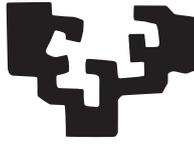


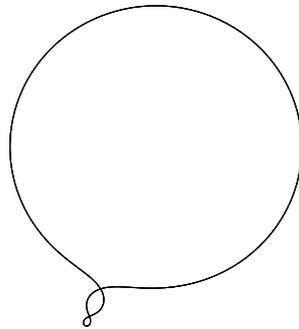
eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

TESIS DOCTORAL



La ecuación modificada de Korteweg-de
Vries(mKdV) geométrica

Miguel Angel Alejo Plana

La ecuación modificada de Korteweg-de Vries(mKdV) geométrica

Tesis Doctoral

realizada por
Miguel Angel Alejo Plana

2010

Director
Dr. D. Luis Vega González

Departamento de Matemáticas
Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea

La ecuación modificada de Korteweg-de Vries(mKdV) geométrica

por

Miguel Angel Alejo Plana

Memoria realizada bajo la dirección del
catedrático de Análisis Matemático Dr.
D. Luis Vega González, para optar al
grado de Doctor en Ciencias, Sección
de Matemáticas, por la Universidad
del País Vasco- Euskal Herriko
Unibertsitatea.

*Todo lo perderé salvo el recuerdo
de los días aquéllos luminosos
en que la vida aprisionaba con firmeza
la flor caudal y humana
de una ambigua emoción inexpresable
que cada cual concibe
como felicidad.*

Felipe Benítez Reyes.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director **Luis Vega González** el tiempo dedicado en la elaboración de esta tesis.

A **Carlos Gorria**, le agradezco su paciencia para instruirme en los entresijos de los métodos numéricos.

Agradezco al departamento de Matemáticas de la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea el apoyo material que he recibido a lo largo de estos años de investigación predoctoral.

Como corredor de larga distancia, sé que ninguna carrera fructifica hasta que no se cruza la línea de llegada. La tesis doctoral es otra carrera de fondo, quizás la más duradera a la que me enfrentado, pero el espíritu que me ha guiado ha sido el mismo desde el principio: *resiste, disfruta y vencerás*.

En tan largo trayecto, las dificultades inesperadas e incontroladas son inherentes a este reto mayor. Nadie te avisa de las señalizaciones incorrectas y equivocadas, nadie te previene de los corredores que acortan el recorrido ni de aquellos que tienen liebres que les llevan *de la mano* hasta casi la línea de llegada. Ni siquiera el entrenamiento que hayas realizado, tutelado o no, te garantiza que puedas llegar a la meta. *¿Qué es lo que le queda a uno entonces, después de todo esto?*

En mi modesta opinión, es la ilusión y el disfrute que el mismo hecho de correr representa, independientemente de los adornos que se le pongan alrededor.

Todas y cada una de estas observaciones acerca de las carreras de larga distancia han tenido su imagen especular en el desarrollo de la tesis doctoral. Incluso la última conclusión se repite letra a letra:

lo único que me queda es mantener y tener presente la ilusión por descubrir objetos y propiedades abstractas, independientemente de si las cuentas salen o no, de si la estrategia era la correcta o de si te rechazan o aceptan una publicación.

Por eso quiero recordar aquí a todos aquellos que, sin tener garantizado que pudiera llegar a la meta, han estado ahí apoyándome en los distintos puntos kilométricos del recorrido de la tesis.

En el primer tramo, desde la salida hasta la media distancia (de hecho, hasta más allá), me acogieron con agrado y afecto **Marta Macho**, **María Merino**, **Álvaro Lozano** y **Marta Saloña**. Gracias.

Gracias también a **Luis Escauriaza**, por ayudarme con la burocracia de la beca en los primeros meses y por sus irremplazables conversaciones sobre ciclismo.

Gracias a **Miguel Escobedo** por prestarme su despacho cuando no tenía un sitio a donde ir.

Gracias a **Oscar Garay** por escuchar mis dudas geométricas y prestarme libros desinteresadamente.

También quiero agradecer a los compañeros y amigos de la Universidad de Granada, por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de la tesis. Estos son: **Juan Soler, José Luis, Oscar, Juanjo, Juan Calvo, Jesús, Pilar, Pedro.**

En especial, a **Magdalena Caballero** por enseñarme tantas cosas y regalarme su amistad.

Desde la media distancia hasta la meta, han estado apoyándome la nueva hornada de becarios/as (y contratadas) del departamento de Matemáticas de la UPV-EHU: **Amaia, Andoni, Maider, Miren, Naiara, Víctor y Nerea.** Gracias por todas esas conversaciones y por compartir conmigo tantas vivencias y hazañas de fin de semana.

Gracias a los compañeros del departamento de Física Teórica por compartir las comidas y por darme sus consejos sinceros en todo momento: **Raül, Ruth, Jon, Senovilla, Irene y Uri.**

A **Panos Kevrekidis** por acogerme en el departamento de Matemáticas de la UMass y permitirme trabajar con él y con **Avinash Khare.**

Gracias a los fieles amigos en la distancia: **Alfonso, Patxeko, Pedro, Rosa y Alma.**

A **mis padres** por confiar en mí en todo momento. A **mis hermanos** por inspirarme con su música y por devolverme con frecuencia a la realidad.

Por último, a **Oihane** por su apoyo y confianza incondicional desde el inicio hasta el fin, en todo momento y lugar, por compartir conmigo su tiempo, mis dudas, conflictos y hallazgos.

Miguel Angel Alejo Plana

Leioa, 2010.

A mis padres, por su confianza.

A Oihane, por compartir su tiempo conmigo.

Índice general

Introducción.	III
0.0.1. Notación	XIX
1. Preliminares	25
1.1. Preliminares	25
1.2. Scattering inverso para potenciales constantes en la frontera.	27
1.2.1. Curvas cerradas diferencialmente.	33
1.3. Teoría de existencia local para KdV/mKdV: estimaciones preliminares.	34
1.3.1. El multiplicador $[k; Z]$ de T. Tao.	36
2. Métodos numéricos y convergencia de simulaciones a tiempos largos para la mKdV	41
2.1. Introducción	41
2.2. Condición inicial	44
2.3. Método pseudoespectral	46
2.4. Métodos de diferencias finitas y algunos invariantes discretos	50
2.4.1. Análisis de la convergencia	52
2.4.2. Invariantes discretos	54
2.4.3. Implementación del esquema numérico	55
3. Breathers geométricos de la mKdV y evolución de curvas planas	59
3.1. Introducción	59
3.2. Resultados teóricos	63
3.2.1. Obtención del solitón y breather de la mKdV atractiva con valor constante no trivial en infinito mediante el método de scattering inverso.	63

3.2.2.	Obtención del breather de la mKdV atractiva con valor constante no trivial en infinito mediante el método de Hirota.	75
3.2.3.	Teoría de existencia global del flujo geométrico de la mKdV para soluciones regulares	85
3.3.	Experimentos numéricos.	86
3.3.1.	Descripción del método numérico.	87
3.3.2.	Métodos para obtener una curva inicial cerrada y diferenciable. . . .	88
3.3.3.	Ejemplos de evolución de curvas cerradas por el flujo de mKdV. . . .	94
4.	Regularidad de la ecuación de Gardner para datos en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$	105
4.1.	Teoría local para la ecuación de Gardner con datos en $H^{1/4^+}(\mathbb{R})$	106
4.2.	Teoría global para la ecuación de Gardner con datos en $H^1(\mathbb{R})$	128
5.	Estabilidad de solitones de media no acotada de la mKdV	131
5.1.	Introducción	131
5.2.	Caso mKdV atractiva	132
5.3.	Caso mKdV repulsiva	150
A.	Apéndice A	155
A.1.	El método de Hirota	155
	Bibliografía	157

Introducción

Esta tesis doctoral se centra en el estudio de una ecuación dispersiva no lineal de tipo geométrico que conecta la dinámica de fluidos bidimensionales no viscosos e incompresibles con la geometría del movimiento de curvas en el plano y la teoría de solitones. Esta es la ecuación modificada de Korteweg de Vries (atractiva)

$$k_t + k_{sss} + 6k^2k_s = 0, \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

La noción de ecuación en derivadas parciales (EDP) dispersiva es la siguiente. Sea una EDP (en 1 dimensión espacial)

$$F(\partial_x, \partial_t)u(x, t) = 0, \quad (2)$$

donde F es un polinomio en derivadas parciales respecto a tiempo y espacio. Si buscamos soluciones en la forma de ondas planas, $u(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$, con $A, k, \omega \in \mathbb{R}$, representando respectivamente la amplitud, número de ondas y frecuencia, u será solución si y sólo si

$$F(ik, -i\omega) = 0. \quad (3)$$

Esta ecuación es llamada la relación de dispersión y caracteriza el movimiento de las ondas planas. Usualmente se reescribe esta ecuación como

$$\omega \equiv \omega(k).$$

De esta forma las ondas solución tienen carácter dispersivo (y por tanto la EDP subyacente) si $\frac{d^2}{dk^2}\omega(k) \neq 0$, lo que físicamente viene a decir que la joroba o el paquete de ondas inicial se rompe en varios trenes de onda, dispersándose por el medio a diferentes velocidades. Notar que la ecuación (1) se puede reescribir como una ecuación de evolución

$$k_t = G(k), \quad G(k) = -k_{sss} - 6k^2k_s. \quad (4)$$

En este contexto, algunas ecuaciones de evolución no lineales juegan un papel primordial, por disfrutar de simetrías, soluciones y métodos de análisis, que permiten abordar otro tipo de ecuaciones de evolución más complicadas. Entre estas ecuaciones modelo

destacan la ecuación de Korteweg-de Vries(KdV), la ecuación modificada de Korteweg-de Vries(mKdV), la ecuación general de Korteweg-de Vries(gKdV), la ecuación de Schrödinger no lineal(NLS) y la ecuación de Sine Gordon. Estas ecuaciones suministran ideas y métodos para abordar el análisis matemático de otras ecuaciones de evolución que las generalizan, tales como las ecuaciones de Ishimori, las ecuaciones de Kandom-Petviashvili, las ecuaciones de Benjamin-Ono y los sistemas de Davey-Stewartson y Zakharov-Shabat.

La ecuación pionera en este campo de las ecuaciones de evolución no lineales, es la ecuación de Korteweg-de Vries(KdV)

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0. \quad (5)$$

Dicha ecuación fue propuesta por Diederik Johannes Korteweg y Gustav de Vries en 1895 [KdV] para describir la propagación de ondas en aguas poco profundas y estuvo motivada por el descubrimiento previo de las ondas solitarias en un canal de riego en Hermiston, cerca de Edimburgo, realizado por John Scott Russell en el año 1834, mientras paseaba a caballo por la orilla de dicho canal (ver [JSR]), como se desprende de su propia descripción:

I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped—not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour (14 km/h), preserving its original figure some thirty feet (9 m) long and a foot to a foot and a half (30 – 45 cm) in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles (2 or 3 km) I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation.

La fecha de esta observación se recuerda como la fecha del descubrimiento de la onda solitaria o viajera, es decir una onda que está localizada espacialmente y que mantiene su forma durante largos periodos de tiempo. Las ecuaciones (1) y (5) poseen soluciones tipo solitón, que son ondas viajeras con la propiedad adicional de que otros solitones y radiación pueden atravesarla sin destruir su forma. El origen de este comportamiento está en la lucha que mantienen los términos no-lineales y los dispersivos dentro de la EDP dispersiva no lineal. Cuando ambos términos se compensan, emergen este tipo de soluciones que conservan su forma.

Nuestro interés se centra en las ecuaciones de evolución no lineales de tipo geométrico. Estas ecuaciones modelan el comportamiento de ciertas propiedades geométricas de los sistemas bajo estudio. Si en la ecuación modificada de Korteweg-de Vries(mKdV) (1) vemos

a la variable dependiente $k(s, t)$ como la curvatura de una curva, la EDP (1) la podemos considerar como la ecuación de evolución de la curvatura del flujo geométrico de curvas planas $z(s, t) = x(s, t) + iy(s, t) \in \mathbb{C}$ siguiente,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = (-i\frac{\partial k}{\partial s}(s, t) - \frac{1}{2}k(s, t)^2)\frac{\partial z}{\partial s}(s, t) \\ z(s, 0) = z_0, \\ |z_s|^2 = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Este flujo geométrico fue introducido por primera vez por R.Goldstein y D.Petrich en [GoP1] y estuvo motivado por un celebrado artículo de H.Hasimoto (ver [Ha]). En el trabajo de H.Hasimoto se prueba que la ecuación cúbica de Schrödinger no lineal y en una dimensión espacial describe la evolución de la curvatura y la torsión de un filamento de vorticidad (una región unidimensional en donde se concentra la vorticidad de un fluido) de acuerdo con la Localized Induction Approximation(LIA en adelante). Esta aproximación está basada en dos pasos.

El primero es un adecuado truncamiento de la integral de Biot-Savart y el segundo consiste en hacer un desarrollo de Taylor para concluir que el comportamiento local de la velocidad está en la dirección de su vector binormal, con módulo proporcional a la curvatura. Un procedimiento similar usan R.Goldstein y D.Petrich en [GoP1], esta vez para entender el comportamiento local de la evolución de la frontera de un parche de vorticidad en el plano (una distribución de la vorticidad, tipo función característica, con soporte en una región bidimensional acotada) que se mueve de acuerdo a las ecuaciones de Euler. En este caso la serie de Taylor pueden ser calculada explícitamente. Cada uno de los términos de la suma da su correspondiente flujo geométrico, que si es descrito usando la curvatura como incógnita, es equivalente a la jerarquía de la ecuación mKdV atractiva. Todos estos flujos geométricos tienen la propiedad de que preservan el área encerrada. Esta es una ley de conservación natural para el problema del parche de vorticidad. Sin embargo, también preservan la longitud total de la curva y esto entra en contradicción con el fenómeno observado de la filamentación de la frontera del parche de vorticidad (ver [But]), algo que sucede incluso para pequeñas perturbaciones de un círculo. No obstante (6) ha resultado ser una buena aproximación bajo algunas circunstancias. En particular R.Goldstein y D.Petrich en [GoP2] obtienen soluciones de (6) que son curvas cerradas simples y rotantes muy similares a los V-estados de H.Deem y N.Zabusky [DZ] (ver fig. 1). La similitud, no tanto desde un punto de vista cualitativo sino también desde un punto de vista cuantitativo, es en algunos casos muy notable. Podemos encontrar más detalles en el trabajo de A.Dorsey y C.Wexler [DoWe], donde también se hace una conexión entre (6) y el efecto Hall cuántico.

El procedimiento más simple para encontrar curvas cerradas simples de (6) es buscar ondas viajeras de (1) que sean periódicas con integral sobre el periodo igual a 2π , y tal que z sea periódica. Esto se expone en [DoWe, pág.10.976/7], donde las correspondientes soluciones son las análogas a los V-estados que mencionamos antes (ver también [NSW]).

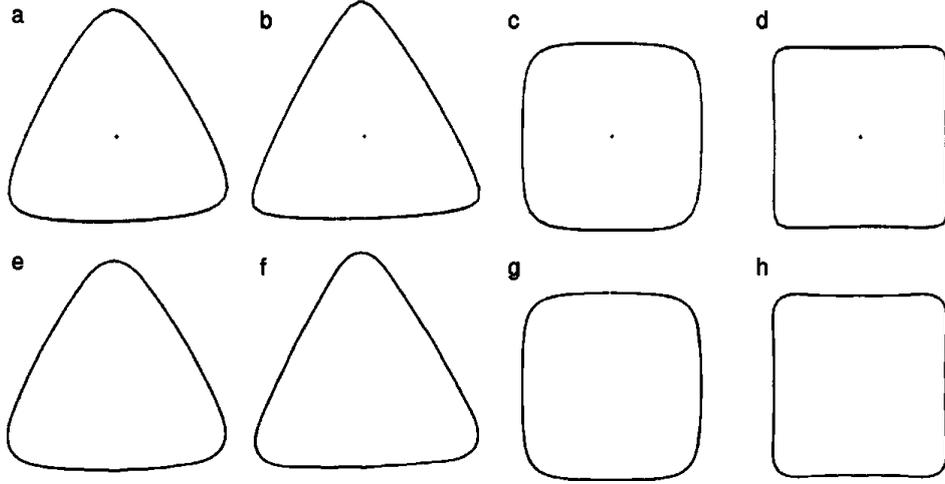


Figura 1. V-estados de Deem Zabusky(arriba) en comparación con los obtenidos por C.Wexler en [DoWe](abajo).

En este trabajo, los autores también hablan de las soluciones tipo breather obtenidas por M.Wadati en [W] (ver (7)) y reencontradas por C.Kenig, G.Ponce y L.Vega en [KePV1] en donde prueban la discontinuidad de la aplicación flujo asociada a la mKdV en espacios de Sobolev H^s . Nuestro principal interés se centra en esta clase de soluciones y motivados por los trabajos de R.Goldstein y D.Petrich [GoP1] y [GoP2], estudiar si existen breathers viajando sobre curvas cerradas simples.

Las soluciones de M.Wadati están definidas en toda la recta real y cualitativamente describen paquetes de onda determinados por la amplitud de la envolvente y la frecuencia de la onda portadora. Como consecuencia, y añadiendo los dos invariantes triviales de las traslaciones en tiempo y espacio, podemos describir la clase de las soluciones breather (7) por medio de cuatro parámetros reales, que reescribimos de una manera más adecuada para nuestros próximos cálculos, como sigue:

$$k(s, t) = -i \frac{\partial}{\partial s} \log \left(\frac{f(u) + ig(v)}{f(u) - ig(v)} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial s} \arctan \left(\frac{g(v)}{f(u)} \right), \quad (7)$$

con $u = \beta s + \gamma t$, $v = \alpha s + \delta t$, $\gamma = \beta(-\beta^2 + 3\alpha^2)$, $\delta = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)$, y f, g dado por

$$f(u) = \cosh(u), \quad (8)$$

$$g(v) = \frac{\beta}{\alpha} \sin \left(v - \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right). \quad (9)$$

En esta fórmula hemos eliminado los dos parámetros correspondientes a las traslaciones en espacio y tiempo, y hemos usado α para designar la frecuencia del breather y β para designar la amplitud del breather. Para β fijo hay dos límites distinguidos. Uno es tomar α tendiendo a ∞ . Entonces la solución se comporta como

$$k(x, t) \sim 2\beta \operatorname{sech} [\beta x + \gamma t] \cos \left(\alpha x + \delta t - \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right). \quad (10)$$

La segunda posibilidad corresponde a tomar la frecuencia α tendiendo a 0. Entonces la correspondiente solución se comporta a tiempos largos como la superposición de dos extremos diferenciados o jorobas, una apuntando hacia arriba y otra apuntando hacia abajo que, como veremos, se separan progresivamente con una velocidad logarítmica. Esta solución se corresponde con la solución polo doble obtenida por M.Wadati y K.Okhuma en [OW].

Como **primer objetivo** de esta tesis doctoral nos hemos propuesto realizar un estudio numérico de los métodos de diferencias finitas y pseudo-espectral, para comprobar el rango de validez de cada uno de ellos en la representación de la evolución en tiempo de las curvas asociadas a este tipo de soluciones breather y polo doble.

A partir de los resultados que logremos en este primer objetivo, nos planteamos el uso del método numérico que sea más óptimo para representar fielmente la evolución dada por el flujo geométrico (6) de curvas iniciales simples y cerradas, que posean perturbaciones localizadas.

Para construir estas curvas cerradas, observar a partir de la solución breather (7)-(9), que la solución tiende a cero en infinito y que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x, t) dx = 0. \quad (11)$$

Por tanto parece imposible emplear dicha familia de soluciones como punto de partida para construir curvas cerradas simples usando la solución breather (7)-(9), ya que una condición necesaria para obtener una curva cerrada a partir de su curvatura $k(x, t)$ es que

$$\int_{-L}^{+L} k(x, t) dx = 2\pi. \quad (12)$$

La situación cambia si somos capaces de modificar el comportamiento en infinito, en la variable espacial, de la familia de soluciones tipo breather, haciendo que se comporte como una constante diferente de cero. Observar que cualquier constante $b \in \mathbb{R}$ es una solución particular de (1). De hecho uno podría pensar ingenuamente que podría existir una solución construida como superposición de esta solución trivial junto con la solución breather. Esto nos lleva a la cuestión de cómo construir este tipo de soluciones, que uno intuitivamente puede esperar que existan.

Para encontrar soluciones de (1) podemos emplear varios métodos como las transformaciones Bäcklund, el método de scattering inverso, el método de Hirota (ver apéndice A en pág.155), el método de los potenciales Bargmann, el método de las transformadas de Darboux, etc. Cada método permite vislumbrar distintos aspectos y propiedades de la ecuación a resolver, que se complementan finalmente. Este tipo de soluciones breather, construidas como suma de una constante más una función tipo breather, puede ser obtenido explícitamente empleando directamente el método de Hirota (apéndice A), escogiendo adecuadamente los números de onda de las funciones exponenciales que aparecen en el método

[AS, pág.202]. También pueden ser obtenidas a partir del trabajo de K. Chow [CLai], pasando de cuatro a dos solitones y posteriormente con una adecuada y paciente manipulación algebraica.

Creemos que estas dos formas de obtener este tipo de soluciones breather son indirectas y oscurecen a la propia solución, pues no permiten contrastarla fácilmente con la solución breather que generalizan. Es por ello que como **segundo objetivo** de esta memoria de investigación nos proponemos obtener de manera directa y explícita las soluciones breather (7) que tienden a una constante no trivial en el infinito, empleando una generalización del método de scattering inverso (ver sección 3.2.1, pág.63) para potenciales que no se anulan en la frontera, tal y como fue desarrollado por T.Kawata y H.Inoue [IK]. Hasta donde sabemos, este tipo de breathers no han sido obtenidos empleando este método de scattering inverso. De forma complementaria vamos a obtener estas soluciones breather empleando una modificación del método de Hirota (ver sección 3.2.2, pág. 75).

Esta nueva familia de soluciones de la ecuación mKdV se caracteriza por contener un parámetro real extra b que da el valor asintótico de la solución en infinito. Si para un valor fijo del parámetro β consideramos como antes dos casos límites en la oscilación interna α , obtenemos una constante b más un breather tipo la función dada en (10) o más la solución polo doble. Como consecuencia, la integral (11) es infinita en estos ejemplos.

Una cuestión natural es si existen o no soluciones breather periódicas. La respuesta fue dada recientemente por P. Kevrekidis et al. en [KKS1] y [KKS2]. Desafortunadamente, las soluciones que obtienen son las análogas a las soluciones de M.Wadati y tienen media cero. Por tanto, como ya hemos visto en (12), no pueden ser la curvatura de una curva cerrada simple. Hasta donde sabemos, soluciones breather que sean periódicas y que tengan media no nula son desconocidas. De hecho, no hemos sido capaces de encontrar soluciones similares a las exhibidas en las secciones 3.2.1 y 3.2.2 pero que sean también periódicas. Pensamos que esta es una cuestión abierta interesante y esperamos que la respuesta sea cierta. La razón para esta sospecha la damos en el capítulo 3, donde desarrollamos experimentos numéricos que apuntan a una respuesta positiva a la cuestión anterior.

Motivados por el problema de valor inicial para la mKdV, con datos iniciales del tipo $u(x, t) = \sigma + v(x, t)$, como la suma de una constante σ más una función $v(x, t)$ que decaiga exponencialmente en infinito, nos encontramos de manera natural con la ecuación KdV extendida (denotada como eKdV) o ecuación de Gardner para la función auxiliar v :

$$\begin{cases} v_t + v_{xxx} + 6\sigma(v^2)_x + 2(v^3)_x = 0 & \sigma > 0, t, x \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = v_0(x) \in H^s(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (13)$$

Esta ecuación destaca por poseer términos no lineales de tipo bilineal $(v^2)_x$, característico de la ecuación KdV, y de tipo trilineal $(v^3)_x$, característico de la ecuación mKdV.

Hasta el momento la teoría de existencia local y global del PVI para KdV ha sido considerada en varios trabajos: usando estimaciones de energía se obtiene la teoría de existencia local (en tiempo) para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$ (ver [BonSc],[BonSm], [Kato1], [Sau], [SauT],[Sj]). Usando estos resultados y leyes de conservación, fue establecida una teoría de existencia global para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 2$ (ver [BonSm], [Kato1],[SauT]). T.Kato en [Kato2] y S.Kruzhkov y A.Faminskii en [KrF] descubrieron un efecto de "local smoothing" que fue empleado para construir soluciones débiles globales en tiempo con datos iniciales en $H^1(\mathbb{R})$ e incluso en $L^2(\mathbb{R})$. En [KePV0] C.Kenig, G.Ponce y L.Vega emplearon técnicas de integrales oscilatorias para establecer la teoría de existencia local del PVI para KdV con datos en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/4$, y de ahí la teoría global para datos en $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$. En [B] J. Bourgain introdujo nuevos espacios de funciones (denotados por $X^{s,b}$) adaptados al operador lineal $\partial_t + \partial_{xxx}$, en los cuales encontró buenas estimaciones para el término no lineal $(v^2)_x$. Usando estos espacios J.Bourgain fue capaz de obtener la teoría de existencia local y global (mediante una ley de conservación) para datos en $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$. En [KePV3] C.Kenig, G.Ponce y L.Vega prueban que el PVI para KdV está localmente bien propuesto en $H^s(\mathbb{R})$, $s > -5/8$, combinando las ideas introducidas por J.Bourgain en [B] con algunas estimaciones oscilatorias encontradas en [KePV0] y [KePV2]. Dado que las medidas finitas están en $H^s(\mathbb{R})$, $s < 1/2$, este resultado también establece la unicidad local (en tiempo) para medidas finitas. El resultado óptimo para la teoría de existencia local del PVI de KdV fue obtenido por C.Kenig, G.Ponce y L.Vega en [KePV4] para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s > -3/4$, en donde obtienen estimaciones del término bilineal de KdV $(v^2)_x$ en los espacios de funciones $X^{s,b}$ introducidos por J.Bourgain en [B] y prueban que las estimaciones para el operador bilineal son precisas, salvo para el índice $s = -3/4$. En [CtCoTa], M. Christ, J. Colliander y T. Tao probaron la teoría de existencia local del PVI de KdV, hasta el índice $s = -3/4$ (esto es para datos en $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq -3/4$), usando una transformada de Miura (ver pág.26) modificada y la teoría de existencia para el PVI de la ecuación mKdV. La teoría de existencia global para KdV la probaron para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s > -3/4$.

