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} \right)^2 + \frac{M_n \left(p_n^{(j)}(c) \right)^2}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Por (4.4) y (4.8), se tiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_n \left(p_n^{(j)}(c) \right)^2}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} = 0,$$

para cualquier valor de L , y ya que, $\gamma_n > 0$ y $\tilde{\gamma}_n > 0$, se prueba (4.9) tomando límites en (4.10).

Ahora bien, de (4.6) se sigue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n^{(k)}(c)}{p_n^{(k)}(c)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} \left(1 - \frac{M_n K_{n-1}^{(k,j)}(c, c)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} \frac{p_n^{(j)}(c)}{p_n^{(k)}(c)} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} \left(1 - \frac{M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c) \frac{K_{n-1}^{(k,j)}(c, c)}{K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} \frac{n^{2f(j)+1}}{n^{f(k)+f(j)+1}} \frac{p_n^{(j)}(c)}{n^{f(j)}}}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c) \frac{p_n^{(k)}(c)}{n^{f(k)}}} \right). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

El comportamiento asintótico (4.5) se sigue aplicando (4.2) y (4.4) en la anterior expresión y considerando los diferentes valores de L . El caso $L = 0$ es trivial. Si $L \in (0, +\infty)$ de (4.8), se deduce

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n^{(k)}(c)}{p_n^{(k)}(c)} &= 1 - \frac{L \frac{C_{k,0} C_{j,0}}{f(k)+f(j)+1} \frac{2f(j)+1}{C_{j,0}^2} \frac{C_{j,0}}{C_{k,0}}}{1+L} \\
&= \frac{L(f(k) - f(j)) + f(k) + f(j) + 1}{(1+L)(f(k) + f(j) + 1)} = \theta_{k,j,L}.
\end{aligned}$$

En el caso $L = +\infty$, puesto que las sucesiones que multiplican a $M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)$ en la expresión (4.11) son convergentes, se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n^{(k)}(c)}{p_n^{(k)}(c)} &= 1 - \frac{\frac{C_{k,0} C_{j,0}}{f(k)+f(j)+1} \frac{2f(j)+1}{C_{j,0}^2} C_{j,0}}{C_{k,0}} \\
&= \frac{f(k) - f(j)}{(f(k) + f(j) + 1)}.
\end{aligned}$$

■

Nota 4.2.1 El comportamiento asintótico (4.5) se puede reescribir como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n^{(k)}(c)}{p_n^{(k)}(c)} = \begin{cases} 1, & \text{si } L = 0, \\ \frac{L(f(k)-f(j))+f(k)+f(j)+1}{(1+L)(f(k)+f(j)+1)}, & \text{si } L \in (0, +\infty), \\ \frac{f(k)-f(j)}{f(k)+f(j)+1}, & \text{si } L = +\infty. \end{cases}$$

Cuando $L \in (0, +\infty)$ el valor obtenido se puede expresar como una combinación lineal convexa de los otros dos casos. Basta tomar $\lambda = \frac{L}{L+1} \in (0, 1)$ y se tiene

$$\frac{L(f(k) - f(j)) + f(k) + f(j) + 1}{(1+L)(f(k) + f(j) + 1)} = \lambda \frac{f(k) - f(j)}{f(k) + f(j) + 1} + 1 - \lambda.$$

Este hecho nos asegura que la fórmula asintótica tipo Mehler–Heine que obtendremos cuando $L \in (0, +\infty)$ será una combinación lineal convexa de los casos $L = 0$ y $L = +\infty$. Para ello es suficiente con seguir los mismos pasos presentados en el Capítulo 3.

Sin embargo, puesto que la expresión obtenida en la fórmula (4.5) es muy compacta, mantendremos dicha expresión.

Nota 4.2.2 El factor $(-1)^n$ en la condición (4.4) podría omitirse, según el tipo de medida que se esté considerando. De hecho, en este resultado y en los siguientes seguirían siendo ciertos aunque este factor fuera omitido. Sin embargo, es necesario cuando se trabaja con el caso de Hermite que, posteriormente, será usado para ilustrar los resultados en la Sección 4.6. Por ello se ha decidido mantener esta condición (4.4) y también en (4.14).

Nota 4.2.3 Vamos a ilustrar (4.5) con un resultado obtenido en [134]. En este trabajo los autores consideraron el producto escalar tipo Sobolev

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)d\mu + \lambda f'(c)g'(c), \quad \lambda > 0,$$

donde μ pertenece a la clase de Nevai, (Definición 1.5.1). Los autores establecieron en [134, f. (34)] que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q'_n(c)p'_n(c) = 0, \quad (4.12)$$

cuando $c \in [-1, 1]$. En el contexto de este capítulo, el anterior producto escalar puede ser visto como el producto (4.1) con $M_n = \lambda$ para todo n y $j = 1$. En esta situación, $L = +\infty$. Asumiendo que se satisface (4.4), entonces del Lema 4.2.2 se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q'_n(c)}{p'_n(c)} = 0.$$

Además, usando (4.6), (4.8) y el dato $L = +\infty$, se deduce fácilmente

$$\frac{q'_n(c)}{p'_n(c)} \simeq \frac{K}{n^{2f(1)+1}}, \quad (4.13)$$

donde K es una constante. Unos cálculos elementales permiten obtener (4.12) a partir de (4.13) cuando se tiene (4.4).

Ahora, se procederá como en [156, Teo. 2] con el objetivo de establecer la convergencia de los coeficientes $d_{i,n}$ en (4.3) para $i = 0, \dots, j+1$. Más aún, se obtendrá el valor explícito del $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{i,n}$, que es esencial para los experimentos numéricos.

Proposición 4.2.1 Suponiendo que existe una función estrictamente creciente f , con $2f(0) + 1 > 0$, de manera que para todo $i = 0, 1, \dots, j+1$, los polinomios $\{p_n^{[2i]}\}_{n \geq 0}$ satisfacen la condición

$$\left(p_n^{[2i]}\right)^{(k)}(c) \approx C_{k,i}(-1)^n n^{f(k+i)}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.14)$$

donde $C_{k,i}$ es una constante distinta de cero e independiente de n , entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{i,n} = d_i(L) \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, j+1,$$

donde $\{d_{i,n}\}_{i=0}^{j+1}$ son los coeficientes de la relación algebraica (4.3). Además, para $0 \leq i \leq j+1$,

$$d_i(L) = (-1)^i \frac{\theta_{i,j,L} - \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^m d_m(L) \binom{i}{m} m! \frac{C_{i-m,m}}{C_{i,0}}}{i! \frac{C_{0,i}}{C_{i,0}}}, \quad (4.15)$$

donde, por convenio, $\sum_{m=0}^{-1} = 0$.

Demostración: Derivando k veces en (4.3) con $0 \leq k \leq j+1$, y evaluando la correspondiente expresión en $x = c$, se tiene

$$q_n^{(k)}(c) = \sum_{i=0}^k d_{i,n} \binom{k}{i} i! \left(p_{n-i}^{[2i]}\right)^{(k-i)}(c).$$

De la anterior expresión tenemos

$$\frac{q_n^{(k)}(c)}{p_n^{(k)}(c)} = \sum_{i=0}^k d_{i,n} \binom{k}{i} i! A_i(k, n), \quad (4.16)$$

donde $A_i(k, n) = \frac{\left(p_{n-i}^{[2i]}\right)^{(k-i)}(c)}{p_n^{(k)}(c)}$. Usando (4.14) se ve fácilmente que la sucesión $\{A_i(k, n)\}_{n \geq 0}$ es convergente. De hecho,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_i(k, n) = (-1)^i \frac{C_{k-i,i}}{C_{k,0}} \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

Del Lema 4.2.2, se sigue la existencia del $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n^{(k)}(c)}{p_n^{(k)}(c)}$. Usando este hecho y (4.4), se deduce que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{i,n} := d_i(L) \in \mathbb{R}$ y podemos aplicar un algoritmo recursivo, similar al de la Proposición 3.2.2, para obtener los valores explícitos de $d_i(L)$ con $0 \leq i \leq j+1$.

Veámoslo: Para $k = 0$ se tiene que $d_{0,n} = q_n(c)/p_n(c)$, y $d_0(L)$ se obtiene directamente del Lema 4.2.2 aplicando límites,

$$d_0(0) = 1, \quad d_0(L) = \theta_{0,j,L}, \quad 0 < L < +\infty, \quad \text{y} \quad d_0(+\infty) = \frac{f(0) - f(j)}{f(0) + f(j) + 1}.$$

Para $k = 1$ en (4.16) se obtiene

$$\frac{q'_n(c)}{p'_n(c)} = d_{0,n} + d_{1,n}A_1(1, n).$$

Es suficiente tomar límites en la anterior expresión para obtener $d_1(L)$. De hecho,

$$\begin{aligned}\theta_{1,j,L} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q'_n(c)}{p'_n(c)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (d_{0,n} + d_{1,n}A_1(1, n)) \\ &= d_0(L) - \frac{C_{0,1}}{C_{1,0}} \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{1,n},\end{aligned}$$

por tanto, $d_{1,n}$ ha de ser convergente con límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{1,n} := d_1(L) = -\frac{\theta_{1,j,L} - d_0(L)}{\frac{C_{0,1}}{C_{1,0}}}.$$

Este procedimiento recursivo se puede continuar y, usando (4.17) y el Lema 4.2.2, se deducen el resto de los valores, $d_i(L)$ para $i = 2, \dots, j+1$. Veamos un caso $2 \leq k \leq j+1$. Partimos de la expresión (4.16), entonces se tiene

$$\frac{q_n^{(k)}(c)}{p_n^{(k)}(c)} = \sum_{i=0}^{k-1} d_{i,n} \binom{k}{i} i! A_i(k, n) + d_{k,n} k! A_k(k, n),$$

tomando límites,

$$\theta_{k,j,L} = \sum_{i=0}^{k-1} d_i(L) \binom{k}{i} i! (-1)^i \frac{C_{k-i,i}}{C_{k,0}} + k! (-1)^i \frac{C_{0,k}}{C_{k,0}} \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{k,n},$$

por tanto, $d_{k,n}$ ha de ser convergente. Llamando $d_k(L) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{k,n}$ y despejando $d_k(L)$ se prueba (4.15). ■

Nota 4.2.4 *El cálculo de los coeficientes $d_i(L)$ será esencial en los experimentos numéricos en la Sección 4.6. Por este motivo los escribimos explícitamente en función de los tres 3 casos posibles.*

$$d_i(L) = \begin{cases} \delta_{i,0}, & \text{si } L = 0, \\ (-1)^i \frac{\theta_{i,j,L} - \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^m d_m(L) \binom{i}{m} m! \frac{C_{i-m,m}}{C_{i,0}}}{i! \frac{C_{0,i}}{C_{i,0}}}, & \text{si } L \in (0, +\infty), \\ (-1)^i \frac{\frac{f(i)-f(j)}{f(i)+f(j)+1} - \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^m d_m(+\infty) \binom{i}{m} m! \frac{C_{i-m,m}}{C_{i,0}}}{i! \frac{C_{0,i}}{C_{i,0}}}, & \text{si } L = +\infty. \end{cases}$$

4.3 ASINTÓTICA TIPO MEHLER–HEINE

El objetivo de esta sección es obtener la asintótica tipo Mehler–Heine para la sucesión de polinomios ortonormales discretos variantes de Sobolev, $\{q_n\}_{n \geq 0} = \{q_n^{(M_n)}\}_{n \geq 0}$. Al igual que los dos capítulos previos, busquemos conocer cómo la parte discreta del producto escalar (4.1) influye en el comportamiento asintótico de los correspondientes polinomios ortonormales.

Sea I el soporte de μ , se asumirá que $c = \inf(I) \in \mathbb{R}$. Los resultados de esta sección se pueden obtener de forma similar suponiendo que $c = \sup(I) \in \mathbb{R}$ haciendo el cambio de variable $x \rightarrow -x$.

4.3.1 Caso no simétrico

Tomamos μ una medida no simétrica. P previo a la obtención de la fórmula asintótica tipo Mehler–Heine para q_n , se necesita suponer que la sucesión de polinomios $\{p_n^{[2i]}\}_{n \geq 0}$ satisface la siguiente asintótica tipo Mehler–Heine (ver Teorema 1.5.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{a_n^{1/2}}{b_n^i} p_n^{[2i]} \left(c + \frac{z^2}{b_n} \right) = z^{-(\alpha+2i)} J_{\alpha+2i}(2z), \quad i = 0, 1, \dots, j+1, \quad (4.18)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, donde

$$a_n^{-1/2} \approx A n^a, \quad b_n \approx B n^b, \quad A, B, b > 0, \quad \alpha > -1, \quad \text{y} \quad 2a + 1 = b(\alpha + 1). \quad (4.19)$$

Como ya se comentó en la página 98 las condiciones (4.18) y (4.19) son satisfechas por una amplia variedad de medidas.

La asintótica local tipo Mehler–Heine se establece a continuación.

Teorema 4.3.1 *Sea $c = \inf(I)$ y asumiendo que la sucesión de polinomios ortonormales $\{p_n^{[2i]}\}_{n \geq 0}$ satisface (4.14), (4.18), y (4.19), entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n^{1/2} q_n \left(c + \frac{z^2}{b_n} \right) = \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i d_i(L) z^{-\alpha} J_{\alpha+2i}(2z) := \varphi_{\alpha,j,L}(z),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, donde los coeficientes $d_i(L)$ están dados en (4.15).

Demostración: Teniendo en cuenta (4.18), es suficiente reescalar la variable y tomar límites en (4.3). Es necesario prestar atención a la demostración del Corolario 1 en [12] (ver también Nota 1.5.1) para obtener

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n^{1/2} q_n \left(c + \frac{z^2}{b_n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^n a_n^{1/2} d_{i,n} \frac{z^{2i}}{b_n^i} p_{n-i}^{[2i]} \left(c + \frac{z^2}{b_n} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \lim_{n \rightarrow \infty} d_{i,n} \cdot z^{2i} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-i} \frac{a_n^{1/2}}{b_n^i} p_{n-i}^{[2i]} \left(c + \frac{z^2}{b_n} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i d_i(L) z^{-\alpha} J_{\alpha+2i}(2z),
 \end{aligned}$$

donde $d_i(L)$ fueron definidos en (4.15) dependiendo del valor de L . ■

Nota 4.3.1 Hay que resaltar que la fórmula Mehler–Heine obtenida en este Teorema es significativamente diferente de la que fue obtenida en [156, Teo. 5]. En primer lugar, el caso variante da lugar a tres diferentes fórmulas asintóticas en función de L . Sin embargo, la diferencia esencial se da en el caso $L = +\infty$ que incluye la situación $M_n = M$, para todo n y, por tanto, el que podemos comparar con el caso no variante. En este caso el comportamiento asintótico determinado por el Teorema 4.3.1 se expresa como una combinación lineal de $j+2$ funciones a diferencia del Teorema 5 en [156], donde el límite solo está formado por una única función. La razón proviene del hecho de que en este capítulo se ha permitido un gap de orden j , esto es, los términos $f^{(i)}(c)g^{(i)}(c)$ para $i = 0, \dots, j-1$, no aparecen en el producto escalar (4.1). En [156, Teo. 5], las autoras establecen sus resultados para polinomios ortonormales con respecto a un producto escalar donde todos los términos $f^{(i)}(c)g^{(i)}(c)$ para $i = 0, \dots, j$, están multiplicados por constantes estrictamente positivas.

Nota 4.3.2 En el caso $L = 0$ o, equivalentemente, cuando el tamaño de la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ es suficientemente pequeño, entonces

$$\varphi_{\alpha,j,0}(z) = z^{-\alpha} J_{\alpha}(2z).$$

Eso significa que ambas familias de polinomios ortogonales, los polinomios tipo Sobolev y los estándar, tienen la misma asintótica tipo Mehler–Heine.

Vamos a ilustrar el Teorema 4.3.1 con un ejemplo conocido en la literatura (ver [118]) y en el Capítulo 2 (ver Teorema 2.4.1). Consideremos el producto escalar Laguerre–Sobolev variante

$$(f, g)_{LS} = \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x}dx + M_n f^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad (4.20)$$

con $\alpha > -1$, $j \geq 0$, y $\{M_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de números reales no negativos satisfaciendo (4.2). El producto escalar (4.20) es un caso particular del producto (4.1) con $c = 0$. De [169], haciendo unos cálculos sencillos se obtiene

$$\left(l_n^{(\alpha)}\right)^{(k)}(0) \simeq \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha + k + 1)} (-1)^n n^{k+\alpha/2},$$

donde $\{l_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ son los polinomios ortonormales de Laguerre con coeficiente líder positivo.

Entonces se satisface (4.4) tomando

$$C_{k,0} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha + k + 1)} \quad \text{y} \quad f(k) = k + \alpha/2.$$

Es conveniente observar que los polinomios $p_n^{[2i]}$ son ortonormales con respecto a la función peso $x^{\alpha+2i}e^{-x}$, es decir, $p_n^{[2i]}(x) = l_n^{(\alpha+2i)}(x)$. Así, (4.14) también se cumple con

$$C_{k,i} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha + k + 2i + 1)}.$$

Por tanto, la fórmula Mehler–Heine para los polinomios de Laguerre ortonormales es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2+i/2}} l_n^{(\alpha+i)} \left(z^2/n \right) = z^{-(\alpha+i)} J_{\alpha+i}(2z), \quad (4.21)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Por tanto, se deduce que $b_n = n$ y $a_n = n^{-\alpha}$ verificando (4.18) y (4.19). Por consiguiente, el Teorema 4.3.1 puede aplicarse y se obtiene la siguiente fórmula asintótica tipo Mehler–Heine para los polinomios ortonormales con respecto a (4.20), que fue obtenida en el Teorema 2.4.1.

Ilustrémoslo con un ejemplo. Considérese $\alpha = 5$, $j = 2$ y $L = +\infty$. Entonces, del Teorema 4.3.1 se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^{-\alpha/2} q_n \left(z^2/n \right) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i d_i(+\infty) z^{-5} J_{5+2i}(2z) := \varphi_{5,2,+\infty}(z).$$

Usando (4.15) se calculan los coeficientes $d_i(+\infty)$ de forma recursiva y se obtiene

$$d_0(+\infty) = -\frac{1}{4}, \quad d_1(+\infty) = \frac{35}{36}, \quad d_2(+\infty) = \frac{1}{4}, \quad d_3(+\infty) = \frac{1}{36}.$$

Con el objetivo de comparar los resultados del Teorema 2.4.1 con los obtenidos en este capítulo, es necesario recordar que en el Capítulo 2 los polinomios ortogonales con respecto (4.20) se denotaban por $L_n^{(\alpha, M_n)}$ y con coeficiente líder $(-1)^n/n!$. También es necesario recordar que la norma de estos polinomios de Laguerre clásicos es (ver [169, f. (5.1.1)])

$$\sqrt{\int_0^{+\infty} \left(L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)\right)^2 x^{\alpha+k} e^{-x} dx} = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-k+1)}} \approx n^{(\alpha+k)/2}, \quad k \geq 0,$$

donde hemos usado la fórmula de Stirling (ver 2.13) para dar el comportamiento asintótico anterior. Ahora, denotando por $l_n^{(\alpha, M_n)}$ el polinomio ortonormal con respecto a (4.20) y coeficiente líder positivo $\tilde{\gamma}_n$, se tiene (ver demostración del Lema 4.2.2)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} = 1,$$

donde γ_n es el coeficiente líder de $l_n^{(\alpha)}$.

Por tanto, es fácil deducir que

$$\sqrt{\left(L_n^{(\alpha, M_n)}, L_n^{(\alpha, M_n)}\right)_{LS}} \approx \sqrt{\int_0^{+\infty} \left(L_n^{(\alpha)}(x)\right)^2 x^{\alpha} e^{-x} dx} \approx n^{\alpha/2}. \quad (4.22)$$

Con el objetivo de comparar los Teoremas 2.4.1 y 4.3.1, es necesario tener la misma normalización. Por tanto es necesario introducir un factor $(-1)^n$ en (2.17) para hacer positivo el coeficiente líder de $L_n^{(\alpha, M_n)}$. Teniendo en cuenta esto y (4.22) se tiene que (2.19) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(z^2/n)}{n^{\alpha}} &= \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(z^2/n)(-1)^n(-1)^n}{n^{\alpha}} \frac{n^{\alpha/2}}{\sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}}} \\ &= \frac{(-1)^n l_n^{(\alpha)}(z^2/n)}{n^{\alpha/2}} + \sum_{k=1}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} \frac{(-1)^n L_{n-k}^{(\alpha+k)}(z^2/n)(-1)^n}{n^{\alpha/2} \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}} \sqrt{\frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n-k+1)}}} \\ &= \frac{(-1)^n l_n^{(\alpha)}(z^2/n)}{n^{\alpha/2}} + \sum_{k=1}^{j+1} n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{(-1)^n l_{n-k}^{(\alpha+k)}(z^2/n)}{n^{k+\alpha/2} \sqrt{\frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+1)}}}. \end{aligned}$$

Tomando límites y usando la fórmula de Stirling (2.13), la Proposición 2.2.2 y (4.21) se llega a la conocida expresión $d_{\alpha,j}(z^2)$ en el Teorema 2.4.1 (nótese que $L = +\infty$ corresponde a $\beta < 2j + \alpha + 1$ en dicho teorema).

Para terminar sólo hace falta ver que $\varphi_{5,2,+\infty}(z) = d_{5,2}(z^2)$.

Por un lado,

$$\begin{aligned} d_{5,2}(z^2) &= c_{5,0}(z^2) + 10\Gamma(3) \sum_{k=1}^3 \frac{(-1)^k}{\Gamma(4-k)} c_{5,k}(z^2) \\ &= z^{-5} J_5(2z) + 20 \sum_{k=1}^3 \frac{(-1)^k}{\Gamma(4-k)} z^{-5-k} J_{5+k}(2z) \\ &= z^{-5} \left(J_5(2z) - \frac{10}{z} J_6(2z) + \frac{20}{z^2} J_7(2z) - \frac{20}{z^3} J_8(2z) \right). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \varphi_{5,2,+\infty}(z) &= z^{-5} \left(\sum_{k=0}^3 (-1)^k d_k(+\infty) J_{5+2k}(2z) \right) \\ &= z^{-5} \left(\frac{-1}{4} J_5(2z) - \frac{35}{36} J_7(2z) + \frac{1}{4} J_9(2z) - \frac{1}{36} J_{11}(2z) \right) \end{aligned}$$

Para simplificar, vamos a denotar $J_\alpha(2z) := J_\alpha$. Probando que

$$J_5 - \frac{10}{z} J_6 + \frac{20}{z^2} J_7 - \frac{20}{z^3} J_8 = \frac{-1}{4} J_5 - \frac{35}{36} J_7 + \frac{1}{4} J_9 - \frac{1}{36} J_{11}$$

se obtiene el resultado. Para ello vamos a usar reiteradamente la relación (1.17), que con nuestra notación queda: $J_{\alpha-1} + J_{\alpha+1} = \frac{\alpha}{z} J_\alpha$.

Partimos de $J_5 - \frac{10}{z} J_6 + \frac{20}{z^2} J_7 - \frac{20}{z^3} J_8$ y llegaremos a la otra expresión.

$$\begin{aligned} &J_5 - \frac{10}{6} \frac{6}{z} J_6 + \frac{20}{7z} \frac{7}{z} J_7 - \frac{20}{8z^2} \frac{8}{z} J_8 \\ &= J_5 - \frac{5}{3} (J_5 + J_7) + \frac{20}{7z} (J_6 + J_8) - \frac{5}{2z^2} (J_7 + J_9) \\ &= -\frac{2}{3} J_5 - \frac{5}{3} J_7 + \frac{20}{42z} J_6 + \frac{20}{56z} J_8 - \frac{5}{14z} \frac{7}{z} J_7 - \frac{5}{18z} \frac{9}{z} J_9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{3}J_5 - \frac{5}{3}J_7 + \frac{10}{21}(J_5 + J_7) + \frac{5}{14}(J_7 + J_9) - \frac{5}{14z}(J_6 + J_8) - \frac{5}{18z}(J_8 + J_{10}) \\
&= -\frac{4}{21}J_5 - \frac{5}{6}J_7 + \frac{5}{14}J_9 - \frac{5}{14z}J_6 - \frac{40}{63z}J_8 - \frac{5}{18z}J_{10} \\
&= -\frac{4}{21}J_5 - \frac{5}{6}J_7 + \frac{5}{14}J_9 - \frac{5}{84}\frac{6}{z}J_6 - \frac{40}{504}\frac{8}{z}J_8 - \frac{5}{180}\frac{10}{z}J_{10} \\
&= -\frac{4}{21}J_5 - \frac{5}{6}J_7 + \frac{5}{14}J_9 - \frac{5}{84}(J_5 + J_7) - \frac{5}{63}(J_7 + J_9) - \frac{1}{36}(J_9 + J_{11}) \\
&= -\frac{1}{4}J_5 - \frac{35}{36}J_7 + \frac{1}{4}J_9 - \frac{1}{36}J_{11}.
\end{aligned}$$

Para concluir este ejemplo, resaltamos que para los resultados teóricos el valor de los números $d_i(L)$ y las constantes $C_{k,i}$ no son relevantes. Sin embargo, como se ha visto, si se quiere obtener un resultado concreto, entonces estos valores son muy importantes y (4.15) juega un papel clave.

4.3.2 El caso simétrico

Ahora consideramos el caso en el que la medida positiva de Borel μ es simétrica con soporte un intervalo simétrico $I = (-\rho, \rho)$ con $0 < \rho \leq +\infty$, por ejemplo, el peso de Hermite o Freud generalizados, ambos con soporte la recta real. Entonces, se pueden obtener las fórmulas asintóticas tipo Mehler–Heine siendo los detalles técnicos un poco más complicados.

Es conveniente para la Sección 4.6 dar un breve repaso al bien conocido proceso de simetrización (ver, por ejemplo, [6]). Sea $\{p_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la medida μ . Obviamente, estos polinomios son simétricos. Así, se puede tomar v como la medida tal que $\int_0^{\rho^2} p(x) dv = \int_{-\rho}^{\rho} p(x^2) d\mu$. Entonces, es posible reescribir las subsucesiones $\{p_{2n}\}_{n \geq 0}$ y $\{p_{2n+1}\}_{n \geq 0}$ como

$$p_{2n}(x) = \ell_n(x^2), \quad p_{2n+1}(x) = x\ell_n^*(x^2),$$

donde $\{\ell_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\ell_n^*\}_{n \geq 0}$ son las sucesiones de polinomios ortonormales con respecto a las medidas v y xv , respectivamente. Además, también es necesario con-

siderar con la sucesión de polinomios ortonormales simétricos $\{p_n^{[2i]}\}_{n \geq 0}$. Puesto que $c = 0$, tenemos

$$p_{2n}^{[2i]}(x) = l_n^{[i]}(x^2), \quad p_{2n+1}^{[2i]}(x) = x(l_n^*)^{[i]}(x^2),$$

donde $\{l_n^{[i]}\}_{n \geq 0}$ y $\{(l_n^*)^{[i]}\}_{n \geq 0}$ son las sucesiones de polinomios ortonormales con respecto a las medidas $x^i v$ y $x^{i+1} v$, respectivamente.

Entonces, consideramos el producto escalar tipo Sobolev variante

$$(p, q)_S = \int p(x)q(x)d\mu + M_n p^{(j)}(0)q^{(j)}(0), \quad (4.23)$$

donde $\{M_n\}_{n \geq 0}$ verifica la condición (4.2). De nuevo, se vuelve a denotar por $\{q_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a (4.23).

Para este estudio, se tratarán por separado los casos j par y j impar.

Cuando $j = 2r$, aplicando el proceso de simetrización (ver [6, Teo. 2]), nos proporciona dos productos escalares

$$(p, q)_{S_1} = \int_0^{\rho^2} p(x)q(x)dv + M_{2n}((r+1)_r)^2 p^{(r)}(0)q^{(r)}(0), \quad (4.24)$$

donde $(r)_k$ denota el símbolo de Pochhammer (ver (1.11)), y

$$(p, q)_{S_2} = \int_0^{\rho^2} p(x)q(x)x dv.$$

Entonces,

$$q_{2n}(x) = s_n(x^2), \quad q_{2n+1}(x) = x s_n^*(x^2),$$

siendo $\{s_n\}_{n \geq 0}$ y $\{s_n^*\}_{n \geq 0}$ las sucesiones de polinomios ortonormales con respecto a $(\cdot, \cdot)_{S_1}$ y $(\cdot, \cdot)_{S_2}$, respectivamente.

Cuando $j = 2r + 1$, se tiene

$$\begin{aligned} (p, q)_{S_3} &= \int_0^{\rho^2} p(x)q(x)dv, \\ (p, q)_{S_4} &= \int_0^{\rho^2} p(x)q(x)x dv + M_{2n+1}((r+1)_{r+1})^2 p^{(r)}(0)q^{(r)}(0). \end{aligned}$$

Entonces,

$$q_{2n}(x) = t_n(x^2), \quad q_{2n+1}(x) = x t_n^*(x^2),$$

siendo $\{t_n\}_{n \geq 0}$ y $\{t_n^*\}_{n \geq 0}$ las sucesiones de polinomios ortonormales con respecto a $(\cdot, \cdot)_{S_3}$ y $(\cdot, \cdot)_{S_4}$, respectivamente.

De esta forma, podemos aplicar nuestros resultados a los polinomios ortonormales con respecto a los productos escalares $(\cdot, \cdot)_{S_i}$ con $i = 1, \dots, 4$. Entonces, podemos deducir los correspondientes comportamientos para los polinomios ortonormales con respecto a (4.23). Obsérvese que $(\cdot, \cdot)_{S_i}$, $i = 2, 3$, no son productos escalares de Sobolev, sino estándar.

Por tanto, resumimos los resultados más relevantes que serán muy útiles en la Sección 4.6, aunque omitimos las demostraciones, ya que son similares a las del caso no simétrico. Sea f una función estrictamente creciente con $2f(0) + 1 > 0$, que satisface las condiciones

$$(p_{2n}^{[4i]})^{(2k)}(0) \approx C_{k,i}(-1)^n n^{f(2k+2i)} = C_{k,i}(-1)^n n^{g(k+i)}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.25)$$

$$(p_{2n+1}^{[4i]})^{(2k+1)}(0) \approx \tilde{C}_{k,i}(-1)^n n^{f(2k+2i+1)} = \tilde{C}_{k,i}(-1)^n n^{g^*(k+i)}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.26)$$

donde g y g^* son estrictamente crecientes satisfaciendo

$$\begin{aligned} g(k) &:= f(2k) \quad \text{con} \quad 2g(0) + 1 > 0, \\ g^*(k) &:= f(2k+1) \quad \text{con} \quad 2g^*(0) + 1 > 0. \end{aligned}$$

$C_{k,i}$ y $\tilde{C}_{k,i}$ son constantes independientes de n y distintas de cero. También es necesario asumir que, para todo $i \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{a_n^{1/2}}{b_n^i} p_{2n}^{[2i]} \left(\frac{z}{b_n} \right) = z^{-(\alpha+i)} J_{\alpha+i}(2z), \quad (4.27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{a_n^{1/2}}{b_n^i} p_{2n+1}^{[2i]} \left(\frac{z}{b_n} \right) = z^{-(\alpha+i)} J_{\alpha+i+1}(2z), \quad (4.28)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, donde

$$a_n^{-1/2} \approx A n^a, \quad b_n \approx B n^b, \quad A, B, b > 0, \quad \alpha > -1, \quad \text{y} \quad 2a + 1 = 2b(\alpha + 1). \quad (4.29)$$

Esta hipótesis se cumple en situaciones generales (ver [156, Lema 3]).

Así, siguiendo los pasos realizados en el caso no simétrico (ver Lema 4.2.2) se consideran las siguientes cantidades, para $k \geq 0$, $r \geq 0$ y $L \in [0, +\infty]$,

$$\tau_{k,r,L} = \frac{L(g(k) - g(r)) + g(k) + g(r) + 1}{(1+L)(g(k) + g(r) + 1)}, \quad (4.30)$$

$$q_{k,r,L} = \frac{L(g^*(k) - g^*(r)) + g^*(k) + g^*(r) + 1}{(1+L)(g^*(k) + g^*(r) + 1)}, \quad (4.31)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau_{k,r,+\infty} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_{k,r,L} = \frac{g(k) - g(r)}{g(k) + g(r) + 1}, \\ q_{k,r,+\infty} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} q_{k,r,L} = \frac{g^*(k) - g^*(r)}{g^*(k) + g^*(r) + 1}. \end{aligned}$$

Ahora, se tienen todos los ingredientes para poder obtener la asintótica tipo Mehler–Heine para polinomios ortonormales tipo Sobolev variantes cuando la medida μ es simétrica.

Teorema 4.3.2 *Asumiendo que se verifican las condiciones (4.25–4.29), se tienen las siguientes fórmulas asintóticas tipo Mehler–Heine para la sucesión de polinomios ortonormales $\{q_n\}_{n \geq 0}$ con respecto a (4.23):*

▪ Si $j = 2r$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n^{1/2} q_{2n} \left(\frac{z}{b_n} \right) = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i d_{i,1}(L) z^{-\alpha} J_{\alpha+2i}(2z) := \Phi_{\alpha,r,L}(z), \quad (4.32)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n^{1/2} q_{2n+1} \left(\frac{z}{b_n} \right) = z^{-\alpha} J_{\alpha+1}(2z).$$

▪ Si $j = 2r + 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n^{1/2} q_{2n} \left(\frac{z}{b_n} \right) = z^{-\alpha} J_{\alpha}(2z),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n^{1/2} q_{2n+1} \left(\frac{z}{b_n} \right) = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i d_{i,2}(L) z^{-\alpha} J_{\alpha+2i+1}(2z) := \Phi_{\alpha,r,L}^*(z). \quad (4.33)$$

Los coeficientes $d_{i,1}(L)$ y $d_{i,2}(L)$ se calculan recursivamente mediante

$$d_{i,1}(L) = (-1)^i \frac{\tau_{i,r,L} - (2i)! \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^i d_{m,1}(L) \frac{C_{i-m,m}}{(2(i-m))! C_{i,0}}}{(2i)! \frac{C_{0,i}}{C_{i,0}}}, \quad (4.34)$$

$$d_{i,2}(L) = (-1)^i \frac{\rho_{i,r,L} - (2i+1)! \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^i d_{m,2}(L) \frac{\tilde{C}_{i-m,m}}{(2(i-m)+1)! \tilde{C}_{i,0}}}{(2i+1)! \frac{\tilde{C}_{0,i}}{\tilde{C}_{i,0}}}, \quad (4.35)$$

donde $\tau_{i,r,L}$ y $\rho_{i,r,L}$ han sido dados en (4.30) y (4.31), respectivamente. En los límites anteriores la convergencia es uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

4.4 COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LOS CEROS

Como consecuencia de los resultados de la Sección 4.3 vamos a obtener el comportamiento asintótico de los ceros de los correspondientes polinomios ortonormales.

Sea $\{p_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la medida no simétrica μ con soporte un intervalo I . Se asume que satisfacen la siguiente fórmula tipo Mehler–Heine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n^{1/2} p_n \left(c + \frac{z^2}{b_n} \right) = z^{-\alpha} J_\alpha(2z), \quad \alpha > -1,$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, y con a_n y b_n satisfaciendo (4.19). Se denotan por $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ los ceros del polinomio p_n en orden creciente. Entonces, aplicando el Teorema de Hurwitz (ver [169, Th.1.91.3]) se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n (x_{n,k} - c) = \frac{j_{\alpha,k}^2}{4}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

donde $j_{\alpha,k}$ es el k -ésimo cero positivo de J_α .

Partiendo de estas hipótesis vamos a estudiar los ceros de los polinomios tipo Sobolev q_n . Se asume que $c = \inf I \in \mathbb{R}$ (aunque resultados similares se pueden obtener cuando $c = \sup I$, con I acotado superiormente). El siguiente resultado fue establecido para el caso no variante en [141, Teo. 4.1] (ver también [5, Lema 2]).

La demostración puede se reescrita siguiendo los mismos pasos (ver Proposición 2.5.1).

Proposición 4.4.1 *El polinomio q_n , con $n \geq 1$, ortonormal con respecto a (4.1), tiene n ceros reales y simples y a lo más uno de ellos se encuentra fuera del soporte de μ .*

Además, se puede dar mayor información sobre la localización de los ceros.

Proposición 4.4.2 *Sean $y_{n,1} < y_{n,2} < \dots < y_{n,n}$ los ceros del polinomio q_n en orden creciente. Entonces para n suficientemente grande y $j > 0$, se tiene*

- Si $L = 0$, entonces todos los ceros de $q_n(x)$ se encuentran dentro del soporte de μ .
- Si $L = +\infty$, entonces $y_{n,1} < c$.
- Si $L \in (0, +\infty)$, entonces $y_{n,1} < c$ si y solamente si

$$L > \frac{f(0) + f(j) + 1}{f(j) - f(0)}.$$

Nota 4.4.1 *Cuando $j = 0$, todos los ceros están dentro del soporte de μ ya que, en este caso, (4.1) se convierte en un producto estándar variante.*

Demostración: Para probar los tres casos usamos el Lema 4.2.2 con $k = 0$, la Proposición 4.4.1, el hecho de que el coeficiente líder $\tilde{\gamma}_n$ de q_n es positivo y que p_n tiene todos los ceros dentro del soporte de μ . Entonces,

- Si $L = 0$, entonces por el Lema 4.2.2, $\frac{q_n(c)}{p_n(c)} > 0$ para n suficientemente grande, así que $q_n(x)$ podría tener 2 o 4 o 6, ... cambios de signo en $(-\infty, c)$, pero teniendo en cuenta la Proposición 4.4.1 esto no es posible.
- Si $L = +\infty$, entonces $\frac{q_n(c)}{p_n(c)} < 0$ para n suficientemente grande, lo cual implica que q_n tiene al menos un cambio de signo en el intervalo $(-\infty, c)$ y, por la Proposición 4.4.1, a lo más, solamente puede haber un cambio.
- Si $L \in (0, +\infty)$, haciendo un razonamiento similar al caso $L = +\infty$, se tiene que $y_{n,1} < c$ si y solamente si $\frac{q_n(c)}{p_n(c)} < 0$ para n suficientemente grande, y esto solamente se tiene si (ver Nota 4.2.1)

$$\frac{L(f(0) - f(j)) + f(0) + f(j) + 1}{(1 + L)(f(0) + f(j) + 1)} < 0.$$

Teniendo en cuenta que f es una función estrictamente creciente, $f(0) - f(j) < 0$. Así, despejando L en la anterior desigualdad L se deduce el resultado. ■

Finalmente, obtenemos el comportamiento asintótico de los ceros reescalados de q_n como consecuencia de la fórmula asintótica tipo Mehler–Heine para q_n dada en el Teorema 4.3.1.

Proposición 4.4.3 Sean $y_{n,1} < y_{n,2} < \dots < y_{n,n-1} < y_{n,n}$ los ceros de q_n en orden creciente, $\varphi_{\alpha,j,L}$ la función dada en el Teorema 4.3.1, y b_n definido en (4.19). Entonces,

1. Si $L = 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(y_{n,i} - c) = \frac{j_{\alpha,i}^2}{4}, \quad i \geq 1,$$

donde $j_{\alpha,i}$ denota el i -ésimo cero positivo de la función de Bessel.

2. Si $L = +\infty$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,1} = c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(y_{n,i} - c) = \frac{t_{\alpha,i-1}^2}{4}, \quad i \geq 2,$$

donde $t_{\alpha,i}$ denota el i -ésimo cero positivo de la función $\varphi_{\alpha,j,+\infty}$.

3. Si $L \in (0, +\infty)$, entonces se tienen dos casos:

(a) Si $L < \frac{f(0)+f(j)+1}{f(j)-f(0)}$, entonces $y_{n,1} > c$ para n suficientemente grande, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(y_{n,i} - c) = \frac{s_{\alpha,i}^2}{4}, \quad i \geq 1.$$

(b) Si $L > \frac{f(0)+f(j)+1}{f(j)-f(0)}$, entonces $y_{n,1} < c$ para n suficientemente grande, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,1} = c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(y_{n,i} - c) = \frac{s_{\alpha,i-1}^2}{4}, \quad i \geq 2.$$

En ambas situaciones, $s_{\alpha,i}$ denota el i -ésimo cero positivo de la función $\varphi_{\alpha,j,L}$.

Demostración: Solamente es necesario usar el Teorema 4.3.1, la Proposición 4.4.2, y el Teorema de Hurwitz. ■

4.5 OTROS RESULTADOS ASINTÓTICOS

Como se ha señalado anteriormente, uno de los objetivos de este capítulo es descubrir las diferencias entre el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales de Sobolev y los estándar. Estas diferencias se muestran claramente a través de las fórmulas asintóticas de Mehler–Heine porque describen muy bien el comportamiento asintótico alrededor del punto donde se ha introducido la perturbación del producto escalar estándar. En esta sección, se asumirá que μ no es simétrico y se mostrará que ambas familias de polinomios tienen el mismo comportamiento asintótico en subconjuntos compactos del plano complejo fuera del soporte de μ .

Primero se estudiará el caso acotado, asumiendo que μ pertenece a la clase de Szegő, denotado por $\mu \in \mathcal{S}$ (ver Definición 1.2.1).

Teorema 4.5.1 *Supongamos que $\mu \in \mathcal{S}$. Sea $\{p_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a μ satisfaciendo (4.4) y sea $\{q_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a (4.1). Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n(z)}{p_n(z)} = 1$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Demostración:

Si $\mu \in \mathcal{S}$, entonces (ver, por ejemplo [151, p. 36]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}(z)}{p_n(z)} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad (4.36)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} = \frac{1}{2}. \quad (4.37)$$

De (4.6), se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n(z)}{p_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} \left(1 - \frac{\frac{M_n p_n^{(j)}(c)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} K_{n-1}^{(0,j)}(z, c)}{p_n(z)} \right).$$

Por (4.9) se tiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\gamma}_n / \gamma_n = 1$. Entonces es suficiente probar que el interior del paréntesis anterior tiende a 1 cuando $n \rightarrow \infty$. Usando la fórmula de Christoffel–Darboux (ver Teorema 1.1.5) para polinomios ortogonales estándar, se deduce, tras algunos cálculos, que

$$\begin{aligned} & K_{n-1}^{(0,j)}(z, c) \\ &= \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \left(p_n(z) \left(\sum_{i=0}^j \frac{p_{n-1}^{(i)}(c)j!}{(z-c)^{j-i+1}i!} \right) - p_{n-1}(z) \left(\sum_{i=0}^j \frac{p_n^{(i)}(c)j!}{(z-c)^{j-i+1}i!} \right) \right). \end{aligned}$$

Ahora, sea z fijo y perteneciendo a un subconjunto compacto arbitrario de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Usando (4.4), (4.8), y (4.36–4.37) se obtiene

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{M_n p_n^{(j)}(c)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} K_{n-1}^{(0,j)}(z, c)}{p_n(z)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c) \frac{p_n^{(j)}(c)}{K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)}}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} \\ & \quad \times \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \left(\left(\sum_{i=0}^j \frac{p_{n-1}^{(i)}(c)j!}{(z-c)^{j-i+1}i!} \right) - \frac{p_{n-1}(z)}{p_n(z)} \left(\sum_{i=0}^j \frac{p_n^{(i)}(c)j!}{(z-c)^{j-i+1}i!} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c) \frac{n^{2f(j)+1}}{K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} n^{-(2f(j)+1)} \frac{p_n^{(j)}(c)}{n^{f(j)}} n^{f(j)}}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} \\ & \quad \times \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} n^{f(j)+1} \left(\left(\sum_{i=0}^j \frac{p_{n-1}^{(i)}(c)j!}{n^{f(j)+1}(z-c)^{j-i+1}i!} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{p_{n-1}(z)}{p_n(z)} \left(\sum_{i=0}^j \frac{p_n^{(i)}(c)j!}{n^{f(j)+1}(z-c)^{j-i+1}i!} \right) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

A continuación se asume que μ es una medida de soporte no acotado. Se puede establecer un resultado análogo al Teorema 4.5.1 estudiando la asintótica tipo Plancherel–Rotach. Dado que $\{p_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortonormales estándar, verifican una relación de recurrencia a tres términos de la forma

$$xp_n(x) = \lambda_{n+1}p_{n+1}(x) + \eta_n p_n(x) + \lambda_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

con $p_{-1}(x) = 0$ y $p_0(x) = 1$.

Siguiendo la notación de [171], podemos asumir que existe una función no decreciente $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de manera que para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x+t)}{\varphi(x)} = 1, \quad (4.38)$$

y supongamos que existen dos constantes λ y η satisfaciendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\varphi(n)} = \lambda \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n}{\varphi(n)} = \eta \in \mathbb{R}. \quad (4.39)$$

Bajo estas hipótesis, se tiene la siguiente asintótica ([171, Teo. 4.10]),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}(\varphi(n)z)}{p_n(\varphi(n)z)} = \frac{2\lambda}{z - \eta + \sqrt{(z - \eta)^2 - 4\lambda^2}}, \quad (4.40)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [A, B]$ donde $[A, B]$ es el intervalo más pequeño que contiene a $\{0\}$ y $[\eta - 2\lambda, \eta + 2\lambda]$.

De esta forma, podemos establecer la asintótica relativa tipo Plancherel–Rotach.

Teorema 4.5.2 Sean $\{p_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a μ verificando (4.4) y $\{q_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a (4.1). Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n(\varphi(n)z)}{p_n(\varphi(n)z)} = 1,$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [A, B]$ donde $[A, B]$ es el intervalo más pequeño conteniendo a $\{0\}$ y $[\eta - 2\lambda, \eta + 2\lambda]$.