Para la ecuación mKdV, la teoría de existencia local, con datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$, fue desarrollada por C.Kenig, G.Ponce y L.Vega en [KePV2], a principios de los 90 usando estimaciones de la función maximal y el smoothing de T.Kato y S.Kruzhkov y A.Faminskii. En el mismo trabajo, por medio de leyes de conservación se obtiene el caso global para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$. El resultado global fue mejorado por J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka y T. Tao en [CoKeTakTa] para datos en $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$.

Con estos precedentes, como **tercer objetivo** de esta tesis doctoral queremos probar que la ecuación KdV extendida o ecuación de Gardner (13) está localmente bien propuesta para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$ y globalmente bien propuesta para datos iniciales en $H^1(\mathbb{R})$. Para ello vamos a recurrir a los multiplicadores $[k; Z]$ de T. Tao, que nos permitirán obtener las estimaciones bilineales y trilineales que necesitamos para probar que cierto operador integral es contractivo en un subespacio del espacio $X^{s,b}$ introducido por J.Bourgain (ver (38), pág.XXI).

Una vez determinada la existencia de solución, surge de manera natural la cuestión de la estabilidad de las ondas viajeras. Dicho esto, hasta la fecha, las ideas y las herramientas necesarias para abordar la estabilidad de este tipo de soluciones han sido expuestas en los trabajos previos sobre la estabilidad de solitones en la recta real \mathbb{R} para la KdV de T.Benjamin [Ben], J.Bona [Bon], J.Albert, J.Bona y D.Henry [AlBH], para gKdV de M.Weinstein [We2], la estabilidad orbital de los solitones periódicos de KdV, mKdV y NLS de J.Angulo [An1] y [An2] y el trabajo de P.Zhidkov [Z] sobre la estabilidad de soluciones tipo solitón para una ecuación del tipo gKdV con una no linealidad general, precisando tan sólo las propiedades necesarias sobre esta no linealidad para obtener la estabilidad de los solitones. El enunciado del teorema de estabilidad dado por P.Zhidkov es el siguiente [Z, p.83]

Sea $f(u)$ una función de $C^2(\mathbb{R})$ en el argumento real de la ecuación gKdV

$$u_t + u_{xxx} + f(u)u_x = 0. \quad (14)$$

Sea $F(y) = \int_0^y f(s)ds$ y sea $\omega_0 \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ tal que $f(0) - \omega_0 < 0$, $\int_0^b f(s)ds - \omega_0 b > 0$, $F(b) - \frac{\omega_0}{2}b^2 = 0$ y $F(\phi^2) - \frac{\omega_0}{2}\phi^2 < 0$ para $\phi \in (0, b)$. Bajo estas condiciones existe una solución tipo solitón $\bar{u}(x, t) = \phi_{\omega_0}(x - \omega_0 t)$ anulándose en $\pm\infty$, para la cual existe

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \phi_{\omega}(\cdot)|_{\omega=\omega_0} \in L^2 \quad y \quad \frac{d}{d\omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\omega}^2(x) dx \right) |_{\omega=\omega_0} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\omega_0}(x) \partial_{\omega} \phi_{\omega_0}(x) dx.$$

Si $\frac{d}{d\omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\omega}^2(x) dx \right) |_{\omega=\omega_0} > 0$, entonces la solución tipo solitón $\bar{u}(x, t)$ es orbitalmente estable, es decir, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ y

$$\inf_{r \in \mathbb{R}} \|u_0(\cdot) - \bar{u}(\cdot - r)\| < \delta,$$

entonces la solución \bar{u} verifica que

$$\inf_{r \in \mathbb{R}} \|u(\cdot, t) - \bar{u}(\cdot - r)\| < \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

En esta memoria nos planteamos como **cuarto objetivo** y **último** de esta tesis, la cuestión de la estabilidad orbital de las soluciones de mKdV (atractiva y repulsiva) de tipo solitón que tienden a un valor constante no trivial en infinito. Esta estabilidad está directamente relacionada con el estudio de la estabilidad de los solitones de la ecuación KdV extendida (eKdV), y es por ello que nos centraremos en esta ecuación.

Una vez que hemos expuesto el contexto en el cual queda enmarcada esta tesis doctoral y hemos detallado los objetivos de la misma, pasamos a describir la estructura de la tesis. Esta tesis consta de cinco capítulos. El **primer capítulo** (1) es un capítulo preliminar,

dedicado a la presentación de los métodos, conceptos y propiedades generales que necesitaremos a lo largo de este trabajo, y también los resultados previos a los que recurriremos en la tesis.

Comenzaremos el **primer capítulo** presentando los conceptos básicos acerca de la ecuación modificada de KdV (1). Aprovecharemos también este primer capítulo para recordar los resultados claves del método de scattering inverso para potenciales que no se anulan en la frontera tal y como fue desarrollado por T.Kawata y H.Inoue [IK]. Recordaremos también las condiciones necesarias y suficientes para construir una curva cerrada y diferenciable, y los resultados que necesitaremos de la teoría de existencia local para KdV/mKdV. Concluiremos este primer capítulo dando las definiciones básicas sobre los multiplicadores $[k; Z]$ de T.Tao.

A lo largo del **segundo capítulo** presentaremos los resultados que hemos obtenido en nuestro estudio comparativo de los métodos de diferencias finitas y pseudo-espectral. Para este estudio damos una relevancia especial a la solución tipo polo doble, que como ya hemos indicado se genera escogiendo el parámetro de frecuencia del breather $\alpha = 0$. En este caso, su forma está caracterizada por poseer dos extremos diferenciados o jorobas principales, una hacia arriba y otra hacia abajo, separándose una de la otra logarítmicamente en tiempo.

Esta solución puede considerarse como un caso límite de la solución breather cuando $\alpha \rightarrow 0$, pero también como un caso límite de la superposición de un solitón y un anti-solitón. Por tanto, desde el punto de vista del método de scattering inverso la solución polo doble ha de ser vista como un caso degenerado donde, hasta tres tipos de soluciones están muy cerca unas de otras. Esta circunstancia explica que cuando se consideran perturbaciones sobre esta solución degenerada, las correspondientes soluciones son capturadas por cualquiera de estas tres órbitas. Las primeras dos ramas son la de un breather con $\alpha > 0$ o la de una solución tipo solitón ($\alpha = 0$). En esta segunda posibilidad otras dos órbitas son posibles, tanto la rama equivocada donde las amplitudes de las dos jorobas se convierten en diferentes y se separan a velocidad lineal, o la rama correcta donde las amplitudes tienden al mismo valor y la separación es logarítmica.

Recordamos que la solución polo doble es analítica en la clase de Schwartz y por tanto cae dentro de la teoría de existencia global mencionada anteriormente, es decir existe una única solución con dicho dato inicial que proporcionamos, que ha de permanecer en la clase de Schwartz. Por otra parte, la inestabilidad numérica observada sobre la solución polo doble, no habría sido encontrada sin un conocimiento previo del carácter degenerado de esta solución de mKdV que nos proporciona el método de scattering inverso.

Este tipo de soluciones diferenciables de la ecuación mKdV consideradas en este capítulo, nos permitirán concluir que los métodos pseudo-espectrales son los más apropiados para describir sus dinámicas. De hecho, las funciones base del desarrollo discreto de Fou-

rier se adaptan muy fácilmente a las oscilaciones de la solución, y no es necesario una gran cantidad de armónicos para obtener un aproximación precisa. Sin embargo, estas oscilaciones intrínsecas de los breathers involucran una gran constante de Lipschitz incluso para $\alpha > 0$ no necesariamente grande, y hacen que los métodos de diferencias no sean factibles para obtener buenas aproximaciones en este caso. Por tanto sólo los hemos usado para las simulaciones que tienen al polo doble como condición inicial.

Es bien conocido que la ecuación mKdV (1) preserva un número infinito de leyes conservadas. Como consecuencia, es natural intentar usarlas en tanto sea posible para obtener buenos esquemas numéricos que aproximen las soluciones en largos intervalos de tiempo. Para incrementar las posibilidades de éxito, hemos combinado una discretización en tiempo que preserva algunas cantidades discretas junto con un método simpléctico como la regla del punto medio para un paso temporal hacia adelante. Este método implícito involucra un sistema de ecuaciones no lineales que, convenientemente manipulado, puede ser resuelto mediante un procedimiento de punto fijo.

Los resultados de las simulaciones por medio de métodos de diferencias finitas nos descubren la relación entre cada familia de soluciones y la preservación de algunas leyes de conservación. La discretización que mantiene constante el equivalente a la integral de la función (que denotamos como $\mathcal{L}_1(U)$), y especialmente la energía (que denotamos $\mathcal{L}_3(U)$), previene el salto de la condición inicial desde un polo doble a un breather. Desafortunadamente después de un corto intervalo de tiempo la solución cae en un solitón-antisolitón independientes. Sin embargo la discretización que mantiene constante el equivalente a la integral del cuadrado de la función (denotada como $\mathcal{L}_2(U)$), reproduce para tiempo algo mayores la solución polo doble con buena precisión. No obstante la aproximación se deteriora para tiempos posteriores y salta tanto a una solución tipo breather cuando el paso temporal es tosco $\Delta t > 2 \cdot 10^{-2}$ como a una solución tipo solitón-antisolitón cuando el paso es suficientemente pequeño.

El método pseudo-espectral ha sido desarrollado con éxito con ambos tipos de condiciones iniciales, polo doble y breather. Tomando un paso temporal $\Delta t = 10^{-4}$ y un número de puntos $N = 2^9$ para un polo doble, y un paso temporal $\Delta t = 10^{-5}$ y un número de puntos $N = 2^9$ para un breather, el método reproduce con una eficiencia extremadamente buena la solución exacta durante intervalos de tiempo largos, $t \in [0, 500]$. Una observación importante es que en estas condiciones, la discretización pseudo-espectral mantiene constantes las tres cantidades discretas investigadas, hasta donde el orden de precisión del método permite. Considerando implementaciones de tiempo computacional comparable para métodos pseudo-espectrales y de diferencias finitas, el primero da buenos resultados para intervalos de tiempo de un orden de magnitud mayor que los segundos.

En el **tercer capítulo** de esta tesis nos proponemos obtener soluciones tipo breather que tienden a una constante no trivial b en el infinito, empleando para ello dos procedimientos distintos. El primero es mediante el método de scattering inverso para potenciales

que no se anulan en la frontera, tal y como mostramos en la sección 3.2.1, pues hasta donde sabemos, estas soluciones no han sido generadas por este procedimiento. Como resultado más destacado en esta sección 3.2.1, señalamos la sencilla expresión matricial para estas soluciones breather

$$u(x, t) = b + 2 \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\Im \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}}{\Re \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}} \right],$$

con las matrices 2×2 , $\mathbb{1}$, $N(x, t)$ y $M(x, t)$ dadas en (3.52) (ver pág.73), que determinan esta familia de soluciones con 3 parámetros libres (α , β , b), o 5 si consideramos las traslaciones en espacio y tiempo. En (3.59), pág.75 daremos la expresión explícita de estas soluciones.

También generaremos este tipo de breathers mediante una modificación del método de Hirota, escogiendo funciones trigonométricas e hiperbólicas en vez de exponenciales, que creemos simplifica la forma de obtener este tipo de soluciones que tienden a una constante en el infinito. Este será el contenido de la proposición 3.2.1, pág.76 de la sección 3.2.2.

Esta nueva familia de soluciones de la ecuación mKdV se caracteriza por contener un parámetro real extra b que da el valor asintótico de la solución en el infinito. Si para un valor fijo del parámetro β consideramos como antes dos casos límites en la oscilación interna α , obtenemos una constante b más una función dada en (10) o más la solución polo doble, cuya expresión está dada explícitamente por (3.103), pág.84. Posteriormente, probaremos la estabilidad del flujo geométrico (6) para curvas inicialmente cerradas. Este teorema nos garantiza que si partimos de una curva cerrada diferencialmente, el flujo geométrico de la mKdV conservará el carácter cerrado de la curva en su evolución. Esto nos permitirá diseñar experimentos numéricos que mostrarán la evolución, bajo el flujo geométrico de la mKdV (6), de diferentes tipos de curvas cerradas, generadas a partir de las soluciones construidas en las secciones 3.2.1 y 3.2.2 y empleando distintos métodos para lograr cerrar la curva inicial de forma diferenciable, como exponemos en 3.3.2, pág.88. En concreto mostramos cuatro ejemplos, que clasificamos atendiendo a los diferentes valores de la oscilación interna α del breather que escogamos.

Si α es mayor que 1, obtenemos el primer ejemplo de curva cerrada que corresponde a un breather que viaja a lo largo del círculo. Si $0 < \alpha < 1$, obtenemos curvas con autointersecciones que se crean y destruyen en la evolución. Hasta donde sabemos este es el primer resultado conocido sobre la existencia de curvas que bajo el flujo de la mKdV (6) sean inicialmente simples y cerradas y desarrollen autointersecciones en tiempos posteriores. En el caso límite de $\alpha = 0$, que corresponde a la curva asociada a la curvatura polo doble (2.9), pág.45 y (3.103), pág.84, obtenemos una curva con forma de dos lazos consecutivos (o tipo 8) sobre un círculo, con autointersecciones que se mantienen en la evolución. Como último ejemplo, para comprobar la estabilidad de este tipo de soluciones, mostramos el caso de la colisión de breathers de diferentes frecuencias α (y por tanto diferentes velocidades de

grupo), que evolucionan a lo largo de círculo sin destruirse.

La conclusión después de estos cuatro ejemplos es que, a pesar de que la curva inicial para el flujo de la mKdV está construida de forma "artesanal", las perturbaciones localizadas tipo breather se propagan a lo largo del círculo y de hecho colisionan de forma elástica. Consideramos que estos resultados y propiedades nos sugieren fuertemente la existencia de soluciones de mKdV del tipo breather periódico de media no nula. Observamos por último que en todos estos ejemplos podemos comprobar cómo el número de vueltas o "enrollamientos" de las curvas

$$\frac{1}{2\pi} \oint ds k(s, t), \quad (15)$$

que es igual al número de rotaciones completas que realiza el vector tangente al recorrer la curva, permanece constante (hasta donde permite la tolerancia del método numérico). Esto se deduce de que la ecuación mKdV está ya escrita en forma conservativa, como podemos ver

$$k_t = -\partial_s \left(k_{ss} + \frac{1}{2} k^3 \right).$$

La conservación del número de vueltas (15) provoca que, en la evolución de la curva cerrada bajo el flujo geométrico de la mKdV (6), esté prohibida la creación de un único cruce, mientras las autointersecciones dobles no están excluidas (ver figura 2).

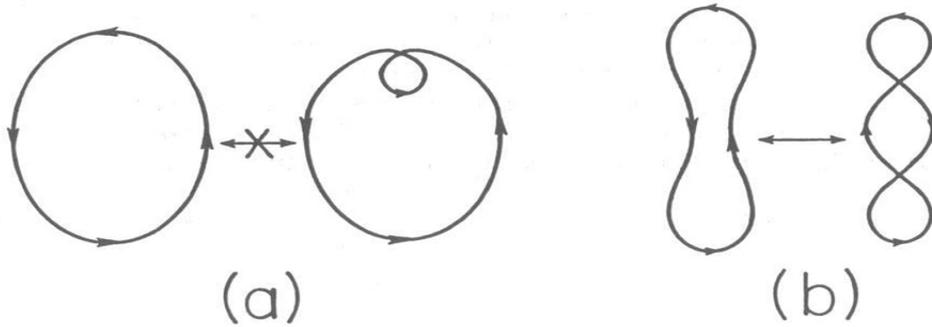


Figura 2. Conservación del número de vueltas (15), reflejada en la evolución de las curvas (a) y (b).

En el **cuarto capítulo** abordaremos la teoría de existencia local en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$ y global en $H^1(\mathbb{R})$ para la ecuación de Gardner o ecuación KdV extendida (eKdV en adelante), que surge de manera natural cuando uno busca soluciones de mKdV del tipo $u(x, t) = \sigma + v(x, t)$, como la suma de una constante σ más una función $v(x, t)$ que decaiga exponencialmente en infinito. En concreto probaremos la existencia, unicidad, persistencia y dependencia continua del dato inicial, primero en un intervalo de tiempo finito que depende de la norma $H^s(\mathbb{R})$ del dato inicial, y después para todo $t \in \mathbb{R}$, usando el resultado

local y leyes de conservación, empleando para ello la técnica del multiplicador norma $[k; \mathbb{R}]$ de T. Tao [T0] y en comprobar que, via la identidad de Duhamel, el operador integral local asociado a la ecuación (13) es contractivo en cierto subespacio del espacio $X^{s,b}$ (ver la definición en (38), pág. XXI), introducido por J. Bourgain en [B] y utilizados por M. Beals en [Bel], C. Kenig, G. Ponce y L. Vega en [KePV2] y [KePV4], S. Klainerman y M. Machedon en [KlaMa1] y [KlaMa2].

El resultado principal de este capítulo es (4.1.2), pág. 108:

Sea $s > 1/4$ y $\sigma > 0$. Entonces existe $b \in (1/2, 1)$, tal que para cualquier $v_0(x) \in H^s(\mathbb{R})$, existe $T = T(\|v_0\|_{H^s}) > 0$ (con $T(\rho) \rightarrow \infty$ cuando $\rho \rightarrow 0$) y una única solución $v(x, t) \equiv v(t)$ del PVI (4.2) tal que $\sigma + v(t)$ es la única solución de (4.1) en el intervalo de tiempo $[-T, T]$ satisfaciendo

$$v \in C([-T, T] : H^s(\mathbb{R})), \quad (16)$$

$$v \in X^{s,b} \subseteq L_{x, loc}^p(\mathbb{R} : L_t^2([-T, T])), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (17)$$

$$\partial_x(v^3) \in X^{s,b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \quad \wedge \quad \partial_x(v^2) \in X^{s,b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}). \quad (18)$$

En la prueba del teorema de existencia local y global que enunciamos en la sección 4.1, pág. 106, nos hemos encontrado con la dificultad añadida de que la ecuación de Gardner (13) no es invariante por escala, debido a que el parámetro asintótico $\sigma \neq 0$ (cuando $\sigma = 0$, recuperamos la mKdV).

Esto lo podemos ver si aplicamos la transformación de escala a la solución $v(x, t)$ de la ecuación de Gardner (13),

$$v(x, t) = \lambda^\alpha w(\lambda x, \lambda^3 t), \quad \lambda > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

entonces la función w satisface la siguiente ecuación de Gardner asociada,

$$\begin{cases} w_t + w_{xxx} + 6\sigma\lambda^{\alpha-2}(w^2)_x + 2\lambda^{2(\alpha-1)}(w^3)_x = 0, & \sigma, \lambda > 0, \alpha, t, x \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = w_0(x) \in H^s(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (20)$$

Nosotros hemos empleado esta transformación de escala sobre las variables dependientes v y w , para probar la teoría de existencia local de la ecuación de Gardner (13), dividiéndola en dos pasos. Primero probamos que el PVI (20) para w está localmente bien propuesto para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$, a tiempo $T = 1$ y cierto λ a determinar, como enunciamos a continuación

Sea $s > 1/4$ y $\sigma > 0$. Entonces existen constantes $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $\lambda > 0$ y $b \in (1/2, 1)$, tal que para todo $w_0 \in H^s(\mathbb{R})$, existe un único $w \in C([-1, 1] : H^s(\mathbb{R}))$, solución del PVI (4.5)

$$\begin{cases} w_t + w_{xxx} + 6\sigma\lambda^{\alpha-2}(w^2)_x + 2\lambda^{2(\alpha-1)}(w^3)_x = 0, & \sigma, \lambda > 0, \alpha > 2, t, x \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = w_0(x) \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases}$$

con $\lambda \leq \min(d_1 \|w_0\|_{H^s}^{-\frac{1}{\alpha-2}}, d_2 \|w_0\|_{H^s}^{-\frac{1}{(\alpha-1)}})$, y w satisfaciendo

$$w \in C([-1, 1] : H^s(\mathbb{R})), \quad (21)$$

$$w \in X^{s,b} \subseteq L_{x,loc}^p(\mathbb{R} : L_t^2([-1, 1])), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (22)$$

$$\partial_x(w^3) \in X^{s,b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \quad \wedge \quad \partial_x(w^2) \in X^{s,b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}). \quad (23)$$

Posteriormente nos apoyamos en este resultado y demostramos, vía la relación $\lambda^3 T = 1$, obtenida a partir de la transformación de escala (19), que el PVI (13) para v está localmente bien propuesto para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$, a tiempo $t = T = \lambda^{-3}$. Finalmente, en la sección 4.2, pág.128, empleando la conservación de la energía, probaremos que el PVI para la ecuación de Gardner (13) está globalmente bien propuesto para datos iniciales en $H^1(\mathbb{R})$, tal y como enunciamos en 4.2.1:

Sea $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ y sea u la correspondiente solución local del PVI (4.2) dada por el teorema 4.1.2. Entonces dicha solución se extiende a cualquier intervalo temporal, con

$$u \in C(\mathbb{R} : H^1(\mathbb{R})). \quad (24)$$

En el **quinto capítulo** probamos la estabilidad orbital de las soluciones de mKdV de tipo solitón que tienden a un valor constante no trivial en el infinito.

Tras hacer la observación de que si $u(x, t) = \sigma + v(x, t)$ es solución de la ecuación mKdV entonces $v(x, t)$ es solución de la ecuación KdV extendida y recíprocamente, en la primera parte de este capítulo abordamos la estabilidad de los solitones de la ecuación de Gardner atractiva (1), a la que le corresponde una no linealidad de tipo polinomial en la variable dependiente, siguiendo las ideas P.Zhidkov [Z, pág.83] y de J.Angulo [An1]. En concreto probaremos el teorema de estabilidad 5.2.1 en pág.137 (compárese con [Z, pág.83] enunciado en pág. x)

Sea $b \in \mathbb{R}$, $c_0 \in (0, \infty)$ y $u_{b,c_0}(x, t) = b + \phi_{b,c_0}(x - c_b(b, c_0)t) \in \dot{H}^1(\mathbb{R})$ una solución de la ecuación mKdV atractiva (5.2), donde $\phi_{b,c_0} \in H^1(\mathbb{R})$ satisface (5.6). Entonces

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta \equiv \delta(\epsilon, b, c_0) > 0$ y una función $C^2(\mathbb{R})$, $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

si $\|u_0 - (b + \phi_{b,c_0})\|_{H^1(\mathbb{R})} < \delta$, entonces

$$\sup_{t>0} \|u(\cdot, t) - u_{b,c_0}(\cdot + r(t))\|_{H^1(\mathbb{R})} < \epsilon,$$

donde $u(x, t)$ es la única solución de mKdV atractiva con dato inicial $u_0 = u(x, 0) \in \dot{H}^1(\mathbb{R})$ y donde $\sup_t |r'(t) + (c_0 + 6b^2)| \leq K\epsilon$, $K > 0$.

En la prueba del teorema de estabilidad de solitones de media no acotada, aportamos explícitamente la velocidad y la ecuación implícita que ha de satisfacer la fase $r(t)$ (ver (5.70)), que hay que añadir en el argumento del solitón para obtener estabilidad frente a pequeñas perturbaciones (con b fijo) de la joroba de estos solitones de media no acotada, en la norma $H^1(\mathbb{R})$. En la prueba nos encontramos con una dificultad añadida dado que como sabemos por el capítulo 4, la ecuación de Gardner o eKdV ya no es invariante por escala. Por tanto no podemos emplear dicha propiedad, a la que recurre P.Zhidkov [Z, pág.83] para demostrar la condición clave de convexidad. En cambio, dada la relativa sencillez funcional del perfil de este solitón de eKdV (ver (5.9), pág.133), sí hemos podido integrar directamente la condición de convexidad en la prueba y demostrar la positividad de la integral.

En la sección 5.3 de esta tesis abordamos la estabilidad de solitones para la ecuación de Gardner repulsiva, con las mismas herramientas que hemos empleando en la sección 5.2 anterior para el caso eKdV atractiva.

Observamos que los resultados de estabilidad para el caso repulsivo se siguen directamente a partir del caso atractivo, con la única e importante diferencia de que mientras los solitones en el caso atractivo están definidos mientras el parámetro velocidad $c_0 \in \mathbb{R}^+$, en el caso repulsivo la existencia sólo está determinada mientras el parámetro velocidad esté definido dentro de un intervalo que depende el parámetro asintótico b , en concreto cuando $c_0 \in (0, 4b^2)$.

Acabaremos la introducción añadiendo tres comentarios sobre el caso repulsivo, para relacionar sus soluciones con las del caso atractivo y para plantear posibles tareas en el futuro.

El primer comentario, a tener en cuenta en la sección sobre la estabilidad de solitones para la ecuación de Gardner repulsiva 5.3, es que se pueden transformar fácilmente las soluciones de la ecuación mKdV atractiva (ídem para la ecuación de Gardner atractiva/repulsiva) en las soluciones de la ecuación mKdV repulsiva, sin más que observar que si $u(x, t)$ es una solución real y regular de la mKdV atractiva, y tras transformaciones de parámetros (p.ej. α, β, b , etc) de esta solución, obtenemos una solución puramente compleja (regular o singular) $\tilde{u}(x, t) = iv(x, t)$ de la mKdV atractiva, entonces, sustituyendo esta

solución \tilde{u} en la mKdV atractiva, se concluye que $v(x, t)$ es una solución real (regular ó singular) de la mKdV repulsiva.

En concreto se puede transformar el b-soliton real regular de la mKdV atractiva en un b-soliton real regular de la mKdV repulsiva, y el b-breather real regular de la mKdV atractiva en un b-breather real singular de la mKdV repulsiva. También a partir de la solución b-breather con una transformación particular de parámetros podemos obtener el 2-soliton real y regular y de media no nula (denotado como 2b-soliton) de la mKdV repulsiva. Es también posible obtener soluciones de la mKdV repulsiva a partir de soluciones de KdV via la transformación de Miura, tal y como está expuesto en [Tha, pág.270-272].

El segundo comentario tiene que ver con la versión geométrica de la ecuación mKdV repulsiva. Al igual que podemos comprobar fácilmente que la ecuación mKdV atractiva modela la evolución de la curvatura de una curva en el espacio euclídeo, la ecuación mKdV repulsiva modela la evolución de la curvatura de una curva en el espacio hiperbólico.

Después de estudiar la versión geométrica de la mKdV atractiva, es natural plantearse el mismo problema para el caso de la ecuación mKdV repulsiva. La particularidad de este caso es que abundan las soluciones singulares (salvo hasta el momento el kink, el b-soliton y el 2b-soliton), que divergen en algún punto del dominio de definición. Por ejemplo, la solución breather del caso repulsivo

$$k(s, t) = 2 \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arctanh} \left[\frac{\beta \sin(\alpha(s - (3\beta^2 - \alpha^2)t))}{\alpha \sinh(\beta(s - (\beta^2 - 3\alpha^2)t))} \right], \quad (25)$$

tiene una singularidad del tipo $VP \frac{1}{x}$ en el origen, procedente de la función \sinh en el denominador. Esto hace que su traducción geométrica no sea tan atractiva como en el caso regular que representa la mKdV atractiva, siendo el espacio ambiente natural, tras esta traducción, el espacio hiperbólico. Recordamos cómo se formula este flujo geométrico (ver p.ej. [delahoz07]):

si $z(s, t) = x(s, t) + iy(s, t)$ denota un punto en el plano, $k(s, t) \equiv k$ es la curvatura de la curva y la matriz de Dirac $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tenemos que en el caso repulsivo el flujo de curvas es:

$$z_t = (-k_s \sigma_1 + \frac{1}{2} k^2 \mathbb{1}) z_s, \quad z_{ss} = k \sigma_1 z_s. \quad (26)$$

Nótese que (26) no tiene sentido si las curvas son demasiado singulares. Sin embargo el flujo de curvas dado por (26) se puede reescribir de la siguiente forma que evita dichas singularidades:

$$z_t = e^{\frac{3\sigma_1}{2} \int_0^s k(s') ds'} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ e^{\frac{\sigma_1}{2} \int_0^s k(s') ds'} \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-2\sigma_1 \int_0^s k(s') ds'} z_s \right) \right\}, \quad (27)$$

$$z_{ss} = k\sigma_1 z_s \rightarrow \frac{\partial}{\partial s} (e^{-\sigma_1 \int^s k(s') ds'} z_s) = 0.$$

La expresión explícita de la curva en el caso hiperbólico la recuperamos como sigue: a partir de $z_{ss} = k\sigma_1 z_s$ e integrando obtenemos

$$z(s, t) = z(0, 0) + \int_0^s ds' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\sigma_1 (\int_0^{s'} k(s'') ds'')}.$$

De esta forma, teniendo en cuenta que $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y escogiendo por ejemplo $z(0, 0) = (0, 0)$, $z_s(0, 0) = (0, 1)$, la expresión explícita es

$$z(s, t) = \left(\int_0^s \sinh \left[\int_0^{s'} k(s'') ds'' \right], \int_0^s \cosh \left[\int_0^{s'} k(s'') ds'' \right] \right). \quad (28)$$

Sería interesante explorar cuántos de los resultados en el plano del capítulo 3 son extendibles al caso tres dimensiones espaciales, por lo que el tercer y último comentario tiene que ver con la ecuación mKdV compleja

$$\psi_t + \psi_{sss} + 6|\psi|^2 \psi_s = 0, \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad \psi \in \mathbb{C}. \quad (29)$$

Dicha ecuación emerge de forma natural cuando nos planteamos la evolución de una curva en el espacio euclídeo tridimensional. En este caso, la evolución de la curva está descrita por una función compleja ψ , estando determinadas la curvatura y torsión de la curva por $k = |\psi|$ y $\tau = \Im(\psi_s \bar{\psi})$, respectivamente (ver p.ej. [La, pág.202] y [FuMiy]). Hasta donde sabemos, se han obtenido las soluciones b-soliton y 2b-soliton, mediante el método de las transformadas de Darboux [ZhLi]. Tiene interés ver cuál es la traducción a curvas en 3 dimensiones, de estas soluciones curvatura y torsión y compararlas con las encontradas por H.J.Shin [Shin].

Concluiremos esta tesis con el apéndice A, en donde exponemos el método de Hirota y obtenemos algunas soluciones clásicas (soliton, breather, etc) de la mKdV.

0.0.1. Notación

La notación empleada en esta memoria es la estándar. Aun así, para mayor claridad, pasamos a describirla en detalle.

Sea Ω un dominio. Por $L^p(\Omega)$ denotamos los espacios de Lebesgue usuales con norma $\|\cdot\|_{L^p}$. Por $C_0^\infty(\mathbb{R})$ denotamos el espacio de funciones infinitamente derivables de soporte compacto. Por $L_t^2([-T, T])$, denotamos el espacio de Lebesgue definido por

$$L_t^2([-T, T]) = \left\{ f : \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

El espacio $H^s(\mathbb{R})$ es el espacio de Sobolev de funciones que tienen s derivadas en $L^2(\mathbb{R})$, es decir

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f : \|f\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Asociado a éste, se encuentra el espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^s(\mathbb{R})$, constituido por las funciones con norma

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}) = \left\{ f : \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

La derivada homogénea de una función f , se define por

$$D_x^s f(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi|\xi|)^s e^{-2i\pi x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Denotaremos las derivadas parciales con respecto a x , por $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ o $(\)_x$.

Denotaremos por $\{W(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$ el grupo unitario de operadores que describen la solución del PVI lineal asociado a

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, & t, x \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad (30)$$

donde, si definimos por S_t la integral oscilatoria

$$S_t(x) = c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{it\xi^3} d\xi, \quad (31)$$

la solución de dicho problema se expresa por

$$v(x, t) = W(t)v_0(x) = S_t * v_0(x) = \int_{\mathbb{R}} S_t(y)v_0(x-y) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + it\xi^3} \hat{v}_0(\xi) d\xi. \quad (32)$$

Recurriremos al principio de Duhamel (método de variación de las constantes en ecuaciones ordinarias), que expresa la solución de una ecuación de evolución inhomogénea, como la superposición de soluciones libres del problema, que proceden del dato inicial y del término no lineal de la ecuación. En el caso de la ecuación mKdV, esto se traduce en que u es solución de mKdV (1) si y sólo si

$$u(x, t) = W(t)u_0(x) + \int_0^t W(t-t')(u^2 \partial_x u)(t') dt', \quad (33)$$

donde el operador solución W viene definido por

$$W(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{it\xi^3} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (34)$$

Definimos el operador H , dado a partir del multiplicador real de Fourier $h(\xi)$ como

$$\widehat{Hf}(\xi) := h(\xi) \hat{f}(\xi), \quad (35)$$

donde la transformada de Fourier \hat{f} está definida por

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \quad (36)$$

en donde ignoramos el factor 2π que viene de la transformada de Fourier. Igualmente definimos la transformada de Fourier en las variables espacio-tiempo por

$$\hat{u}(\xi, \tau) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x\xi + t\tau)} u(x, t) dx dt. \quad (37)$$

Si $s, b \in \mathbb{R}$, definimos los espacios de funciones $X_{\tau=h(\xi)}^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, introducidos por J. Bourgain en [B], como la completación del espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^2)$ con respecto a la norma

$$\|w\|_{X_{\tau=h(\xi)}^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} := \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau - h(\xi)|)^{2b} (1 + |\xi|)^{2s} |\hat{w}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2}. \quad (38)$$

Como podemos ver, esta norma está dada en términos del símbolo $(\tau - \xi^3, h(\xi) = \xi^3)$ asociado al operador lineal $\partial_t + \partial_x^3$. Hasta ahora dicha norma ha sido muy útil en el análisis de la interacción entre los efectos dispersivos y los no lineales en este tipo de ecuaciones de evolución, como por ejemplo KdV, mKdV, NLS en dimensiones $d \geq 2$ y ecuación de ondas en dimensiones $d \geq 2$ (se obtienen estimaciones que se aplican a las teorías gauge de Maxwell-Klein-Gordon y Yang-Mills). En adelante, para no sobrecargar la notación, si escribimos $X^{s,b}$ sobreentenderemos que corresponde al espacio $X_{\tau=h(\xi)}^{s,b}$ definido sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Recurriremos a la siguiente notación empleada en la obtención de las estimaciones bilineales y trilineales necesarias para obtener la teoría de existencia local de la ecuación de Gardner:

siguiendo a T. Tao [T0], sea $Z = \mathbb{R}$. Entonces para cualquier entero $k \geq 2$, denotamos por $\Gamma_k(Z)$ el hiperplano

$$\Gamma_k(Z) := \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in Z^k : \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k = 0\}, \quad (39)$$

que está dotado con la medida

$$\int_{\Gamma_k(Z)} f := \int_{Z^{k-1}} f(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, -\xi_1 - \dots - \xi_{k-1}) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{k-1}.$$

Usaremos $A \lesssim B$ para denotar la afirmación $A \leq CB$ para alguna constante $C > 0$ suficientemente grande, que puede variar de línea a línea y depender de varios parámetros. Usamos $A \ll B$ para denotar que $A \leq C^{-1}B$. Finalmente con $A \sim B$, denotamos $A \lesssim B \lesssim A$.

Asumimos que cualquier suma con índices de sumación en letras mayúsculas, tales como N_j , L_j , H es una suma diádica, i.e. estos índices de sumación en letras mayúsculas recorren los números de la forma 2^j para $j \in \mathbb{Z}$. En esta sección sólo consideraremos los multiplicadores $[3; \mathbb{R}]$ y $[4; \mathbb{R}]$.

Sean $N_1, N_2, N_3 > 0$. Definimos las cantidades $N_{max} \geq N_{med} \geq N_{min}$, como el máximo, medio y mínimo valor de N_1, N_2, N_3 respectivamente. De igual forma definimos $L_{max} \geq L_{med} \geq L_{min}$, como el máximo, medio y mínimo valor de cualesquiera $L_1, L_2, L_3 > 0$. Las cantidades N_j , $j = 1, 2, 3$, miden la amplitud de las frecuencias ξ_j , $j = 1, 2, 3$. Asimismo, las cantidades L_j , $j = 1, 2, 3$ miden cómo de cerca están nuestras ondas de la solución libre del PVI (30). Consideramos también los siguientes convenios de sumación. Cualquier suma con índices de la forma $L_{max} \sim \dots$ es una suma sobre las tres variables diádicas $L_1, L_2, L_3 \gtrsim 1$. Por ejemplo

$$\sum_{L_{max} \sim H} := \sum_{L_1, L_2, L_3 \gtrsim 1: L_{max} \sim H} .$$

Análogamente, cualquier suma con índices de la forma $N_{max} \sim \dots$ es una suma sobre las tres variables diádicas $N_1, N_2, N_3 > 0$. Por ejemplo

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} := \sum_{N_1, N_2, N_3 > 0: N_{max} \sim N_{med} \sim N} .$$

Por otra parte, si τ_j, ξ_j , $j = 1, 2, 3$ denotan las variables duales de Fourier de tiempo y espacio y cada $h_j(\xi_j)$ representa al multiplicador real de Fourier (35), la función $h : \Gamma_3(Z) \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$h(\xi) \equiv h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) := h_1(\xi_1) + h_2(\xi_2) + h_3(\xi_3). \quad (40)$$

Diremos que se produce resonancia o que estamos cerca de un estado resonante siempre que la función h definida en (40) sea cero o esté cerca de cero. Esta función juega un papel relevante, ya que mide cuánta resonancia se produce entre las frecuencias ξ_j , $j = 1, 2, 3$. Debido a esto, la llamaremos la función de resonancia o función resonante. Para $\tau_j, \xi_j, \tau, h(\cdot)$ dados, si denotamos por

$$\lambda_j := \tau_j - h_j(\xi_j), \quad (41)$$

y en general

$$\lambda := \tau - h(\xi),$$

la función de resonancia se reescribe cómo

$$\begin{aligned}
h(\xi) &\equiv h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) := h_1(\xi_1) + h_2(\xi_2) + h_3(\xi_3) \\
&= (h_1(\xi_1) - \tau_1) + (h_2(\xi_2) - \tau_2) + (h_3(\xi_3) - \tau_3) + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3,
\end{aligned} \tag{42}$$

en donde hemos supuesto que (ξ_i, τ_i) , $i = 1, 2, 3$ están en el hiperplano (39). En general utilizaremos la variable N_j para denotar la magnitud de la frecuencia ξ_j , L_j para denotar la magnitud de λ_j y H para denotar la magnitud de la función resonante $h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = h_1(\xi_1) + h_2(\xi_2) + h_3(\xi_3)$.

Si recurrimos a la notación usual χ_E para definir la función característica sobre un conjunto dado E , emplearemos la notación χ_Q para denotar la función que vale 1 siempre que la afirmación Q sea cierta y 0 siempre que sea falsa, como por ejemplo $\chi_{1 \leq |\xi| \leq 2}$.

Capítulo 1

Preliminares

Sumario. En este capítulo, presentamos los conceptos básicos que utilizaremos de modo significativo a lo largo de esta memoria de investigación. Entre otros recordaremos la reformulación aportada por T.Kawata y H.Inoue [IK] del método de scattering inverso para potenciales que no se anulan en la frontera, y recogemos aquí también las condiciones necesarias para obtener una curva cerrada diferencialmente a partir de su curvatura. Para terminar este capítulo presentaremos los lemas previos que necesitaremos sobre el problema de la teoría de existencia local y global para KdV y mKdV aportados por C.Kenig, G.Ponce y L.Vega [KePV3]-[KePV4], así como los resultados de T.Tao sobre el multiplicador $[k; Z]$ y recordaremos algunos conceptos sobre estabilidad de soluciones de ecuaciones de evolución.

1.1. Preliminares

El objetivo de este capítulo es el de introducir todos aquellos conceptos y objetos que serán clave para nuestro trabajo, reflejando también algunas de sus propiedades y características principales. Entre todos estos objetos, el primero a considerar es sin duda el más obvio, pero no por ello menos importante que es la propia ecuación modificada de Korteweg de Vries (mKdV),

$$\textit{atractiva} : \quad u_t + u_{xxx} + 6u^2u_x = 0, \quad (1.1)$$

$$\textit{repulsiva} : \quad u_t + u_{xxx} - 6u^2u_x = 0, \quad (1.2)$$

en donde distinguimos los casos con una no linealidad atractiva(focusing) (1.1) y con una no linealidad repulsiva(defocusing) (1.2). Esta ecuación modificada de KdV pertenece a la familia de las ecuaciones de tipo KdV. Esta familia está caracterizada por ser ecuaciones del tipo

$$u_t + u_{xxx} + f(u)u_x = 0, \quad (1.3)$$

en donde $f(u)$ representa una función por determinar en la variable dependiente u . En el caso $f(u) = u$ recuperamos KdV, si $f(u) = \pm u^2$ recuperamos mKdV atractiva y repulsiva respectivamente, y en general para el caso de funciones de tipo polinómico $f(u) = u^p$, $p \in \mathbb{N}$

recuperamos la ecuación KdV generalizada.

La ecuación mKdV es una EDP no lineal que posee infinitas cantidades conservadas. Algunas de éstas son la integral $\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$, la norma L^2 al cuadrado $\|u\|_{L^2}^2 := \int_{\mathbb{R}} u(x, t)^2 dx$ y la energía $H(u) := \int_{\mathbb{R}} dx u_x(x, t)^2 - \frac{2}{3} u(x, t)^4$. La conservación de todas estas cantidades puede ser verificada formalmente calculando la derivada temporal ∂_t bajo el signo integral de las mismas, sustituyendo la ecuación de evolución mKdV e integrando por partes. Las soluciones tipo onda viajera de mKdV se pueden encontrar de manera directa sin más que considerar un ansatz de la forma

$$u(x, t) = f(x - ct), \quad c \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

y sustituyéndolo en la ecuación mKdV y considerando de manera general que $f(\pm\infty) = A \in \mathbb{R}$, e integrando una vez, obtenemos la siguiente EDO no lineal que puede ser integrada directamente con ayuda de un libro de tablas integrales (ver [GrR]),

$$f'' = (cA - 2A^3) + cf - 2f^3, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Por otra parte, si buscamos soluciones de (1.1) y (1.2) de la forma siguiente

$$k(s, t) = b + f(s, t), \quad f(\pm\infty, t) = 0, \quad (1.6)$$

introduciendo este ansatz en (1.1) y (1.2), obtenemos la siguiente ecuación de Gardner o ecuación KdV extendida, para la función f (después de realizar una traslación espacial para eliminar el sumando proporcional a f_x),

$$\frac{\partial}{\partial t} f(s, t) + \frac{\partial}{\partial s^3} f(s, t) \pm 6b \frac{\partial}{\partial s} (f^2(s, t)) \pm 2 \frac{\partial}{\partial s} (f^3(s, t)) = 0, \quad (1.7)$$

donde con el signo + tenemos la ecuación de Gardner atractiva y con el signo - la ecuación de Gardner repulsiva. Como ya podemos ver, esta ecuación incorpora los términos no lineales de las ecuaciones KdV y mKdV.

Mencionamos aquí también una notable transformación entre soluciones de KdV y mKdV: la transformación de Miura. Si u es solución de mKdV atractiva (1.1), entonces

$$v = -(u^2 \pm iu_x), \quad (1.8)$$

es solución de KdV con valores complejos. Esta es una sencilla forma de transformar soluciones de mKdV (1.1) en soluciones complejas de KdV. En el caso de la mKdV repulsiva (1.2), la transformación de Miura es

$$v = -(u^2 \pm u_x), \quad (1.9)$$

que transforma soluciones de mKdV (1.2) en soluciones reales de KdV.

Podemos generalizar esta transformación de Miura para transformar soluciones de la ecuación de Gardner repulsiva

$$u_t + u_{xxx} - 6buu_x - 6u^2u_x = 0, \quad (1.10)$$

en soluciones v de KdV, mediante la transformación

$$v = u^2 + u_x + bu. \quad (1.11)$$

Ésta es la llamada transformación de Gardner.

1.2. Scattering inverso para potenciales constantes en la frontera.

Exponemos aquí los resultados de T.Kawata y H.Inoue [IK] relativos al método de scattering inverso para potenciales que tienden a una constante no trivial en la frontera, necesarios para el desarrollo de esta memoria. El método de scattering inverso es un método para resolver algunas ecuaciones de evolución no lineales. El objetivo del método es recuperar la solución de la ecuación en derivadas parciales, viendo a dicha solución como un potencial a determinar para el problema asociado de scattering de una ecuación de Sturm-Liouville, es decir, a través de las propiedades de dispersión en el infinito de las ondas planas cuando interaccionan con el potencial por determinar.

En el caso de la solución de la ecuación mKdV, relacionamos dicha solución u con el siguiente problema de Sturm-Liouville con potencial complejo:

$$y_{xx}(x, t) + [\lambda^2 + u^2(x, t) + iu_x(x, t)] y(x, t) = 0, \quad (1.12)$$

que resulta fácilmente de la eliminación de la variable z en el sistema

$$\begin{cases} y_x + iuy = \lambda z, \\ z_x - iuz = -\lambda y. \end{cases} \quad (1.13)$$

Este sistema es equivalente, con los siguientes cambios, a un sistema 2×2 en las variables v^1 y v^2 .

$$\begin{cases} y_x + iuy = \lambda z, \\ z_x - iuz = -\lambda y, \end{cases} \xrightarrow{v^1 = \frac{1}{2}(y+iz), v^2 = \frac{-i}{2}(y-iz)} \begin{cases} v_x^1 + i\lambda v^1 = uv^2, \\ v_x^2 - i\lambda v^2 = -uv^1, \end{cases} \quad \text{o en expresión matricial,}$$

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}_x = G(\lambda) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad G(\lambda) = \begin{pmatrix} -i\lambda & q(x, t) \\ r(x, t) & i\lambda \end{pmatrix} = -i\lambda\sigma_3 + Q(x, t), \quad (1.14)$$

donde la matriz de Pauli $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ r(x, t) & 0 \end{pmatrix}$, $q(x, t) = u(x, t)$, $q(x, t) = -r(x, t)$,

satisfaciendo las siguientes condiciones no nulas:

$$q(x, t)r(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} q^\pm(r^\pm) \quad \forall t, \quad (1.15)$$

$$q^-r^- = q^+r^+ = -b^2, \quad b > 0. \quad (1.16)$$

La evolución temporal está descrita por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}_t = F(\lambda) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad F(\lambda) = \begin{pmatrix} E(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & -E(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

donde:

$$E(\lambda) = -4i\lambda^3 - 2i\lambda qr + rq_x - qr_x,$$

$$B(\lambda) = 4\lambda^2 q + 2i\lambda q_x + 2q^2 r - q_{xx},$$

$$C(\lambda) = 4\lambda^2 r - 2i\lambda r_x + 2qr^2 - r_{xx}.$$

Ahora, derivando (1.12) con respecto a t y exigiendo que λ sea independiente respecto a t , encontramos una sucesión de EDPs en la variable u , el potencial incógnita. La primera de estas EDPs es la ecuación lineal $u_t + cu_x = 0$, que tiene una solución trivial $u(x, t) = u(x - ct)$ y la segunda EDP es la ecuación mKdV atractiva: $u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$. T.Kawata y H.Inoue clarificaron las propiedades analíticas del problema de autovalores generalizado en el que estamos interesados. Para ello, primeramente T.Kawata y H.Inoue estudiaron la condición de integrabilidad de las ecuaciones (1.14) y (1.17), dada por:

$$G_t - F_x + GF - FG = 0, \quad (1.18)$$

en términos de nuevas variables. Definieron para ello el operador integro-diferencial

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2i} \left\{ \sigma_3 \frac{\partial}{\partial x} + 2 \begin{pmatrix} -rIq\lambda & rIr \\ -qIq & qIr\lambda \end{pmatrix} \right\}, \quad (1.19)$$

donde, $rIqf = r(x, t) \int_{-\infty}^x q(y, t)f(y, t)dy$, y equivalentemente para el resto de componentes.

Entonces, la condición de integrabilidad (1.18) puede ser reescrita como:

$$\sigma_3 \begin{pmatrix} r_t \\ q_t \end{pmatrix} + 2\Omega(\mathbb{L}) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = 0, \quad (1.20)$$

donde $\Omega(\lambda) = a_N \lambda^N + a_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + a_0$, donde a_k son constantes y los elementos de $F(\lambda)$ están definidos por:

$$A(\lambda) = \Omega(\lambda) + \int_{-\infty}^x (qC - rB)dy, \quad (1.21)$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = i \sum_{k=1}^N \lambda^{k-1} \sum_{j=0}^{N-k} a_{N-j} \mathbb{L}^{N-k-j} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}.$$

De esta forma, T.Kawata y H.Inoue dieron la forma generalizada de las ecuaciones de evolución no lineales que pueden ser resueltas por el método de scattering inverso con ecuaciones (1.12) y (1.14). Para $N = 3$, la ecuación (1.20) se reduce a:

$$q_t + \frac{i}{4}a_3(q_{xxx} - 6qrq_x - 2b^2q_x) + \frac{1}{2}a_2(q_{xx} - 2(qr + b^2)q) - ia_1q_x - 2a_0q = 0. \quad (1.22)$$

Algunas de las ecuaciones contenidas en la expresión general (1.22) son:

- (i) escogiendo $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 = 2ib^2$, $a_3 = -4i$, $r = \mp q$, (1.22) se reduce a la ecuación mKdV real,

$$q_t \pm 6q^2q_x + q_{xxx} = 0.$$

- (ii) escogiendo $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 = 2ib^2$, $a_3 = -4i$, $r = \mp q^*$, (1.22) se reduce a la ecuación mKdV compleja,

$$q_t \pm 6|q|^2q_x + q_{xxx} = 0.$$

- (iii) escogiendo $a_0 = a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = -2i$, $r = \mp q^*$, (1.22) se reduce a la ecuación Schrödinger No lineal(NLS),

$$iq_t + q_{xx} - 2(\mp|q|^2 + b^2)q = 0.$$

El siguiente paso en su trabajo es construir las funciones de Jost y los datos de scattering para el problema de autovalores (1.14) con condición de frontera no nula (1.15), obteniendo la evolución temporal de los datos de scattering a partir de (1.17).