Demostración: Reescalando la expresión (4.6) se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n(\varphi(n)z)}{p_n(\varphi(n)z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_n}{\gamma_n} \left(1 - \frac{\frac{M_n p_n^{(j)}(c)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} K_{n-1}^{(0,j)}(\varphi(n)z, c)}{p_n(\varphi(n)z)} \right).$$

Siguiendo los mismos pasos que en el Teorema 4.5.1, es suficiente probar que la expresión entre paréntesis tiende a 1 cuando $n \rightarrow \infty$. Así, para un valor fijo $z \in \Omega$ siendo Ω un compacto arbitrario de $\mathbb{C} \setminus [A, B]$, se deduce que

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{M_n p_n^{(j)}(c)}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} K_{n-1}^{(0,j)}(\varphi(n)z, c)}{p_n(\varphi(n)z)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c) \frac{n^{2f(j)+1}}{K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} n^{-(2f(j)+1)} \frac{p_n^{(j)}(c)}{n^{f(j)}} n^{f(j)}}{1 + M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} \\
&\quad \times \lambda_n n^{f(j)+1} \left(\left(\sum_{i=0}^j \frac{p_{n-1}^{(i)}(c) j!}{n^{f(j)+1} (\varphi(n)z - c)^{j-i+1} i!} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{p_{n-1}(\varphi(n)z)}{p_n(\varphi(n)z)} \left(\sum_{i=0}^j \frac{p_n^{(i)}(c) j!}{n^{f(j)+1} (\varphi(n)z - c)^{j-i+1} i!} \right) \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

uniformemente en Ω , donde se ha aplicado (4.4), (4.8), (4.39), (4.40), y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n (\varphi(n)z - c)^{j-i+1}} = M(z) \text{ con } |M(z)| < +\infty. \quad \blacksquare$$

Corolario 4.5.1 *Asumiendo que se verifican las condiciones (4.38) y (4.39), entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}(\varphi(n)z)}{q_n(\varphi(n)z)} = \frac{2\lambda}{z - \eta + \sqrt{(z - \eta)^2 - 4\lambda^2}},$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [A, B]$, donde $[A, B]$ es el intervalo más pequeño conteniendo a $\{0\}$ y $[\eta - 2\lambda, \eta + 2\lambda]$.

Demostración: Del Teorema 4.5.2 y de (4.40), se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}(\varphi(n)z)}{q_n(\varphi(n)z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}(\varphi(n)z)}{p_{n-1}(\varphi(n)z)} \frac{p_{n-1}(\varphi(n)z)}{p_n(\varphi(n)z)} \frac{p_n(\varphi(n)z)}{q_n(\varphi(n)z)} \\
&= \frac{2\lambda}{z - \eta + \sqrt{(z - \eta)^2 - 4\lambda^2}}.
\end{aligned}$$

4.6 EXPERIMENTO NUMÉRICO

El Teorema 4.3.1 ya ha sido ilustrado para elecciones particulares de la medida μ en los capítulos previos. Por ejemplo, en el Capítulo 3 (ver también [119]) donde la medida μ era la medida de Jacobi y en el Capítulo 2 (ver también [118]) para la medida de Laguerre. Así que, ahora, es conveniente mostrar un experimento numérico

para el caso en que la medida μ es simétrica. Para ello se toma el peso de Hermite e^{-x^2} en el eje real y $c = 0$. Entonces, (4.1) se convierte en

$$(f, g)_S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx + M_n f^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad j \geq 0, \quad (4.41)$$

donde $\{M_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de números reales no negativos verificando (4.2). Aplicando el proceso de simetrización descrito en la Sección 4.3, se obtienen los siguientes productos escalares:

Si $j = 2r$,

$$(p, q)_{S_1} = \int_0^{+\infty} p(x)q(x)x^{-1/2}e^{-x}dx + M_{2n}((r+1)_r)^2 p^{(r)}(0)q^{(r)}(0), \quad (4.42)$$

$$(p, q)_{S_2} = \int_0^{+\infty} p(x)q(x)x^{1/2}e^{-x}dx, \quad (4.43)$$

y, si $j = 2r + 1$,

$$(p, q)_{S_3} = \int_0^{+\infty} p(x)q(x)x^{-1/2}e^{-x}dx,$$

$$(p, q)_{S_4} = \int_0^{+\infty} p(x)q(x)x^{1/2}e^{-x}dx + M_{2n+1}((r+1)_{r+1})^2 p^{(r)}(0)q^{(r)}(0).$$

Vamos a comparar numéricamente los ceros de los polinomios ortonormales, q_n , con respecto al producto escalar (4.41), con los ceros de las correspondientes funciones límite determinadas por la asintótica tipo Mehler–Heine en el Teorema 4.3.2.

Obsérvese que, para j par y utilizando el proceso de simetrización, los ceros de los polinomios ortogonales q_{2n} y q_{2n+1} son las raíces cuadradas de los ceros de los polinomios ortogonales con respecto a (4.42) y (4.43), respectivamente. Como (4.43) es un producto escalar estándar, en el experimento numérico sólo se prestará atención a los ceros de q_{2n} . La situación análoga ocurre cuando j es impar, por tanto, prestaremos atención a los ceros de los polinomios q_{2n+1} .

A continuación, se describen los pasos para construir el experimento numérico.

Paso 1. Determinar a_n y b_n definidas en (4.27–4.28). En este caso, la asintótica tipo Mehler–Heine para los polinomios ortonormales de Hermite, que se denotarán por h_n , es conocida. A saber,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^{1/4} h_{2n}(z/\sqrt{n}) &= z^{1/2} J_{-1/2}(2z) = \frac{\cos(2z)}{\sqrt{\pi}}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^{1/4} h_{2n+1}(z/\sqrt{n}) &= z^{1/2} J_{1/2}(2z) = \frac{\sin(2z)}{\sqrt{\pi}},\end{aligned}$$

uniformemente en subconjuntos compacto de $\mathbb{C}$. Por tanto, $a_n = n^{1/2}$ y $b_n = \sqrt{n}$. Entonces, todas las hipótesis de [156, Lema 3] (ver también página 106) se satisfacen. Así, las fórmulas Mehler–Heine (4.27–4.28) también se verifican para los polinomios $p_n^{[2i]}$, que, en este caso, son polinomios de Hermite generalizados, donde los valores de las constantes en (4.29) son

$$A = 1, \quad a = -1/4, \quad B = 1, \quad b = 1/2, \quad \alpha = -1/2.$$

En general, para pesos Freud las cantidades a_n están relacionadas con los números de Maskhar–Rakhmanov–Saff y $b_n = c \frac{n}{a_n}$, donde c es una constante conocida (ver, por ejemplo, Capítulo 10 de [82]). Se debe tener cuidado con los parámetros en esta fórmula porque los diferentes documentos (textos y artículos) funcionan con normalizaciones levemente diferentes pero son relevantes en el experimento numérico.

Paso 2. Calcular los ceros de $q_n(x/b_n)$. Se calculan los ceros de estos polinomios usando (4.6).

Paso 3. Calcular los ceros de las funciones límite $\Phi_{\alpha,r,L}$ y $\Phi_{\alpha,r,L}^*$ en (4.32) y (4.33), respectivamente. Para ello es necesario calcular recursivamente los coeficientes $d_{i,1}(L)$ y $d_{i,2}(L)$, dados por (4.34) y (4.35), respectivamente. Obviamente, estos cálculos dependen del valor de L . Entonces, se tendrán 6 diferentes casos. Además, el cálculo de (4.34) y (4.35) involucra el cálculo de $\tau_{k,r,L}$ y $q_{k,r,L}$, respectivamente, y de las constantes $C_{s,t}$ y $\tilde{C}_{s,t}$, las cuales, a su vez, dependen de los valores explícitos de las funciones $g(x)$ y $g^*(x)$. Resumiendo,

3. (a) Calcular $g(x)$, $g^*(x)$ y las constantes $C_{s,t}$ y $\tilde{C}_{s,t}$. En [12, Coro. 2] fue obtenido el comportamiento asintótico de los valores $(\hat{p}_{2n}^{[m]})^{(2k)}(0)$ y $(\hat{p}_{2n+1}^{[m]})^{(2k+1)}(0)$, donde $\hat{p}_n^{[m]}$ son los polinomios ortonormales con respecto al peso $x^{2m} \exp(-2|x|^\beta)$, con $\beta > 1$, y m un entero no negativo. En este caso, $\beta = 2$ y la función peso viene dada por $x^{2m} \exp(-x^2)$

cuyos correspondientes polinomios ortonormales son Hermite generalizados. Así, usando [12, Coro. 2] se tiene,

$$\begin{aligned} (p_{2n}^{[4i]})^{(2k)}(0) &= \frac{1}{2^{i/2+k+1/4}} (\hat{p}_{2n}^{[2i]})^{(2k)}(0) \\ &\approx \frac{(-1)^k (2k)!}{k! \Gamma(k+2i+1/2)} (-1)^n n^{i+k-1/4}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

En particular, para $i = 0$ se tiene

$$p_{2n}^{(2k)}(0) \approx \frac{(-1)^k (2k)!}{k! \Gamma(k+1/2)} (-1)^n n^{k-1/4}. \quad (4.45)$$

Es importante destacar que, en dicho artículo, los autores usan otra normalización, concretamente $b_n = 2\sqrt{n}$.

Se puede observar que, en este caso, los polinomios p_{2n} son los polinomios clásicos de Hermite y, por tanto, $p_{2n}(0)$ es conocido. De hecho, $p_{2n}(0) = (-1)^n \Gamma(2n+1) / (\pi^{1/4} 2^n \Gamma(n+1) \Gamma^{1/2}(2n+1))$, así que después de algunos cálculos se obtiene (4.45). Sin embargo, (4.44) es necesario para calcular las constantes $C_{s,t}$ que aparecen en los cálculos de $d_{i,1}(L)$ via (4.34). Además, si se trabaja con otro peso de Freud, entonces no se conoce el valor explícito de los correspondientes polinomios ortogonales en el origen y (4.45) es necesario.

De (4.25) y (4.45), se deduce que $g(k) = f(2k) = k - 1/4$. De (4.44), se tiene

$$C_{k,i} = \frac{(-1)^k (2k)!}{k! \Gamma(k+2i+1/2)}.$$

En este mismo sentido, se obtienen la función no decreciente $g^*(x)$ y las constantes $\tilde{C}_{k,i}$. Más precisamente,

$$g^*(k) = k + 1/4, \quad \tilde{C}_{k,i} = \frac{(-1)^k (2k+1)!}{k! \Gamma(k+2i+3/2)}.$$

3. (b) Calcular $\tau_{k,r,L}$ y $q_{k,r,L}$ mediante las fórmulas (4.30) y (4.31), respectivamente. Se necesitan $g(x)$ y $g^*(x)$ calculadas en el paso 3 (a).
3. (c) Calcular recursivamente $d_{i,1}(L)$ y $d_{i,2}(L)$ via las fórmulas (4.34) y (4.35), respectivamente. Se necesitan $\tau_{k,r,L}$ y $q_{k,r,L}$ calculadas en el paso 3 (b) y las constantes $C_{s,t}$ obtenidas en el paso 3 (a).

3. (d) Finalmente, se construyen las funciones límite, $\Phi_{\alpha,r,L}$ y $\Phi_{\alpha,r,L}^*$ via las fórmulas (4.32) y (4.33). Entonces, se calculan los ceros.

Para ilustrar este algoritmo se escoge $r = 4$ y la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ se toma como una sucesión potencial, es decir, $M_n = Mn^\delta$ con $M > 0$ y $\delta \in \mathbb{R}$.

Caso par: Ya que $j = 2r$, entonces $j = 8$. Teniendo en cuenta el proceso de simetrización y, tras algunos cálculos, se tiene

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{2n} K_{2n-1}^{(8,8)}(0,0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (5)_4 M_{2n} \tilde{K}_{n-1}^{(4,4)}(0,0), \quad (4.46)$$

donde $\tilde{K}_{n-1}(x, y)$ es el polinomio núcleo respecto a la medida simétrica ν dado en (4.42) como un caso particular de (4.24). Entonces, aplicando adecuadamente el Lema 4.2.2 se tiene

$$M_{2n} K_{2n-1}^{(8,8)}(0,0) \approx M \frac{2^\delta C_{4,0}^2}{2g(4) + 1} n^{2g(4)+1+\delta} = M \frac{2^\delta C_{4,0}^2}{2g(4) + 1} n^{\delta+17/2}. \quad (4.47)$$

Así, se pueden elegir 3 posibles valores para δ .

- Si $\delta < -17/2$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{2n} K_{2n-1}^{(8,8)}(0,0) = 0$. Así, $L = 0$ y para este ejemplo se toma $\delta = -10$.
- Si $\delta > -17/2$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{2n} K_{2n-1}^{(8,8)}(0,0) = +\infty$. Así, $L = +\infty$ y para este ejemplo se toma $\delta = -2$. Importante destacar que por la Proposición 4.4.2 el polinomio ortonormal con respecto a (4.42) tiene siempre un cero en $(-\infty, 0)$. Es por ello que el polinomio $q_{2n}(x)$ tiene dos raíces complejas conjugadas con parte real cero.
- Si $\delta = -17/2$, entonces $L = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{2n} K_{2n-1}^{(8,8)}(0,0) = M \frac{2^\delta C_{4,0}^2}{2g(4)+1}$. Así,

$$L = M \frac{2^\delta C_{4,0}^2}{2g(4) + 1} = M \frac{256\sqrt{2}}{17\pi}.$$

Este es el único caso donde M juega un papel relevante. Teniendo en cuenta (4.46) y (4.47) y, aplicando la Proposición 4.4.2, hay dos ceros complejos con parte real cero si y solamente si

$$M > \frac{(2g(4) + 1)(g(0) + g(4) + 1)}{2^\delta C_{4,0}^2 (g(4) - g(0))} = \frac{153\sqrt{2}\pi}{4096} \approx 0,165957.$$

Se muestran dos ejemplos en la Tabla 4.1 con $M = 1$ y $M = 1/10$ para ilustrar ambos casos.

En la Tabla 4.1 se denotan por $y_{2n,i}$ con $1 \leq i \leq 3$ los tres primeros ceros positivos de q_{2n} . Recordar que, en este caso, existen al menos $2n - 2$ ceros reales. Por tanto, se incluye una columna correspondiente al cero complejo con parte imaginaria positiva para cuando éste exista.

Tabla 4.1.: Caso par. $j = 8$

	n	$b_n y_{2n,1}$	$b_n y_{2n,2}$	$b_n y_{2n,3}$	Cero complejo
$L = 0$	$n = 100$	0,78412	2,35253	3,92133	-
	$n = 200$	0,78479	2,35444	3,92422	-
	$n = 300$	0,78501	2,35505	3,92517	-
	$\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, 0}(z)$	0,78540	2,35619	3,92699	-
$L = \frac{128\sqrt{2}}{85\pi}$ $M = \frac{1}{10}$	$n = 100$	0,64709	2,06989	3,63403	-
	$n = 200$	0,62893	2,04445	3,61736	-
	$n = 300$	0,62222	2,03553	3,61174	-
	$\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, \frac{128\sqrt{2}}{85\pi}}(z)$	0,60764	2,01703	3,60044	-
$L = \frac{256\sqrt{2}}{17\pi}$ $M = 1$	$n = 100$	1,04652	3,00536	4,81142	3,01401 <i>i</i>
	$n = 200$	1,04553	3,00577	4,81360	3,06416 <i>i</i>
	$n = 300$	1,04531	3,00607	4,81451	3,07959 <i>i</i>
	$\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, \frac{256\sqrt{2}}{17\pi}}(z)$	1,04501	3,00689	4,81658	3,10864 <i>i</i>
$L = +\infty$	$n = 100$	0,98736	2,90366	4,71791	4,31744 <i>i</i>
	$n = 200$	0,99062	2,91112	4,72651	4,27901 <i>i</i>
	$n = 300$	0,99172	2,91362	4,72944	4,26646 <i>i</i>
	$\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, +\infty}(z)$	0,99391	2,91865	4,73538	4,24173 <i>i</i>

Caso impar: En el caso impar puesto que $j = 2r + 1$ y, ya que $r = 4$, se tiene que $j = 9$. Se procede siguiendo los mismos pasos que en el caso par y, por tanto, omitiremos algunos detalles. Obviamente, 0 es una raíz del polinomio q_{2n+1} .

En este caso, el valor crítico es $\delta = -19/2$. Así pues,

$$L = M \frac{2^\delta \tilde{C}_{4,0}^2}{2g^*(4) + 1} = M \frac{519\sqrt{2}}{19\pi},$$

y hay dos raíces complejas conjugadas con parte real cero si y solamente si

$$M > \frac{(2g^*(4) + 1)(g^*(0) + g^*(4) + 1)}{2^\delta \tilde{C}_{4,0}^2 (g^*(4) - g^*(0))} = \frac{209\sqrt{2}\pi}{8192} \approx 0,11335.$$

Se muestran dos ejemplos en la Tabla 4.2 con $M = 1$ y $M = 1/20$ para ilustrar ambos casos. Los casos $L = 0$ y $L = +\infty$ se analizan también. Análogamente al

caso anterior, en la Tabla 4.2 se denotan por $y_{2n+1,i}$ con $1 \leq i \leq 3$ los tres primeros ceros positivos de q_{2n+1} . Recordar que, en este caso, existen al menos $2n - 2$ ceros reales. Por tanto, se incluye una columna correspondiente al cero complejo con parte imaginaria positiva para cuando éste exista.

Tabla 4.2.: Caso Impar. $j = 9$

	n	$b_n y_{2n+1,1}$	$b_n y_{2n+1,2}$	$b_n y_{2n+1,3}$	Cero complejo
$L = 0$	$n = 100$	1,56407	3,12850	4,69348	-
	$n = 200$	1,56751	3,13516	4,70300	-
	$n = 300$	1,56864	3,13736	4,70617	-
	$\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, 0}^*(z)$	1,57080	3,14159	4,71239	-
$L = \frac{128\sqrt{2}}{95\pi}$ $M = \frac{1}{20}$	$n = 100$	1,38432	2,87997	4,45036	-
	$n = 200$	1,36013	2,85813	4,43808	-
	$n = 300$	1,35109	2,85035	4,43385	-
	$\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, \frac{128\sqrt{2}}{95\pi}}^*(z)$	1,33136	2,83407	4,42525	-
$L = \frac{512\sqrt{2}}{19\pi}$ $M = 1$	$n = 100$	1,95555	3,80915	5,56992	$3,93083i$
	$n = 200$	1,95994	3,81767	5,58152	$3,96696i$
	$n = 300$	1,96151	3,82067	5,58560	$3,97757i$
	$\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, \frac{512\sqrt{2}}{19\pi}}^*(z)$	1,96481	3,82690	5,59407	$3,99681i$
$L = +\infty$	$n = 100$	1,91046	3,75234	5,51669	$4,82743i$
	$n = 200$	1,91861	3,76570	5,53290	$4,78443i$
	$n = 300$	1,92134	3,77020	5,53840	$4,77038i$
	$\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, +\infty}^*(z)$	1,92685	3,77929	5,54960	$4,74269i$

Finalmente, se incluyen algunas gráficas de las diferentes funciones límite que aparecen en la Tabla 4.1 y en la Tabla 4.2. En las figuras 4.1 y 4.2 se ilustran la Proposición 4.4.2 y las 4 diferentes fórmulas asintóticas tipo Mehler–Heine. En la Figura 4.3 se puede observar cómo las funciones límite cambian dependiendo del valor de M , e incluso observar cuándo aparecen los ceros complejos. Todos los cálculos han sido hechos con el software *Mathematica*® 11.

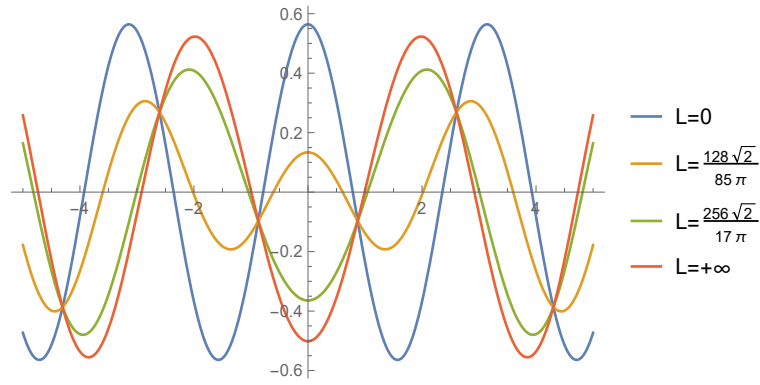


Figura 4.1.: Figura de $\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, L}$ para diferentes valores de L . Caso par.

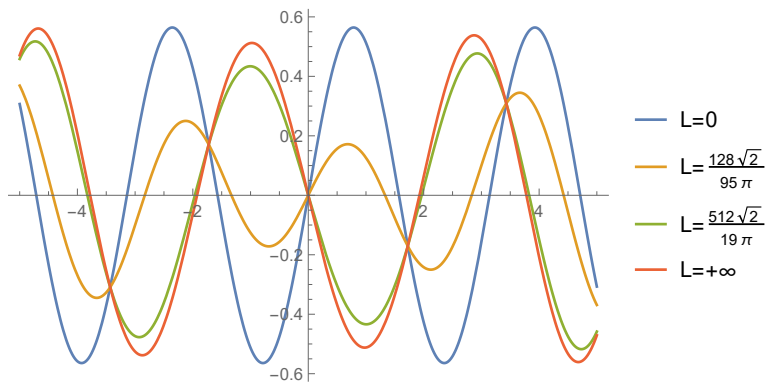


Figura 4.2.: Figura de $\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, L}^*$ para diferentes valores de L . Caso impar.

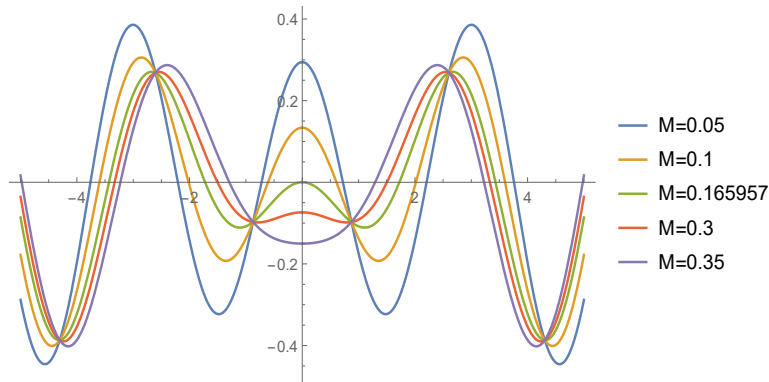


Figura 4.3.: Figura de $\Phi_{\frac{-1}{2}, 4, L}$ para diferentes valores de M .

POLINOMIOS ORTOGONALES DE
GEGENBAUER-SOBOLEV DISCRETOS COMO
AUTOFUNCIONES DE UN OPERADOR DIFERENCIAL

Este capítulo abre una nueva vía de investigación que tiene como principal objetivo la obtención del comportamiento asintótico de la sucesión de autovalores del operador diferencial cuyas autofunciones son polinomios ortogonales de Sobolev discretos. En particular, consideramos el siguiente producto de Gegenbauer–Sobolev discreto

$$(f, g)_S := \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^\alpha dx \\ + M[f^{(j)}(-1)g^{(j)}(-1) + f^{(j)}(1)g^{(j)}(1)],$$

donde $\alpha > -1$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $M > 0$. En este capítulo también se plantea el objetivo de calcular el valor exacto de

$$r_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\max_{x \in [-1,1]} |q_n^{(\alpha, M, j)}(x)| \right)}{\log \tilde{\lambda}_n}, \quad \alpha \geq -1/2,$$

donde $\{q_n^{(\alpha, M, j)}\}_{n \geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortonormales con respecto al anterior producto escalar. Estos polinomios son autofunciones de un operador diferencial, cuyos autovalores son $\tilde{\lambda}_n$. Así, para determinar el valor de r_0 , es esencial conocer el comportamiento asintótico de $\tilde{\lambda}_n$. Este valor r_0 se relaciona con la convergencia de una serie en un espacio definido a izquierda que definiremos más adelante. Además, para completar el estudio de esta familia de polinomios, y al igual que en capítulos anteriores, se obtendrá la correspondiente fórmula tipo Mehler–Heine para dichos polinomios ortogonales. Los resultados de este capítulo han sido publicados en [112].

5.1 MOTIVACIÓN Y DEFINICIÓN DEL VALOR r_0

Para entender la importancia de determinar r_0 es necesario incluir algunos conceptos que no han sido tratados en los capítulos anteriores. Estos conceptos que pueden ser encontrados en [29], [36], [83] o en la Sección 2 de [113].

Definición 5.1.1 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espacio de Hilbert y se denota por $\mathcal{D}(A)$ el dominio de un operador A . Supongamos $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un operador autoadjunto que está acotado inferiormente por una constante $k > 0$, es decir,

$$(Ax, x)_H \geq k(x, x)_H, \quad x \in \mathcal{D}(A). \quad (5.1)$$

Sea $H_1 = (V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ donde V_1 es un subespacio de H y $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ es un producto escalar en V_1 . Entonces, H_1 se dice un espacio de Hilbert definido a izquierda asociado al par (H, A) si se verifican cada una de las siguientes condiciones:

1. H_1 es un espacio de Hilbert.
2. $\mathcal{D}(A)$ es un subespacio de V_1 .
3. $\mathcal{D}(A)$ es denso en H_1 .
4. $(x, x)_1 \geq k(x, x)_H, x \in V_1$.
5. $(x, y)_1 = (Ax, y)_H$ con $x \in \mathcal{D}(A)$ e $y \in V_1$.

Si A es un operador autoadjunto en H y además acotado inferiormente por una constante positiva k , entonces, con ayuda del teorema espectral (ver, por ejemplo, [159] o [162]), se probó en el Teorema 4.3 de [113] que A^r es un operador autoadjunto acotado inferiormente por $k^r I$ para cada $r > 0$. Consecuentemente, la anterior Definición 5.1.1 se puede extender a cualquier espacio definido a izquierda asociado al par (H, A) .

Definición 5.1.2 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espacio de Hilbert. Supongamos $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un operador autoadjunto que está acotado inferiormente por una constante $k > 0$, es decir, se cumple (5.1). Sea $r > 0$, si existe un subespacio V_r y un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ en V_r de manera que $H_r = (V_r, \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$ es un espacio definido a izquierda con el par (H, A^r) , entonces H_r se llamará r -ésimo espacio de Hilbert definido a izquierda asociado al par (H, A) si se verifican cada una de las siguientes condiciones:

1. H_r es un espacio de Hilbert.
2. $\mathcal{D}(A^r)$ es un subespacio de V_r .
3. $\mathcal{D}(A^r)$ es denso en H_r .
4. $(x, x)_r \geq k^r(x, x)_H$, $x \in V_r$.
5. $(x, y)_r = (A^r x, y)_H$ con $x \in \mathcal{D}(A^r)$ e $y \in V_r$.

También son necesarios los conceptos de r –ésimo operador definido a izquierda y núcleo reproductor. Veámoslos:

Definición 5.1.3 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espacio de Hilbert. Supongamos $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un operador autoadjunto que está acotado inferiormente por una constante $k > 0$, es decir, se cumple (5.1). Sea $r > 0$ y supongamos H_r el r –ésimo espacio definido a izquierda asociado al par (H, A) . Si existe un operador autoadjunto $A_r : H_r \rightarrow H_r$ restricción de A y verificando que

$$A_r x = Ax, \quad x \in \mathcal{D}(A_r) \cup \mathcal{D}(A),$$

entonces, llamaremos a A_r el r –ésimo operador definido a izquierda asociado al par (H, A) .

Definición 5.1.4 Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espacio de Hilbert de funciones $\mathbb{R}$ –valuadas y X un subconjunto no vacío de H . La función $\mathfrak{K} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina núcleo reproductor de H si verifica:

- Para todo $x \in X$, $\mathfrak{K}(\cdot, x) \in H$.
- La propiedad reproductora: para todo $x \in X$ y para toda $f \in H$

$$f(x) = \langle f, \mathfrak{K}(\cdot, x) \rangle_H.$$

En particular, para cualquier $x, y \in X$,

$$\mathfrak{K}(x, y) = \langle \mathfrak{K}(\cdot, x), \mathfrak{K}(\cdot, y) \rangle_H.$$

Con estos conceptos ya estamos en condiciones de entrar en materia. Como ya hemos comentado, se considera el producto de Sobolev no estándar

$$(f, g)_S := \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^\alpha dx + M[f^{(j)}(-1)g^{(j)}(-1) + f^{(j)}(1)g^{(j)}(1)], \quad (5.2)$$

donde $\alpha > -1$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $M > 0$. Este producto escalar está íntimamente relacionado con otros considerados en la literatura.

En [94] los autores dan condiciones para que polinomios ortogonales con respecto a un producto discreto de Sobolev de la forma

$$(f, g)_S = \phi(f, g) + Mf^{(j)}(c)g^{(j)}(c),$$

donde ϕ es un producto escalar estándar simétrico, verifiquen una ecuación diferencial de orden, posiblemente, infinito. En [32] se extienden estos resultados a polinomios ortogonales con respecto al producto escalar

$$(f, g)_S = \phi(f, g) + Mf^{(j)}(c_1)g^{(j)}(c_1) + Nf^{(k)}(c_2)g^{(k)}(c_2). \quad (5.3)$$

Observe que (5.2) es un caso particular de (5.3). Específicamente, el autor construye un operador diferencial ℓ con autovalores $\tilde{\lambda}_n$ de manera que

$$\ell[Q_n](x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)Q_n^{(i)}(x) = \tilde{\lambda}_n Q_n(x).$$

Denotamos por $\{Q_n^{(\alpha, M, j)}\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a (5.2) con coeficiente líder $k_n(\alpha)$ dado en (1.13).

Consideramos el núcleo reescalado por los autovalores

$$K(x, y; r) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_i^{-r} \frac{Q_i^{(\alpha, M, j)}(x)Q_i^{(\alpha, M, j)}(y)}{(Q_i^{(\alpha, M, j)}, Q_i^{(\alpha, M, j)})_S},$$

y sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ la completación del espacio de polinomios bajo el producto escalar $(f, g)_S$. Entonces, sea $\mathbf{T}$ un operador autoadjunto en H generado por la expresión diferencial $\mathbf{L} + M\mathbf{A}$, donde $\mathbf{L}$ es el operador diferencial lineal asociado a los polinomios de Gegenbauer clásicos y $\mathbf{A}$ es un operador diferencial lineal que será definido más tarde. $\mathbf{T}$ existe y es un operador no acotado superiormente en H

ya que, como veremos más adelante, $\tilde{\lambda}_n \rightarrow \infty$. En este caso, el *espacio definido a izquierda* $H_r(\mathbf{T})$ asociado al producto escalar

$$\langle f, g \rangle_r := \langle \mathbf{T}^r f, g \rangle_H,$$

en $\mathcal{D}(\mathbf{T}^{r/2})$ produce un espacio de Hilbert (ver Sección 3 de [113]). Además, se pueden tomar las potencias $\mathbf{T}^r$ como un operador autoadjunto en el espacio definido a izquierda.

Se toma r_0 el menor número tal que para todo $r > r_0$ el núcleo $K(x, y; r)$ converge absolutamente en el espacio definido a izquierda $H_r(\mathbf{T})$. Entonces, para cada $r > r_0$ la sucesión $\left\{ \frac{Q_n^{(\alpha, M, j)}(x)}{\sqrt{\tilde{\lambda}_n(Q_n^{(\alpha, M, j)}, Q_n^{(\alpha, M, j)})_S}} \right\}_{n \geq 0}$ forma una base ortonormal completa para $H_r(\mathbf{T})$ y las propiedades para ser un núcleo reproductor se obtienen a partir de la identidad de Parseval:

$$\langle \mathbf{T}^r K(x, \cdot; r_0^+ + r), f \rangle_{H_{r_0^+}} = \langle K(x, \cdot; r_0^+), f \rangle_{H_{r_0^+}} = f(x),$$

donde r_0^+ denota $r_0 + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

Se puede demostrar (ver [114]) que

$$r_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\sup_{x \in [-1, 1]} |q_n^{(\alpha, M, j)}(x)| \right)}{\log \tilde{\lambda}_n}. \quad (5.4)$$

En este capítulo se encontrará el valor r_0 para $\alpha \geq -1/2$, $M > 0$ y $j \in \mathbb{N}$. El caso $\alpha \in (-1, -1/2)$ queda como un problema abierto ya que la técnica aquí empleada no se puede aplicar a dicho problema. Tampoco es aplicable al caso $j = 0$ y $\alpha > -1$, permaneciendo como una cuestión abierta

Siguiendo con la línea de investigación de esta memoria, se completa el estudio de los polinomios $Q_n^{(\alpha, M, j)}$ obteniendo la fórmula asintótica tipo Mehler–Heine.

La estructura de este capítulo es la siguiente: En la Sección 5.2 se establecerán relaciones algebraicas entre los polinomios $C_n^{(\alpha)}$ (ver Sección 1.1.5.2) y $Q_n^{(\alpha, M, j)}$, que serán útiles para establecer cotas para $\|Q_n^{(\alpha, M, j)}\|_\infty = \max_{x \in [-1, 1]} |Q_n^{(\alpha, M, j)}(x)|$. Los resultados de esta sección son la clave para obtener los nuevos resultados de las siguientes secciones. En la Sección 5.3 el principal objetivo será calcular el valor exacto de r_0 (Teorema 5.3.1). Para llegar a este propósito es fundamental obtener el

comportamiento asintótico de los autovalores asociados con el operador diferencial lineal $\mathbf{T} = \mathbf{L} + M\mathbf{A}$, es decir,

$$\mathbf{T}Q_n^{(\alpha, M, j)}(x) = (\mathbf{L} + M\mathbf{A})Q_n^{(\alpha, M, j)}(x) = \tilde{\lambda}_n Q_n^{(\alpha, M, j)}(x).$$

Por lo que sabemos, es la primera vez en el marco de la ortogonalidad Sobolev que se estudia el comportamiento asintótico de los autovalores. Finalmente, como se ha comentado previamente, y por analogía con los capítulos anteriores, en la Sección 5.4 se completa el estudio de esta familia de polinomios $Q_n^{(\alpha, M, j)}$ estableciendo la correspondiente fórmula asintótica tipo Mehler–Heine y dando información adicional sobre el comportamiento asintótico de los ceros de estos polinomios.

5.2 PROPIEDADES ASINTÓTICAS DE LOS POLINOMIOS $C_n^{(\alpha)}$ Y ESTUDIO DE LOS POLINOMIOS ORTOGONALES GEGENBAUER-SOBOLEV DISCRETOS

En la Sección 1.1.5.2 se definieron los polinomios de Gegenbauer clásicos $C_n^{(\alpha)}$ con la normalización $C_n^{(\alpha)}(1) = 1$. En dicha sección se pueden encontrar una serie de propiedades que se usarán en las siguientes secciones. Para nuestro objetivo de obtener el valor r_0 , necesitamos conocer ciertos comportamientos asintóticos.

Lema 5.2.1 Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(C_n^{(\alpha)}\right)^{(k)}(1)}{n^{2k}} = \frac{1}{2^k(\alpha+1)_k}. \quad (5.5)$$

Además,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|C_n^{(\alpha)}\|_\alpha^2 n^{2\alpha+1} = 2^{2\alpha} \Gamma^2(\alpha+1). \quad (5.6)$$

Demostración: Usando (1.10), (2.13), y el hecho de que $C_n^\alpha(1) = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(C_n^{(\alpha)}\right)^{(k)}(1)}{n^{2k}} &= \frac{(-1)^k}{2^k(\alpha+1)_k} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2\alpha+1)_k (-n)_k}{n^{2k}} \\ &= \frac{(-1)^k}{2^k(\alpha+1)_k} (-1)^k = \frac{1}{2^k(\alpha+1)_k}. \end{aligned}$$

La fórmula (5.6) se obtiene de la misma forma a partir de (1.14) y usando (2.13). ■

En este capítulo se usará la siguiente notación:

$$\kappa_{2n}^{(j,k)}(x, y) = \sum_{i=0}^n \frac{\left(C_{2i}^{(\alpha)}\right)^{(j)}(x) \left(C_{2i}^{(\alpha)}\right)^{(k)}(y)}{\|C_{2i}^{(\alpha)}\|_{\alpha}^2}, \quad (5.7)$$

$$\tilde{\kappa}_{2n}^{(j,k)}(x, y) = \sum_{i=0}^n \frac{\left(C_{2i+1}^{(\alpha)}\right)^{(j)}(x) \left(C_{2i+1}^{(\alpha)}\right)^{(k)}(y)}{\|C_{2i+1}^{(\alpha)}\|_{\alpha}^2}. \quad (5.8)$$

Proposición 5.2.1 Sean k y s números enteros no negativos. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_{n-1}^{(k,s)}(1, 1)}{n^{2k+2s+2\alpha+2}} = \frac{1}{2^{2\alpha+k+s+1}} C_{k,s}, \quad (5.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\kappa_{2(n-1)}^{(k,s)}(1, 1)}{n^{2k+2s+2\alpha+2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\kappa}_{2(n-1)}^{(k,s)}(1, 1)}{n^{2k+2s+2\alpha+2}} = 2^{k+s} C_{k,s}, \quad (5.10)$$

donde

$$C_{k,s} = \frac{1}{(k+s+\alpha+1)\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha+s+1)}.$$

Demostración: Observando que

$$n^{2\alpha+2k+2s+2} - (n-1)^{2\alpha+2k+2s+2} \approx (2\alpha+2k+2s+2)n^{2\alpha+2k+2s+1},$$

usando el criterio de Stolz, (5.5) y (5.6), se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_{n-1}^{(k,s)}(1, 1)}{n^{2k+2s+2\alpha+2}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_{n-1}^{(k,s)}(1, 1) - K_{n-2}^{(k,s)}(1, 1)}{n^{2k+2s+2\alpha+2} - (n-1)^{2k+2s+2\alpha+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\left(C_{n-1}^{(\alpha)}\right)^{(k)}(1) \left(C_{n-1}^{(\alpha)}\right)^{(s)}(1)}{\|C_{n-1}^{(\alpha)}\|_{\alpha}^2}}{2(\alpha+k+s+1)n^{2\alpha+2k+2s+1}} \\ &= \frac{1}{2(\alpha+k+s+1)} \frac{1}{2^k(\alpha+1)_k} \frac{1}{2^s(\alpha+1)_s} \frac{1}{2^{2\alpha}\Gamma^2(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Finalmente, ya que $(\alpha+1)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$ deducimos (5.9). Para establecer (5.10) se procede siguiendo exactamente los mismos pasos. ■

Es bien conocido que $\{C_i^{(\alpha)}\}_{i=0}^m$ constituye una base del espacio lineal de polinomios $\mathbb{P}_m[x]$. Por otro lado, los polinomios de Gegenbauer-Sobolev, $Q_n^{(\alpha, M, j)}$,

ortogonales con respecto a (5.2), con coeficiente líder $k_n(\alpha)$ dado en (1.13), pueden expresarse como

$$\begin{aligned} Q_{2n}^{(\alpha, M, j)}(x) &= C_{2n}^{(\alpha)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{2n, 2i} C_{2i}^{(\alpha)}(x), \\ Q_{2n+1}^{(\alpha, M, j)}(x) &= C_{2n+1}^{(\alpha)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{2n+1, 2i+1} C_{2i+1}^{(\alpha)}(x). \end{aligned}$$

Así, aplicando el procedimiento de [132, Sect. 2], podemos deducir la siguiente relación algebraica. Esta relación será similar a la dada en (1.38) (ver también (3.6) y (4.6)). Omitimos la demostración del resultado pues es análoga a la de [132, Sect. 2] teniendo en cuenta la simetría de los polinomios $Q_n^{(\alpha, M, j)}$ y $C_n^{(\alpha)}$.

Proposición 5.2.2 *Se tiene que*

$$Q_{2n}^{(\alpha, M, j)}(x) = C_{2n}^{(\alpha)}(x) - \frac{2M \left(C_{2n}^{(\alpha)}\right)^{(j)}(1) \kappa_{2(n-1)}^{(j, 0)}(1, x)}{1 + 2M \kappa_{2(n-1)}^{(j, j)}(1, 1)}, \quad (5.11)$$

$$Q_{2n+1}^{(\alpha, M, j)}(x) = C_{2n+1}^{(\alpha)}(x) - \frac{2M \left(C_{2n+1}^{(\alpha)}\right)^{(j)}(1) \tilde{\kappa}_{2(n-1)}^{(j, 0)}(1, x)}{1 + 2M \tilde{\kappa}_{2(n-1)}^{(j, j)}(1, 1)}. \quad (5.12)$$

Esta proposición es muy útil para obtener la siguiente asintótica relativa en $x = 1$.

Proposición 5.2.3 *Sea k un número entero no negativo. Entonces, se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(Q_n^{(\alpha, M, j)}\right)^{(k)}(1)}{\left(C_n^{(\alpha)}\right)^{(k)}(1)} = \frac{k - j}{j + k + \alpha + 1}.$$

Demostración: Solamente se probará el caso par ya que la demostración para el caso impar es similar. Se deriva la expresión (5.11) k veces y se evalúa en $x = 1$. Dividiendo por $\left(C_{2n}^{(\alpha)}\right)^{(k)}(1)$ y usando los límites (5.5) y (5.10) se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(Q_{2n}^{(\alpha, M, j)}\right)^{(k)}(1)}{\left(C_{2n}^{(\alpha)}\right)^{(k)}(1)} &= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2M \left(C_{2n}^{(\alpha)}\right)^{(j)}(1) \kappa_{2(n-1)}^{(j, k)}(1, 1)}{\left(1 + 2M \kappa_{2(n-1)}^{(j, j)}(1, 1)\right) \left(C_{2n}^{(\alpha)}\right)^{(k)}(1)} \\ &= 1 - \frac{(2j + \alpha + 1)(\alpha + 1)_k \Gamma(\alpha + j + 1)}{(\alpha + 1)_j (j + k + \alpha + 1) \Gamma(\alpha + k + 1)} = \frac{k - j}{j + k + \alpha + 1}. \end{aligned}$$

■

En la siguiente proposición se probará que la norma de los polinomios de Gegenbauer-Sobolev ortogonales con respecto al producto escalar (5.2) se comporta como la norma de los polinomios clásicos de Gegenbauer.

Proposición 5.2.4 *Se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|Q_n^{(\alpha, M, j)}\|_S}{\|C_n^{(\alpha)}\|_\alpha} = 1.$$

Demostración: De nuevo, solamente se probará el caso par, ya que el caso impar es similar.

$$\begin{aligned} (Q_{2n}^{(\alpha, M, j)}, Q_{2n}^{(\alpha, M, j)})_S &= (Q_{2n}^{(\alpha, M, j)}, C_{2n}^{(\alpha)})_S \\ &= \|C_{2n}^{(\alpha)}\|_\alpha^2 + 2M \left(Q_{2n}^{(\alpha, M, j)} \right)^{(j)}(1) \left(C_{2n}^{(\alpha)} \right)^{(j)}(1). \end{aligned}$$

Entonces, aplicando que $\left(Q_{2n}^{(\alpha, M, j)} \right)^{(j)}(1) = \frac{\left(C_{2n}^{(\alpha)} \right)^{(j)}(1)}{1 + 2M\kappa_{2(n-1)}^{(j,j)}(1,1)}$, se sigue

$$\begin{aligned} \frac{\|Q_{2n}^{(\alpha, M, j)}\|_S^2}{\|C_{2n}^{(\alpha)}\|_\alpha^2} &= 1 + \frac{2M \left(Q_{2n}^{(\alpha, M, j)} \right)^{(j)}(1) \left(C_{2n}^{(\alpha)} \right)^{(j)}(1)}{\|C_{2n}^{(\alpha)}\|_\alpha^2} \\ &= 1 + \frac{2M \left(\left(C_{2n}^{(\alpha)} \right)^{(j)}(1) \right)^2}{\left(1 + 2M\kappa_{2(n-1)}^{(j,j)}(1,1) \right) \|C_{2n}^{(\alpha)}\|_\alpha^2} \\ &= 1 + \frac{2M \left(\left(C_{2n}^{(\alpha)} \right)^{(j)}(1) \right)^2}{\frac{1 + 2M\kappa_{2(n-1)}^{(j,j)}(1,1)}{n^{4j+2\alpha+2}} \|C_{2n}^{(\alpha)}\|_\alpha^2 n^{2\alpha+1} n}. \end{aligned}$$

Es suficiente observar que tomando límites en la expresión anterior, y aplicando (5.5)–(5.10), se sigue el resultado. ■

El número de términos en la relación algebraica dada en la Proposición 5.2.2 depende de n . Para evitar esto, se obtiene otra relación algebraica en la que los polinomios $Q_n^{(\alpha, M, j)}$ se expresan como una combinación lineal finita de polinomios no dependiendo de n (ver las Proposiciones 2.2.1, 3.2.1 o el Lema 4.2.1).

Proposición 5.2.5 Existe una familia de números reales $\{\gamma_{n,i}\}_{i=0}^{j+1}$, no idénticamente nula, de manera que se satisface la siguiente relación algebraica

$$Q_n^{(\alpha, M, j)}(x) = \sum_{i=0}^{j+1} \gamma_{n,i} (1-x^2)^i \left(C_{n-i}^{(\alpha+i)} \right)^{(i)}(x), \quad n \geq 2j+2. \quad (5.13)$$

Demostración: La idea de la demostración es seguir los pasos análogos a [156, Teo. 1] o la Proposición 3.2.1 o el Lema 4.2.1, y usar el hecho que los polinomios tipo Gegenbauer–Sobolev son simétricos. ■

Proposición 5.2.6 Sean $\{\gamma_{n,i}\}_{i=0}^{j+1}$ los coeficientes dados en (5.13). Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{n,i} = \gamma_i \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq i \leq j+1,$$

donde

$$\gamma_i = \begin{cases} -j \\ j + \alpha + 1, & \text{si } i = 0, \\ (-1)^i \frac{\frac{i-j}{j+i+\alpha+1} - \sum_{k=0}^{i-1} \gamma_k \binom{i}{k} (-2)^k k! \frac{(\alpha+1)_i}{(\alpha+k+1)_i}}{i! \frac{2^i (\alpha+1)_i}{(\alpha+i+1)_i}}, & \text{si } 1 \leq i \leq j+1. \end{cases} \quad (5.14)$$

Demostración: Este resultado ha sido establecido en contextos similares tales como [156, Teo. 1] o la Proposición 3.2.1 o el Lema 4.2.1. Sin embargo, ahora la parte discreta del producto escalar (5.2) está concentrada en dos puntos, no solamente en uno de ellos como en las referencias citadas. A pesar de ello, la técnica es la misma. Incluimos las principales líneas de demostración ya que así es posible establecer el valor exacto de γ_i , que será necesario para posteriores resultados.