La matriz $G(x, t; \lambda)$ se define como

$$G(x, t; \lambda) = G(\lambda)^\pm + \Delta G^\pm(x, t; \lambda),$$

$$G(\lambda)^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} G(x, t; \lambda) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\Delta G^\pm(x, t; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) - q^\pm \\ r(x, t) - r^\pm & 0 \end{pmatrix}.$$

Las raíces características de $G(\lambda)^\pm$ son $\pm i\zeta$, donde $\zeta = \sqrt{\lambda^2 + b^2}$. Ahora, se diagonaliza la matriz $G(\lambda)^\pm$ empleando para ello la matriz

$$T(\lambda, \zeta)^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} T(\lambda, \zeta; x) = \begin{pmatrix} -iq^\pm & \lambda - \zeta \\ \lambda - \zeta & ir^\pm \end{pmatrix},$$

$$T(\lambda, \zeta; x) = \begin{pmatrix} -iq_1(x) & \lambda - \zeta \\ \lambda - \zeta & ir_1(x) \end{pmatrix},$$

donde q_1 y r_1 son funciones suficientemente diferenciables satisfaciendo (1.15) y (1.16) y también $r_1(x)q_1(x) = -b^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De esta forma $G(\lambda)^\pm$ se reescribe como:

$$G(\lambda)^\pm = -i\zeta T(\lambda, \zeta)^\pm \sigma_3 [T(\lambda, \zeta)^\pm]^{-1}. \quad (1.23)$$

A partir de (1.23), T.Kawata y H.Inoue definen las matrices de Jost Φ^\pm como las soluciones de la ecuación (1.14) bajo las condiciones,

$$\Phi^\pm(\lambda, \zeta; x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} T^\pm(\lambda, \zeta) J(\zeta x),$$

donde $J(\zeta x) = \begin{pmatrix} e^{-i\zeta x} & 0 \\ 0 & e^{i\zeta x} \end{pmatrix}$.

A partir de esto, la matriz de scattering S se define por

$$\Phi^-(\lambda, \zeta; x, t) = \Phi^+(\lambda, \zeta; x, t) S(\lambda, \zeta; t), \quad (1.24)$$

y ahora usando (1.17), (1.21), (1.23) y (1.24), se obtiene la ecuación de evolución de los elementos de la matriz de scattering

$$S_t + SW^- - W^+S = 0, \quad S|_{t=0} = S_0, \quad (1.25)$$

donde S_0 está dado por el scattering directo y

$$W^\pm = \zeta \sigma_3 \sum_{k=1}^N a_k \lambda^{k-1} + i \left(\frac{a_0}{\zeta} \right) \begin{pmatrix} -i\lambda & r^\pm e^{2i\zeta x} \\ q^\pm e^{-2i\zeta x} & i\lambda \end{pmatrix}.$$

Si $a_0 = 0$ (como corresponde a la situación para mKdV dada en (i)) la solución de la ecuación (1.24) es

$$S(\lambda, \zeta; t) = e^{W^+t} S_0(\lambda, \zeta) e^{-W^-t}. \quad (1.26)$$

En el siguiente paso, T.Kawata y H.Inoue asumen una representación concreta de las matrices de Jost Φ^\pm ,

$$\Phi^\pm(\lambda, x) = T^\pm(\lambda) \begin{pmatrix} e^{-i\zeta x} & 0 \\ 0 & e^{i\zeta x} \end{pmatrix} + \int_{\pm\infty}^x K^\pm(x, s) T^\pm(\lambda) \begin{pmatrix} e^{-i\zeta s} & 0 \\ 0 & e^{i\zeta s} \end{pmatrix} ds, \quad (1.27)$$

donde, recordamos que $T^\pm(\lambda) = \begin{pmatrix} -iq^\pm & \lambda - \zeta \\ \lambda - \zeta & ir^\pm \end{pmatrix}$ o en términos de sus componentes para el caso $+$

$$\phi_1^+(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -iq^+ & \lambda - \zeta \\ \lambda - \zeta & ir^+ \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_\infty^x K^\pm(x, s) \begin{pmatrix} -iq^+ & \lambda - \zeta \\ \lambda - \zeta & ir^+ \end{pmatrix} e^{-i\zeta s} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds, \quad (1.28)$$

$$\phi_2^+(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -iq^+ & \lambda - \zeta \\ \lambda - \zeta & ir^+ \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_\infty^x K^\pm(x, s) \begin{pmatrix} -iq^+ & \lambda - \zeta \\ \lambda - \zeta & ir^+ \end{pmatrix} e^{-i\zeta s} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds. \quad (1.29)$$

Sustituyendo (1.27) en (1.14), se obtienen las siguientes tres ecuaciones para $K^\pm(x, y)$, que nos permiten obtener la expresión explícita del potencial incógnita q en términos de los elementos de K^\pm :

- i) $\frac{\partial}{\partial x} K^\pm(x, y) + \sigma_3 \cdot \frac{\partial}{\partial y} K^\pm(x, y) \cdot \sigma_3 [D^\pm(\lambda) + i\lambda\sigma_3] - Q(x)K^\pm(x, y) = 0,$
- ii) $\sigma_3 \cdot \frac{\partial}{\partial y} K^\pm(x, x) \cdot \sigma_3 - K^\pm(x, x) + \Delta D^\pm(x) = 0,$
- iii) $K^\pm(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0.$

Por el método de las características para la ecuación i), dados los potenciales q y r , existe una solución de la ecuación i) que satisface las condiciones dadas por las ecuaciones ii) y iii). A partir de esto, la representación escogida para Φ^\pm y dada en (1.27) es la adecuada. Ahora, a partir de i), ii) y iii), el potencial puede ser obtenido de dos formas. Escogiendo, por ejemplo, el exponente $+$, una de estas formas es

$$q^2(x, t) = b^2 - 2\frac{d}{dx} K_{22}^+(x, x), \quad r^2(x, t) = b^2 - 2\frac{d}{dx} K_{11}^+(x, x), \quad (1.30)$$

y la otra es

$$q(x, t) = b + 2K_{12}^+(x, x), \quad r(x, t) = b + 2K_{21}^+(x, x), \quad (1.31)$$

donde K_{ij}^+ son los elementos de $K^+ = (K_1^+, K_2^+) = \begin{pmatrix} K_{11}^+ & K_{12}^+ \\ K_{21}^+ & K_{22}^+ \end{pmatrix}$

En el siguiente paso, T.Kawata y H.Inoue obtienen las ecuaciones integrales para las matrices de Jost en el plano complejo,

$$\begin{aligned} & \phi_1^+(x, t)e^{i\zeta x} \\ &= T(\lambda, x) \left\{ 1 + e^{\theta(\infty) - \theta(x)} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{d\lambda'}{\lambda' - \lambda} \frac{s_{21}(\lambda', \zeta)}{s_{11}(\lambda', \zeta)} T(\lambda, x) T^{-1}(\lambda', x) \phi_2^+(\lambda', x) e^{i\zeta' x}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} & \phi_2^+(x, t)e^{-i\zeta x} \\ &= T(\lambda, x) \left\{ 1 + e^{\theta(x) - \theta(\infty)} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} \frac{d\lambda'}{\lambda' - \lambda} \frac{s_{12}(\lambda', \zeta)}{s_{22}(\lambda', \zeta)} T(\lambda, x) T^{-1}(\lambda', x) \phi_1^+(\lambda', x) e^{-i\zeta' x}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

donde Γ^\pm son caminos suficientemente alejados del origen. Entonces, sustituyendo (1.28) y (1.29) en (1.33) y aplicando el operador $\frac{1}{4\pi} \int_{B^+} \frac{e^{i(y-x)\zeta}}{\zeta} d\lambda$, $y > x$, (B^+ está suficientemente cerca de los cortes escogidos), sobre las ecuaciones resultantes, se obtiene la ecuación integral de Gelfand-Levitan, que da la solución de problema de scattering inverso

$$\begin{aligned} & K^+(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + H_d(x+y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - H_c(x+y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_x^{+\infty} K^+(x, y') H_d(x+y') \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dy' \\ & + \int_x^{+\infty} K^+(x, y') H_c(x+y') \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dy' = 0, \quad y > x, \end{aligned} \quad (1.34)$$

donde $H_{d,c}$ denota la parte discreta (d) o continua (c) de H , y están dadas en [IK, p.1728].

Las simetrías que aparecen en la ecuación (1.14) son:

(s1) Las matrices $\Phi^\pm(\lambda, -\zeta; x)$ también satisfacen (1.14) y entonces

$$\Phi^\pm(\lambda, \zeta; x) = \Phi^\pm(\lambda, -\zeta; x) P^\pm(\lambda, \zeta),$$

donde P^\pm son matrices constantes dadas por

$$P^\pm(\lambda, \zeta) = J(\zeta x) [T^\pm(\lambda, -\zeta)]^{-1} T^\pm(\lambda, \zeta) J(\zeta x) = \frac{i}{\lambda + \zeta} \begin{pmatrix} 0 & r^\pm \\ -q^\pm & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces a partir de la ecuación (1.24), se obtiene

$$S(\lambda, \zeta) = [P^+(\lambda, \zeta)]^{-1} S(\lambda, -\zeta) P^-(\lambda, \zeta), \quad (1.35)$$

o explícitamente,

$$s_{11}(\lambda, \zeta) = \left(\frac{q^-}{q^+}\right) s_{22}(\lambda, -\zeta), \quad s_{12}(\lambda, \zeta) = \left(\frac{-r^-}{q^+}\right) s_{21}(\lambda, -\zeta),$$

$$s_{11}(\lambda, -\zeta) = \left(\frac{q^-}{q^+}\right)s_{22}(\lambda, \zeta), \quad s_{12}(\lambda, -\zeta) = \left(\frac{-r^-}{q^+}\right)s_{21}(\lambda, \zeta). \quad (1.36)$$

(s2) Se consideran dos casos

s2.i) $r(x) = \mp q(x)$

$$\begin{aligned} S(\lambda, \zeta) &= \sigma_{\mp} S(-\lambda, -\zeta) \sigma_{\mp} \\ K^{\pm}(x, y) &= \sigma_{\mp} K^{\pm}(x, y) \sigma_{\mp} \end{aligned} \quad (1.37)$$

donde $\sigma_{\mp} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\mp 1} \\ 1/\sqrt{\mp 1} & 0 \end{pmatrix}$.

Explícitamente,

$$\begin{aligned} s_{11}(\lambda, \zeta) &= s_{22}(-\lambda, -\zeta), & s_{12}(\lambda, \zeta) &= -s_{21}(-\lambda, -\zeta), \\ s_{11}(-\lambda, -\zeta) &= s_{22}(\lambda, \zeta), & s_{12}(-\lambda, -\zeta) &= -s_{21}(\lambda, \zeta). \end{aligned} \quad (1.38)$$

s2.ii) $r(x) = \mp q^*(x)$

$$\begin{aligned} S(\lambda, \zeta) &= \sigma_{\mp} S^*(\lambda^*, \zeta^*) \sigma_{\mp} \\ K^{\pm}(x, y) &= \sigma_{\mp} [K^{\pm}(x, y)]^* \sigma_{\mp} \end{aligned}$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned} s_{11}(\lambda, \zeta) &= s_{22}^*(\lambda^*, \zeta^*), & s_{12}(\lambda, \zeta) &= -s_{21}^*(\lambda^*, \zeta^*) \\ s_{11}^*(\lambda^*, \zeta^*) &= s_{22}(\lambda, \zeta), & s_{12}^*(\lambda^*, \zeta^*) &= -s_{21}(\lambda, \zeta). \end{aligned} \quad (1.39)$$

1.2.1. Curvas cerradas diferencialmente.

Para conseguir una curva z cerrada y diferenciable, conocida su curvatura k en todo punto, las condiciones que deben satisfacerse son, en términos del parámetro de arco (la longitud de la curva $L = \sigma_1 - \sigma_0$)

$$\mathbf{0} = z(\sigma_1, 0) - z(\sigma_0, 0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathbf{t}(s, 0) ds = \left(\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \cos(\theta(s, 0)) ds, \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sin(\theta(s, 0)) ds \right), \quad (1.40)$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} k(s', 0) ds' = 2\pi, \quad (1.41)$$

es decir, la condición (1.40) significa que la curva comienza y termina en el mismo punto y la condición (1.41) significa que el vector tangente \mathbf{t} recorre una vuelta completa entre los puntos inicial y final de la curva.

1.3. Teoría de existencia local para KdV/mKdV: estimaciones preliminares.

En esta memoria estudiaremos si el siguiente PVI para la ecuación de Gardner

$$\begin{cases} v_t + v_{xxx} + 6\sigma(v^2)_x + 2(v^3)_x = 0, & \sigma, t, x \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = v_0(x), \end{cases}$$

está local y globalmente bien propuesto para datos iniciales v_0 en cierto $H^s(\mathbb{R})$, con s por determinar. Con esta noción incluimos la existencia, unicidad, propiedad de persistencia (es decir, la solución describe una curva continua en X , siempre que $v_0 \in X$) y la dependencia continua de la solución sobre el dato inicial. Con local y global nos referimos a si la solución está definida en un intervalo temporal finito $\forall t \in [-T, T]$, $T < \infty$ o en toda la recta $\forall t \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Recordamos a continuación el espacio de funciones, definido por J.Bourgain en [B], adaptado al operador lineal $\partial_t + \partial_{xxx}$, para el cual se pueden encontrar buenas estimaciones del término bilineal $\partial_x(v^2)$ y también del término trilineal $\partial_x(v^3)$. Para $s, b \in \mathbb{R}$, definimos el espacio $X^{s,b}$ como la completación del espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ con respecto a las normas

$$\|f\|_{X^{s,b}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\tau - \xi^3|)^{2b} (1 + |\xi|)^{2s} |\hat{f}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2}. \quad (1.42)$$

Por otra parte, invocamos aquí la definición de la derivada homogénea $D_x^s f(x)$ de una función f que ya hemos dado en la introducción:

$$D_x^s f(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi|\xi|)^s e^{-2i\pi x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (1.43)$$

Presentamos ahora las estimaciones a las que recurriremos en la prueba del teorema de existencia local del capítulo 4:

sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $\psi \equiv 1$ en $[-1/2, 1/2]$ y $\text{supp } \psi \subseteq (-1, 1)$. Asumiendo que $s > 0$, $b > 1/2$, $0 < \delta < 1$, y el operador libre $W(t)$ dado en (30), tenemos los siguientes lemas:

Lema 1.3.1. (*[KePV3, Lemma 3.1]*) Sea $s \in \mathbb{R}$, $b > 1/2$ y $0 < \delta < 1$. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|\psi(\delta^{-1}t)W(t)v_0\|_{X^{s,b}} \leq c \delta^{\frac{1-2b}{2}} \|v_0\|_{H^s}. \quad (1.44)$$

Demostración. Por definición

$$\begin{aligned} \psi(\delta^{-1}t)W(t)v_0 &= \psi(\delta^{-1}t) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi+t\xi^3)} \hat{v}_0(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi+t\xi^3)} \psi(\delta^{-1}t) \hat{v}_0(\xi) d\xi \\ &= \delta \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi+t\xi^3)} e^{i(\delta^{-1}t)(\delta\tau')} \hat{\psi}(\delta\tau') \hat{v}_0(\xi) d\xi d\tau' \\ &= \delta \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi+t\xi^3)} e^{i(\delta^{-1}t)(\delta(\tau-\xi^3))} \hat{\psi}(\delta(\tau-\xi^3)) \hat{v}_0(\xi) d\xi d\tau \\ &= \delta \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi+t\tau)} \hat{\psi}(\delta(\tau-\xi^3)) \hat{v}_0(\xi) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

es decir

$$(\psi(\delta^{-1}t)\widehat{W}(t)v_0(x)) = \delta \hat{\psi}(\delta(\tau-\xi^3)) \hat{v}_0(\xi).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|\psi(\delta^{-1}t)W(t)v_0\|_{X^{s,b}(\mathbb{R})} &= \delta^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (1+|\tau-\xi^3|)^{2b} (1+|\xi|)^{2s} |\hat{\psi}(\delta(\tau-\xi^3)) \hat{v}_0(\xi)|^2 d\xi d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} |\hat{v}_0(\xi)|^2 \left(\delta^2 \int_{\mathbb{R}} (1+|\tau-\xi^3|)^{2b} |\hat{\psi}(\delta(\tau-\xi^3))|^2 d\tau \right) d\xi. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Ahora

$$\begin{aligned} &\delta^2 \int_{\mathbb{R}} (1+|\tau-\xi^3|)^{2b} |\hat{\psi}(\delta(\tau-\xi^3))|^2 d\tau \\ &\leq \delta^2 \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\delta(\tau-\xi^3))|^2 d\tau + \delta^2 \int_{\mathbb{R}} |\tau-\xi^3|^{2b} |\hat{\psi}(\delta(\tau-\xi^3))|^2 d\tau \\ &\leq \delta^2 \delta^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(z)|^2 dz + \delta^2 \delta^{-2b-1} \int_{\mathbb{R}} |z|^{2b} |\hat{\psi}(z)|^2 dz \\ &\leq c' \delta + c'' \delta^{1-2b} \leq c''' \delta^{1-2b}, \end{aligned}$$

y esto implica que

$$(1.45) \leq c''' \delta^{1-2b} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} |\hat{v}_0(\xi)|^2 d\xi = c''' \delta^{1-2b} \|v_0\|_{H^s(\mathbb{R})}^2.$$

□

Lema 1.3.2. Sea $s \in \mathbb{R}$, $1/2 < b \leq 1$ y $0 < \delta < 1$. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|\psi(\delta^{-1}t)h\|_{X^{s,b}} \leq c \delta^{\frac{1-2b}{2}} \|h\|_{X^{s,b}}. \quad (1.46)$$

Demostración. ver [KePV3]. □

Lema 1.3.3. *Sea $s \in \mathbb{R}$, $1/2 < b \leq 1$ y $0 < \delta < 1$. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|\psi(\delta^{-1}t) \int_0^t W(t-t')w(t')dt'\|_{X^{s,b}} \leq c \delta^{\frac{1-2b}{2}} \|w\|_{X^{s,b-1}}. \quad (1.47)$$

Demostración. ver [KePV3]. □

Lema 1.3.4. *Sea $s \in \mathbb{R}$, $1/2 < b \leq 1$ y $0 < \delta < 1$. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|\psi(\delta^{-1}t) \int_0^t W(t-t')w(t')dt'\|_{H^s} \leq c \delta^{\frac{1-2b}{2}} \|w\|_{X^{s,b-1}}. \quad (1.48)$$

Demostración. ver [KePV4]. □

1.3.1. El multiplicador $[k; Z]$ de T. Tao.

En esta sección introducimos el multiplicador $[k; \mathbb{R}]$ definido por T. Tao (ver [T0]), con la finalidad de emplearlo para obtener estimaciones bilineales y trilineales necesarias para lograr el resultado de existencia local que deseamos. En la notación de [T0], sea $Z = \mathbb{R}$. Entonces para cualquier entero $k \geq 2$, denotamos por $\Gamma_k(Z)$ el hiperplano

$$\Gamma_k(Z) := \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in Z^k : \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k = 0\}, \quad (1.49)$$

que está dotado con la medida

$$\int_{\Gamma_k(Z)} f := \int_{Z^{k-1}} f(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, -\xi_1 - \dots - \xi_{k-1}) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{k-1}.$$

Un multiplicador $[k; Z]$ se define como cualquier función $m : \Gamma_k(Z) \rightarrow \mathbb{C}$ (introducido por T.Tao en [T0]). La norma del multiplicador $\|m\|_{[k;Z]}$ está definida como la mejor constante tal que la desigualdad

$$\left| \int_{\Gamma_k(Z)} m(\xi) \prod_{j=1}^k f_j(\xi_j) \right| \leq \|m\|_{[k;Z]} \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{L^2(Z)}, \quad (1.50)$$

se verifica para todas las funciones f_j de $L^2(Z)$.

Por descomposición diádica de las variables ξ_j , λ_j , así como de la función resonante $h(\xi)$, encontraremos la siguiente norma

$$\|X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3}\|_{[3; \mathbb{R}]}, \quad (1.51)$$

donde $X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3}$ es el multiplicador

$$X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3} := \chi_{|h(\xi)| \sim H} \prod_{j=1}^3 \chi_{|\xi_j| \sim N_j} \chi_{|\lambda_j| \sim L_j}. \quad (1.52)$$

Teniendo en cuenta las identidades (recordando que estamos en el hiperplano $\Gamma_3(Z)$)

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$$

y

$$h(\xi) + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

cuando evaluamos el soporte del multiplicador (1.52), vemos que $X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3}$ se anula a menos que

$$N_{max} \sim N_{med}, \quad (1.53)$$

y

$$L_{max} \sim \max(H, L_{med}). \quad (1.54)$$

Por otra parte, a partir de la identidad de resonancia (y por estar en el hiperplano $\Gamma_3(Z)$),

$$h(\xi) = \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 = 3\xi_1\xi_2\xi_3, \quad (1.55)$$

podemos asumir que

$$H \sim N_1N_2N_3, \quad (1.56)$$

ya que el multiplicador (1.52) se anula en cualquier otra situación.

Recurriremos a la identidad de Plancherel

Lema 1.3.5. (*Plancherel*) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, $n > 0$. Entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}. \quad (1.57)$$

y a los siguientes lemas dados en [T0]:

Lema 1.3.6. (lema 3.1(Principio de comparación) en [T0]) Si m y M son multiplicadores $[k; Z]$, y $|m(\xi)| \leq M(\xi)$, $\forall \xi \in \Gamma_k(Z)$, entonces $\|m\|_{[k;Z]} \leq \|M\|_{[k;Z]}$. También si m es un $[k; Z]$ multiplicador y a_1, \dots, a_k son funciones de Z a \mathbb{R} , entonces

$$\|m(\xi) \prod_{j=1}^k a_j(\xi_j)\|_{[k;Z]} \leq \|m\|_{[k;Z]} \prod_{j=1}^k \|a_j\|_{\infty}.$$

Lema 1.3.7. (lema 3.3(Simetría) en [T0]) La norma $\|m\|_{[k;Z]}$ es invariante bajo permutación de los índices ξ_1, \dots, ξ_k .

Lema 1.3.8. (lema 3.7(composición y estimación TT^*) en [T0]) Si $k_1, k_2 \geq 1$ y m_1, m_2 son funciones definidas sobre Z^{k_1} y Z^{k_2} respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} & \|m_1(\xi_1, \dots, \xi_{k_1}) m_2(\xi_{k_1+1}, \dots, \xi_{k_1+k_2})\|_{[k_1+k_2;Z]} \\ & \leq \|m_1(\xi_1, \dots, \xi_{k_1})\|_{[k_1+1;Z]} \|m_2(\xi_1, \dots, \xi_{k_2})\|_{[k_2+1;Z]}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Como caso especial se verifica la identidad TT^*

$$\|m(\xi_1, \dots, \xi_k) \overline{m(-\xi_{k+1}, \dots, -\xi_{2k})}\|_{[2k;Z]} = \|m(\xi_1, \dots, \xi_k)\|_{[k+1;Z]}^2, \quad (1.59)$$

para todas las funciones $m : Z^k \rightarrow \mathbb{R}$.

Por otra parte, si m es un multiplicador $[k; Z]$ y $1 \leq j \leq k$, definimos el j -soporte de m , $\text{supp}_j(m) \subset Z$, como el conjunto

$$\text{supp}_j(m) := \{\eta_j \in Z : \Gamma_k(Z; \xi_j = \eta_j) \cap \text{supp}(m) \neq \emptyset\}.$$

De forma general, si J es un subconjunto no vacío de índices $\{1, \dots, k\}$, definimos el conjunto $\text{supp}_J(m) \subset Z^J$ por

$$\text{supp}_J(m) := \prod_{j \in J} \text{supp}_j(m). \quad (1.60)$$

Observar que $\text{supp}_{\{1, \dots, k\}}(m)$ puede ser mucho más grande que $\text{supp}(m)$. Con estas definiciones podemos enunciar el siguiente lema.

Lema 1.3.9. (lema 3.11(Test de Schur) en [T0]) Sean J_1, J_2 dos subconjuntos disjuntos, no vacíos de $\{1, \dots, k\}$ y $A_1, A_2 > 0$. Supongamos que $(m_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una colección de multiplicadores $[k; Z]$ tal que

$$\text{card}\{\alpha \in I : \xi \in \text{supp}_{J_s}(m_\alpha)\} \leq A_s,$$

para todo $\xi \in Z^{J_s}$ y $s = 1, 2$.

Entonces

$$\left\| \sum_{\alpha \in I} m_\alpha \right\|_{[k;Z]} \leq (A_1 A_2)^{1/2} \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha\|_{[k;Z]}.$$

En particular, en el caso de que m_α sean no negativos y $A_1, A_2 \sim 1$, entonces tenemos la siguiente estimación ortogonal

$$\left\| \sum_{\alpha \in I} m_\alpha \right\|_{[k;Z]} \sim \sup_{\alpha \in I} \|m_\alpha\|_{[k;Z]}. \quad (1.61)$$

Necesitaremos la siguiente estimación del multiplicador norma (1.51) para la ecuación KdV en el caso no periódico, dada en [T0].