Se comienza la demostración derivando k veces la fórmula (5.13) y evaluando en $x = 1$. Entonces, para $0 \leq k \leq j+1$, se obtiene

$$\left(Q_n^{(\alpha, M, j)} \right)^{(k)}(1) = \sum_{i=0}^k \gamma_{n,i} \binom{k}{i} (-1)^i i! \left(\sum_{\ell=0}^{k-i} \frac{i!}{(i-\ell)!} 2^{i-\ell} \left(C_{n-i}^{(\alpha+i)} \right)^{(k-\ell)}(1) \right). \quad (5.15)$$

Teniendo en cuenta la Proposición 5.2.3, se divide (5.15) por $\left(C_n^{(\alpha)}\right)^{(k)}(1)$ y se obtendrá el resultado si y sólo si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(C_{n-i}^{(\alpha+i)}\right)^{(k-\ell)}(1)}{\left(C_n^{(\alpha)}\right)^{(k)}(1)} \in \mathbb{R}$, con $0 \leq \ell \leq k-i$. Pero esto se tiene a partir del Lema 5.2.1. De hecho,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(C_{n-i}^{(\alpha+i)}\right)^{(k-\ell)}(1)}{\left(C_n^{(\alpha)}\right)^{(k)}(1)} = \begin{cases} \frac{(\alpha+1)_k}{(\alpha+i+1)_k}, & \text{si } \ell = 0, \\ 0, & \text{si } 1 \leq \ell \leq k-i. \end{cases} \quad (5.16)$$

Se acaba de probar que la sucesión $\{\gamma_{n,i}\}_{n \geq 0}$ es convergente para cualquier $i \in \{0, \dots, j+1\}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Ahora, se necesita calcular explícitamente los correspondientes límites γ_i con $0 \leq i \leq j+1$. Tomando $k=0$ en (5.15) y usando la Proposición 5.2.3, se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Q_n^{(\alpha, M, j)}(1)}{C_n^{(\alpha)}(1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n^{(\alpha, M, j)}(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_{n,0} = \frac{-j}{j+\alpha+1}. \quad (5.17)$$

Así, se puede construir un algoritmo recursivo, similar a los vistos en las demostraciones del Lema 3.2.2 y la Proposición 4.2.1, basado en (5.15) y, usando (5.16), se deduce fácilmente (5.14). ■

Finalmente, con el objetivo de obtener el valor r_0 , se darán cotas superiores para la norma infinito de estos polinomios de Gegenbauer-Sobolev.

Teorema 5.2.1 Sean $Q_n^{(\alpha, M, j)}$ los polinomios ortogonales con respecto a (5.2). Entonces

$$\|Q_n^{(\alpha, M, j)}\|_{\infty} := \max_{x \in [-1, 1]} |Q_n^{(\alpha, M, j)}(x)| \leq \begin{cases} \frac{3j+2\alpha+2}{j+\alpha+1} + D, & \text{si } \alpha \geq -1/2, \\ F n^{-\alpha-1/2}, & \text{si } -1 < \alpha < -1/2, \end{cases}$$

cuando $n \rightarrow +\infty$, siendo D y F constantes positivas independientes de n .

Demostración: Tomando $\alpha = \lambda - 1/2$ y considerando la expresión [169, f. (4.7.1)], se tiene que

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{P_n^{(\lambda)}(x)}{P_n^{(\lambda)}(1)} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)} P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x), \quad (5.18)$$

donde $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ son los polinomios clásicos de Jacobi ortogonales con respecto a la función peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, con $\alpha, \beta > -1$.

Ahora, se usa la cota uniforme de $|P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)|$, que viene dada en [1, f. (22.14.1)] y con más detalle en [169, f. (7.33.2)–(7.33.3)], para deducir, mediante (5.18), que para $x \in [-1, 1]$ se tiene

$$|P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)| \leq \begin{cases} P_n^{(\alpha, \alpha)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} \approx \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, & \text{si } \alpha \geq -1/2, \\ C n^{-1/2}, & \text{si } -1 < \alpha < -1/2, \end{cases} \quad (5.19)$$

donde C es una constante distinta de 0. Para probar el teorema usamos diferentes procedimientos en función de cada uno de los dos casos que acabamos de ver en (5.19).

■ Caso $\alpha \geq -1/2$.

A partir de (5.18) y (5.19), es claro que $\max_{x \in [-1, 1]} |C_n^{(\alpha)}(x)| = 1$, y este máximo se alcanza en $x = 1$. Solamente es necesario probar el caso par, ya que la demostración en el caso impar es totalmente similar. Primero, se tiene

$$\begin{aligned} \max_{x \in [-1, 1]} |\kappa_{2(n-1)}^{(j, 0)}(1, x)| &= \max_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(C_{2i}^{(\alpha)}\right)^{(j)}(1) C_{2i}^{(\alpha)}(x)}{\|C_{2i}^{(\alpha)}\|_\alpha^2} \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(C_{2i}^{(\alpha)}\right)^{(j)}(1) \max_{x \in [-1, 1]} |C_{2i}^{(\alpha)}(x)|}{\|C_{2i}^{(\alpha)}\|_\alpha^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(C_{2i}^{(\alpha)}\right)^{(j)}(1) C_{2i}^{(\alpha)}(1)}{\|C_{2i}^{(\alpha)}\|_\alpha^2} = \kappa_{2(n-1)}^{(j, 0)}(1, 1). \end{aligned}$$

Además, usando (5.11) y la cota que acabamos de obtener, se deduce

$$\begin{aligned} &\max_{x \in [-1, 1]} |Q_{2n}^{(\alpha, M, j)}(x)| \\ &\leq \max_{x \in [-1, 1]} |C_{2n}^{(\alpha)}(x)| + \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{2M \left(C_{2n}^{(\alpha)}\right)^{(j)}(1) \kappa_{2(n-1)}^{(j, 0)}(1, x)}{1 + 2M \kappa_{2(n-1)}^{(j, j)}(1, 1)} \right| \\ &= 1 + \frac{2M \left(C_{2n}^{(\alpha)}\right)^{(j)}(1) \kappa_{2(n-1)}^{(j, 0)}(1, 1)}{1 + 2M \kappa_{2(n-1)}^{(j, j)}(1, 1)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, en la demostración de la Proposición 5.2.3 se estableció para $k = 0$ que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2M \left(C_{2n}^{(\alpha)} \right)^{(j)} (1) \kappa_{2(n-1)}^{(j,0)} (1,1)}{1 + 2M \kappa_{2(n-1)}^{(j,j)} (1,1)} = \frac{2j + \alpha + 1}{j + \alpha + 1}.$$

Así, para cualquier constante positiva D y n suficientemente grande, se obtiene

$$\max_{x \in [-1,1]} |Q_{2n}^{(\alpha, M, j)}(x)| \leq 1 + \frac{2j + \alpha + 1}{j + \alpha + 1} + D = \frac{3j + 2\alpha + 2}{j + \alpha + 1} + D.$$

De hecho, los experimentos numéricos indican que la sucesión

$$\frac{2M \left(C_{2n}^{(\alpha)} \right)^{(j)} (1) \kappa_{2(n-1)}^{(j,0)} (1,1)}{1 + 2M \kappa_{2(n-1)}^{(j,j)} (1,1)}$$

es decreciente, así que la constante D no puede ser eliminada.

- Caso $-1 < \alpha < -1/2$.

En este caso es más sencillo tener en cuenta (5.13). En este sentido, se tiene

$$\begin{aligned} \max_{x \in [-1,1]} |Q_n^{(\alpha, M, j)}(x)| &\leq \sum_{i=0}^{j+1} \max_{x \in [-1,1]} \left| \gamma_{n,i} (1-x^2)^i \left(C_{n-i}^{(\alpha+i)} \right)^{(i)}(x) \right| \\ &\leq (j+2) \max_{i \in \{0, \dots, j+1\}} \max_{x \in [-1,1]} \left| \gamma_{n,i} (1-x^2)^i \left(C_{n-i}^{(\alpha+i)} \right)^{(i)}(x) \right|. \end{aligned}$$

Ahora, se calcula $\max_{x \in [-1,1]} \left| \gamma_{n,i} (1-x^2)^i \left(C_{n-i}^{(\alpha+i)} \right)^{(i)}(x) \right|$. Primero, es necesario observar que, usando (1.10), se tiene

$$\begin{aligned} &(1-x^2)^i \left(C_{n-i}^{(\alpha+i)} \right)^{(i)}(x) \\ &= (1-x^2)^i \rho_{n,i} C_{n-2i}^{(\alpha+2i)}(x) \\ &= (1-x^2)^i \rho_{n,i} \frac{\Gamma(n-2i+1) \Gamma(\alpha+2i+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} P_{n-2i}^{(\alpha+2i, \alpha+2i)}(x), \end{aligned}$$

donde

$$\rho_{n,i} = \frac{(-1)^i (n+2\alpha+i+1)_i (-n+i)_i}{2^i (\alpha+i+1)_i} \approx \frac{n^{2i}}{2^i (\alpha+i+1)_i}. \quad (5.20)$$

Usando (5.19), (5.20) y la Proposición 5.2.6, se obtiene, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} & \max_{x \in [-1,1]} \left| \gamma_{n,i} (1-x^2)^i \rho_{n,i} \frac{\Gamma(n-2i+1)\Gamma(\alpha+2i+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} P_{n-2i}^{(\alpha+2i, \alpha+2i)}(x) \right| \\ & \leq E n^{2i} n^{-\alpha-2i} n^{-1/2} = E n^{-\alpha-1/2}, \end{aligned}$$

donde E es una constante positiva, lo que prueba el resultado. ■

5.3 COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LOS AUTOVALORES DEL OPERADOR DIFERENCIAL. DETERMINACIÓN DE r_0

En la Sección 5.2 se han establecido algunos resultados necesarios para abordar el problema de calcular el valor r_0 dado en (5.4). Pero aún necesitamos un resultado adicional: el comportamiento asintótico de los autovalores de los polinomios ortogonales tipo Gegenbauer-Sobolev.

En [33] los autores deducen que existe un operador diferencial lineal de la forma $\mathbf{T} = \mathbf{L} + M\mathbf{A}$ para los polinomios de Sobolev discretos ortogonales con respecto a

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x)d\mu + M[f^{(j)}(-c)g^{(j)}(-c) + f^{(j)}(c)g^{(j)}(c)], \quad c > 0,$$

donde μ es una medida de Borel positiva simétrica con soporte en un intervalo I . $\mathbf{L}$ es el operador lineal diferencial asociado con los polinomios ortogonales estándar con respecto a μ . Este operador $\mathbf{L} + M\mathbf{A}$ puede ser de orden infinito.

Este operador $\mathbf{A}$ viene definido por $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x)D^{(i)}$ donde $D^{(i)}$ indica el operador derivada de orden i , con $D^{(1)} = D$, I es el operador identidad, y $a_i(x)$ son polinomios, independientes de n , de grado a lo más i .

Además, los autores dan expresiones para los autovalores asociados con $\mathbf{L} + M\mathbf{A}$. Entonces, si se particulariza para el caso de polinomios ortogonales de Gegenbauer-Sobolev, se tiene

$$(\mathbf{L} + M\mathbf{A})Q_n^{(\alpha, M, j)}(x) = \tilde{\lambda}_n Q_n^{(\alpha, M, j)}(x).$$

De [33], se tiene que

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n + M\mu_n, \tag{5.21}$$

donde los λ_n vienen dados en (1.12), $\mu_0 = 0$ y las cantidades $\{\mu_m\}_{m=1}^{j+1}$ pueden ser elegidas arbitrariamente. Entonces, $\{\mu_m\}_{m=j+2}^{\infty}$ y el operador $\mathbf{A}$ están únicamente determinados una vez hechas estas elecciones arbitrarias (ver [33, Sec. 2.2] o con más detalle el Teorema 2.1 en [31]). De hecho, los autores obtienen que

$$\begin{aligned}\mu_{j+2t} &= \mu_j + \sum_{i=1}^t (\lambda_{j+2i} - \lambda_{j+2i-2}) q_{j+2i, j+2i}, \quad t \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \mu_{j+2t+1} &= \mu_{j+1} + \sum_{i=1}^t (\lambda_{j+2i+1} - \lambda_{j+2i-1}) q_{j+2i+1, j+2i+1}, \quad t \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\end{aligned}$$

donde

$$q_{n,n} = K_{n-1}^{(j,j)}(1,1) + (-1)^{n+j} K_{n-1}^{(j,j)}(1,-1).$$

Ya que $\{\mu_m\}_{m=1}^{j+1}$ pueden ser elegidos arbitrariamente, por simplicidad se va a tomar $\mu_1 = \dots = \mu_{j+1} = 0$. Usando (1.12), se obtiene

$$\mu_{j+2t} = 2 \sum_{i=1}^t (2j + 4i + 2\alpha - 1) q_{j+2i, j+2i}, \quad (5.22)$$

$$\mu_{j+2t+1} = 2 \sum_{i=1}^t (2j + 4i + 2\alpha + 1) q_{j+2i+1, j+2i+1}. \quad (5.23)$$

Vamos a establecer el comportamiento asintótico de la sucesión $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dada por (5.22)–(5.23) cuando $n \rightarrow \infty$. Primero, se necesita un resultado técnico.

Proposición 5.3.1 *Se tiene que,*

$$q_{s+2i, s+2i} = \begin{cases} 2\kappa_{s+2i-2}^{(j,j)}(1,1), & \text{si } s \text{ es par;} \\ 2\tilde{\kappa}_{s+2i-3}^{(j,j)}(1,1), & \text{si } s \text{ es impar;} \end{cases} \quad (5.24)$$

donde $\kappa_{2m}^{(j,k)}(x,y)$ y $\tilde{\kappa}_{2m}^{(j,k)}(x,y)$ están definidos en (5.7) y (5.8), respectivamente.

Demostración: Usando la definición de $q_{s,s}$.

$$\begin{aligned}q_{s+2i, s+2i} &= K_{s+2i-1}^{(j,j)}(1,1) + (-1)^{s+j} K_{s+2i-1}^{(j,j)}(1,-1) \\ &= \sum_{m=0}^{s+2i-1} \frac{\left(\left(C_m^{(\alpha)} \right)^{(j)} (1) \right)^2}{\|C_m^{(\alpha)}\|_{\alpha}^2} + (-1)^{s+j} \sum_{m=0}^{s+2i-1} \frac{\left(C_m^{(\alpha)} \right)^{(j)} (1) \left(C_m^{(\alpha)} \right)^{(j)} (-1)}{\|C_m^{(\alpha)}\|_{\alpha}^2}\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{s+2i-1} \frac{\left(\left(C_m^{(\alpha)} \right)^{(j)} (1) \right)^2 (1 + (-1)^{s+m+2j})}{\|C_m^{(\alpha)}\|_{\alpha}^2}.$$

Entonces, si s es par se sigue que

$$q_{s+2i, s+2i} = 2 \sum_{m=0, m \text{ par}}^{s+2i-1} \frac{\left(\left(C_m^{(\alpha)} \right)^{(j)} (1) \right)^2}{\|C_m^{(\alpha)}\|_{\alpha}^2} = 2\kappa_{s+2i-2}^{(j,j)}(1,1).$$

El caso impar se establece en el mismo sentido. ■

Es fácil observar que, a partir de (5.21), si se quiere obtener el comportamiento asintótico de $\tilde{\lambda}_n$, se debe conocer el comportamiento de μ_n . El siguiente resultado nos proporciona esta información.

Proposición 5.3.2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{2n}}{n^{4j+2\alpha+4}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{2n+1}}{n^{4j+2\alpha+4}} = \frac{2^{2j+3}}{(2j + \alpha + 2)(2j + \alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + j + 1)}.$$

Demostración: Para n suficientemente grande, se puede escribir $2n = 2m + j$, de donde j es par. Usando el criterio de Stolz y las fórmulas (5.10) y (5.24), se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{2n}}{n^{4j+2\alpha+4}} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{j+2m}}{m^{4j+2\alpha+4}} \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2 \sum_{i=1}^m (2j + 4i + 2\alpha - 1) q_{j+2i, j+2i} - 2 \sum_{i=1}^{m-1} (2j + 4i + 2\alpha - 1) q_{j+2i, j+2i}}{m^{4j+2\alpha+4} - (m-1)^{4j+2\alpha+4}} \\ &= \frac{1}{(2j + \alpha + 2)} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(2j + 4m + 2\alpha - 1) q_{j+2m, j+2m}}{m^{4j+2\alpha+3}} \\ &= \frac{1}{2j + \alpha + 2} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(2j + 4m + 2\alpha + 1)}{m} \frac{2\kappa_{2(m-1+j/2)}^{(j,j)}(1,1)}{m^{4j+2\alpha+2}} \\ &= \frac{2^{2j+3}}{(2j + \alpha + 2)(2j + \alpha + 1)\Gamma^2(\alpha + j + 1)}. \end{aligned}$$

Análogamente, para n suficientemente grande $2n + 1 = 2m + j + 1$, de donde $j + 1$ es impar. Entonces, para probar el otro límite se usa (5.24) con $s = j + 1$. ■

Ahora ya se tienen las condiciones para poder establecer el comportamiento asintótico de los autovalores $\tilde{\lambda}_n$.

Proposición 5.3.3 Sean $\tilde{\lambda}_n$ los autovalores del operador diferencial $\mathbf{T} = \mathbf{L} + M\mathbf{A}$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\lambda}_n}{n^{4j+2\alpha+4}} = \frac{M}{2^{2j+2\alpha+1}(2j+\alpha+2)(2j+\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+j+1)}.$$

Demostración: Aplicando (1.12) y la Proposición 5.3.2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\lambda}_n}{n^{4j+2\alpha+4}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n + M\mu_n}{n^{4j+2\alpha+4}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M\mu_n}{(n/2)^{4j+2\alpha+4} 2^{4j+2\alpha+4}} \\ &= \frac{M}{(2j+\alpha+2)(2j+\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+j+1)2^{2j+2\alpha+1}}. \end{aligned}$$

■

Para concluir esta sección, calculamos el valor de r_0 .

Teorema 5.3.1 Sean $\{q_n^{(\alpha, M, j)}\}_{n \geq 0}$ los polinomios ortonormales con respecto a (5.2), con $j > 0$, y $\tilde{\lambda}_n$ los autovalores asociados al operador diferencial lineal $\mathbf{T} = \mathbf{L} + M\mathbf{A}$. Entonces, para $\alpha \geq -1/2$,

$$r_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\max_{x \in [-1,1]} |q_n^{(\alpha, M, j)}(x)|)}{\log(\tilde{\lambda}_n)} = \frac{\alpha + 1/2}{4j + 2\alpha + 4}.$$

Demostración: Del Teorema 5.2.1, las Proposiciones 5.2.4 y 5.3.3, y (5.6), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\log(\max_{x \in [-1,1]} |q_n^{(\alpha, M, j)}(x)|)}{\log(\tilde{\lambda}_n)} &= \frac{\log(\max_{x \in [-1,1]} |Q_n^{(\alpha, M, j)}(x)| / \|Q_n^{(\alpha, M, j)}\|_S)}{\log(\tilde{\lambda}_n)} \\ &= \frac{\log\left(\max_{x \in [-1,1]} |Q_n^{(\alpha, M, j)}(x)| / (\|Q_n^{(\alpha, M, j)}\|_S n^{\alpha+1/2} n^{-\alpha-1/2})\right)}{\log\left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{n^{4j+2\alpha+4}} n^{4j+2\alpha+4}\right)} \\ &= \frac{\log(\max_{x \in [-1,1]} |Q_n^{(\alpha, M, j)}(x)|) - \log\left(\|Q_n^{(\alpha, M, j)}\|_S n^{\alpha+1/2}\right) - (-\alpha - 1/2) \log(n)}{(4j + 2\alpha + 4) \log(n) + \log\left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{n^{4j+2\alpha+4}}\right)}. \end{aligned}$$

Por paso al límite se tiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\max_{x \in [-1,1]} |q_n^{(\alpha, M, j)}(x)|)}{\log(\tilde{\lambda}_n)} = \frac{\alpha + 1/2}{4j + 2\alpha + 4}.$$

Es necesario destacar que se ha necesitado tener una cota inferior y una cota superior del $\max_{x \in [-1,1]} |Q_n^{(\alpha, M, j)}(x)|$. La cota superior se tiene del Teorema

5.2.1. También se necesita la cota inferior y garantizar que es positiva. Esto se deduce del hecho de que $\max_{x \in [-1,1]} |Q_n^{(\alpha, M, j)}(x)| \geq |Q_n^{(\alpha, M, j)}(1)|$ y por (5.17) $\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_n^{(\alpha, M, j)}(1)| = \frac{j}{j+\alpha+1}$. Sin embargo, este argumento no es válido cuando $j = 0$. ■

Nota 5.3.1 • Cuando $\alpha \geq -1/2$ y $j = 0$, no se puede asegurar que exista r_0 . En el caso de existir, usando algunas desigualdades, es fácil establecer que $r_0 \in [\frac{-\alpha-3/2}{2\alpha+4}, \frac{\alpha+1/2}{2\alpha+4}]$.

Veamos que, por un lado, que r_0 , en caso de existir, es menor que $\frac{\alpha+1/2}{2\alpha+4}$. Para ello, usamos la cota superior que se tiene del Teorema 5.2.1.

$$\begin{aligned} \frac{\log(\max_{x \in [-1,1]} |q_n^{(\alpha, M, 0)}(x)|)}{\log(\tilde{\lambda}_n)} &= \frac{\log(\max_{x \in [-1,1]} |Q_n^{(\alpha, M, 0)}(x)| / \|Q_n^{(\alpha, M, 0)}\|_S)}{\log(\tilde{\lambda}_n)} \\ &\leq \frac{\log\left((2+D) / (\|Q_n^{(\alpha, M, 0)}\|_S n^{\alpha+1/2} n^{-\alpha-1/2})\right)}{\log\left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{n^{2\alpha+4}} n^{2\alpha+4}\right)} \\ &= \frac{\log(2+D) - \log\left(\|Q_n^{(\alpha, M, 0)}\|_S n^{\alpha+1/2}\right) - (-\alpha - 1/2) \log(n)}{(2\alpha+4) \log(n) + \log\left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{n^{2\alpha+4}}\right)}. \end{aligned}$$

Tomando límites en la última expresión aparece el valor $\frac{\alpha+1/2}{2\alpha+4}$.

Por otro lado, veamos que, en caso de existir r_0 , se tiene que $r_0 \geq \frac{-\alpha-3/2}{2\alpha+4}$.

Usando que $\left(Q_{2n}^{(\alpha, M, j)}\right)^{(j)}(1) = \frac{(C_{2n}^{(\alpha)})^{(j)}(1)}{1+2M\kappa_{2(n-1)}^{(j,j)}(1,1)}$, y los comportamientos asintóticos del Lema 5.2.1 y la Proposición 5.2.1, es fácil (haciendo el caso par y análogamente el caso impar) establecer que $q_n^{(\alpha, M, 0)}(1) \approx Cn^{-\alpha-3/2}$, con $C > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\log(\max_{x \in [-1,1]} |q_n^{(\alpha, M, 0)}(x)|)}{\log(\tilde{\lambda}_n)} &\geq \frac{\log\left(q_n^{(\alpha, M, 0)}(1)\right)}{\log\left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{n^{2\alpha+4}} n^{2\alpha+4}\right)} \\ &= \frac{\log\left(\frac{q_n^{(\alpha, M, 0)}(1)}{Cn^{-\alpha-3/2}} Cn^{-\alpha-3/2}\right)}{\log\left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{n^{2\alpha+4}} n^{2\alpha+4}\right)}. \end{aligned}$$

Tomando límites en la última expresión aparece el valor $\frac{-\alpha-3/2}{2\alpha+4}$.