Lema 1.3.10. (ver la prop.6.1 en [T0]) Sean $H, N_1, N_2, N_3, L_1, L_2, L_3 > 0$ satisfaciendo (1.53), (1.54) y (1.56). Entonces

- Si $N_{max} \sim N_{min}$ y $L_{max} \sim H$, se verifica que

$$(1.51) \lesssim L_{min}^{1/2} N_{max}^{-1/4} L_{med}^{1/4}. \quad (1.62)$$

- Si $N_2 \sim N_3 \gg N_1$, se verifica que

$$(1.51) \lesssim L_{min}^{1/2} N_{max}^{-1} \min\left(H, \frac{N_{max}}{N_{min}} L_{med}\right)^{1/2}. \quad (1.63)$$

- En los demás casos,

$$(1.51) \lesssim L_{min}^{1/2} N_{max}^{-1} \min(H, L_{med})^{1/2}. \quad (1.64)$$

Capítulo 2

Métodos numéricos y convergencia de simulaciones a tiempos largos para la mKdV

Sumario. Este capítulo está dedicado a exponer los resultados numéricos que hemos obtenido en nuestro estudio de la ecuación mKdV geométrica. Para ello estudiamos el comportamiento/la convergencia a la solución a tiempos largos de los métodos pseudo-espectrales de colocación y los de diferencias finitas, para decidir cuál de ellos será más adecuado para realizar simulaciones de estructuras conservadas, tipo solitón y breather, mediante el flujo geométrico de la mKdV atractiva.

Para ello, tomando como dato inicial la solución inestable polo doble de la mKdV atractiva, observamos que los esquemas numéricos donde la preservación de ciertas cantidades ha sido impuesta en la evolución, tales como la versión discreta de la masa, la norma L^2 o la energía de una función, son mucho más robustos en las simulaciones a tiempo largo que aquellos esquemas que sólo tienen en cuenta el orden de consistencia del método para acotar el error local.

2.1. Introducción

En este capítulo estudiamos desde un punto de vista numérico soluciones tipo breather de la ecuación mKdV atractiva en $1 + 1$ dimensiones, $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$,

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + 2\partial_x(u^3) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde los subíndices $(\cdot)_t = \partial_t$ y $(\cdot)_x = \partial_x$ representan respectivamente, derivadas parciales con respecto al tiempo y al espacio y donde asumimos soluciones de soporte compacto,

Las soluciones tipo onda viajera de una joroba o extremo diferenciado, se pueden encontrar fácilmente integrando directamente la EDO que resulta cuando se buscan este tipo

de soluciones para la mKdV y también se pueden encontrar mediante el método de scattering inverso, cuando se escoge un único polo del coeficiente de reflexión localizado en el eje imaginario. Estos solitones están dados explícitamente por

$$u(x, t) = \beta \operatorname{sech}(\beta(x - \beta^2 t + x_0)), \quad (2.2)$$

con $\beta \in \mathbb{R}$ y en donde hemos incluido la invariancia por traslaciones mediante el parámetro $x_0 \in \mathbb{R}$. Como podemos comprobar la onda viajera se propaga hacia la derecha con velocidad β^2 . Soluciones tipo onda viajera pero con más de una joroba también pueden ser construidas y por medio del método de scattering inverso pueden ser encontradas cuando se escoge más de un polo del coeficiente de reflexión en el eje imaginario. Cuando estos polos son diferentes, las soluciones generadas representan dos extremos diferenciados o jorobas (hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo global) de diferentes alturas. Por tanto, estos extremos diferenciados viajan a diferentes velocidades y colisionan de forma casi elástica, ver por ejemplo [La]. Es particularmente interesante el caso degenerado, cuando tenemos sólo un polo del coeficiente de reflexión, pero este es doble. En este capítulo nos dedicaremos a estudiar este caso, considerando las soluciones tipo polo doble, soluciones que evolucionan asintóticamente en el tiempo como dos jorobas iguales, una hacia arriba y otra hacia abajo, ver Fig 2.1(b). Observamos además, que las simulaciones numéricas que aproximan a este tipo de soluciones generan una gran variedad de resultados dependiendo de método numérico escogido y no todos ellos son satisfactorios para representar la evolución.

Otra familia relevante de soluciones es la formada por los breathers, que representamos en la figura 2.1(a). Fueron obtenidos primeramente por M. Wadati en [W] y describen pulsos oscilantes que no se dispersan en su evolución. Están determinados, salvo traslaciones en espacio y tiempo, por dos parámetros reales (α, β) , que corresponden a la frecuencia y a la amplitud del pulso, respectivamente. La velocidad de fase está dada por $3\beta^2 - \alpha^2$, y la velocidad de grupo por $\beta^2 - 3\alpha^2$, $\alpha > 0$, de tal forma que para α grande respecto a β , el pulso se propaga hacia la izquierda con velocidad $3\alpha^2$. De hecho, en este caso de $\beta/\alpha \ll 1$, la solución breather se puede aproximar por

$$u(x, t) \approx -2 \frac{\beta^2}{\alpha} \sin[\alpha(x - (3\beta^2 - \alpha^2)t)] \operatorname{sech}[\beta(x - (\beta^2 - 3\alpha^2)t)]. \quad (2.3)$$

El enfoque de M.Wadati para obtener este tipo de soluciones está basado en el método de scattering inverso. En este método, las soluciones breather se caracterizan por que los polos del coeficiente de reflexión se escogen de forma simétrica con respecto al eje imaginario, y están dados por $\pm\alpha + i\beta$. Esta familia de soluciones, en el límite $\alpha \gg \beta$, fueron empleadas por C.Kenig, G.Ponce y L.Vega en [KePV1] para probar la discontinuidad de la aplicación flujo asociada a la mKdV en espacios de Sobolev H^s , de funciones con s derivadas en $L^2(\mathbb{R})$. Esta carencia de continuidad procede del hecho de que dos breathers con diferentes velocidades pueden estar muy cerca a tiempo cero en una norma H^s pero, ya que estos no se dispersan, se separarán eventualmente dando lugar a una gran diferencia de sus normas H^s en tiempos mayores que cero. La clave está en que el tiempo de separación puede ser

hecho arbitrariamente pequeño tomando α suficientemente grande. El umbral para esta ausencia de continuidad se da para $s = 1/4$, que es un índice óptimo.

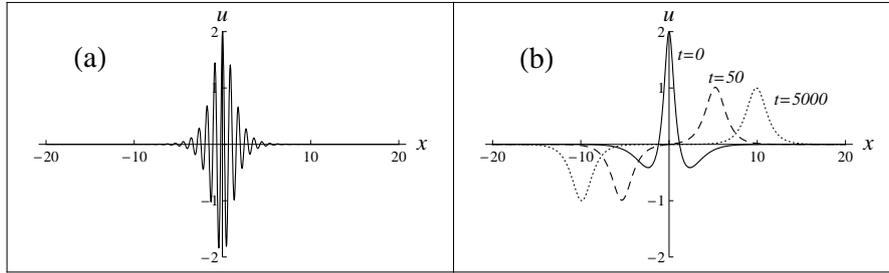


Figura 2.1. (a) Solución tipo breather de mKdV a $t=0$ para $\alpha = 7$ y $\beta = 1$. (b) Solución polo doble para $\beta = 1$ a: $t = 0$ (línea sólida), $t = 50$ (línea a rayas) y $t = 5000$ (línea a puntos), después de una traslación al origen de coordenadas para mostrar la separación logarítmica en tiempo.

Una cuestión que surge de manera natural a partir de las observaciones realizadas son las propiedades de estabilidad de estas soluciones breather cuando α es grande respecto a β . Debido a las grandes oscilaciones del pulso, los métodos numéricos basados en esquemas de diferencias finitas no parecen apropiados y veremos después que éste es efectivamente el caso. Sin embargo, la transformada de Fourier del pulso está altamente concentrada alrededor de la frecuencia α , y por tanto esto nos sugiere que los métodos pseudo-espectrales parecerían ser mucho más naturales en este caso ([abe80] y [delahoz09]). Veremos en las siguientes secciones que son de hecho muy robustos.

Uno podría preguntarse qué ocurre cuando se emplea el método de diferencias finitas para α pequeño. Notar que la solución es analítica y que la teoría de existencia local para el problema de Cauchy disponible (ver [KePV2]) nos permite concluir que la regularidad se preserva a lo largo del flujo y en principio uno no debería esperar que alguna inestabilidad pudiera surgir cuando estamos cerca del caso degenerado $\alpha = 0$. La razón es obvia y simple. Por una parte la solución polo doble puede ser obtenida a partir de la solución del 2-soliton cuando los polos tienen partes reales nulas y las partes imaginarias tienden al mismo valor. Por otra parte, la solución polo doble puede también ser obtenida [OW] tomando el límite de la solución breather cuando α va a cero.

La principal propuesta de este capítulo es comprobar que estas inestabilidades numéricas ocurren y que incluso métodos numéricos como los pseudo-espectrales y los de diferencias finitas con un orden alto de consistencia fallan cuando las simulaciones temporales son suficientemente largas. En el caso de diferencias finitas, presentado en la sección 2.4, pág.50, hemos usado dos discretizaciones espaciales con diferentes invariantes discretos asociados a cada una de ellas, para destacar que la solución numérica correspondiente a los dos polos se rompe a partir de la solución correcta y escoge una de las dos posibles ramas, sea la de dos solitones independientes o la del breather. Es interesante observar que el método pseudo-espectral, estudiado en la sección 2.3 (página 46), es mucho más eficiente y captura incluso la separación logarítmica de los dos extremos diferenciados de

la solución polo doble que ocurre para tiempos mucho más largos que para los esquemas de diferencias finitas, pero la elección de un bajo número de armónicos o un gran paso temporal puede dar lugar también a un comportamiento erróneo, incluso para este método.

En la literatura se encuentra que la precisión de las soluciones numéricas está directamente relacionada con el orden de consistencia del enfoque numérico utilizado. Por ejemplo, la inestabilidad dinámica de las soluciones breather de mKdV así como la estabilidad de la solución polo doble fue estudiada numéricamente para intervalos de tiempo razonablemente largos en [KKS2]. La convergencia de los métodos sólo garantiza buena aproximación para simulaciones de tiempo cortas. Pero estas limitaciones pueden ser superadas forzando la evolución constante de algunas cantidades, que son el equivalente discreto de las leyes de conservación de la ecuación continua, como la integral, la norma L^2 o la energía.

Existen varios trabajos relativos a la estabilidad del solitón de una joroba de mKdV. También se ha realizado algún progreso en el caso de los multisolitones cuando los extremos están ampliamente separados unos de otros e incluso más recientemente sobre la colisión de dos solitones, uno rápido y estrecho y otro lento y ancho (ver [MarMe1] y [MarMe2]). Sin embargo, muy poco se conoce en el caso considerado en este capítulo. Las técnicas analíticas disponibles no parecen aplicarse a este caso [T1]. En este capítulo aportamos evidencias numéricas que apoyan la dificultad del problema.

2.2. Condición inicial

Estudiaremos algunas soluciones particulares que se anulan en infinito, de la ecuación modificada de Korteweg-de Vries (2.1) en 1+1 dimensiones, $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0. \quad (2.4)$$

Estamos interesados en la familia biparamétrica de soluciones breather que fueron obtenidas por vez primera por M.Wadati en [W]. Pueden ser escritas como

$$u(x, t) = \frac{2\beta \cdot \operatorname{sech} [\beta(x + \gamma t)] \times \cos [\Phi(x, t)] - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \sin [\Phi(x, t)] \tanh [\beta(x + \gamma t)]}{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \sin^2 [\Phi(x, t)] \operatorname{sech}^2 [\beta(x + \gamma t)]} \quad (2.5)$$

con $\gamma = 3\alpha^2 - \beta^2$, $\delta = \alpha^2 - 3\beta^2$ y $\Phi(x, t) = \alpha(x + \delta t) - \tan^{-1}(\beta/\alpha)$.

También pueden ser escritas de forma más compacta como

$$u(x, t) = 2\partial_x \tan^{-1} \left[\frac{G(x, t, \alpha, \beta)}{F(x, t, \alpha, \beta)} \right] \quad (2.6)$$

con las funciones auxiliares $F(x, t, \alpha, \beta)$ y $G(x, t, \alpha, \beta)$ dadas por

$$\begin{cases} F(x, t, \alpha, \beta) = \cosh(\beta(3t\alpha^2 - t\beta^2 + x)), \\ G(x, t, \alpha, \beta) = \frac{\beta \sin\left(\alpha(x + t(\alpha^2 - 3\beta^2)) - \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right)}{\alpha}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Observar que a partir de esta expresión se sigue directamente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = 0, \quad (2.8)$$

en concordancia con las soluciones del problema de valor inicial (2.1), que alcanzan las condiciones de frontera (2.4). Sus perfiles corresponden a un breather con velocidad de grupo $-\gamma = \beta^2 - 3\alpha^2$ cuando $\alpha \neq 0$, (ver Fig. 2.1(a), pág.43) que degenera a la solución polo doble cuando $\alpha = 0$, (ver Fig. 2.1(b), pág.43). Este segundo caso es interesante por que se comporta asintóticamente como un par de solitones independientes de la ecuación mKdV (2.1), uno hacia arriba y otro hacia abajo,

$$u(x, t) = \frac{4\beta(\cosh(\beta x - \beta^3 t) + \beta(3\beta^2 t - x)\sinh(\beta x - \beta^3 t))}{2(\beta x - 3\beta^3 t)^2 + \cosh(2\beta x - 2\beta^3 t) + 1} \quad (2.9)$$

Esta solución polo doble tiene tres extremos locales, con uno de ellos decayendo a 0 asintóticamente en tiempo. Los otros dos extremos se separan con una distancia $l(t)$ que se convierte en logarítmicamente grande en tiempo, cuando el parámetro temporal t es suficientemente grande [W].

$$l(t) \approx \frac{2 \log[4\beta^3 \cdot t]}{\beta}, \quad t \gg 1. \quad (2.10)$$

Podemos deducir este resultado fácilmente teniendo en cuenta la convergencia puntual a 0 de la función (2.9), cuando el tiempo va a ∞ , y comprobando la posición donde la derivada de la exponencial dominante se anula. La propiedad (2.10) nos será de utilidad para comprobar la precisión de los métodos numéricos empleados para t grande.

Una de las propiedades más importantes de este tipo de ecuaciones en derivadas parciales es la existencia de infinitas leyes de conservación. Por ejemplo en el caso de la ecuación mKdV en la recta real $x \in \Omega = \mathbb{R}$, integrando por partes es fácil comprobar que la media $I(u)$ en espacio de la función incógnita u , la masa $\|u\|_2$ que está dada por su norma L^2 y la energía $E(u)$ que definimos abajo, son preservadas a lo largo del tiempo.

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Omega} u(x, t) dx, \\ \|u\|_2 &= \int_{\Omega} u^2(x, t) dx, \\ E(u) &= \int_{\Omega} [u^4(x, t) - u_x^2(x, t)] dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

En este capítulo mostraremos mediante experimentos computacionales, que los esquemas numéricos donde la preservación de algunas de estas leyes de conservación (2.11) han sido

impuestas, son mucho más robustos en simulaciones a tiempos largos que los esquemas que sólo tienen en cuenta el orden de consistencia del método para acotar el error local. Los datos numéricos han sido comparados con la solución analítica exacta correspondiente a las expresiones (2.5) y (2.9) para medir su precisión. En la práctica, la condición inicial proporcionada por las medidas experimentales, las cuales son investigadas numéricamente, pueden diferir de las soluciones tipo onda viajera (2.5) y (2.9), y el uso de un esquema numérico potente es esencial de cara a proporcionar buenas aproximaciones de las correspondientes soluciones para experimentos a tiempo largos.

Debido al hecho de que la condición inicial tipo polo doble (2.9) es muy regular y no hay oscilaciones presentes, ambos tipos de métodos parecen apropiados a priori, para simular su evolución. Por otra parte, cuando se considera la condición inicial altamente oscilante (2.5), postulamos que el método pseudo-espectral será más potente puesto que un número aceptable de armónicos pueden representar la forma de la solución, con una alta precisión. En este caso los métodos de diferencias finitas necesitan un número de nodos demasiado alto para generar una aproximación aceptable de la solución, y el error global de la aproximación numérica aumentará exponencialmente debido a la gran constante de Lipschitz inducida por las oscilaciones del pulso.

2.3. Método pseudoespectral

Como regla general, los métodos pseudo-espectrales de colocación, [GotO] y [Guo], son muy apropiados para aproximar las soluciones breather y ondas viajeras de una ecuación en derivadas parciales. El perfil oscilante de una función y de sus derivadas puede ser reproducido con gran precisión por un conjunto manejable de armónicos [FW]. Debido a las limitaciones de la discretización práctica en espacio, el eje real \mathbb{R} ha sido sustituido por un intervalo espacial suficientemente largo $\Omega = [-L, L]$ ($[-40, 40]$ en las simulaciones numéricas) y las condiciones de frontera (2.4) por las correspondientes condiciones periódicas

$$u(-L) = u(L), \quad u_x(-L) = u_x(L). \quad (2.12)$$

Estas condiciones sugieren el uso de una base ortonormal de funciones exponenciales complejas periódicas, $\{\phi_j(x) = e^{i\omega_j x}\}$, con $\omega_j = 2\pi j/(2L)$, $j \in \mathbb{Z}$. El desarrollo en serie de Fourier de una función $u(x, t) \in L^2$ está definido por

$$u(x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{u}_j(t) \phi_j(x), \quad \text{donde} \quad \hat{u}_j(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x, t) \overline{\phi_j(x)} dx. \quad (2.13)$$

La condición de finitud requerida por el esquema numérico nos sugiere reemplazar la expresión infinita (2.13) a tiempo inicial, $u(x, 0)$ por la serie truncada

$$u(x, 0) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \hat{U}_n^{(0)} e^{i \frac{2\pi j n}{N}}, \quad (2.14)$$

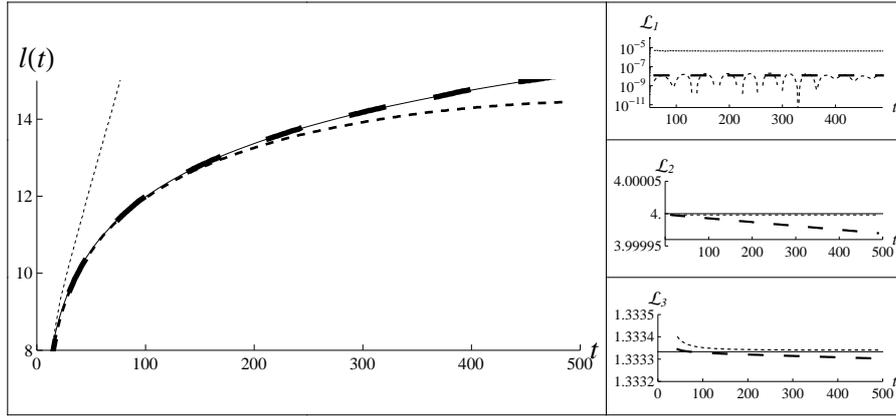


Figura 2.2. Izquierda: separación teórica $l(t)$ de las jorobas de la solución polo doble para $\beta = 1$ (línea sólida) frente a la aproximación pseudo-espectral para un paso temporal $\Delta t = 10^{-3}$ y simulaciones realizadas con un diferente número de puntos de colocación $N = 2^8$ (puntos), $N = 2^9$ (línea delgada a rayas) y $N = 2^{10}$ (línea gruesa a rayas). Derecha: evolución de las cantidades discretas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ para $N = 2^9$ (línea delgada a rayas) y $N = 2^{10}$ (línea gruesa a rayas).

donde los coeficientes de Fourier discretos son calculados por la fórmula de cuadratura en los puntos equidistantes $x_n = 2nL/N$, $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$,

$$\hat{U}_j^{(0)} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} u_0(x_n) e^{-i \frac{2\pi j n}{N}}. \quad (2.15)$$

La ventaja de esta aproximación es que puede ser acelerada notablemente por medio del algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) cuando se toman un número de puntos $N = 2^q$, $q \in \mathbb{N}$. En nuestro trabajo hemos realizado simulaciones para $N = 2^8$, $N = 2^9$ y $N = 2^{10}$, para comprobar la precisión de la discretización y la robustez del método. Estos cálculos han sido ejecutados por una subrutina FORTRAN proporcionada por el almacén Netlib. Algunos autores [BeKV, DuZ, MuE] separan las partes lineales y las no lineales del lado de la derecha de la ecuación (2.1) y posteriormente ellos introducen un factor integrante exponencial en la solución para dominar a la parte lineal. La ventaja de esta reducción es que el único término que es discretizado por la transformada de Fourier o por diferencias finitas es el término no lineal y su norma tiene orden $O(N)$ y no $O(N^3)$. En este contexto la mencionada estrategia no produciría una mejora significativa en los resultados por que el número de ondas de las funciones de la base ortogonal empleadas para aproximar las soluciones no es necesariamente alto. La situación es radicalmente diferente cuando investigamos soluciones que implican oscilaciones con altas frecuencias, entonces es realmente interesante evitar el cálculo de las derivadas de la parte lineal, usando la mencionada técnica del factor integrante.

Sea $U^{(0)} = (U_{-N/2}^{(0)}, \dots, U_{N/2-1}^{(0)})^t$, donde $U_j^{(0)} = u_0(x_j)$, el vector que almacena el dato inicial, y $U^{(k)} \approx u(t_k)$ las aproximaciones sucesivas de la solución a tiempo t_k . Entonces, la transformada discreta de Fourier puede ser considerada como un operador lineal

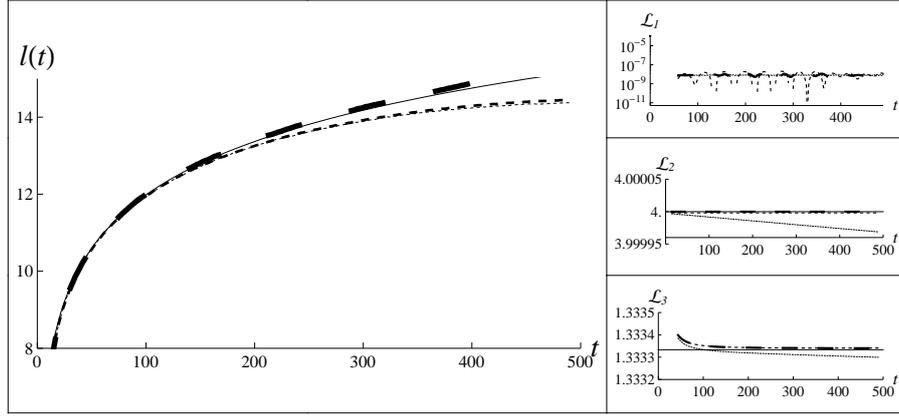


Figura 2.3. Izquierda: lo mismo que en Fig 2.2 para $\beta = 1$, $N = 2^9$ y diferentes tamaños de paso temporal, $\Delta t = 10^{-2}$ (puntos), $\Delta t = 10^{-3}$ (línea delgada a rayas) y $\Delta t = 10^{-4}$ (línea gruesa a rayas). Derecha: Izquierda: lo mismo que en Fig 2.2 para $\Delta t = 10^{-2}$ (puntos), $\Delta t = 10^{-3}$ (línea delgada a rayas) y $\Delta t = 10^{-4}$ (línea gruesa a rayas).

$\hat{U}^{(k)} = \mathcal{F}U^{(k)}$ representado por una matriz $N \times N$ de Vandermonde \mathcal{F} , con componentes $\mathcal{F}_{j,n} = \theta^{(j-\frac{N}{2}-1)(n-\frac{N}{2}-1)}$ y $\theta = e^{-i2\pi/N}$.

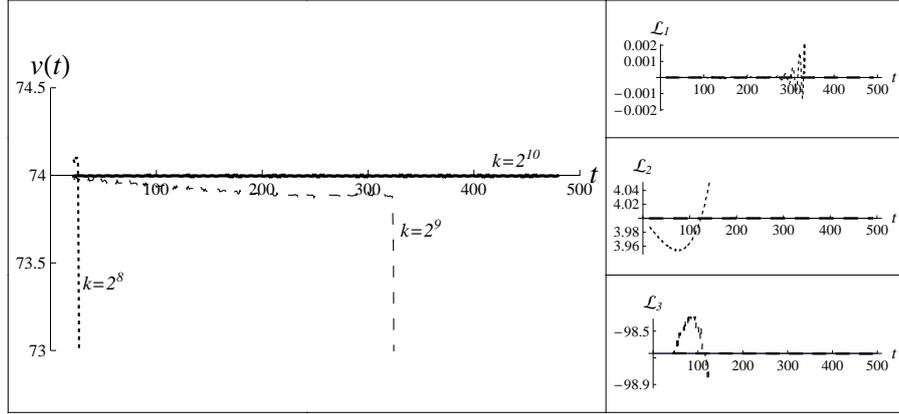


Figura 2.4. Izquierda: velocidad de grupo del breather aproximado ($\alpha = 5$ y $\beta = 1$) frente a $v = 3\alpha^2 - \beta^2 = 74$ para $\Delta t = 10^{-3}$ y $N = 2^8$ (puntos), $N = 2^9$ (línea delgada a rayas) y $N = 2^{10}$ (línea gruesa a rayas). Derecha: evolución de las cantidades discretas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ para $N = 2^9$ (línea delgada a rayas) y $N = 2^{10}$ (línea gruesa a rayas).