- Cuando $\alpha \in (-1, -1/2)$ se podría proceder en el mismo sentido que la demostración del Teorema 5.3.1, pero de nuevo aparece el mismo problema, pues no se tiene una cota inferior positiva. Así, este resultado queda como un problema abierto.
- Merece la pena prestar atención al hecho de que el valor de r_0 para los polinomios de Gegenbauer clásicos es muy diferente de los polinomios de Gegenbauer–Sobolev discretos. Para los Gegenbauer clásicos y $\alpha \geq -1/2$, se tiene que

$$r_0 = \frac{\alpha + 1/2}{2},$$

y para los tipo Gegenbauer–Sobolev con $\alpha \geq -1/2$ y $j \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$r_0 = \frac{\alpha + 1/2}{4j + 2\alpha + 4}.$$

Esencialmente, esto es debido al comportamiento asintótico de los autovalores $\lambda_n \approx n^2$ y $\tilde{\lambda}_n \approx G n^{4j+2\alpha+4}$, cuando $n \rightarrow +\infty$. La constante G fue calculada en la Proposición 5.3.3.

5.4 ASINTÓTICA TIPO MEHLER–HEINE

Para completar este estudio, y en relación a capítulos anteriores, se obtendrá la asintótica tipo Mehler–Heine para los polinomios $Q_n^{(\alpha, M, j)}$. Dicha fórmula es muy relevante ya que describe en detalle el comportamiento asintótico alrededor del punto $x = 1$, donde hemos introducido la perturbación (usando la simetría de estos polinomios también se obtiene información alrededor del punto $x = -1$).

Teorema 5.4.1 *La sucesión de polinomios $\{Q_n^{(\alpha, M, j)}\}_{n \geq 0}$ verifica la siguiente fórmula asintótica tipo Mehler–Heine*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^{(\alpha, M, j)} \left(\cos \left(\frac{x}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n^{(\alpha, M, j)} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2} \right) = \varphi_{\alpha, j}(x), \quad (5.25)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, donde

$$\varphi_{\alpha, j}(x) = \sum_{i=0}^{j+1} 2^i \gamma_i \Gamma(\alpha + i + 1) (x/2)^{-\alpha} J_{\alpha+2i}(x), \quad (5.26)$$

con los coeficientes γ_i dados en (5.14).

Demostración: Reescalando adecuadamente en (5.13) y usando (1.10), (5.18) y (5.20), se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n^{(\alpha, M, j)} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2} \right) \\
 = & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{j+1} \gamma_{n,i} \rho_{n,i} \frac{x^{2i}}{n^{2i}} \left(1 - \frac{x^2}{4n^2} \right)^i \\
 & \times \frac{\Gamma(n-2i+1)\Gamma(\alpha+2i+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} P_{n-2i}^{(\alpha+2i, \alpha+2i)} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2} \right) \\
 = & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{j+1} \gamma_{n,i} x^{2i} \frac{\rho_{n,i}}{n^{2i}} \left(1 - \frac{x^2}{4n^2} \right)^i \\
 & \times \frac{n^{\alpha+2i} \Gamma(n-2i+1) \Gamma(\alpha+2i+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{P_{n-2i}^{(\alpha+2i, \alpha+2i)} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2} \right)}{n^{\alpha+2i}}.
 \end{aligned}$$

Para obtener el resultado sólo queda aplicar los comportamientos asintóticos dados por (1.18), (2.13), la Proposición 5.2.6 y (5.20). ■

Terminamos esta sección dando algunas propiedades de los ceros del polinomio $Q_n^{(\alpha, M, j)}$. Cuando $j = 0$ el producto escalar (5.2) es estándar. Así, todos los ceros de $Q_n^{(\alpha, M, 0)}$ son reales y simples y están contenidos en $(-1, 1)$.

Sin embargo, cuando $j > 0$ la situación cambia. Volviendo a usar el resultado de [141, Teo. 4.1] (ver también [5, Lema 2]), el polinomio $Q_n^{(\alpha, M, j)}$, con $n \geq 1$, tiene n ceros reales y simples y a lo más dos de ellos se encuentran fuera del intervalo $(-1, 1)$. Por otro lado, usando la Proposición 5.2.3 se tiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n^{(\alpha, M, j)}(1) = \frac{-j}{j+\alpha+1} < 0$, pero, el coeficiente líder de $Q_n^{(\alpha, M, j)}$ es $k_n(\alpha) > 0$ dado en (1.13), por lo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q_n^{(\alpha, M, j)}(x) = +\infty$. Se deduce que hay un cero en el intervalo $(1, +\infty)$ y, por la simetría, otro cero en el intervalo $(-\infty, -1)$.

Acabamos de probar el siguiente resultado.

Proposición 5.4.1 *Si $j > 0$, el polinomio $Q_n^{(\alpha, M, j)}$, con $n \geq 1$, tiene n ceros reales y simples y, para n suficientemente grande, exactamente dos de ellos se encuentran fuera del intervalo $(-1, 1)$. Si $j = 0$, entonces todos los ceros están en el intervalo $(-1, 1)$.*

Finalmente, se establecerá el comportamiento asintótico de los ceros como consecuencia del Teorema 5.4.1. Solamente es necesario aplicar el conocido Teorema de Hurwitz (ver [169, Teo. 1.91.3]) a (5.25). Así, se tiene

Proposición 5.4.2 Para $j > 0$, denotando por $s_{n,i}$, con $i = 1, \dots, [n/2] - 1$, los $[n/2] - 1$ ceros positivos de $Q_n^{(\alpha, M, j)}$ dentro del intervalo $(0, 1)$ en orden creciente, es decir, $s_{n,1} < s_{n,2} < \dots < s_{n,[n/2]-2} < s_{n,[n/2]-1}$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arccos(s_{n,[n/2]-i}) = y_i, \quad i \geq 1,$$

donde $0 < y_1 < \dots < y_{[n/2]-1}$ denotan los primeros $[n/2] - 1$ ceros reales positivos de la función $\varphi_{\alpha,j}$ dada en (5.26).

Para $j = 0$ el producto escalar (5.2) aparece en [43] como un caso muy particular en el contexto de polinomios de Sobolev continuos. Destacar que, en esta situación, usando (5.14) se deduce que la función límite (5.26) es

$$\varphi_{\alpha,0}(x) = -\Gamma(\alpha + 1)(x/2)^{-\alpha} J_{\alpha+2}(x).$$

El anterior resultado fue obtenido en [43, Prop. 2] pero en ese artículo se consideró

$$(f, g)_S := \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2} dx + M(f(-1)g(-1) + f(1)g(1)),$$

donde los correspondientes polinomios ortogonales tipo Krall eran mónicos. Entonces, con el objetivo de comparar ambos resultados, se debe tener en cuenta este hecho. De cualquier modo, los ceros de $Q_n^{(\alpha, M, 0)}$ se comportan asintóticamente como los ceros de $x^{-\alpha} J_{\alpha+2}(x)$ (obviamente similar a [43, Prop. 2] con el cambio de α a $\alpha + 1/2$). Así, siguiendo con la anterior notación, en el caso de $j = 0$ se sigue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,[n/2]} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \arccos(s_{n,[n/2]-i}) = j_{\alpha+2,i+1}, \quad i \geq 1,$$

donde $0 < j_{\alpha+2,1} < \dots < j_{\alpha+2,[n/2]}$ denotan los primeros $[n/2]$ ceros positivos de la función de Bessel de primera especie.

CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

En este capítulo se hace una recopilación de los principales resultados obtenidos a lo largo de esta memoria. Además, se proporciona una lista de problemas abiertos que pueden ser objeto de futuras líneas de investigación.

Uno de los principales resultados de esta memoria es la obtención de las fórmulas asintóticas tipo Mehler–Heine para polinomios de Sobolev discretos variantes ortogonales con respecto al producto escalar

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)d\mu + M_n f^{(j)}(c)g^{(j)}(c), \quad (6.1)$$

donde μ es una medida de Borel positiva con soporte en un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$, j es un entero no negativo y $c \in \mathbb{R}$. La sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$ está formada por números reales no negativos y verificando una condición muy general sobre su comportamiento asintótico.

El interés de estas fórmulas radica en el hecho de describir en detalle el comportamiento asintótico local alrededor del punto donde se ha introducido la perturbación del producto escalar estándar. Además, como una consecuencia, se deduce el comportamiento asintótico de los ceros de los correspondientes polinomios ortogonales.

En los capítulos 2 y 3 se estudian dos casos particulares involucrando la medida de Laguerre y Jacobi, respectivamente. En el Capítulo 2 se considera μ la medida de Laguerre y $c = 0$ en el producto escalar (6.1). Se obtiene la asintótica tipo Mehler–Heine para estos polinomios de Laguerre–Sobolev discretos variantes. Dicha asintótica se obtiene por medio de una relación algebraica que expresa los polinomios de Laguerre–Sobolev en términos de $j + 2$ polinomios de Laguerre clásicos donde se conocen explícitamente los coeficientes de dicha expansión. Conocidos estos coeficientes se puede obtener su comportamiento asintótico y de esta forma la asintótica local buscada. El tamaño de la sucesión de masas influye en esta asintótica local donde esencialmente aparecen tres casos: uno de ellos cuando el tamaño de

$\{M_n\}_{n \geq 0}$ es despreciable y entonces la asintótica tipo Mehler–Heine de los polinomios Laguerre–Sobolev discretos es la misma que la de los polinomios de Laguerre clásicos; en los otros dos casos, el tamaño de la sucesión de masas influye de forma esencial. En concreto, asumiendo la condición

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n n^\beta = M > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

se tiene que si $\beta < 2j + \alpha + 1$ la fórmula asintótica tipo Mehler–Heine viene dada por una combinación de $j + 2$ funciones de Bessel de primera especie y, cuando $\beta = 2j + \alpha + 1$ se tiene una transición continua entre los dos casos, es decir, la asintótica es una combinación lineal convexa de los otros dos casos. Además, es interesante destacar que este caso de $\beta = 2j + \alpha + 1$ es el único caso donde M , definido en (6.2), juega un papel relevante en la fórmula asintótica.

En el Capítulo 3 se considera μ la medida de Jacobi y $c = 1$ en el producto escalar (6.1). Ahora se usa una técnica diferente a la del capítulo anterior. En este caso se prueba que los polinomios de Jacobi–Sobolev discretos variantes, $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$, se pueden escribir como una combinación adecuada de $j + 2$ polinomios de Jacobi clásicos, pero a diferencia del Capítulo 2, en dicha combinación los coeficientes no son conocidos explícitamente. De hecho, se obtiene la relación

$$P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x) = \sum_{i=0}^{j+1} b_i(n) (1-x)^i P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)}(x), \quad n \geq j+1.$$

Como hemos comentado, no se tienen explícitamente los coeficientes $b_i(n)$, con $i = 0, 1, \dots, j+1$, pero se prueba que son convergentes, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_i(n) = b_i, \quad i = 0, 1, \dots, j+1.$$

Estos b_i se pueden determinar de forma explícita a través de una relación de recurrencia que satisfacen. Una vez conocidos estos valores b_i se obtiene fácilmente la asintótica tipo Mehler–Heine. Al igual que en el capítulo anterior, aparecen tres casos en función del tamaño de la sucesión de masas. También es interesante mencionar que en este Capítulo 3 se ha conseguido probar que uno de los tres casos que aparecen en la fórmula tipo Mehler–Heine es una combinación lineal convexa de los otros dos casos, similar a lo que pasaba en el caso Laguerre–Sobolev discreto. Este hecho no se probó en [119], pero se ha probado en el transcurso de esta memoria.

A raíz de la aparición de los trabajos [155] y, en especial, [156] nos planteamos abordar el caso general y, de hecho, estos artículos nos inducen a considerar el com-

portamiento asintótico de $\{M_n\}_{n \geq 0}$ en relación con el comportamiento asintótico de las derivadas de los polinomios núcleo. Así, en el Capítulo 4 se impone la siguiente condición general para la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c) = L \in [0, +\infty]. \quad (6.3)$$

De esta forma, bajo condiciones bastante generales sobre la medida μ se obtiene la asintótica tipo Mehler–Heine de los polinomios ortogonales con respecto a (6.1), generalizando los resultados obtenidos en los dos capítulos previos. Por ejemplo, la medida puede pertenecer a la clase de Nevai o ser la correspondiente a un peso tipo Freud generalizado.

La condición (6.3) proporciona tres casos relevantes: $L = 0$, $L = +\infty$ y $L \in (0, +\infty)$, dando lugar a tres diferentes casos en la fórmula asintótica tipo Mehler–Heine, similar a lo que pasaba en los capítulos previos. En el caso $L = 0$ la fórmula asintótica tipo Mehler–Heine para los polinomios discretos de Sobolev variantes es la misma que la de los polinomios estándar, esto es producido porque el tamaño de la sucesión de masas es despreciable y no afecta al comportamiento asintótico. En el caso $L = +\infty$ esta asintótica local se ve influenciada por el comportamiento asintótico de la sucesión $\{M_n\}_{n \geq 0}$. En esta situación se tiene como caso muy particular el caso no variante, es decir, cuando $M_n = M$ para todo n . Así, los resultados obtenidos en este capítulo generalizan los obtenidos por diferentes autores en el caso no variante. Además, se consigue establecer que cuando $L \in (0, +\infty)$ la asintótica obtenida es una combinación lineal convexa de la de los otros dos casos, este hecho no pudo ser probado en [120].

De estos capítulos se concluye que la sucesión de masas introducida en el producto escalar (6.1) influye en la asintótica tipo Mehler–Heine y esta influencia depende del comportamiento asintótico de las derivadas j -ésimas de los polinomios núcleos asociados a los polinomios ortogonales con respecto a μ y evaluados en c .

En estos tres capítulos se han incluido experimentos numéricos para ilustrar los resultados obtenidos. Particularmente interesantes son las Figuras 3.9, 4.1 y 4.2 donde se puede observar la transición entre los casos donde la sucesión de masas no afecta en la asintótica tipo Mehler–Heine (por ejemplo, gráfica de ϕ_3 en la Figura 3.9 o $L = 0$ en las Figuras 4.1 y 4.2) y el caso donde el tamaño de la sucesión M_n influye de forma esencial en este comportamiento (por ejemplo, gráfica de $\varphi_{3,3}$ en la Figura 3.9 o $L = +\infty$ en las Figuras 4.1 y 4.2). El resto de gráficas en estas figuras son distintas combinaciones lineales convexas de estos dos casos.

Merece la pena destacar que la asintótica local tipo Mehler–Heine es el tipo de asintótica que permite encontrar las diferencias asintóticas entre los polinomios de Sobolev discretos variantes y los polinomios ortogonales con respecto a μ . De hecho, la asintótica relativa exterior correspondiente a estas dos familias de polinomios ortogonales es exactamente igual a 1, es decir, asintóticamente no se diferencian en $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\mu)$. Este resultado fue probado en la Sección 4.5. También se obtiene la asintótica tipo Plancherel–Rotach para los polinomios de Sobolev discretos variantes cuando el soporte de la medida μ es no acotado, concluyendo que dicha asintótica es la misma que la de los polinomios ortogonales con respecto a μ .

En el Capítulo 5 uno de los principales resultados es el comportamiento asintótico de los autovalores, denotados por $\tilde{\lambda}_n$, del operador diferencial asociado a los polinomios ortogonales de Gegenbauer–Sobolev discretos. Estos polinomios son ortogonales con respecto al producto escalar no variante

$$(f, g)_S := \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^\alpha dx \\ + M[f^{(j)}(-1)g^{(j)}(-1) + f^{(j)}(1)g^{(j)}(1)].$$

Conocer el comportamiento asintótico de $\tilde{\lambda}_n$ es un problema novedoso ya que, hasta donde conocemos, es la primera vez que se plantea estudiar este comportamiento, por lo que abre una nueva vía de investigación (ver los problemas abiertos 4–6).

El comportamiento asintótico de estos autovalores está determinado principalmente por el comportamiento de las derivadas j -ésimas de los polinomios núcleo asociados a los polinomios clásicos de Gegenbauer evaluados en el lugar donde hemos incluido la perturbación, y por el comportamiento asintótico de los autovalores del operador diferencial cuyas autofunciones son los polinomios de Gegenbauer clásicos.

La obtención del comportamiento de los autovalores $\tilde{\lambda}_n$ es fundamental para la obtención del valor r_0 , dado por

$$r_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\max_{x \in [-1, 1]} |q_n^{(\alpha, M, j)}(x)| \right)}{\log \tilde{\lambda}_n}, \quad \alpha \geq -1/2,$$

donde $q_n^{(\alpha, M, j)}$ denota los polinomios ortonormales de Gegenbauer–Sobolev discretos.

Este valor r_0 es el valor ínfimo de forma que el núcleo reproductor $K(x, y; r)$ definido por

$$K(x, y; r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_i^{(\alpha, M, j)}(x) q_i^{(\alpha, M, j)}(y)}{\tilde{\lambda}_i^r},$$

converge absolutamente para todo $r > r_0$ en cierto espacio de Hilbert definido a izquierda. Entonces, para cada $r > r_0$ la sucesión $\left\{ \frac{q_n^{(\alpha, M, j)}(x)}{\sqrt{\tilde{\lambda}_n^r}} \right\}_{n \geq 0}$ forma una base ortonormal completa para dicho espacio.

Finalmente, aunque se salga dentro del marco de esta memoria, señalar que durante esta etapa investigadora he podido realizar dos estancias de investigación con la profesora Galina Filipuk. Con ella he podido trabajar en *Ladder Operators* para polinomios ortogonales tipo Krall simétricos involucrando una medida tipo Freud generalizado (ver [80]). Los *ladder operators* han sido ampliamente estudiados en diferentes contextos (ver, por ejemplo, [23], [54]-[57], [73], [90]-[92]). Pero por lo que sabemos, no han sido estudiados dentro de la ortogonalidad Sobolev, por ello se propone el problema abierto número 7.

6.1 PROBLEMAS ABIERTOS

Problema 1 *Encontrar la asintótica tipo Mehler–Heine, y otros comportamientos asintóticos, para polinomios ortogonales de Δ –Sobolev discretos. Es decir, cuando el operador derivada es reemplazado por el operador diferencia Δ y la medida μ es discreta.*

Problema 2 *En los últimos años la teoría de polinomios ortogonales de Sobolev en varias variables ha dado lugar a interesantes publicaciones. Es de interés, por tanto, ver cómo los resultados asintóticos obtenidos en el Capítulo 4, en especial, la asintótica tipo Mehler–Heine puede ser abordada en el ámbito de las varias variables.*

Problema 3 *En el Capítulo 5 han quedado sin resolver dos casos. Concretamente, como ya se comentó en dicho capítulo, cuando $\alpha \in (-1, -\frac{1}{2})$ y cuando $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ con $j = 0$ (caso Krall) no se ha podido probar que r_0 exista. Abordar estas dos situaciones, y resolverlas, dejarían el caso Gegenbauer cerrado.*

Problema 4 *Considerar el producto escalar*

$$(p, q)_S = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \\ + Mp^{(k)}(-1)q^{(k)}(-1) + Np^{(j)}(1)q^{(j)}(1),$$

con $\alpha, \beta > -1$, $M, N > 0$ y $k, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Obtener resultados análogos a los obtenidos en el Capítulo 5. La simetría de los polinomios de Gegenbauer jugó un papel importante en el Capítulo 5. Los avances realizados en esta dirección se encuentran con la desventaja de no tener dicha simetría.

Problema 5 *Dado un producto escalar de Sobolev discreto y una medida general verificando las condiciones del Capítulo 4, encontrar el comportamiento asintótico de los autovalores asociados al operador diferencial cuyas autofunciones son los polinomios ortogonales con respecto a dicho producto escalar. Este problema generaliza el Problema 4.*

Problema 6 *El problema 5 puede ser modificado para considerar μ una medida discreta con infinitos puntos de crecimiento, es decir, considerar un producto Δ -Sobolev discreto y hacer el correspondiente estudio asintótico de los autovalores asociados al operador en diferencias.*

Finalmente, a raíz de las estancias de investigación con la Dra. Filipuk, se propone el siguiente problema.

Problema 7 *Encontrar ladder operators, y de ellos poder deducir ecuaciones holónicas, para polinomios ortogonales de Sobolev.*

CONCLUSIONS AND OPEN PROBLEMS

In this chapter, there is a compilation of the main results achieved throughout the doctoral thesis. There is also a list of open problems that may well be the subject of future research.

One of the main achievements of this doctoral thesis is to obtain the Mehler–Heine type asymptotics for varying discrete Sobolev orthogonal polynomials with respect to the inner product

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)d\mu + M_n f^{(j)}(c)g^{(j)}(c), \quad (7.1)$$

where μ is a positive Borel measure with support on an infinite subset of $\mathbb{R}$, j is a nonnegative integer and $c \in \mathbb{R}$. $\{M_n\}_{n \geq 0}$ is a sequence of nonnegative real numbers satisfying a very general condition about its asymptotic behavior.

We focus our attention on Mehler–Heine type formulae as they describe in detail the asymptotic behavior of these polynomials around c , just the point where we have located the perturbation of the standard inner product. Moreover, we pay attention to the asymptotic behavior of the (scaled) zeros of these varying discrete Sobolev polynomials.

Two particular cases involving the Laguerre and Jacobi measures are studied in Chapters 2 and 3, respectively. In Chapter 2, μ is considered as the Laguerre measure and $c = 0$ in the inner product (7.1). Mehler–Heine type asymptotics is obtained for these varying discrete Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials. This local asymptotic formula is obtained through an algebraic relationship which expresses the Laguerre–Sobolev polynomials in terms of $j + 2$ classical Laguerre orthogonal polynomials, where the coefficients of this expansion are explicitly known. Thus, the asymptotic behavior of these coefficients can be calculated and so to obtain the desired Mehler–Heine type asymptotics. The size of the sequence has an influence on the asymptotic behavior of the orthogonal polynomials with respect to (7.1), but this influence is only local, that is, around the point where we have introdu-

ced the perturbation. Essentially we have three cases: one of them when the size of $\{M_n\}_{n \geq 0}$ is negligible, and then the Mehler–Heine type formula for varying discrete Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials is the same that the Mehler–Heine type formula for classical Laguerre polynomials; and in the other two cases, the size of the sequence has relevant influence. Specifically, assuming the condition

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n n^\beta = M > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (7.2)$$

if $\beta < 2j + \alpha + 1$, then the Mehler–Heine type asymptotics is given by a combination of $j + 2$ Bessel functions of the first kind, and when $\beta = 2j + \alpha + 1$ there is a continuous transition between the other two cases, i.e., the asymptotic formula is a convex combination of the other two cases. Besides, it is important to remark that $\beta = 2j + \alpha + 1$ is the only case where M , defined in (7.2), plays a relevant role in the asymptotic formula.