Teniendo en cuenta la ortogonalidad $\langle \phi_j, \phi_l \rangle = \delta_{ij}$ de las funciones periódicas ϕ_j en $L_2[-\pi, \pi]$, y la forma de sus derivadas espaciales, $\phi_j'(x) = i\omega_j \phi_j(x)$, sustituimos el desarrollo (2.13) en las soluciones de la ecuación mKdV (2.1), y resulta el siguiente sistema de EDOs

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}_j(t) = i \left[\omega_j^3 \hat{u}_j(t) - 2\omega_j \hat{v}_j(t) \right], & j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ \hat{u}(0) = \mathcal{F}u(x, 0), \end{cases} \quad (2.16)$$

donde $\hat{v} = \mathcal{F}v$ representa la transformada de Fourier del término no lineal $v = u^3$. Sustit-

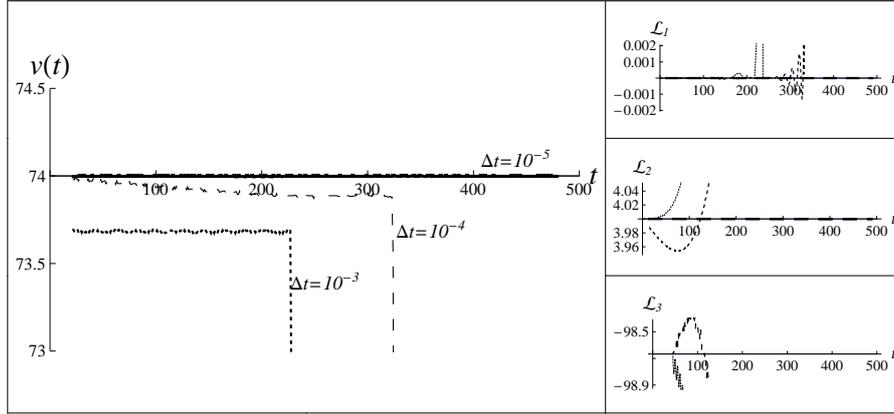


Figura 2.5. Izquierda: velocidad de grupo del breather aproximado ($\alpha = 5$ y $\beta = 1$) frente a $v = 3\alpha^2 - \beta^2 = 74$ para $\Delta t = 10^{-3}$ y $N = 2^9$ (puntos), $\Delta t = 10^{-4}$ (línea delgada a rayas) y $\Delta t = 10^{-5}$ (línea gruesa a rayas). Derecha: evolución de las cantidades discretas $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ para $N = 2^9$ (línea delgada a rayas) y $N = 2^{10}$ (línea gruesa a rayas).

tuyendo la solución continua u y v respectivamente por los vectores N -dimensionales U y V de los valores en los puntos de colocación en (2.16), obtenemos la representación matricial

$$\partial_t \mathcal{F}U = - [\mathcal{D}^3 \mathcal{F}U + 2\mathcal{D}\mathcal{F}V], \quad (2.17)$$

donde aquí \mathcal{D} es una matriz diagonal con componentes $d_{jj} = i\omega_j$ y representa la diferenciación espacial. Considerando el operador lineal antisimétrico $\mathcal{J} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{F}$, donde $\mathcal{J}^t = -\mathcal{J}$, la relación previa (2.17) corresponde a la ecuación de movimiento del sistema hamiltoniano definido por

$$\mathcal{H}_p(U) = \frac{1}{2} \left(|\mathcal{J}U|^2 - \sum_{j=1}^N U_j^4 \right). \quad (2.18)$$

Esta observación sugiere que las leyes de conservación lineales y cuadráticas (2.11) podrían ser preservadas a lo largo del tiempo usando un integrador simpléctico en tiempo, como la regla implícita del punto medio, junto con el método pseudo-espectral. Postulamos que la propiedad anterior conducirá a una mejora del intervalo temporal donde la solución numérica se acerca a la exacta.

Sea $\hat{U}^{(k)}$ la transformada de Fourier discreta de $U^{(k)}$, entonces la regla del punto medio aplicada a la discretización pseudo-espectral de la ecuación (2.17) es como sigue,

$$\hat{U}^{(k+1)} = \hat{U}^{(k)} - \Delta t \left(\mathcal{D}^3 \hat{U}^{(k+\frac{1}{2})} + 2\mathcal{D}\hat{V}^{(k+\frac{1}{2})} \right), \quad (2.19)$$

donde $\hat{U}^{(k+\frac{1}{2})} = (\hat{U}^{(k)} + \hat{U}^{(k+1)})/2$, $\hat{V}^{(k+\frac{1}{2})} = (\hat{V}^{(k)} + \hat{V}^{(k+1)})/2$ son los vectores interpolados. Poniendo juntos los términos $\hat{U}^{(k+1)}$ en el lado izquierdo de la ecuación (2.19), la norma del funcional asociado al esquema de punto fijo se reduce considerablemente. También, proporciona una implementación exitosa para pasos de tiempo de tamaño $\Delta t \approx 10^{-3}$

implicando un bajo coste computacional. Obtenemos por tanto

$$\hat{U}^{(k+1)} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{D}^3 \right)^{-1} \left[\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{D}^3 \right) \hat{U}^{(k)} - 2\Delta t \mathcal{D} \hat{V}^{(k+\frac{1}{2})} \right]. \quad (2.20)$$

Observar que la matriz $[\mathbf{I} - (\Delta t/2)\mathcal{D}^3]$ es diagonal y su inversión se hace de forma directa. Las partes real e imaginaria del sistema (2.20) están separadas en ecuaciones diferentes para la implementación práctica.

En las simulaciones numéricas, hemos encontrado un comportamiento regular muy largo de la condición inicial polo doble. Las figuras (2.2) y (2.3) muestran la evolución logarítmica en tiempo de la distancia de separación entre los extremos diferenciados principales de las soluciones aproximadas (2.10) con respecto a la distancia exacta $l(t)$. El incremento del número de puntos de $N = 2^9$ a $N = 2^{10}$ no mejora tanto la precisión como sí lo hace la reducción del paso temporal de $\Delta t = 10^{-3}$ a $\Delta t = 10^{-4}$ que proporciona un buen ajuste con la solución exacta. Sólo cuando el número de armónicos es demasiado bajo, $N = 2^8$ entonces la condición inicial polo doble se puede romper en dos solitones independientes (2.2) como se observa en la trayectoria a puntos de la Fig. (2.2), donde su comportamiento lineal corresponde a la diferencia constante de velocidades de las dos jorobas principales de la solución.

Los resultados para condiciones iniciales tipo breather con $\alpha = 5$ como oscilación interna han sido resumidas en las Figs. (2.4) y (2.5). La elección de restricciones relajadas sobre los pasos en tiempo y espacio $\Delta t > 10^{-3}$ o $N < 2^9$ deshace el daño de la solución numérica y la correspondiente aproximación de las leyes de conservación de la ecuación continua (2.11). Sin embargo condiciones no muy caras para el esquema (2.20) como $\Delta t \approx 10^{-4}$ o $N = 2^9$, garantizan un comportamiento muy preciso y la conservación de (2.11) durante largos intervalos de tiempo, $t \in [0, 500]$, como puede ser observado en las Figs. (2.4) y (2.5).

2.4. Métodos de diferencias finitas y algunos invariantes discretos

Un amplio número de artículos han aparecido en los últimos años investigando la precisión de los métodos de diferencias finitas Refs. [Sha], [HelM1], [HelM2] aplicados a ecuaciones en derivadas parciales dispersivas y no lineales y comparándolas con otro tipo de esquemas discretos como el pseudo-espectral o la descomposición de Adomian. En esta sección no pretendemos desarrollar un análisis profundo y detallado de la precisión de estos métodos ni discutir las ventajas o inconvenientes con respecto a los métodos pseudo-espectrales. El objetivo de esta sección es presentar evidencias de la conexión entre la conservación de algunos invariantes del esquema discreto y la mejora de la convergencia del método numérico a la solución exacta, evitando el comportamiento erróneo de convertir un tipo de solución introducida en la sección 2.2 a otro tipo.

Para implementar un método numérico que aproxime la solución del problema de valor inicial (2.1), primero definimos una malla espacial discretizada de puntos

$$x_n = -L + n\Delta x, \quad n = 1, \dots, N,$$

y el correspondiente vector con la aproximación a la solución en dichos puntos, $U(t) = (U_1(t), \dots, U_N(t))$, donde $U_n(t) \approx u(t, x_n)$. Sea $\mathbf{M}(u) = \mathbf{S}u + \mathbf{B}(u)$ el operador diferencial que concentra las derivadas espaciales de la ecuación mKdV (2.1), donde asumimos como parte lineal $\mathbf{S}(u) = \partial_x^3(u)$ y como la parte no lineal $\mathbf{B}(u) = 3u\partial_x(u^2) = 2\partial_x(u^3)$. Hay varias elecciones posibles para un operador en diferencias finitas $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(\cdot) = -\mathbf{S}_{\mathbf{N}}(\cdot) - \mathbf{B}_{\mathbf{N}}(\cdot)$ que aproxima $\mathbf{M}(\cdot)$ con diferentes órdenes de consistencia. La evolución temporal de las componentes del vector U están gobernadas por el siguiente sistema de EDOs

$$\partial_t U = \mathbf{M}_{\mathbf{N}}(t, U), \tag{2.21}$$

proporcionadas por las condiciones de frontera periódicas (2.12) en $[-L, L]$, que pueden ser escritas como

$$U_{n+jN} = U_n, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq n < N. \tag{2.22}$$

La precisión de la aproximación numérica U con respecto a la solución exacta u depende del orden de consistencia del operador $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}(\cdot)$, que consiste en la suma de algunas matrices a bandas adecuadas. Definimos primero la matriz de diferencias hacia adelante $\mathbf{D}_{\mathbf{1}}^+$, en la cual las únicas componentes no nulas en cada fila son $d_{i,i+1} = 1/\Delta x = -d_{i,i}$, $i = 1, \dots, N$ y $d_{N,1} = 1/\Delta x$ en las esquinas debido a las condiciones periódicas. Representa una aproximación de la derivada espacial $\partial_x u \approx \mathbf{D}_{\mathbf{1}}^+ U$, de primer orden, $O(\Delta x)$. Usando la expresión de la matriz $\mathbf{D}_{\mathbf{1}}^+$ podemos definir las aproximaciones discretas clásicas de las derivadas sucesivas:

1. Diferencias hacia atrás, $\mathbf{D}_{\mathbf{1}}^- = -(\mathbf{D}_{\mathbf{1}}^+)^T$, que aproxima ∂_x con orden $O(\Delta x)$.
2. Diferencias centrales, $\mathbf{D}_{\mathbf{1}}^c = (\mathbf{D}_{\mathbf{1}}^+ + \mathbf{D}_{\mathbf{1}}^-)/2$, que aproxima ∂_x con orden $O(\Delta^2 x)$.
3. Diferencias centrales, $\mathbf{D}_{\mathbf{2}}^c = \mathbf{D}_{\mathbf{1}}^+ \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{1}}^-$, que aproxima ∂_x^2 con orden $O(\Delta^2 x)$.
4. Diferencias centrales, $\mathbf{D}_{\mathbf{3}}^c = \mathbf{D}_{\mathbf{1}}^c \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{2}}^c$, que aproxima ∂_x^3 con orden $O(\Delta^2 x)$.

Es directo comprobar que $\mathbf{D}_{\mathbf{1}}^c$ y $\mathbf{D}_{\mathbf{3}}^c$ son matrices antisimétricas y $\mathbf{D}_{\mathbf{2}}^c$ es una matriz simétrica. Esta observación será importante para garantizar la conservación de algunos invariantes de los esquemas discretos a lo largo del tiempo. Ahora escribimos la parte lineal como

$$\mathbf{S}_{\mathbf{N}} U = \mathbf{D}_{\mathbf{3}}^c U. \tag{2.23}$$

Sin embargo la parte no lineal $\mathbf{B}_{\mathbf{N}}(U)$ admite algunas reescrituras alternativas como

$$\mathbf{B}_{\mathbf{N}}^1(U) = 2\mathbf{D}_{\mathbf{1}}^c U^3 \quad \text{or} \quad \mathbf{B}_{\mathbf{N}}^2(U) = 3\mathbf{U}_{\mathbf{1}} \mathbf{D}_{\mathbf{1}}^c U^2. \tag{2.24}$$

Aquí los vectores U^2 y U^3 están definidos respectivamente por $U^2 = (U_1^2, \dots, U_N^2)$ y $U^3 = (U_1^3, \dots, U_N^3)$ y la matriz $\mathbf{U}_{\mathbf{1}}$ es una matriz diagonal con componentes $u_{ii} = U_i$.

De ahora en adelante suprimiremos la dependencia t en la notación de \mathbf{M}_N debido a la estructura autónoma de la ecuación mKdV.

A continuación, escogeremos un esquema numérico para la discretización temporal, donde $U_n^{(k)} \approx u(x_n, t_k)$ aproxima la solución exacta a tiempo t_k .

Como ya hemos mencionado en la sección previa, el uso de un integrador simpléctico en el paso temporal hacia adelante es conveniente para estos tipos de ecuaciones de evolución. Estos preservan los invariantes lineales y cuadráticos de la ecuación continua hasta donde permite el orden de consistencia del método numérico ([SV], [HLW]). Debido a esto, usamos la regla del punto medio implícita que evalúa el flujo de la ecuación $\mathbf{M}_N^r(U) = -\mathbf{S}_N U - \mathbf{B}_N^r(U)$, $r = 1, 2$, en el vector $U^{(k+\frac{1}{2})} = (U^{(k)} + U^{(k+1)})/2$ localizado entre las aproximaciones en t_k y t_{k+1} ,

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \Delta t \mathbf{M}_N^r \left(U^{(k+\frac{1}{2})} \right) = U^{(k)} - \Delta t \left(\mathbf{S}_N U^{(k+\frac{1}{2})} + \mathbf{B}_N^r \left(U^{(k+\frac{1}{2})} \right) \right), \quad r = 1, 2. \quad (2.25)$$

Estos son finalmente los dos esquemas numéricos implícitos en diferencias finitas que van a ser analizados.

2.4.1. Análisis de la convergencia

Los esquemas en diferencias finitas propuestos anteriormente serán C -estables ([SV]) si la norma logarítmica de los Jacobianos, $\mu_2(\mathbf{M}_N^r(\bar{U}))$, $r = 1, 2$, está acotada independientemente del espaciado del malla de los operadores de evolución para cada \bar{U} perteneciente al segmento entre $U^{k+\frac{1}{2}}$ y $u(x, t + \Delta t/2)$. En ambos casos, considerados en (2.25), esta norma está acotada por $\mu_2(\mathbf{M}_N^r(\bar{U})) \leq \max_n (U_n^{k+\frac{1}{2}})^2$. En [KePV2] se prueba que en el caso continuo esto es cierto para condiciones iniciales U^0 en L^∞ .

Para probar la C -estabilidad de este método implícito consideramos dos diferentes conjuntos de aproximaciones $\{U^{(k)}\}_{k \geq 0}$ y $\{\tilde{U}^{(k)}\}_{k \geq 0}$, asociadas a dos tipos de condiciones iniciales ligeramente diferentes, y una cota para los cuadrados de las soluciones numéricas $|(U_n^{(k+\frac{1}{2})})^2| < \mu$, para todo $k \geq 0$. Entonces

$$U^{(k+1)} - \tilde{U}^{(k+1)} = U^{(k)} - \tilde{U}^{(k)} + \Delta t \left(\mathbf{M}_N^r \left(U^{(k+\frac{1}{2})} \right) - \mathbf{M}_N^r \left(\tilde{U}^{(k+\frac{1}{2})} \right) \right). \quad (2.26)$$

Ahora multiplicando la expresión (2.26) por $(U^{(k+\frac{1}{2})} - \tilde{U}^{(k+\frac{1}{2})})$, y aplicando el teorema del valor medio a \mathbf{M}_N^r , uno obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|U^{(k+1)} - \tilde{U}^{(k+1)}\|^2 &= \frac{1}{2} \|U^{(k)} - \tilde{U}^{(k)}\|^2 + \\ \Delta t \left(\mathbf{M}_N^r \left(U^{(k+\frac{1}{2})} \right) - \mathbf{M}_N^r \left(\tilde{U}^{(k+\frac{1}{2})} \right) \right) \left(U^{(k+\frac{1}{2})} - \tilde{U}^{(k+\frac{1}{2})} \right) &\leq \\ \frac{1}{2} \|U^{(k)} - \tilde{U}^{(k)}\|^2 + \Delta t \mu \|U^{(k+\frac{1}{2})} - \tilde{U}^{(k+\frac{1}{2})}\|^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Usando la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwartz, deducimos que

$$\|U^{(k+1)} - \tilde{U}^{(k+1)}\| \leq \|U^{(k)} - \tilde{U}^{(k)}\| + \frac{\Delta t \mu}{2} \left(\|U^{(k+1)} - \tilde{U}^{(k+1)}\| + \|U^{(k)} - \tilde{U}^{(k)}\| \right)^2. \quad (2.28)$$

Para finalizar la prueba de la C -estabilidad, consideramos la relación

$$\|U^{(k+1)} - \tilde{U}^{(k+1)}\| \|U^{(k)} - \tilde{U}^{(k)}\| \leq \max\{\|U^{(k+1)} - \tilde{U}^{(k+1)}\|^2, \|U^{(k)} - \tilde{U}^{(k)}\|^2\}, \quad (2.29)$$

y ahora podemos tomar factor común de algunos términos para concluir que

$$\|U^{(k+1)} - \tilde{U}^{(k+1)}\| \leq \sqrt{\frac{1 + \mu\Delta t/2}{1 - 3\mu\Delta t/2}} \|U^{(k)} - \tilde{U}^{(k)}\|, \quad 0 \leq 3\mu\Delta t/2 < 1. \quad (2.30)$$

La consistencia del esquema completo después de un paso en tiempo se prueba siguiendo a [SV] definiendo $\hat{U}^{(k+1)} = \hat{U}^{(k+1)} + \Delta t \mathbf{M}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{r}}(\tilde{U}^{(k+\frac{1}{2})})$ como la solución numérica a tiempo t_{k+1} siendo $\hat{U}^{(k)} = u(t_k)$ la solución exacta. Entonces, el error global es

$$\beta(t_{k+1}) = \hat{U}^{(k+1)} - u(t_{k+1}) \quad (2.31)$$

Definiendo los errores de truncatura correspondientes a la regla del punto medio y la regla del trapecio respectivamente como

$$\begin{aligned} d_1(t_{k+1}) &= u(t_k) - u(t_{k+1}) + \Delta t \mathbf{M}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{r}} \left(\frac{u(t_k) + u(t_{k+1})}{2} \right), \\ d_2(t_{k+1}) &= u(t_k) - u(t_{k+1}) + \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{M}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{r}}(u(t_k)) + \mathbf{M}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{r}}(u(t_{k+1})) \right], \end{aligned} \quad (2.32)$$

el error de truncatura puede ser escrito como

$$\beta(t_{k+1}) = d_1(t_{k+1}) + \Delta t \left[\mathbf{M}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{r}} \left(\frac{u(t_k) + \hat{U}^{(k+1)}}{2} \right) - \mathbf{M}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{r}} \left(\frac{u(t_k) + u(t_{k+1})}{2} \right) \right]. \quad (2.33)$$

Ahora usando de nuevo el teorema del valor medio sobre el funcional $\mathbf{M}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{r}}$, multiplicando (2.33) por $\hat{U}^{(k+1)} - u(t_{k+1})$ y usando la desigualdad de Hölder, llegamos a

$$\|\hat{U}^{(k+1)} - u(t_{k+1})\|_2 \leq \left(1 - \frac{\mu\Delta t}{2}\right)^{-1} \|d_1(t_{k+1})\|_2, \quad \mu\Delta t < 2. \quad (2.34)$$

Para completar este argumento se puede deducir haciendo un desarrollo de Taylor que, para u suficientemente diferenciable, la función d_1 se puede acotar como $\|d_1(t_{k+1})\|_2 = O(\Delta^3 t + \Delta t \Delta^2 x)$ y consecuentemente para $0 \leq \mu\Delta t < 1$

$$\frac{\|\beta(t_{k+1})\|_2}{\Delta t} = O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2). \quad (2.35)$$

Este resultado nos da finalmente la prueba de la convergencia de estos esquemas para un intervalo temporal dado $[0, T]$ cuando los pasos Δx y Δt se escogen suficientemente pequeños dependiendo de T . Pero como veremos después, esta afirmación no previene al método de corromper las soluciones para intervalos de tiempo más largos.

2.4.2. Invariantes discretos

En la literatura existen varios trabajos en donde se enfatiza la importancia de diseñar un método numérico que preserve los invariantes relacionados con las leyes de conservación del modelo continuo. Para este propósito se han diseñado diferentes estrategias como la integración geométrica [SC] o los métodos de proyección [Hai]. En esta sección investigamos la importancia de la conservación de algunas de estas cantidades discretas por medio de esquemas de discretización espacial (2.21) y por medio de esquemas completos de discretización (2.25) en la estabilidad de la solución numérica correspondientes a cada una de las condiciones iniciales de las familias de funciones (2.5) y (2.9).

Centraremos nuestro análisis en la conservación de las siguientes cantidades, las cuales son la aproximación discreta de los invariantes continuos (2.11) de la ecuación mKdV, por las discretizaciones (2.25) presentadas en la sección previa.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(U) &= \Delta x \sum U_n \approx I(u), \\ \mathcal{L}_2(U) &= \Delta x \sum^n (U_n)^2 = \langle U, U \rangle \approx \|u\|^2, \\ \mathcal{L}_3(U) &= \Delta x \sum^n [(U_n)^4 - (U_n - U_{n-1})^2] = \langle U^2, U^2 \rangle - \langle \mathbf{D}_1^+ U, \mathbf{D}_1^+ U \rangle \approx E(u).\end{aligned}\tag{2.36}$$

Los dos esquemas discretos propuestos en la sección anterior presentan interesantes ventajas con respecto a la conservación de los invariantes discretos (2.36). El primer esquema, $U^{(k+1)} = U^{(k)} + \Delta t \mathbf{M}_N^1(U^{(k+\frac{1}{2})})$, preserva el invariante lineal $\mathcal{L}_1(U^k)$, $\forall k \geq 0$,

$$\mathcal{L}_1(U^{(k+1)}) = \mathcal{L}_1(U^{(k)}) + \Delta t \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_N^1(U^{(k+\frac{1}{2})})) = \mathcal{L}_1(U^{(k)}).\tag{2.37}$$

Aquí hemos usado que la suma de las componentes de las columnas de las matrices \mathbf{S}_N y \mathbf{B}_N^1 implicadas en la definición de \mathbf{M}_N^1 es 0, consecuentemente $\mathcal{L}_1(\mathbf{M}_N^1(U^{(k+\frac{1}{2})})) = 0$. Esta propiedad no se satisface por el segundo esquema $U^{(k+1)} = U^{(k)} + \Delta t \mathbf{M}_N^2(U^{(k+\frac{1}{2})})$, sin embargo esta discretización preserva $\mathcal{L}_2(U^k)$, $\forall k \geq 0$, como se muestra fácilmente,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(U^{(k+1)}) &= \langle U^{(k+1)}, U^{(k+1)} \rangle = \langle U^{(k)} + U^{(k+1)} - U^{(k)}, U^{(k)} + U^{(k+1)} - U^{(k)} \rangle \\ &= \mathcal{L}_2(U^{(k)}) + \langle U^{(k+1)} - U^{(k)}, U^{(k)} + U^{(k+1)} \rangle + \langle U^{(k)}, U^{(k+1)} - U^{(k)} \rangle \\ &+ \langle U^{(k+1)} - U^{(k)}, U^{(k)} \rangle = \mathcal{L}_2(U^{(k)}) + \frac{\Delta t}{2} \langle \mathbf{M}_N^2(U^{(k+\frac{1}{2})}), U^{(k+\frac{1}{2})} \rangle = \mathcal{L}_2(U^{(k)}).\end{aligned}\tag{2.38}$$

La última simplificación surge a partir de la antisimetría de las matrices \mathbf{S}_N y $\mathbf{B}_N^2(U)$ implicadas en la definición de \mathbf{M}_N^2 .

Los invariantes lineales y cuadráticos mostrados arriba son todos los que podemos esperar que sean preservados por un método simpléctico a lo largo de los pasos temporales y su precisión numérica será del mismo orden que la tolerancia impuesta sobre la solución numérica del sistema no lineal (2.25). Además podemos probar que la discretización espacial $\partial_t U = \mathbf{M}_N^1(U)$ mantendría a lo largo del tiempo el invariante $\mathcal{L}_3(U)$ sobre la solución exacta

del sistema 2.21.