In Chapter 3 we consider μ the Jacobi measure and $c = 1$ in the inner product (7.1). Here, we use a different technique compared to the previous chapter. In this case, it is proved that the varying discrete Jacobi–Sobolev orthogonal polynomials, $P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}$, can be written as a suitable combination of $j + 2$ classical Jacobi orthogonal polynomials, but unlike Chapter 2, the coefficients are not explicitly known. In fact, the follow relation is obtained

$$P_n^{(\alpha, \beta, M_n)}(x) = \sum_{i=0}^{j+1} b_i(n) (1-x)^i P_{n-i}^{(\alpha+2i, \beta)}(x), \quad n \geq j+1.$$

As mentioned before, the coefficients $b_i(n)$, with $i = 0, 1, \dots, j+1$, are not known, but they are convergent, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_i(n) = b_i, \quad i = 0, 1, \dots, j+1.$$

We can apply a recursive algorithm to compute explicitly these b_i . The Mehler–Heine type asymptotics is easily obtained once the b_i values are known. As in the previous chapter, there are three cases, depending on the size of the sequence. It is also interesting to mention that in this chapter, one of the three cases that appear in the Mehler–Heine type asymptotics has been proven to be a convex linear combination of the other two cases, similar to what happened in Chapter 2. This fact was not proven in [119], but it has been proved in the course of this tesis doctoral.

The publication of the papers [155] and, [156] especially, was the driving force to tackle the general case. In fact, these papers led us to consider the asymptotic

behavior of $\{M_n\}_{n \geq 0}$ in relation to the asymptotic behavior of the derivatives of kernel polynomials. Thus, in Chapter 4, we consider the following very general condition for the sequence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n K_{n-1}^{(j,j)}(c, c) = L \in [0, +\infty]. \quad (7.3)$$

Thus, under quite general conditions for the measure μ , the Mehler–Heine type asymptotics for orthogonal polynomials with respect to (7.1) can be obtained, generalizing the results obtained in the two previous chapters. These results hold for a wide class of measures such as measures in the Nevai class or related to generalized Freud weights.

The condition (7.3) provides three relevant cases: $L = 0$, $L = +\infty$ y $L \in (0, +\infty)$, resulting in three different cases in the Mehler–Heine type asymptotics, similar to what happened in the previous chapters. For $L = 0$, the Mehler–Heine type formula for varying discrete Sobolev orthogonal polynomials is the same as that of standard polynomials. This happens because the size of the sequence is negligible and does not affect the asymptotic behavior. For $L = +\infty$, however, this local asymptotic behavior is influenced by the asymptotic behavior of the sequence $\{M_n\}_{n \geq 0}$. In this situation we include, as a very particular situation, the constant case, that is, when $M_n = M$ for all n . Thus, the results obtained in this chapter generalize those reached by several authors in the non-varying case. When $L \in (0, +\infty)$, the formula obtained is a convex linear combination of the corresponding formulae in the other two cases. This fact could not be established in [120].

From these chapters, we conclude that the sequence introduced in the inner product (7.1) influences the Mehler–Heine type asymptotics and this influence depends on the asymptotic behavior of the j -th derivatives of the standard kernel polynomials related to the measure μ and evaluated in c .

Numerical experiments have been included in these three chapters to illustrate the results. Figures 3.9, 4.1 and 4.2 are particularly interesting. They show the transition between cases where the size of the sequence does not affect the Mehler–Heine type asymptotics (e.g., ϕ_3 graph in Figure 3.9 or $L = 0$ in Figures 4.1 and 4.2) and the case where the size of the sequence M_n has a substantial influence on this asymptotic behavior (e.g., $\varphi_{3,3}$ graph in the Figure 3.9 or $L = +\infty$ in Figures 4.1 and 4.2). The rest of the graphs in these figures are different convex linear combinations of these two cases.

It is worth noting that local Mehler–Heine type asymptotics allows finding the asymptotic differences between the varying discrete Sobolev orthogonal polyno-

mials and the standard orthogonal polynomials with respect to μ . In fact, the outer relative asymptotic corresponding to these two families of orthogonal polynomials is exactly equal to 1, that is, asymptotically they do not differ in $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\mu)$. This result was shown in Section 4.5. The Plancherel-Rotach asymptotics is also obtained for the varying discrete Sobolev orthogonal polynomials when the support of the measure μ is unbounded, which leads to conclude that such asymptotics is the same that the corresponding one for the orthogonal polynomials with respect to μ .

In Chapter 5, one of the main results is the asymptotic behavior of the eigenvalues, denoted by $\tilde{\lambda}_n$, of the differential operator associated with the discrete Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials. These polynomials are orthogonal with respect to the non-varying inner product

$$(f, g)_S := \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x^2)^\alpha dx \\ + M[f^{(j)}(-1)g^{(j)}(-1) + f^{(j)}(1)g^{(j)}(1)].$$

The asymptotic behavior of $\tilde{\lambda}_n$ poses a new problem because, as far as we know, it is the first time in the framework of Sobolev orthogonality that this asymptotic behavior is studied, so it opens up a new line of research (see open problems 4–6).

The asymptotic behavior of these eigenvalues is mainly determined by the behavior of the j -th derivatives of the corresponding standard kernel polynomials evaluated at $x = 1$ where we located the perturbation, and also by the asymptotic behavior of the eigenvalues of the differential operator related to the classical Gegenbauer polynomials.

The asymptotic behavior of the eigenvalues $\tilde{\lambda}_n$ is essential to obtain the value of r_0 , given by

$$r_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\max_{x \in [-1, 1]} |q_n^{(\alpha, M, j)}(x)| \right)}{\log \tilde{\lambda}_n}, \quad \alpha \geq -1/2,$$

where $q_n^{(\alpha, M, j)}$ denotes the discrete Gegenbauer-Sobolev orthonormal polynomials.

The value r_0 is the least number such that for each $r > r_0$ the reproducing kernel $K(x, y; r)$, defined by

$$K(x, y; r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_i^{(\alpha, M, j)}(x) q_i^{(\alpha, M, j)}(y)}{\tilde{\lambda}_i^r},$$

converges absolutely in a certain left-definite Hilbert space. Then, for $r > r_0$ the sequence $\left\{ \frac{q_n^{(\alpha, M, j)}(x)}{\sqrt{\tilde{\lambda}_n^r}} \right\}_{n \geq 0}$ forms a complete orthonormal basis for that space aforementioned.

Finally, although this deviates from the strict framework of this doctoral thesis, I would like to point out that during this research period, I have been able to carry out two research stays with Prof. Galina Filipuk. With her I was able to deal with *Ladder Operators* for symmetric Krall-type orthogonal polynomials involving a generalized Freud weight (see [80]). *Ladder operators* have been extensively studied in different contexts (see, for example, [23], [54]-[57], [73], [90]-[92]). However, as far as we know, they have not been studied in the framework of the Sobolev orthogonality, so the open problem 7 is posed.

7.1 OPEN PROBLEMS

Problem 1 *Find the Mehler–Heine type asymptotics, and other asymptotic behaviors, for discrete Δ –Sobolev orthogonal polynomials, i. e., when the derivative operator is replaced by the difference operator Δ and the measure μ is discrete.*

Problem 2 *In the last years, theory about Sobolev orthogonal polynomials in several variables has led to new publications. It is interesting to see how the asymptotic results obtained in Chapter 4, in particular, the Mehler–Heine type asymptotics could be tackled in the context of the several variables.*

Problem 3 *Two cases remain as open problems in Chapter 5. Specifically, as already mentioned in that chapter, when $\alpha \in (-1, -\frac{1}{2})$ and when $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ with $j = 0$ (Krall case) it cannot be proven that r_0 exists. Tackling these two situations, and resolving them, would put an end to the Gegenbauer case.*

Problem 4 *Let be the inner product*

$$(p, q)_S = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \\ + Mp^{(k)}(-1)q^{(k)}(-1) + Np^{(j)}(1)q^{(j)}(1),$$

with $\alpha, \beta > -1$, $M, N > 0$ and $k, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Getting results similar to those obtained in Chapter 5. The symmetry of Gegenbauer orthogonal polynomials played an important role in Chapter 5. The achievements made in this direction have shown the disadvantage of not having such symmetry.

Problem 5 *Given a discrete Sobolev inner product and a general measure that verifies the conditions of Chapter 4, find the asymptotic behavior of the eigenvalues of the differential operator whose eigenfunctions are the orthogonal polynomials with respect to the inner product aforementioned. This problem generalizes Problem 4.*

Problem 6 *Problem 5 could be modified to consider a discrete Δ –Sobolev inner product and to make the asymptotic study of the eigenvalues related to the corresponding difference operator.*

Finally, as a result of the research stays with Dr. Filipuk, the following problem is posed.

Problem 7 *Find Ladder Operators for Sobolev orthogonal polynomials and deduce holonomic equations for these polynomials.*



SCIENTIFIC RESULTS

The main scientific contributions supporting the research of this PhD thesis:

JCR Papers

1. Varying discrete Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials: asymptotic behavior and zeros, **Juan F. Mañas–Mañas**, F. Marcellán, Juan J. Moreno–Balcázar, *Appl. Math. Comput.* **222** (2013), 612–618. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.07.074>
2. Asymptotic behavior of varying discrete Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials, **Juan F. Mañas–Mañas**, F. Marcellán, Juan J. Moreno–Balcázar, *J. Comput. Appl. Math.* **300** (2016), 341–353. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.01.010>
3. Asymptotics for varying discrete Sobolev orthogonal polynomials, **Juan F. Mañas–Mañas**, F. Marcellán, Juan J. Moreno–Balcázar, *Appl. Math. Comput.* **314** (2017), 65–79. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.06.020>
4. Differential operator for discrete Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials: Eigenvalues and asymptotics, L. L. Littlejohn, **Juan F. Mañas–Mañas**, Juan J. Moreno–Balcázar, R. Wellman, *J. Approx. Theory* **230** (2018), 32–49. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2018.04.008>

Another JCR Paper

1. Ladder operators and a differential equation for varying generalized Freud-type orthogonal polynomials, G. Filipuk, **Juan F. Mañas–Mañas**, Juan J. Moreno–Balcázar, *Random Matrices Theory Appl.* **7** (4) (2018), 1840005, 28pp. <https://doi.org/10.1142/S2010326318400051>

Proceedings of conference

1. Local asymptotics for a family of Sobolev type orthogonal polynomials in *Proceedings of the 2012 Internacional Conference on Computacional and Mathematical Methods in Science and Engineering*, **Juan F. Mañas–Mañas**, F. Marcellán, Juan J. Moreno–Balcázar, Murcia, 785–791. ISBN. 978-84-6155392-1, 2–5 July 2012

Master Thesis

1. Polinomios de ortogonalidad no estándar, **Juan F. Mañas–Mañas**. Advisor: Juan J. Moreno–Balcázar. Master thesis defense at the University of Almería (Almería, Spain) on September 2013.
2. Polinomios ortogonales balanceados, **Juan F. Mañas–Mañas**. Advisor: F. Marcellán. Master thesis defense at the University Carlos III of Madrid (Leganes, Spain) on July 2015.

Some talks given at scientific meetings

1. “Asymptotics of a family of varying discrete Sobolev orthogonal polynomials”, in *V Jaén Conference on Approximation Theory*, 23–26 June 2014 (Úbeda, Spain). Joint work with F. Marcellán and Juan J. Moreno-Balcázar.
2. “Mehler-Heine asymptotics for varying discrete Sobolev orthonormal polynomials”, in *Congreso Bienal de la RSME*, 30 January–3 February 2017 (University of Zaragoza, Spain). Joint work with F. Marcellán and Juan J. Moreno-Balcázar.

Some posters presented at scientific meetings

1. “Asymptotics and zeros of varying Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials”, in *III Jaén Conference on Approximation Theory*, 15–20 July 2012 (Úbeda, Spain). Joint work with F. Marcellán and Juan J. Moreno-Balcázar.
2. “Estudio de Propiedades Asintóticas y Distribución de los Ceros de Polinomios Ortogonales Tipo Laguerre-Sobolev Variante”, in *II Minisimposio de Investigación en Ciencias Experimentales*, 15 November 2013 (University of Almería, Spain). Joint work with F. Marcellán and Juan J. Moreno-Balcázar.

3. “Jacobi-Sobolev-Type Orthogonal Polynomials: Asymptotic behavior and zeros”, in *IV Minisimposio de Investigación en Ciencias Experimentales*, 15 November 2015 (University of Almería, Spain). Joint work with F. Marcellán and Juan J. Moreno-Balcázar.
4. “Asymptotic behavior of varying discrete Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials”, in *Orthonet 2016*, 6–7 May 2016 (Albarracín, Spain). Joint work with F. Marcellán and Juan J. Moreno-Balcázar.
5. “Asymptotic behavior of varying discrete Sobolev orthogonal polynomials”, in *Second Joint Conference of the Belgian, Royal Spanish and Luxembourg Mathematical Societies*, 6–8 June 2016 (University of La Rioja, Spain). Joint work with F. Marcellán and Juan J. Moreno-Balcázar.
6. “Asymptotic behavior of eigenvalues of a differential operator for Gegenbauer-Sobolev orthonormal polynomials”, in *14th International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (OPSFA14)*, 3–7 July 2017 (University of Kent, UK). Joint work with Lance L. Littlejohn, Juan J. Moreno-Balcázar and R. Wellman.
7. “Eigenvalues of a differential operator for a family of Sobolev orthogonal polynomials”, in *Foundations of Computational Mathematics (FoCM’2017)*, 10–19 July 2017 (Barcelona, Spain). Joint work with Lance L. Littlejohn, Juan J. Moreno-Balcázar and R. Wellman.
8. “Mehler-Heine asymptotics and zeros of varying discrete Sobolev orthonormal polynomials”, in *VI Minisimposio de Investigación en Ciencias Experimentales*, 15 November 2017 (University of Almería, Spain). Joint work with F. Marcellán and Juan J. Moreno-Balcázar.
9. “Differential operator for discrete Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials: Eigenvalues and asymptotics”, in *IV encuentro de la Red de Polinomios Ortogonales y Teoría de Aproximación (Orthonet 2017)*, 17–19 November 2017 (El Escorial, Spain). Joint work with Lance L. Littlejohn, Juan J. Moreno-Balcázar and R. Wellman.
10. “Varying Sobolev orthogonal polynomials: Asymptotics and Zeros”, in *VII Iberoamerican Workshop in Orthogonal Polynomials and Applications (EIB-POA2018)*, 3–6 July 2018 (University Carlos III of Madrid, Spain). Joint work with F. Marcellán and Juan J. Moreno-Balcázar.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. ABRAMOWITZ, I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.
- [2] R. AKTAŞ, Y. XU, *Sobolev orthogonal polynomials on a simplex*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2013 **13** (2) (2013), 3087–3131.
- [3] W. A. AL-SALAM, T. S. CHIHARA, *Another characterization of the classical orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **3** (1972), 65–70.
- [4] M. ALFARO, M. ÁLVAREZ DE MORALES, M. L. REZOLA, *Orthogonality of the Jacobi polynomials with negative integer parameters*, J. Comput. Appl. Math. **145** (2) (2002), 379–386.
- [5] M. ALFARO, G. LÓPEZ, M. L. REZOLA, *Some properties of zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **69** (1996), 171–179.
- [6] M. ALFARO, F. MARCELLÁN, H. G. MEIJER, M. L. REZOLA, *Symmetric Orthogonal Polynomials for Sobolev-Type Inner Products*, J. Math. Anal. Appl. **184** (2) (1994), 360–381.
- [7] M. ALFARO, F. MARCELLÁN, M. L. REZOLA, *Estimates for Jacobi–Sobolev type orthogonal polynomials*, Appl. Anal. **67** (1-2) (1997), 157–174.
- [8] M. ALFARO, F. MARCELLÁN, M. L. REZOLA, A. RONVEAUX, *On orthogonal polynomials of Sobolev Type: algebraic properties and zeros*, SIAM J. Math. Anal. **23** (3) (1992), 737–757.
- [9] M. ALFARO, F. MARCELLÁN, M. L. REZOLA, A. RONVEAUX, *Sobolev-type orthogonal polynomials: the nondiagonal case*, J. Approx. Theory **83** (2) (1995), 266–287.
- [10] M. ALFARO, A. MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, M. L. REZOLA, *Asymptotic properties of balanced extremal Sobolev polynomials: coherent case*, J. Approx. Theory **100** (1) (1999), 44–59.

- [11] M. ALFARO, J. J. MORENO-BALCÁZAR, A. PEÑA, M. L. REZOLA, *Sobolev orthogonal polynomials: Balance and asymptotics*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (1) (2009), 547–560.
- [12] M. ALFARO, J. J. MORENO-BALCÁZAR, A. PEÑA, M. L. REZOLA, *A new approach to the asymptotics for Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **163** (4) (2011), 460–480.
- [13] M. ALFARO, J. J. MORENO-BALCÁZAR, A. PEÑA, M. L. REZOLA, *Asymptotic formulae for generalized Freud polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **421** (1) (2015), 474–488.
- [14] M. ALFARO, J. J. MORENO-BALCÁZAR, T. E. PÉREZ, M. A. PIÑAR, M. L. REZOLA, *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for Hermite coherent pairs*, J. Comput. Appl. Math. **133** (1-2) (2001), 141–150.
- [15] M. ALFARO, J. J. MORENO-BALCÁZAR, M. L. REZOLA, *Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials: asymptotics for coherent pairs of type II*, J. Approx. Theory **122** (1) (2003), 79–96.
- [16] M. ALFARO, T. E. PÉREZ, M. A. PIÑAR, M. L. REZOLA, *Sobolev orthogonal polynomials: the discrete-continuous case*, Methods Appl. Anal. **6** (4) (1999), 593–616.
- [17] P. ALTHAMMER, *Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation*, J. Reine Angew. Math. **211** (1962), 192–204.
- [18] M. ÁLVAREZ DE MORALES, T. E. PÉREZ, M. A. PIÑAR, *Sobolev orthogonality for the Gegenbauer polynomials $\{C_n^{(-N+1/2)}\}_{n \geq 0}$* , J. Comput. Appl. Math. **100** (1) (1998), 111–120.
- [19] R. ÁLVAREZ-NODARSE, *Polinomios hipergeométricos clásicos y q -polinomios*, Monografías del seminario matemático García de Galdeano. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2003.
- [20] R. ÁLVAREZ-NODARSE, J. J. MORENO-BALCÁZAR, *Asymptotic properties of generalized Laguerre orthogonal polynomials*, Indag. Math. (N. S.) **15** (2) (2004), 151–165.

- [21] E. X. L. DE ANDRADE, C. BRACCIALI, L. CASTAÑO–GARCÍA, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Asymptotics for Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials associated with non-coherent pairs of measures*, J. Approx. Theory **162** (11) (2010), 1945–1963.
- [22] A. I. APTEKAREV, J. S. GERONIMO, W. VAN ASSCHE, *Varying weights for orthogonal polynomials with monotonically varying recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **150** (2) (2008), 214–238.
- [23] A. ARCEO, E. J. HUERTAS, F. MARCELLÁN, *On polynomials associated with an Uvarov modification of a quartic potential Freud-like weight*, Appl. Math. Comput. **281** (2016), 102–120.
- [24] I. AREA, E. GODOY, F. MARCELLÁN, *Classification of all Δ -coherent pairs*, Integral Transforms Spec. Funct. **9** (1) (2000), 1–18.
- [25] I. AREA, E. GODOY, F. MARCELLÁN, *q -coherent pairs and q -orthogonal polynomials. Orthogonal systems and applications*, Appl. Math. Comput. **128** (2-3) (2002), 191–126.
- [26] I. AREA, E. GODOY, F. MARCELLÁN, *Δ -coherent pairs and orthogonal polynomials of a discrete variable*, Integral Transforms Spec. Funct. **14** (1) (2003), 31–57.
- [27] I. AREA, E. GODOY, F. MARCELLÁN, J. J. MORENO-BALCÁZAR, *Inner products involving q -differences: the little q -Laguerre-Sobolev polynomials. Higher transcendental functions and their applications*, J. Comput. Appl. Math. **118** (1-2) (2000), 1–22.
- [28] I. AREA, E. GODOY, F. MARCELLÁN, J. J. MORENO-BALCÁZAR, *Δ -Sobolev orthogonal polynomials of Meixner type: asymptotics and limit relation*, J. Comput. Appl. Math. **178** (1-2) (2005), 21–36.
- [29] N. ARONSZAJN, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (3) (1950), 337–404.
- [30] R. A. ASKEY, R. ROY, *Gamma function. In NIST Handbook of Mathematical Functions*, edited by F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert and C. W. Clark. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010, 135–147.

- [31] H. BAVINCK, *Linear perturbations of differential or difference operators with polynomials as eigenfunctions*, J. Comput. Appl. Math. **78** (1) (1997), 179–195.
- [32] H. BAVINCK, *Differential and difference operators having orthogonal polynomials with two linear perturbations as eigenfunctions*, J. Comput. Appl. Math. **92** (2) (1998), 85–95.
- [33] H. BAVINCK, J. KOEKOEK, *Differential operators having symmetric orthogonal polynomials as eigenfunctions*, J. Comput. Appl. Math. **106** (2) (1999), 369–393.
- [34] H. BAVINCK, H. G. MEIJER, *Orthogonal polynomials with respect to a symmetric inner product involving derivatives*, Appl. Anal. **33** (1-2) (1989), 103–117.
- [35] H. BAVINCK, H. G. MEIJER, *On orthogonal polynomials with respect to an inner product involving derivatives: zeros and recurrence relations*, Indag. Math. (N. S.) **1** (1) (1990), 7–14.
- [36] A. BERLINET, C. THOMAS–AGNAN, *Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2004.
- [37] E. BERRIOCHOA, A. CACHAFEIRO, *Lebesgue Sobolev orthogonality on the unit circle*, J. Comput. Appl. Math. **96** (1) (1998), 27–34.
- [38] E. BERRIOCHOA, A. CACHAFEIRO, *A family of Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle*, J. Comput. Appl. Math. **105** (1-2) (1999), 163–173.
- [39] E. BERRIOCHOA, A. CACHAFEIRO, *Continuous Sobolev inner products on the unit circle: canonical models*, Rend. Mat. Appl. **7** (19) (1999), 89–106.
- [40] E. BERRIOCHOA, A. CACHAFEIRO, F. MARCELLÁN, *Differential properties for Sobolev orthogonality on the unit circle*, J. Comput. Appl. Math. **133** (1-2) (2001), 231–239.
- [41] S. BOCHNER, *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*, Math. Z. **29** (1) (1929), 730–736.
- [42] C. BOSBACH, W. GAWRONSKI, *Strong asymptotics for Jacobi polynomials with varying weights*, Methods Appl. Anal. **6** (1) (1999), 39–54.