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathcal{L}_3(U) &= \partial_t (\langle U^2, U^2 \rangle - \langle \mathbf{D}_1^+ U, \mathbf{D}_1^+ U \rangle) = 4 \langle \partial_t U, U^3 \rangle - 2 \langle \mathbf{D}_1^+ \partial_t U, \mathbf{D}_1^+ U \rangle \\
 &= 4 \langle \partial_t U, U^3 \rangle + 2 \langle (\partial_t U^T \mathbf{D}_1^-), \mathbf{D}_1^+ U \rangle = 2 \langle \partial_t U, (2U^3 + \mathbf{D}_2^c U) \rangle \\
 &= -2 \langle \mathbf{D}_3^c U + 2\mathbf{D}_1^c U^3, (2U^3 + \mathbf{D}_2^c U) \rangle \\
 &= -2 [2 \langle \mathbf{D}_3^c U, U^3 \rangle + \langle \mathbf{D}_3^c U, \mathbf{D}_2^c U \rangle + 4 \langle \mathbf{D}_1^c U^3, U^3 \rangle + 2 \langle \mathbf{D}_1^c U^3, \mathbf{D}_2^c U \rangle] \\
 &= -2 [2 \langle \mathbf{D}_3^c U, U^3 \rangle - \langle U, \mathbf{D}_3^{cT} \mathbf{D}_2^c U \rangle + 4 \langle \mathbf{D}_1^c U^3, U^3 \rangle + -2 \langle U^3, \mathbf{D}_1^c \mathbf{D}_2^c U \rangle] = 0.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

En la última reducción hemos usado que \mathbf{D}_1^c y $\mathbf{D}_3^{cT} \mathbf{D}_2^c$ son matrices antisimétricas y $\mathbf{D}_1^{cT} \mathbf{D}_2^c = -\mathbf{D}_1^c \mathbf{D}_2^c = -\mathbf{D}_3^c$. Esta propiedad no la posee el otro esquema $\partial_t U = \mathbf{M}_N^2(U)$. Resumiendo, la discretización espacial $\partial_t U = \mathbf{M}_N^1(U)$ preserva los invariantes $\mathcal{L}_1(U)$ y $\mathcal{L}_3(U)$. El primero de ellos también es preservado por la discretización completa en tiempo por la regla del punto medio. Por otra parte la discretización completa en espacio-tiempo correspondiente a $\mathbf{M}_N^2(U)$ preserva $\mathcal{L}_2(U)$. Las consecuencias de este resultado sobre la estabilidad de las soluciones numéricas del tipo (2.9) a lo largo de grandes intervalos de tiempo serán discutidas en la próxima sección.

2.4.3. Implementación del esquema numérico

En esta sección describiremos la implementación de los esquemas (2.25) para obtener aproximaciones de las soluciones polo doble (2.9) de la ecuación mKdV. Los resultados serán comparados con la solución exacta para medir la eficiencia de los métodos numéricos y para obtener conclusiones.

El carácter implícito de los esquemas hace necesario aplicarlos junto con un método numérico para resolver sistemas de ecuaciones no lineales como una iteración de punto fijo [Buc]. Primero reescribimos el método general (2.25) como una suma de sus partes lineal y no lineal,

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \Delta t \mathbf{M}_N^r \left(U^{(k+\frac{1}{2})} \right) = U^{(k)} - \Delta t \left[\mathbf{S}_N U^{(k+\frac{1}{2})} + \mathbf{B}_r \left(U^{(k+\frac{1}{2})} \right) \right], \quad r = 1, 2. \tag{2.40}$$

El paso temporal Δt en (2.40) debería ser escogido suficientemente pequeño para asegurar que el operador $\Delta t \mathbf{M}_N^r(U^{k+\frac{1}{2}})$ es contractivo con respecto a $U^{(k+1)}$. En la práctica, el tamaño del mallado $\Delta x = 1/N$ impone una elección muy restrictiva de Δt para mantener la norma de $\|\Delta t \mathbf{S}_N\| = O(N^3 \Delta t)$ inferior a 1. Esta circunstancia sugiere tratar el término implícito u_{xxx} como en [chan85] reemplazando el esquema (2.40) por la siguiente fórmula cuya norma es independiente de N ,

$$U^{(k+1)} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{S}_N \right)^{-1} \left[\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{S}_N \right) U^{(k)} - \Delta t \mathbf{B}_r \left(U^{(k+\frac{1}{2})} \right) \right]. \tag{2.41}$$

Cuando se escoge una condición inicial tipo polo doble (2.9), los resultados de las simulaciones caen dentro de una *casuística*, y nos desvelan la naturaleza inestable de este tipo

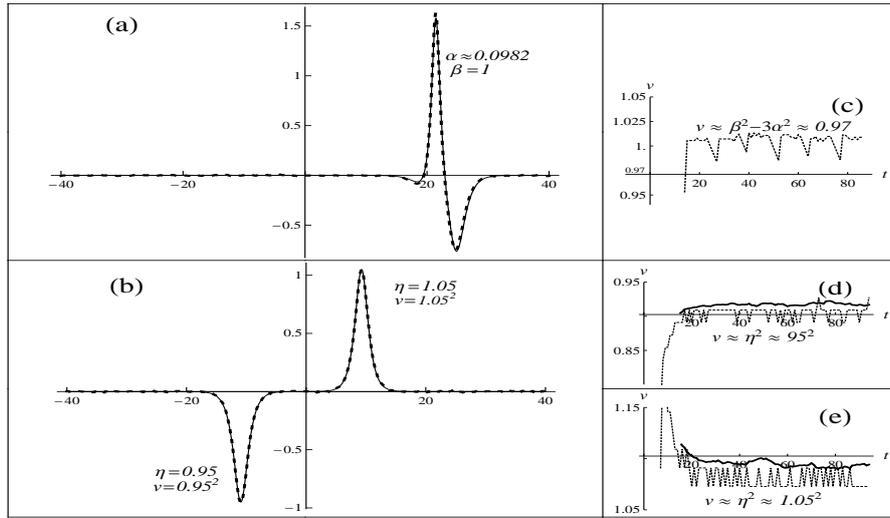


Figura 2.6. (a) Aproximación de diferencias finitas por M_N^2 del polo doble ($\beta = 1$) para $\Delta t = 4 \cdot 10^{-2}$ y $\Delta x = 10^{-1}$ (puntos) frente a un breather exacto de mKdV para $\alpha = 0.0982$ y $\beta = 1$ (línea continua). (b) Lo mismo para $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$ frente a dos solitones exactos de mKdV con amplitudes $\nu = 0.95$ y $\nu = 1.05$.

de soluciones en el caso continuo. Como fue mencionado en la introducción, este caso particular está relacionado con el hecho de que el coeficiente de reflexión de la formulación del método de scattering inverso tiene un polo de orden 2 en el plano complejo [W]. Este es por tanto un caso degenerado con respecto al caso de dos polos imaginarios $i\beta_1 \approx i\beta_2$, que correspondería al caso de dos solitones independientes, explícitamente expresados en (2.2), con amplitudes ligeramente diferentes β_j , $j = 1, 2$ y velocidades. Al mismo tiempo, es también un caso degenerado con respecto al límite de las soluciones tipo breather de mKdV (2.5) cuando α tiende a 0.

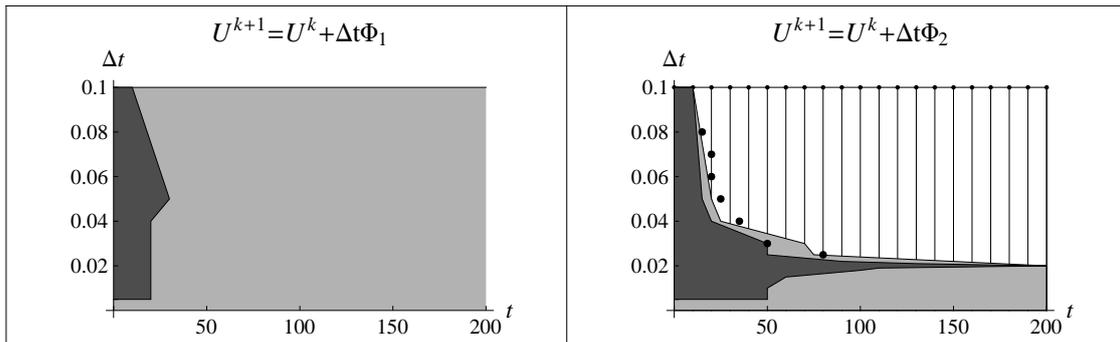


Figura 2.7. Evolución de la solución por diferencias finitas ($\Delta x = 10^{-1}$) para diferentes Δt y M_N^1 discretizaciones (izda.) o M_N^2 (dcha.), desde un polo doble (regiones oscuras) a dos solitones independientes (regiones grises) o un breather con baja oscilación (región a rayas). Los puntos grandes indican cuando \mathcal{L}_3 oscila abruptamente.

Este complejo escenario, donde tipos de soluciones estructuralmente diferentes se distinguen por el ligero cambio en la elección de los parámetros α y β , es capturado por el

comportamiento de las aproximaciones producidas por los métodos de diferencias finitas. Observamos los siguientes fenómenos:

a) La solución polo doble se aproxima durante largos intervalos de tiempo usando la discretización \mathbf{M}_N^2 en vez de usando la discretización \mathbf{M}_N^1 cuando el paso temporal $\Delta t \approx 0.02$ es escogido (región oscura en Fig. (2.7)).

b) Después de alcanzar un tiempo de transición, la forma del polo doble es atrapada por las órbitas de dos solitones independientes cuando se emplea la discretización espacial \mathbf{M}_N^1 o cuando se emplea la discretización \mathbf{M}_N^2 con un paso temporal demasiado pequeño (región gris en Fig. 2.7). Un ejemplo de este cambio de fase se muestra en Fig. 2.6 (b), donde una discretización espacial \mathbf{M}_N^2 con $\Delta t = 10^{-2}$, provoca que la forma del polo doble inicial sea capturada por dos solitones independientes con amplitudes $\beta = 0.95$ y $\beta = 1.05$. Un comportamiento similar se habría obtenido para la discretización \mathbf{M}_N^1 con cualquier paso temporal después de un intervalo de tiempo prudencial $T > 50$.

c) Cuando se usa la discretización espacial \mathbf{M}_N^2 junto con un paso temporal no muy pequeño ($\Delta t > 0.02$), entonces la solución polo doble original, después de atravesar la forma de dos solitones independientes durante un corto periodo de tiempo, conduce a la solución breather con un pequeño parámetro α (región a rayas en Fig. 2.7). Este salto sobre la forma de la solución es detectada al mismo tiempo por una discontinuidad de la energía $\mathcal{L}_3(U)$ como se muestra por la posición de los puntos grandes en la derecha del diagrama de Fig. 2.7. El uso de una discretización \mathbf{M}_N^1 evita este comportamiento patológico debido a la conservación intrínseca de la energía. Un ejemplo de la captura de la órbita de la solución (2.5) con parámetro $\alpha = 0.0982$ se muestra en 2.6 (a).

La conclusión de esta sección sugiere que conservar la media \mathcal{L}_1 y la energía \mathcal{L}_3 evita que la solución numérica del polo doble salte de la órbita del breather en el espacio de fases de soluciones. Este comportamiento patológico es causado especialmente por el empleo de la discretización \mathbf{M}_N^2 junto con una elección tosca del paso temporal Δt . Por otra parte la discretización para \mathbf{M}_N^2 garantiza buenos resultados para intervalos de tiempo más largos que \mathbf{M}_N^1 cuando se escoge un Δt suficientemente pequeño. Esto significa que la conservación de la norma discreta \mathcal{L}_2 es una propiedad importante a ser tenida en cuenta por un método numérico que reproduzca el comportamiento de la solución para simulaciones a tiempos largos.

Capítulo 3

Breathers geométricos de la mKdV y evolución de curvas planas

*And as I neared the end of my twenties,
I was finally able to take a breather.*

H.Murakami "*What I talk about when I talk about running*"

Sumario. En este capítulo, nos apoyamos en las conclusiones de capítulo anterior, para, usando el método pseudo-espectral, realizar simulaciones a tiempos largos, tomando como datos iniciales las soluciones de media no nula de la ecuación mKdV atractiva que hemos encontrado, y que son especialmente adecuadas para describir la evolución, bajo el flujo geométrico de la mKdV, de perturbaciones localizadas a lo largo de curvas cerradas. Para ello, caracterizamos estas soluciones de media no nula de la mKdV atractiva, que hemos llamado b-breathers. Posteriormente, precisaremos la estabilidad de estas curvas cerradas, lo que nos permitirá centrarnos en la búsqueda de curvas iniciales cerradas para el flujo geométrico dado por la mKdV atractiva. Con estas curvas iniciales realizamos simulaciones a tiempos largos de la evolución de perturbaciones localizadas que viajan a lo largo de un círculo.

3.1. Introducción

En este capítulo presentamos evidencias numéricas sobre la existencia de una nueva familia de soluciones de la ecuación mKdV geométrica

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial s^3} + \frac{3}{2}k^2 \frac{\partial k}{\partial s} = 0. \quad (3.1)$$

Esta ecuación geométrica está relacionada con la dada en (1) (pág. III) mediante un factor 2 de conversión entre las soluciones de ambas ecuaciones. Si $k(s, t)$ denota la curvatura y s el parámetro de longitud de arco, la anterior EDP es la ecuación de evolución de la

curvatura del flujo geométrico de curvas planas $z(s, t) = x(s, t) + iy(s, t) \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = (-i\frac{\partial k}{\partial s}(s, t) - \frac{1}{2}k(s, t)^2)\frac{\partial z}{\partial s}(s, t) \\ z(s, 0) = z_0, \\ |z_s|^2 = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Como ya indicamos en la introducción, este flujo geométrico fue introducido por primera vez por R.Goldstein y D.Petrich en [GoP1].

En este capítulo nos dirigimos a la cuestión de encontrar soluciones de (3.1) que sean la curvatura de curvas cerradas de (3.2) y que también puedan generar autointersecciones a partir de una curva inicialmente simple (ver figura 3.9, pág. 98).

Los principales resultados de este capítulo son: la expresión explícita de las soluciones de la mKdV atractiva, tipo breather de media no nula, obtenida mediante un método de Hirota modificado (ver 3.2.2, pág.75) y mediante el método de scattering inverso (ver 3.2.1 y en concreto, la fórmula (3.55) en pág.74, por expresar de manera simple, una solución como el breather de media no nula). La teoría de existencia global del flujo geométrico de la mKdV para datos iniciales suficientemente regulares (ver 3.2.3, pág. 85). También varios ejemplos de curvas con perturbaciones localizadas (ver 3.3.1, pág. 87) en especial destacamos aquellas perturbaciones que viajan, bajo el flujo de la mKdV atractiva, generando autointersecciones que se crean y destruyen de manera periódica (ver 3.3.3 y 3.9 en pág.96 y siguientes). Hasta donde tenemos noticia, esta es la primera vez que se obtienen curvas con perturbaciones localizadas que, siendo inicialmente simples evolucionan bajo el flujo geométrico de la mKdV (3.2) creando y destruyendo autointersecciones de forma periódica mientras viajan a lo largo de la curva. Durante esta evolución, bajo el flujo geométrico de la mKdV, se mantiene la topología inicial de la curva como ya indicamos en la introducción (ver fig.2, pág.XIV), por lo que como consecuencia de la conservación del número de vueltas (determinado por $1/2\pi \int_{-L}^L k(s, t)ds$), no se crea un único cruce a partir de la curva inicialmente simple sino que siempre aparece un número par de autointersecciones recorridas en sentidos inversos (ver figura 3.9, pág.98).

El procedimiento más directo para encontrar curvas cerradas simples de (3.2) es buscar ondas viajeras de mKdV (3.1) que sean periódicas con integral sobre el periodo igual a 2π , y tal que z se periódica. Esto se expone en el trabajo de [DoWe], en donde los autores también hablan de las soluciones breather (7), obtenidas por M.Wadati en [W]. Nuestro principal interés se centra en esta clase de soluciones, que están definidas en toda la recta real y cualitativamente describen paquetes de onda determinados por la amplitud de la envolvente y la frecuencia de la onda portadora. Como ya hemos indicado, la clase de las soluciones breather (7) (pág. VI) está caracterizada por medio de cuatro parámetros reales (α, β, s_0, t_0), y que recordamos es

$$k(s, t) = -2i \frac{\partial}{\partial s} \log \left(\frac{f(u) + ig(v)}{f(u) - ig(v)} \right) = 4 \frac{\partial}{\partial s} \arctan \left(\frac{g(v)}{f(u)} \right), \quad (3.3)$$

con $u = \beta(s - s_0) + \gamma(t - t_0)$, $v = \alpha(s - s_0) + \delta(t - t_0)$, $\gamma = \beta(-\beta^2 + 3\alpha^2)$, $\delta = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)$, y f, g dadas por

$$f(u) = \cosh(u), \quad (3.4)$$

$$g(v) = \frac{\beta}{\alpha} \sin \left(v - \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right). \quad (3.5)$$

En esta expresión hemos usado el parámetro α para la frecuencia y β para la amplitud. Si fijamos el parámetro β , se pueden considerar dos casos de interés.

El primero de los casos corresponde a escoger $\alpha \gg \beta$ o equivalentemente $\frac{\beta}{\alpha} \ll 1$. De esta forma las soluciones se pueden aproximar por

$$k(x, t) \sim 4\beta \operatorname{sech} [\beta x + \gamma t] \cos \left[\alpha x + \delta t - \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right]. \quad (3.6)$$

La segunda posibilidad es hacer tender α a cero. En este caso, la correspondiente solución se comporta, para tiempos grandes, como la superposición de dos extremos diferenciados (o jorobas), uno apuntando hacia arriba y otro hacia abajo. Esta solución es la solución polo doble (2.9) (pág. 45) obtenida por M.Wadati et al. en [OW].

Observar que de (3.3), la solución tiende a cero en el infinito y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x, t) dx = 0. \quad (3.7)$$

Por tanto no es posible usar esta familia de soluciones como punto de partida para construir curvas cerradas simples a partir de (3.2). Pero modificando el comportamiento en infinito (en la variable espacial) de estas soluciones y convirtiéndolo en una constante diferente de cero, podríamos modular el valor de la integral (3.7) en un intervalo finito hasta conseguir que sea igual a 2π . Observar que cualquier constante b es una solución particular de (3.1). De hecho, uno ingenuamente podría pensar que debería existir una solución construida como superposición de esta solución trivial y la solución breather. Este es el contenido de las secciones 3.2.1 y 3.2.2, en donde empleando el método de scattering inverso y un método de Hirota modificado, respectivamente, somos capaces de encontrar explícitamente las soluciones breather de la ecuación mKdV atractiva (3.1) que tienden a una constante en infinito. Esta familia de soluciones contiene un parámetro real extra b que proporciona el valor asintótico de la curvatura en infinito. Si para un valor de β fijo consideramos como antes los dos casos límites $\alpha \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$, obtenemos correspondientemente una constante más la función dada en (3.6) o la solución polo doble dada por (2.9) o (3.103), respectivamente. Como consecuencia directa de esto, la integral en (3.7) es infinita en estos ejemplos.

Una cuestión natural es la existencia de las soluciones tipo breather periódico. La respuesta fue dada recientemente por P.Kevrekidis, A. Khare y A. Saxena en [KKS1] y [KKS2].

Desafortunadamente las soluciones que ellos obtienen son las análogas a las soluciones de M.Wadati, y éstas tienen media cero. Por tanto no pueden ser la curvatura de curvas cerradas simples. Hasta donde sabemos, las soluciones tipo breather periódico de media no nula son desconocidas. De hecho, no hemos sido capaces hasta ahora de encontrar soluciones similares a las exhibidas en la sección 3.2.1 o en la Proposición 3.2.1, pero siendo periódicas. Pensamos que esta es una cuestión interesante y que es muy posible que la respuesta sea cierta. La razón para esta certeza la damos en la sección 3.3 (pág. 86), en donde desarrollamos experimentos numéricos apuntando hacia una respuesta positiva de la cuestión anterior.

En estos experimentos consideramos b-breathers con diferentes valores de la frecuencia α y tratamos de obtener curvas cerradas a partir de estas curvaturas tipo breather, empleando distintos métodos para lograr cerrar la curva inicial de forma diferenciable, como exponemos en 3.3.2, pág.88. Si α es mayor que 1, tenemos una curva formada por un breather que viaja a lo largo de un círculo de radio $\approx 1/b$. Si $0 < \alpha$ es más pequeño que un cierto valor crítico (menor que 1), la curva comienza a tener autointersecciones en la región en la que el paquete de ondas está soportado. De hecho, en el caso de la solución polo doble (i.e. $\alpha = 0$), la curva (ver fig.3.12, pág.100) tiene autointersecciones permanentes y es inicialmente la superposición de dos curvas. Una tiene la forma de dos lazos consecutivos (tipo ocho) y la otra es un círculo. Esta curva en forma de ocho es consecuencia directa del solapamiento de los dos extremos diferenciados (jorobas) de la curvatura a $t = 0$. Para tiempos largos, esta curva con dos lazos consecutivos (tipo ocho) se desacopla en un par lazo-antilazo que viaja a lo largo del círculo. Este caso límite (i.e. $\alpha = 0$) sugiere estudiar qué ocurre para valores de α cercanos al valor crítico. Esto es lo que denominamos el caso intermedio y lo desarrollaremos en la sección 3.3.3 (pág.96). El hecho interesante es que hay valores de α para los cuales las intersecciones de la curva aparecen y desaparecen a intervalos periódicos de tiempo. Hasta donde sabemos, éste es el primer resultado conocido en esta dirección. De hecho no tenemos noticia de ningún resultado teórico o experimental sobre la existencia de curvas que, bajo el flujo de la mKdV, sean inicialmente curvas cerradas simples y que desarrollen autointersecciones en tiempos posteriores. En este capítulo también incluimos algunos experimentos de colisión de nuestras soluciones periódicas breather construidas numéricamente. La conclusión como veremos, es de nuevo, que la colisión es muy estable.

La estabilidad de nuestras simulaciones numéricas está apoyada en el Teorema 3.2.1 (pág.86) donde probamos que tenemos una teoría de existencia global para el problema de valor inicial del flujo de curvas (3.2) con datos iniciales suficientemente regulares y periódicos. Esto nos permitirá centrarnos en la construcción de curvas iniciales cerradas a partir de las curvaturas (3.1) y (3.103). Como veremos, los breathers son notablemente estables numéricamente si, como hacemos en este trabajo, empleamos un método pseudo-espectral.

3.2. Resultados teóricos

En esta sección exponemos los resultados teóricos que necesitaremos en nuestros experimentos numéricos. En el primer resultado, presentamos dos formas independientes de comprobar que los breathers con un valor constante en el infinito son soluciones de la ecuación mKdV atractiva.

La primera forma es una prueba constructiva, empleando el método de scattering inverso para potenciales que decaen asintóticamente como una constante b introducido por T.Kawata y H.Inoue y que presentamos en los preliminares 1.2, para construir explícitamente los breathers con un valor constante en el infinito. Hasta donde sabemos, la construcción mediante el método de scattering inverso de este tipo de soluciones breathers de soporte no acotado era desconocida.

La segunda forma es una prueba directa y alternativa, empleando el método de Hirota [AS, p.201] para combinaciones de funciones trigonométricas e hiperbólicas, en vez de funciones exponenciales con una elección adecuada de sus números de onda. Consideramos que esta prueba simplifica y clarifica el cálculo de este tipo de soluciones con 3 parámetros libres (5 si contamos traslaciones en tiempo y espacio).

El segundo resultado teórico es una aplicación directa de un trabajo de J.Bourgain [B], y en él probamos que tenemos una teoría de existencia global para el PVI del flujo geométrico de la mKdV (3.2) con condiciones iniciales suficientemente diferenciables.

3.2.1. Obtención del solitón y breather de la mKdV atractiva con valor constante no trivial en infinito mediante el método de scattering inverso.

Una vez que hemos explicado el método de scattering inverso a partir del trabajo de T.Kawata y H.Inoue, nos proponemos ahora construir a partir del mismo las soluciones solitón y breather de la ecuación mKdV atractiva que toman un valor constante " b ", en la frontera del dominio de definición (en nuestro caso \mathbb{R}):

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0, \quad u \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} b. \quad (3.8)$$

Esta solución deberá reducirse a las soluciones ya conocidas del solitón y breather de mKdV atractiva cuando el parámetro asintótico $b \rightarrow 0$. Para ello, recurrimos al método de scattering inverso para potenciales que no se anulan en el borde del dominio de definición, tal y como fue desarrollado por T.Kawata y H.Inoue [IK] y como avanzamos en los preliminares 1.2(pág.27), teoría que mejoraba el primer intento realizado por V.Zakharov y A.Shabat [ZaS] en los años 70, tratando la ecuación de Schrödinger no lineal bajo condiciones de frontera no nulas.

Ya sabemos que escogiendo $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 = 2ib^2$, $a_3 = -4i$, y $r = -q$, en la ecuación (1.22) (pág.29) generamos la ecuación mKdV atractiva. Por ello, primero, calculamos la dependencia temporal de la matriz de scattering para el caso de la mKdV atractiva. A partir de (1.26) y fijando los valores $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 = 2ib^2$, $a_3 = -4i$, la evolución temporal es:

$$\begin{aligned} S_{11}(\lambda, \zeta; t) &= S_{11}(\lambda, \zeta; 0), & S_{12}(\lambda, \zeta; t) &= S_{12}(\lambda, \zeta; 0)e^{-4i\zeta(2\lambda^2 - b^2)t}, \\ S_{21}(\lambda, \zeta; t) &= S_{21}(\lambda, \zeta; 0)e^{4i\zeta(2\lambda^2 - b^2)t}, & S_{22}(\lambda, \zeta; t) &= S_{22}(\lambda, \zeta; 0). \end{aligned}$$

Ahora, asumiendo que los de ceros de $S_{11}(\lambda, \zeta; 0)$ en la región $Im\zeta > 0$ son (λ_j, ζ_j) , $j = 1, 2$ donde

$$\zeta_j = \sqrt{\lambda_j^2 + b^2}, \quad j = 1, 2, \quad (3.9)$$

la ecuación de Gelfand-Levitan (1.34) para $K^+(x, y)$ (análoga para K^-) es

$$\begin{aligned} K^+(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} c_j \\ \tilde{c}_j \end{pmatrix} e^{i\zeta_j(x+y)} - H_c(x+y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ - \int_x^{+\infty} K^+(x, y') \sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} c_j \\ \tilde{c}_j \end{pmatrix} e^{i\zeta_j(y+y')} dy' + \int_x^{+\infty} K^+(x, y') H_c(x+y') \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dy' = 0, \quad y > x, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde :

$$c_j = \frac{i}{2}(\lambda_j - \zeta_j)m(\lambda_j)e^{4i\zeta_j(2\lambda_j^2 - b^2)t}, \quad (3.11)$$

$$\tilde{c}_j = \frac{b}{2}m(\lambda_j)e^{4i\zeta_j(2\lambda_j^2 - b^2)t}, \quad (3.12)$$

$$m(\lambda) = \frac{S_{21}(\lambda, \zeta; 0)}{\zeta \frac{d}{d\lambda} S_{11}(\lambda, \zeta; 0)}. \quad (3.13)$$

Ahora, usando (1.36), (1.38) y (3.13) obtenemos las siguientes relaciones para la mKdV atractiva

$$\left(\frac{q^-}{q^+}\right)S_{11}(\lambda, \zeta) = S_{11}(-\lambda, \zeta) \quad (3.14)$$

y

$$m(-\lambda) = m(\lambda), \quad (3.15)$$

donde λ y $-\lambda$ están en diferentes hojas de Riemann.