- [43] C. BRACCIALI, L. CASTAÑO–GARCÍA, J.J. MORENO–BALCÁZAR, *Some asymptotics for Sobolev orthogonal polynomials involving Gegenbauer weights*, J. Comput. Appl. Math. **235** (4) (2010), 904–915.
- [44] C. BRACCIALI, A. M. DELGADO, L. FERNÁNDEZ, T. E. PÉREZ, M. A. PIÑAR, *New step on Sobolev orthogonality in two variables*, J. Comput. Appl. Math. **235** (4) (2010), 916–926.
- [45] J. BRENNER, *Über eine Erweiterung des Orthogonalitäts bei Polynomen*. In G. Alexits, S. B. Stechkin (Eds.), *Constructive Theory of Functions*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972, pp. 77–83.
- [46] M. I. BUENO, K. H. KWON, F. MARCELLÁN, *Discrete-continuous symmetrized Sobolev inner products*, Acta Appl. Math. **82** (3) (2004), 309–331.
- [47] A. CACHAFEIRO, F. MARCELLÁN, *Orthogonal polynomials of Sobolev type on the unit circle*, J. Approx. Theory **78** (1) (1994), 127–146.
- [48] A. CACHAFEIRO, F. MARCELLÁN, *On some properties of orthogonal polynomials related to a Sobolev-type inner product on the unit circle*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **11** (1996), 67–78.
- [49] A. CACHAFEIRO, F. MARCELLÁN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *On asymptotic properties of Freud-Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **125** (1) (2003), 26–41.
- [50] L. CASTAÑO–GARCÍA, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *A Mehler-Heine-type formula for Hermite-Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **150** (1) (2003), 25–35.
- [51] L. CASTAÑO–GARCÍA, *Aportaciones a la teoría asintótica de polinomios ortogonales de Sobolev*, Tesis Doctoral, Universidad de Almería, 2010.
- [52] L. CASTAÑO–GARCÍA, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Varying Sobolev type orthogonal polynomials: the Laguerre case*, Jaen J. Approx. **4** (2) (2012), 85–99.
- [53] L. CASTAÑO–GARCÍA, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Zeros of varying Laguerre-Krall orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (6) (2013), 2051–2060.

- [54] Y. CHEN, M. E. H. ISMAIL, *Ladder operators and differential equations for orthogonal polynomials*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (22) (1997), 7817–7829.
- [55] Y. CHEN, M. E. H. ISMAIL, *Ladder operators for q -orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **345** (1) (2008), 1–10.
- [56] Y. CHEN, A. ITS, *Painlevé III and a singular linear statistics in Hermitian random matrix ensembles, I*, J. Approx. Theory **162** (2) (2010), 270–297.
- [57] Y. CHEN, G. PRUESSNER, *Orthogonal polynomials with discontinuous weights*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (12) (2005), L191–L198.
- [58] T. S. CHIHARA, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1978.
- [59] E. A. COHEN, *Zero distribution and behavior of orthogonal polynomials in the Sobolev space $W^{1,2}[-1, 1]$* , SIAM J. Math. Anal. **6** (1975), 105–116.
- [60] R. S. COSTAS–SANTOS, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *The semiclassical Sobolev orthogonal polynomials: a general approach*, J. Approx. Theory **163** (1) (2011), 65–83.
- [61] R. S. COSTAS–SANTOS, J. F. SÁNCHEZ–LARA, *Extensions of discrete classical orthogonal polynomials beyond the orthogonality*, J. Comput. Appl. Math. **225** (2) (2009), 440–451.
- [62] M. G. DE BRUIN, *A tool for locating zeros of orthogonal polynomials in Sobolev inner product spaces. In: Proceedings of the Seventh Spanish Symposium on Orthogonal Polynomials and Applications (VII SPOA) (Granada, 1991)*, J. Comput. Appl. Math. **49** (1-3) (1993), 27–35.
- [63] M. N. DE JESUS, F. MARCELLÁN, J. PETRONILHO, N. PINZÓN, *(M, N) -coherent pairs of order (m, k) and Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **256** (2014), 16–35.
- [64] M. N. DE JESUS, J. PETRONILHO, *On linearly related sequences of derivatives of orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **347** (2) (2008), 482–492.
- [65] M. N. DE JESUS, J. PETRONILHO, *Sobolev orthogonal polynomials and (M, N) -coherent pairs of measures*, J. Comput. Appl. Math. **237** (1) (2013), 83–101.

- [66] P. DEIFT, T. KRIECHERBAUER, K. T.-R. McLAUGHLIN, S. VENAKIDES, X. ZHOU, *Asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights*, Int. Math. Res. Notices IMRN **16** (1997), 759–782.
- [67] P. DEIFT, T. KRIECHERBAUER, K. T.-R. McLAUGHLIN, S. VENAKIDES, X. ZHOU, *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory*, Commun. Pure Appl. Math. **52** (11) (1999), 1335–1425.
- [68] A. M. DELGADO, T. E. PÉREZ, M. A. PIÑAR, *Sobolev-type orthogonal polynomials on the unit ball*, J. Approx. Theory **170** (2013), 94–106.
- [69] C. DÍAZ MENDOZA, R. ORIVE, H. PIJEIRA CABRERA, *Asymptotically extremal polynomials with respect to varying weights and application to Sobolev orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. **346** (2) (2008), 480–488.
- [70] H. DUEÑAS, E. J. HUERTAS, F. MARCELLÁN, *Asymptotic properties of Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials*, Numer. Algorithms **60** (1) (2012), 51–73.
- [71] H. DUEÑAS, F. MARCELLÁN, *Asymptotic behaviour of Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials. A nondiagonal case*, J. Comput. Appl. Math. **235** (4) (2010), 998–1007.
- [72] H. DUEÑAS, F. MARCELLÁN, *The Laguerre–Sobolev–type orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **162** (2) (2010), 421–440.
- [73] H. DUEÑAS, F. MARCELLÁN, *The Laguerre–Sobolev–type orthogonal polynomials. Holonomic equation and electrostatic interpretation*, Rocky Mountain J. Math. **41** (1) (2011), 95–131.
- [74] A. J. DURÁN, M. D. DE LA IGLESIA, *Differential equations for discrete Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **195** (2015), 70–88.
- [75] A. J. DURÁN, M. D. DE LA IGLESIA, *Differential equations for discrete Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials*, J. Spectr. Theory **8** (1) (2018), 191–234.

- [76] W. D. EVANS, L. L. LITTLEJOHN, F. MARCELLÁN, C. MARKETT, A. RONVEAUX, *On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **26** (2) (1995), 446–467.
- [77] B. X. FEJZULLAHU, F. MARCELLÁN, *Jacobi–Sobolev orthogonal polynomials: asymptotics for N -coherence of measures*, J. Inequal. Appl. **ID 294134** (2011), 19 pp.
- [78] B. X. FEJZULLAHU, F. MARCELLÁN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Jacobi–Sobolev orthogonal polynomials: asymptotics and a Cohen type inequality*, J. Approx. Theory **170** (2013), 78–93.
- [79] L. FERNÁNDEZ, F. MARCELLÁN, T. E. PÉREZ, M. A. PIÑAR, Y. XU, *Sobolev orthogonal polynomials on product domains*, J. Comput. App. Math. **284** (2015), 202–215.
- [80] G. FILIPUK, J. J. MAÑAS–MAÑAS, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Ladder operators and a differential equation for varying generalized Freud–type orthogonal polynomials*, Random Matrices Theory Appl. **7** (4) (2018), 1840005 (28pp).
- [81] A. FOULQUIÉ–MORENO, F. MARCELLÁN, B. P. OSILENKER, *Estimates for Polynomials Orthogonal with Respect to Some Gegenbauer-Sobolev Type Inner Product*, J. Inequal. Appl. **3** (4) (1999), 401–419.
- [82] M. I. GANZBURG, *Limit theorems of polynomial approximation with exponential weights*, Mem. Amer. Math. Soc. **192** (897), Providence, RI, 2008.
- [83] A. G. GARCÍA, L. L. LITTLEJOHN, *On analytic sampling theory*, J. Comput. Appl. Math. **171** (1-2) (2004), 235–246.
- [84] W. GAUTSCHI, *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, Oxford University Press, New York, 2004.
- [85] I. S. GRADSHTEYN, I. M. RYZBIK, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press Inc. San Diego, 1996.
- [86] W. GRÖBNER, *Orthogonale Polynomsysteme, die Gleichzeitig mit $f(x)$ auch deren Ableitung $f'(x)$ approximieren*. In: L. Collatz (Eds.), *Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numerische Mathematik*, Birkhäuser, Basel, 1967, pp. 24–32.

- [87] W. HAHN, *Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen*, Math. Z. **39** (1) (1935), 634–638.
- [88] E. J. HUERTAS, F. MARCELLÁN, M. F. PÉREZ-VALERO, Y. QUINTANA, *Asymptotics for Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials modified within their oscillatory regime*, Appl. Math. Comput. **236** (2014), 260–272.
- [89] A. ISERLES, P. E. KOCH, S. P. NØRSETT, J. M. SANZ-SERNA, *On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products*, J. Approx. Theory **65** (2) (1991), 151–175.
- [90] M. E. H. ISMAIL, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one Variable*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol. **98** Cambridge University Press, Cambridge U. K. 2005.
- [91] M. E. H. ISMAIL, I. NIKOLOVA, P. SIMEONOV, *Difference equations and discriminants for discrete orthogonal polynomials*, Ramanujan J. **8** (4) (2004), 475–502.
- [92] M. E. H. ISMAIL, J. WIMP, *On differential equations for orthogonal polynomials*, Methods Appl. Anal. **5** (4) (1998), 439–452.
- [93] I. H. JUNG, K. H. KWON, J. K. LEE, *Sobolev orthogonal polynomials relative to $\lambda p(c)q(x) + \langle \tau, p'(x)q'(x) \rangle$* , Commun. Korean Math. Soc. **13** (3) (1997), 603–617.
- [94] I. H. JUNG, K. H. KWON, G. J. YOON, *Differential equations of infinite order for Sobolev-type orthogonal polynomials*, J. Comput. App. Math. **78** (2) (1997), 277–293.
- [95] S. F. KHWAHA, A. B. OLDE DAALHUIS, *Uniform asymptotic approximations for the Meixner-Sobolev polynomials*, Anal. Appl. (Singap.) **10** (3) (2012), 345–361.
- [96] R. KOEKOEK, *Generalizations of Laguerre polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **153** (2) (1990), 576–590.
- [97] R. KOEKOEK, *The search for differential equations for certain sets of orthogonal polynomials*. In: *Proceedings of the Seventh Spanish Symposium on Orthogonal Polynomials and Applications (VII SPOA) (Granada, 1991)*, J. Comput. Appl. Math. **49** (1-3) (1993), 111–119.

- [98] J. KOEKOEK, R. KOEKOEK, *Differential equations for generalized Jacobi polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **126** (1-2) (2000), 1–31.
- [99] J. KOEKOEK, R. KOEKOEK, H. BAVINCK, *On differential equations for Sobolev-type Laguerre polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1) (1998), 347–393.
- [100] R. KOEKOEK, T. H. KOORNWINDER, R. F. SWARTTOUW, R. WONG, *Orthogonal Polynomials*. In *NIST Handbook of Mathematical Functions*, edited by F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert and C. W. Clark. Cambridge University Press, Cambridge U. K. 2010, 435–484.
- [101] R. KOEKOEK, P. A. LESKY, R. F. SWARTTOUW, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2010.
- [102] R. KOEKOEK, H. G. MEIJER, *A generalization of Laguerre polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **24** (3) (1993), 768–782.
- [103] E. KOELINK, W. VAN ASSCHE (eds.), *Orthogonal Polynomials and Special Functions (Leuven 2002)*, Lecture Notes in Mathematics, **1817** Springer-Verlag, Berlín, 2003.
- [104] A. M. KRALL, *Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **87** (3-4) (1980/81), 271–288.
- [105] A. B. J. KUIJLAARS, P. M. J. TIBBOEL, *The asymptotic behaviour of recurrence coefficients for orthogonal polynomials with varying exponential weights*, J. Comput. Appl. Math. **233** (3) (2009), 775–785.
- [106] K. H. KWON, J. K. LEE, F. MARCELLÁN, *Generalized coherent pairs*, J. Math. Anal. Appl. **253** (2) (2001), 482–514.
- [107] K. H. KWON, L. L. LITTLEJOHN, *The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k* , Ann. Numer. Math. **2** (1-4) (1995), 289–303.
- [108] J. K. LEE, L. L. LITTLEJOHN, *Sobolev orthogonal polynomials in two variables and second order partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **322** (2006), 1001–1017.

- [109] E. LEVIN, D. S. LUBINSKY, *Orthogonal polynomials for exponential weights*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [110] E. LEVIN, D. S. LUBINSKY, *Bounds and asymptotics for orthogonal polynomials for varying weights*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Cham, 2018.
- [111] D. C. LEWIS, *Polynomial Least Square Approximations*, Amer. J. Math. **69** (1947), 273–278.
- [112] L. L. LITTLEJOHN, J. F. MAÑAS–MAÑAS, J. J. MORENO–BALCÁZAR, R. WELLMAN, *Differential operator for discrete Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials: Eigenvalues and asymptotics*, J. Approx. Theory, **230** (2018), 32–49.
- [113] L. L. LITTLEJOHN, R. WELLMAN, *A general left-definite theory for certain self-adjoint operators with applications to differential equations*, J. Differential Equations, **181** (2) (2002), 280–339.
- [114] L. L. LITTLEJOHN, R. WELLMAN, *Left-Definite Operators and Orthogonal Polynomials for Kernel Learning*, en preparación.
- [115] G. LÓPEZ, F. MARCELLÁN, W. VAN ASSCHE, *Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, Constr. Approx. **11** (1) (1995), 107–137.
- [116] G. LÓPEZ LAGOMASINO, H. PIJEIRA CABRERA, *Polinomios ortogonales*. Serie de la XIV Escuela Venezolana de Matemáticas, Centro de Estudios Avanzados - Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Caracas, 2001.
- [117] J. F. MAÑAS MAÑAS, F. MARCELLÁN J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Local asymptotics for a family of Sobolev type orthogonal polynomials*. In: *Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012*, 785–791. ISBN:978-84-615-5392-1.
- [118] J. F. MAÑAS MAÑAS, F. MARCELLÁN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Varying discrete Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials: asymptotic behavior and zeros*, Appl. Math. Comput. **222** (2013), 612–618.

- [119] J. F. MAÑAS MAÑAS, F. MARCELLÁN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Asymptotic behavior of varying discrete Jacobi–Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **300** (2016), 341–353.
- [120] J. F. MAÑAS–MAÑAS, F. MARCELLÁN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Asymptotics for varying discrete Sobolev orthogonal polynomials*, Appl. Math. Comput. **314** (2017), 65–79.
- [121] F. MARCELLÁN, M. ALFARO, M. L. REZOLA, *Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions*, J. Comput. Appl. Math. **48** (1-2) (1993), 113–131.
- [122] F. MARCELLÁN, A. BRANQUINHO, J. PETRONILHO, *Classical orthogonal polynomials: a functional approach*, Acta Appl. Math. **34** (3) (1994), 283–303.
- [123] F. MARCELLÁN, A. MARTÍNEZ–FINKELSSTEIN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for symmetrically coherent pairs of measures with compact support*, J. Comput. Appl. Math. **81** (2) (1997), 217–227.
- [124] F. MARCELLÁN, A. MARTÍNEZ–FINKELSSTEIN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *k-coherence of measures with non-classical weights*. In: *Margarita Mathematica en Memoria de José Javier Guadalupe Hernández*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Rioja, Logroño (España) (2001), pp. 77–83.
- [125] F. MARCELLÁN, H. G. MEIJER, T. E. PÉREZ, M. A. PIÑAR, *An asymptotic result for Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **87** (1) (1997), 87–94.
- [126] F. MARCELLÁN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Strong and Plancherel–Rotach asymptotics of non-diagonal Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **110** (1) (2001), 54–73.
- [127] F. MARCELLÁN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Asymptotics and zeros of Sobolev orthogonal polynomials on unbounded supports*, Acta Appl. Math. **94** (2) (2006), 163–192.
- [128] F. MARCELLÁN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *What is...a Sobolev orthogonal polynomial?*, Notices Amer. Math. Soc. **64** (8) (2017), 873–875.

- [129] F. MARCELLÁN, M. F. PÉREZ-VALERO, Y. QUINTANA, A. URIELES, *Recurrence relations and outer relative asymptotics of orthogonal polynomials with respect to a discrete Sobolev type inner product*, Bull. Math. Sci. **4** (1) (2014), 83–97.
- [130] F. MARCELLÁN, T. E. PÉREZ, M. A. PIÑAR, *On zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials*, Rend. Mat. Appl. **12** (7) (1992), 455–473.
- [131] F. MARCELLÁN, F. R. RAFAELI, *Monotonicity and asymptotics of zeros of Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials of higher order derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (11) (2011), 3929–3936.
- [132] F. MARCELLÁN, A. RONVEAUX, *On a class of polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, Indag. Mathem. (N. S.), **1** (4) (1990), 451–464.
- [133] F. MARCELLÁN, A. SRI RANGA, *Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle and coherent pairs of measures of the second kind*, Results Math. **71** (3-4) (2017), 1127–1149.
- [134] F. MARCELLÁN, W. VAN ASSCHE, *Relative asymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product*, J. Approx. Theory **72** (2) (1993), 193–209.
- [135] F. MARCELLÁN, Y. XU, *On Sobolev Orthogonal Polynomials*, Expo. Math. **33** (3) (2015), 308–352.
- [136] A. MARTÍNEZ–FINKELSHTEIN, *Bernstein-Szegő's theorem for Sobolev orthogonal polynomials*, Constr. Approx. **16** (1) (2000), 73–84.
- [137] A. MARTÍNEZ–FINKELSHTEIN, *Analytic aspects of Sobolev orthogonal polynomials revisited*, J. Comput. Appl. Math. **127** (1-2) (2001), 255–266.
- [138] A. MARTÍNEZ–FINKELSHTEIN, P. MARTÍNEZ–GONZÁLEZ, R. ORIVE, *On asymptotic zero distribution of Laguerre and generalized Bessel polynomials with varying parameters*, J. Comput. Appl. Math. **133** (1-2) (2001), 477–487.
- [139] A. MARTÍNEZ–FINKELSHTEIN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, E. T. PÉREZ, M. A. PIÑAR, *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of measures*, J. Approx. Theory **92** (2) (1998), 280–293.

- [140] K. T.-R. McLAUGHLIN, P. D. MILLER, *The $\bar{\partial}$ steepest descent method for orthogonal polynomials on the real line with varying weights*, Int. Math. Res. Not. IMRN **75** (2008), 66p.
- [141] H. G. MEIJER, *Zero Distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev Space*, J. Math. Anal. Appl. **172** (2) (1993), 520–532.
- [142] H. G. MEIJER, *Sobolev orthogonal polynomials with a small number of real zeros*, J. Approx. Theory **77** (3) (1994), 305–313.
- [143] H. G. MEIJER, *A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev space. I. The non-discrete case*, 31st Dutch Mathematical Conference (Groningen, 1995), Nieuw Arch. Wisk. **14** (4) (1996), 93–112.
- [144] H. G. MEIJER, *Determination of all coherent pairs*, J. Approx. Theory **89** (3) (1997), 321–343.
- [145] H. G. MEIJER, T. E. PÉREZ, M. A. PIÑAR, *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of Laguerre type*, J. Math. Anal. Appl. **245** (2) (2000), 528–546.
- [146] H. G. MEIJER, M. A. PIÑAR, *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of Jacobi type*, J. Comput. Appl. Math. **108** (1-2) (1999), 87–97.
- [147] J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Smallest zeros of some types of orthogonal polynomials: asymptotics*, J. Comput. Appl. Math. **179** (1-2) (2005), 289–301.
- [148] J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Varying Jacobi-Krall orthogonal polynomials: local asymptotic behaviour and zeros*, Ramanujan J. **28** (2012), 79–88.
- [149] J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Δ -Meixner-Sobolev orthogonal polynomials: Mehler-Heine type formula and zeros*, J. Comput. Appl. Math. **284** (2015), 228–234.
- [150] J. J. MORENO–BALCÁZAR, T. E. PÉREZ, M. A. PIÑAR, *A generating function for nonstandard orthogonal polynomials involving differences: the Meixner case*, Ramanujan J. **25** (1) (2011), 21–35.
- [151] P. NEVAI, *Orthogonal Polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc. **18** (213) (1979), 185pp.

- [152] A. F. NIKIFOROV, V. B. UVAROV, *Special Functions of Mathematical Physics. A Unified Introduction with Applications*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1988.
- [153] E. M. NIKISHIN, V. N. SOROKIN, *Rational approximations and orthogonality*, Trans. Math. Monographs, **92**. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1991.
- [154] F. W. J. OLVER, L. C. MAXIMON, *Bessel Functions*. In *NIST Handbook of Mathematical Functions*, edited by F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert and C. W. Clark. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010, 215–286.
- [155] A. PEÑA, M. L. REZOLA, *Discrete Laguerre-Sobolev expansions: A Cohen type inequality*, J. Math. Anal. Appl. **385** (1) (2012), 254–263.
- [156] A. PEÑA, M. L. REZOLA, *Connection formulas for general discrete Sobolev polynomials: Mehler-Heine asymptotics*, Appl. Math. Comput. **261** (2015), 216–230.
- [157] T. E. PÉREZ, *Polinomios ortogonales respecto a productos de Sobolev: El caso continuo*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1994.
- [158] T. E. PÉREZ, M. A. PIÑAR, *On Sobolev orthogonality for the generalized Laguerre polynomials*, J. Approx. Theory **86** (3) (1996), 278–285.
- [159] F. RIESZ, B. S. NAGY, *Functional Analysis*, Frederick Ungar, New York, 1978.
- [160] I. A. ROCHA, F. MARCELLÁN, L. SALTO, *Relative asymptotics and Fourier series of orthogonal polynomials with a discrete Sobolev inner product*, J. Approx. Theory **121** (2) (2003), 336–356.
- [161] I. A. ROCHA, L. SALTO, *Asymptotics of polynomials orthogonal with respect to a discrete-complex Sobolev inner product*, J. Comput. Appl. Math. **178** (1-2) (2005), 1–19.
- [162] W. RUDIN, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [163] J. F. SÁNCHEZ-LARA, *On the Sobolev orthogonality of classical orthogonal polynomials for non standard parameters*, Rocky Mountain J. Math. **47** (1) (2017), 267–288.

- [164] F. W. SCHÄFKE, *Zu den Orthogonalpolynomen von Althammer*, J. Reine Angew. Math. **252** (1972), 195–199.
- [165] F. W. SCHÄFKE, G. WOLF, *Einfache verallgemeinerte Klassische Orthogonal polynome*, J. Reine Angew. Math. **262–263** (1973), 339–355.
- [166] I. I. SHARAPUDINOV, Z. D. GADZHIEVA, R. M. GADZHIMIRZAEV, *Difference equations and Sobolev orthogonal polynomials generated by Meixner polynomials*, (Russian), Vladikavkaz. Mat. Zh. **19** (2) (2017), 58–72.
- [167] H. STAHL, *Strong asymptotics for orthonormal polynomials with varying weights*, Acta Sci. Math. (Szeged) **66** (1-2) (2000), 147–192.
- [168] H. STAHL, V. TOTIK, General orthogonal polynomials. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **43**. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [169] G. SZEGŐ, Orthogonal Polynomials, fourth edition, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. **23**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1975.
- [170] N. M. TEMME, Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.
- [171] W. VAN ASSCHE, *Asymptotics for orthogonal polynomials*, Lecture Notes in Mathematics, **1265**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [172] Y. XU, *A family of Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball*, J. Approx. Theory **138** (5) (2006), 232–241.
- [173] Y. XU, *Sobolev orthogonal polynomials defined via gradient on the unit ball*, J. Approx. Theory **152** (1) (2008), 52–65.