También usando (1.38) y (1.39) obtenemos el comportamiento de m bajo conjugación compleja

$$m(-\lambda^*) = m(\lambda)^*. \quad (3.16)$$

A partir de (3.14) concluimos que si λ es un cero de S_{11} en una hoja de Riemann, entonces $-\lambda$ es también un cero de S_{11} en otra hoja de Riemann. Resolvemos ahora la ecuación de Gelfand-Levitan (3.10) con las siguientes suposiciones:

a.) la componente continua

$$H_c(y; 0) = 0. \quad (3.17)$$

b.) $S_{11}(\lambda, \zeta)$ tiene 2×2 ceros en la región $Im\zeta > 0$, específicamente, (λ_j, ζ_j) y $(-\lambda_j, \zeta_j)$, $j = 1, 2$ donde

$$\zeta_j = \sqrt{\lambda_j^2 + b^2}, \quad \lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = -\lambda_1^* = -\alpha + i\beta. \quad (3.18)$$

A partir de la ecuación (3.15), tenemos que $m(-\lambda_j) = m(\lambda_j)$, y dado que λ_j , $j=1,2$ es un número complejo, $m(\lambda_j)$, $j=1,2$ es también complejo y denotaremos su complejo conjugado por m^* . Sustituyendo la ecuación (3.17) y la distribución de los ceros de S_{11} dada por (3.18) en las ecuaciones (3.10),(3.11) y (3.12), obtenemos

$$\begin{aligned} K^+(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} -i\zeta_j m(\lambda_j) e^{4i\zeta_j(2\lambda_j^2 - b^2)t} \\ bm(\lambda_j) e^{4i\zeta_j(2\lambda_j^2 - b^2)t} \end{pmatrix} e^{i\zeta_j(x+y)} \\ - \int_x^{+\infty} K^+(x, y') \sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} -i\zeta_j m(\lambda_j) e^{4i\zeta_j(2\lambda_j^2 - b^2)t} \\ bm(\lambda_j) e^{4i\zeta_j(2\lambda_j^2 - b^2)t} \end{pmatrix} e^{i\zeta_j(y+y')} dy' = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ahora, tomando una representación de $\begin{pmatrix} K_{12}^+ \\ K_{22}^+ \end{pmatrix}$ como

$$\begin{pmatrix} K_{12}^+(x, y) \\ K_{22}^+(x, y) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^2 \begin{pmatrix} K_j(x) \\ \tilde{K}_j(x) \end{pmatrix} e^{i\zeta_j y}, \quad (3.20)$$

entonces

$$K^+(x, y) = \begin{pmatrix} K_{11}^+(x, y) & K_{12}^+(x, y) \\ K_{21}^+(x, y) & K_{22}^+(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{22}^+(x, y) & K_{12}^+(x, y) \\ -K_{12}^+(x, y) & K_{22}^+(x, y) \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

donde la última igualdad se sigue de (1.37), lo que implica que

$$\begin{pmatrix} K_{11}^+ \\ K_{21}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{22}^+ \\ -K_{12}^+ \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Ahora, reemplazando las ecuaciones (3.20) y (3.21) en (3.19), obtenemos el sistema

$$K_j(x) + \sum_{k=1}^2 K_k(x) \tilde{a}_j \frac{e^{i(\zeta_j + \zeta_k)x}}{i(\zeta_j + \zeta_k)} + \sum_{k=1}^2 \tilde{K}_k(x) a_j \frac{e^{i(\zeta_j + \zeta_k)x}}{i(\zeta_j + \zeta_k)} + a_j e^{i\zeta_j x} = 0, \quad (3.23)$$

$$\tilde{K}_j(x) + \sum_{k=1}^2 \tilde{K}_k(x) \tilde{a}_j \frac{e^{i(\zeta_j + \zeta_k)x}}{i(\zeta_j + \zeta_k)} - \sum_{k=1}^2 K_k(x) a_j \frac{e^{i(\zeta_j + \zeta_k)x}}{i(\zeta_j + \zeta_k)} + \tilde{a}_j e^{i\zeta_j x} = 0,$$

donde

$$a_j = -i\zeta_j m(\lambda_j) e^{4i\zeta_j(2\lambda_j^2 - b^2)t}, \quad \tilde{a}_j = bm(\lambda_j) e^{4i\zeta_j(2\lambda_j^2 - b^2)t}. \quad (3.24)$$

Podemos reescribir el sistema (3.23) de forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} E & B \\ -B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{K} \\ \vec{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

donde $\vec{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$, $\vec{K} = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1 \\ \tilde{K}_2 \end{pmatrix}$, $\vec{A} = \begin{pmatrix} -a_1 e^{i\zeta_1 x} \\ -a_2 e^{i\zeta_2 x} \end{pmatrix}$, $\vec{A} = \begin{pmatrix} -\tilde{a}_1 e^{i\zeta_1 x} \\ \tilde{a}_2 e^{i\zeta_2 x} \end{pmatrix}$,

$$E = (E_{jk}) = \delta_{jk} + \tilde{a}_j \frac{e^{i(\zeta_j + \zeta_k)x}}{i(\zeta_j + \zeta_k)}, \quad j, k = 1, 2, \quad (3.26)$$

$$B = (B_{jk}) = a_j \frac{e^{i(\zeta_j + \zeta_k)x}}{i(\zeta_j + \zeta_k)}, \quad j, k = 1, 2. \quad (3.27)$$

Definiendo el determinante de la matriz de coeficientes por

$$\Delta = \begin{vmatrix} E & B \\ -B & E \end{vmatrix}, \quad (3.28)$$

y usando la descomposición de $\begin{pmatrix} K_{11}^+ \\ K_{21}^+ \end{pmatrix}$ dada por la ecuación (3.20), podemos resolver el sistema (3.23), para obtener

$$K_{22}^+(x, x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\log \Delta). \quad (3.29)$$

Introduciendo (3.29) en la expresión correspondiente de la ecuación (1.30) (ver pág. 31), llegamos finalmente a

$$u^2(x, t) = b^2 + \frac{d^2(\log \Delta)}{dx^2}. \quad (3.30)$$

Ahora (3.30) nos permite extraer soluciones tipo solitón y tipo breather de la ecuación mKdV atractiva, como mostramos a continuación.

Solitón de la mKdV atractiva con valor constante no trivial en el infinito

Para comprobar la validez de la expresión (3.30), construiremos el caso más simple, i.e, el caso $j = 1$ o caso solitón, el cual fue obtenido por vez primera por N.J. Zabusky(1967), R.Hirota-J.Satsuma(1976) [HiS] y por Au-Yeung-Fung(1984) en [AuYF], donde dieron una expresión explícita para los solitones de la ecuación mKdV atractiva con condiciones de frontera no nulas, a partir de la ecuación (3.30).

En el caso $j = 1$ consideramos 1×2 ceros de S_{11} , como corresponde al par (λ_1, ζ_1) , $(-\lambda_1, \zeta_1)$, con $\lambda_1 = i\eta_1$, siendo η_1 una constante real. El determinante Δ dado por (3.28), se reduce a (donde $\zeta_1 = i\sqrt{\eta_1^2 - b^2}$, a_1, \tilde{a}_1 están dadas por (3.24) y denotamos $w = \sqrt{\eta_1^2 - b^2}[-2x + 4(2\eta_1^2 + b^2)t]$)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \tilde{a}_1 \frac{e^{2i\zeta_1 x}}{2i\zeta_1} & a_1 \frac{e^{2i\zeta_1 x}}{2i\zeta_1} \\ -a_1 \frac{e^{2i\zeta_1 x}}{2i\zeta_1} & 1 + \tilde{a}_1 \frac{e^{2i\zeta_1 x}}{2i\zeta_1} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{mb}{2\sqrt{\eta_1^2 - b^2}} e^w - \frac{im}{2} e^w\right) \left(1 - \frac{mb}{2\sqrt{\eta_1^2 - b^2}} e^w + \frac{im}{2} e^w\right). \quad (3.31)$$

Ahora en este caso del solitón, se puede comprobar directamente, a partir de la identidad (3.31) anterior que (como u es solución de la mKdV, también lo es $-u$, por lo que cambiamos sin pérdida de generalidad $b \rightarrow -b$, $(x, t) \rightarrow (-x, -t)$, y denotando por $z = -w = \sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t]$)

$$\begin{aligned} u^2(x, t) &= b^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(\Delta) \\ &= b^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \left[\left(1 + \frac{mb}{2\sqrt{\eta_1^2 - b^2}} e^z - \frac{im}{2} e^z\right) \left(1 + \frac{mb}{2\sqrt{\eta_1^2 - b^2}} e^z + \frac{im}{2} e^z\right) \right] \\ &= \left(b + i \frac{\partial}{\partial x} \log \left[\frac{\left(1 + \frac{b}{\eta_1} e^{\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t] + \rho} - \frac{i\sqrt{\eta_1^2 - b^2}}{\eta_1} e^{\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t] + \rho}\right)}{\left(1 + \frac{b}{\eta_1} e^{\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t] + \rho} + \frac{i\sqrt{\eta_1^2 - b^2}}{\eta_1} e^{\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t] + \rho}\right)} \right] \right)^2, \end{aligned} \quad (3.32)$$

en donde escogemos $\rho = \log \frac{\eta_1 |m|}{2\sqrt{\eta_1^2 - b^2}}$. De esta forma, la expresión para el solitón de la mKdV atractiva que tiende a una constante b en la frontera, es

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= b + i \frac{\partial}{\partial x} \log \left[\frac{\left(1 + \frac{b}{\eta_1} e^{\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t] + \rho} - \frac{i\sqrt{\eta_1^2 - b^2}}{\eta_1} e^{\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t] + \rho}\right)}{\left(1 + \frac{b}{\eta_1} e^{\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t] + \rho} + \frac{i\sqrt{\eta_1^2 - b^2}}{\eta_1} e^{\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t] + \rho}\right)} \right] \\ &= b + 2 \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\frac{\sqrt{\eta_1^2 - b^2}}{\eta_1} e^{\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t] + \rho}}{1 + \frac{b}{\eta_1} e^{\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t] + \rho}} \right] \\ &= b + \frac{2(\eta_1^2 - b^2)}{b \pm \eta_1 \cosh(\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[2x - 4(2\eta_1^2 + b^2)t] + \rho)}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde el signo \pm en (3.33) depende del signo de $m(\lambda_1)$. Cuando $b = 0$, (3.33) se reduce al solitón de la ecuación mKdV atractiva.

De forma complementaria, hemos realizado un análisis de los diagramas de fase que resultan de la ecuación mKdV atractiva con condiciones de contorno no nulas, y hemos encontrado tres soluciones tipo solitón más (ver Fig.3.1), modificando convenientemente el parámetro asintótico b en la ecuación (3.33). Éstas son

$$u_2(x, t) = -b - \frac{2(\eta_1^2 - b^2)}{b \pm \eta_1 \cosh(\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[4(2\eta_1^2 + b^2)t - 2x] + \rho)}, \quad (3.34)$$

$$u_3(x, t) = b - \frac{2(\eta_1^2 - b^2)}{-b \pm \eta_1 \cosh(\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[4(2\eta_1^2 + b^2)t - 2x] + \rho)}, \quad (3.35)$$

$$u_4(x, t) = -b + \frac{2(\eta_1^2 - b^2)}{-b \pm \eta_1 \cosh(\sqrt{\eta_1^2 - b^2}[4(2\eta_1^2 + b^2)t - 2x] + \rho)}. \quad (3.36)$$

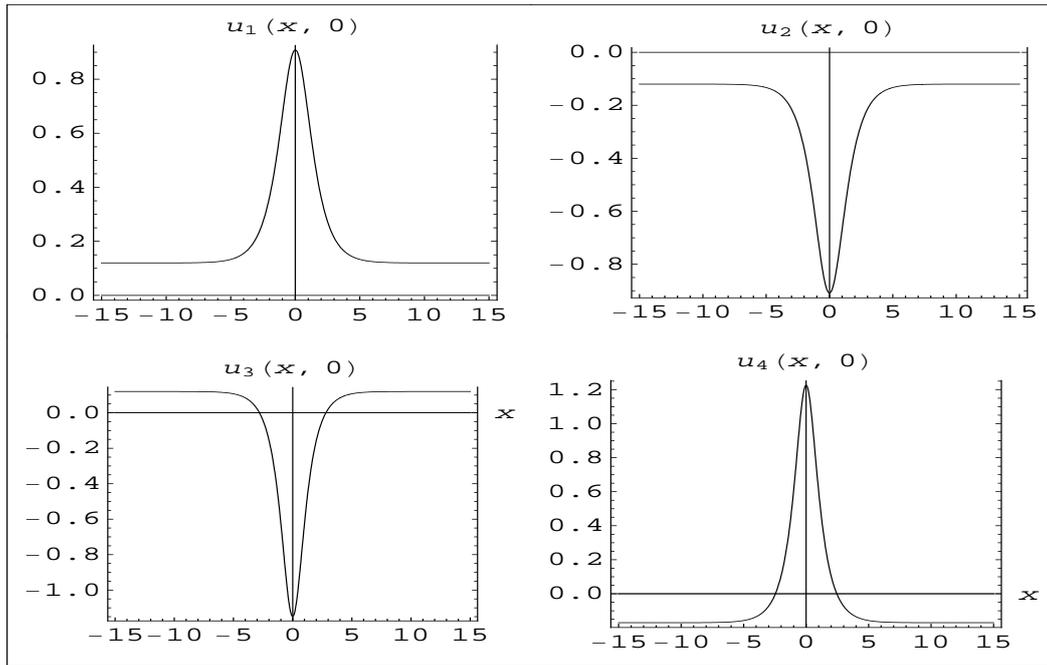


Figura 3.1. Gráficas de los b-solitones (3.33),(3.34),(3.35) y (3.36) con $\eta_1 = 1, \rho = 0, b = 0.12$ en $t = 0$

Breather de la mKdV atractiva con valor constante no trivial en infinito

Volviendo al caso que nos interesa, i.e. cuando $j = 1, 2$ y los 2×2 ceros de S_{11} están dados por (3.18), vamos a mostrar, empleando el mismo procedimiento que hemos utilizado para el b-solitón, que la solución u^2 dada por (3.30) es realmente el cuadrado de un breather tendiendo a la constante b en la frontera.

Para ello, primero probamos que comenzando a partir de (3.30), si hacemos $b=0$, recuperamos el cuadrado de las soluciones breather de media nula dadas en (3.3)-(3.5)

(ver [W], M.Wadati,1973). Recordamos que las condiciones dadas por (3.18) son

$(\lambda_j, \zeta_j), (-\lambda_j, \zeta_j), j=1,2$ y $\zeta_j = \sqrt{\lambda_j^2 + b^2}$, con $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = -\lambda_1^* = -\alpha + i\beta$.

Procedemos como sigue: a partir de (3.28), escribimos explícitamente el determinante Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 + \tilde{a}_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_1)x}}{i(\zeta_1+\zeta_1)} & \tilde{a}_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & a_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_1)x}}{i(\zeta_1+\zeta_1)} & a_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} \\ \tilde{a}_2 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & 1 + \tilde{a}_2 \frac{e^{i(\zeta_2+\zeta_2)x}}{i(\zeta_2+\zeta_2)} & a_2 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & a_2 \frac{e^{i(\zeta_2+\zeta_2)x}}{i(\zeta_2+\zeta_2)} \\ -a_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_1)x}}{i(\zeta_1+\zeta_1)} & -a_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & 1 + \tilde{a}_2 \frac{e^{i(\zeta_2+\zeta_2)x}}{i(\zeta_2+\zeta_2)} & a_2 \frac{e^{i(\zeta_2+\zeta_2)x}}{i(\zeta_2+\zeta_2)} \\ -a_2 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & \tilde{a}_2 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & -a_2 \frac{e^{i(\zeta_2+\zeta_2)x}}{i(\zeta_2+\zeta_2)} & 1 + \tilde{a}_2 \frac{e^{i(\zeta_2+\zeta_2)x}}{i(\zeta_2+\zeta_2)} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 + \tilde{a}_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_1)x}}{i(\zeta_1+\zeta_1)} & a_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_1)x}}{i(\zeta_1+\zeta_1)} & \tilde{a}_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & a_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} \\ -a_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_1)x}}{i(\zeta_1+\zeta_1)} & 1 + \tilde{a}_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_1)x}}{i(\zeta_1+\zeta_1)} & -a_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & \tilde{a}_1 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} \\ \tilde{a}_2 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & a_2 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & 1 + \tilde{a}_2 \frac{e^{i(\zeta_2+\zeta_2)x}}{i(\zeta_2+\zeta_2)} & a_2 \frac{e^{i(\zeta_2+\zeta_2)x}}{i(\zeta_2+\zeta_2)} \\ -a_2 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & \tilde{a}_2 \frac{e^{i(\zeta_1+\zeta_2)x}}{i(\zeta_1+\zeta_2)} & -a_2 \frac{e^{i(\zeta_2+\zeta_2)x}}{i(\zeta_2+\zeta_2)} & 1 + \tilde{a}_2 \frac{e^{i(\zeta_2+\zeta_2)x}}{i(\zeta_2+\zeta_2)} \end{vmatrix}, \tag{3.37}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue agrupando convenientemente la matriz. Ahora, usamos (3.24) en la última expresión para el determinante Δ dada por (3.37) y escribimos el determinante que resulta al escoger $b = 0$, es decir (si escogemos $z_1 = -2(-i\alpha + \beta)x + (-\gamma + i\delta)t$, $z_2 = -2(i\alpha + \beta)x - (\gamma + i\delta)t$, $z_3 = -2\beta x + (-\gamma + i\delta)t$)

$$\Delta_{b=0} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-m \cdot e^{z_1}}{2} & 0 & \frac{i(\alpha+i\beta)m \cdot e^{z_3}}{2\beta} \\ \frac{m \cdot e^{z_1}}{2} & 1 & \frac{-i(\alpha+i\beta)m \cdot e^{z_3}}{2\beta} & 0 \\ 0 & \frac{i(-\alpha+i\beta)m^* \cdot e^{z_3}}{2\beta} & 1 & \frac{-m^* \cdot e^{z_2}}{2} \\ \frac{-i(-\alpha+i\beta)m^* \cdot e^{z_3}}{2\beta} & 0 & \frac{m^* \cdot e^{z_2}}{2} & 1 \end{vmatrix} \tag{3.38}$$

$$= \det(\mathbb{1} + M(x, t) \cdot M(x, t)) = \det(\mathbb{1} + iM(x, t)) \det(\mathbb{1} - iM(x, t)),$$

donde

$$M(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{-m e^{2i(\alpha+i\beta)x + (-\gamma+i\delta)t}}{2} & \frac{i(\alpha+i\beta)m e^{-2\beta x + (-\gamma+i\delta)t}}{2\beta} \\ \frac{i(-\alpha+i\beta)m^* e^{-2\beta x - (\gamma+i\delta)t}}{2\beta} & \frac{-m^* e^{2i(-\alpha+i\beta)x - (\gamma+i\delta)t}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ahora teniendo en cuenta que

$$\det(\mathbb{1} \pm iM(x, t)) = 2e^{2\beta x + \gamma t + \psi} \left\{ \cosh(2\beta x + \gamma t + \psi) \pm i \frac{\beta}{\alpha} \sin(2\alpha x + \delta t + \eta - \phi) \right\},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta_{b=0} &= \det(\mathbb{1} + iM(x, t)) \det(\mathbb{1} - iM(x, t)) \\
&= 1 + \frac{m^2 e^{-4(-i\alpha+\beta)x+2(-\gamma+i\delta)t}}{4} + \frac{(m^*)^2 e^{-4(i\alpha+\beta)x-2(\gamma+i\delta)t}}{4} + \frac{mm^* e^{-4\beta x-2\gamma t}}{2} + \frac{\alpha^2 m(m^*) e^{-4\beta x-2\gamma t}}{2\beta^2} \\
&\quad + \frac{\alpha^4 m^2 (m^*)^2 e^{-8\beta x-4\gamma t}}{16\beta^4} = 4e^{-4\beta x-2\gamma t+2\psi} \left\{ \cosh^2(2\beta x + \gamma t - \psi) + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin^2(2\alpha x + \delta t + \eta - \phi) \right\} \\
&= \operatorname{Re} \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t)) \}^2 + \operatorname{Im} \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t)) \}^2,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

en donde hemos escogido

$$e^\psi = \frac{\alpha |m(0)|}{2\beta}, \quad m = |m(0)| e^{i\phi}, \quad \eta = \pi/2, \quad \gamma = 8\beta(3\alpha^2 - \beta^2), \quad \delta = 8\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2).$$

A partir de esta expresión, después de algunas manipulaciones, probamos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \left[4e^{-4\beta x-2\gamma t+2\psi} \left\{ \cosh^2(2\beta x + \gamma t + \psi) + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin^2(2\alpha x + \delta t + \eta - \phi) \right\} \right] \\
&= \left(\frac{4\beta \operatorname{Sech}(2\beta x + \gamma t - \psi) [\sin(2\alpha x + \delta t + \phi) + (\beta/\alpha) \cos(2\alpha x + \delta t + \phi) \tanh(2\beta x + \gamma t - \psi)]}{1 + (\beta/\alpha)^2 \cos^2(2\alpha x + \delta t + \phi) \operatorname{Sech}^2(2\beta x + \gamma t - \psi)} \right)^2 \\
&= \left(2 \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\beta \sin(2\alpha x + \delta t + \eta - \phi)}{\alpha \cosh(2\beta x + \gamma t + \psi)} \right] \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Así, recuperamos, a partir de (3.30), el cuadrado de la solución breather de mKdV atractiva (3.3)-(3.5)(M.Wadati[W]/G.Lamb[Lal])

$$(3.40) = \left(-2 \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\beta \sin(2\alpha x + \delta t + \eta - \phi)}{\alpha \cosh(2\beta x + \gamma t + \psi)} \right] \right)^2.$$

Antes de abordar el caso $b \neq 0$, hacemos algunas observaciones sobre las raíces dadas en (3.18) y sobre la dependencia temporal en (3.24):

expresamos ζ_i , $i=1,2$ como un número complejo, como sigue:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \sqrt{(\alpha + i\beta)^2 + b^2} = \tilde{\alpha}(\alpha, \beta, b) + i\tilde{\beta}(\alpha, \beta, b), \\
\zeta_2 &= \sqrt{(-\alpha + i\beta)^2 + b^2} = -\tilde{\alpha}(\alpha, \beta, b) + i\tilde{\beta}(\alpha, \beta, b),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

donde hemos considerado sólo la región $\operatorname{Im}\zeta > 0$, y

$$\tilde{\alpha}(\alpha, \beta, b) = \sqrt[4]{(\alpha^2 - \beta^2 + b^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \cos\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 + b^2}\right)\right), \tag{3.42}$$

$$\tilde{\beta}(\alpha, \beta, b) = \sqrt[4]{(\alpha^2 - \beta^2 + b^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 + b^2}\right)\right), \tag{3.43}$$

que verifican:

$$\tilde{\alpha}(\alpha, \beta, b = 0) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\arctan(\frac{\beta}{\alpha})) = \operatorname{Re}(\alpha + i\beta) = \alpha,$$

$$\tilde{\beta}(\alpha, \beta, b = 0) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\arctan(\frac{\beta}{\alpha})) = \operatorname{Im}(\alpha + i\beta) = \beta.$$

Con ζ_i , $i = 1, 2$ definidas por (3.41), la dependencia temporal dada por (3.24), se reescribe como sigue:

$$4i\zeta_1(2\lambda_1^2 - b^2) = -\tilde{\gamma}(\alpha, \beta, b) + i\tilde{\delta}(\alpha, \beta, b), \quad (3.44)$$

$$4i\zeta_2(2\lambda_2^2 - b^2) = -\tilde{\gamma}(\alpha, \beta, b) - i\tilde{\delta}(\alpha, \beta, b),$$

donde de nuevo, hemos considerado la region $\operatorname{Im}\zeta > 0$ y

$$\tilde{\gamma}(\alpha, \beta, b) = 8\tilde{\beta}(3\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2) - 12b^2\tilde{\beta}, \quad (3.45)$$

$$\tilde{\delta}(\alpha, \beta, b) = 8\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}^2 - 3\tilde{\beta}^2) - 12b^2\tilde{\alpha}, \quad (3.46)$$

que verifica:

$$\tilde{\gamma}(\alpha, \beta, b = 0) = 8\beta(3\alpha^2 - \beta^2) = \gamma, \quad (3.47)$$

$$\tilde{\delta}(\alpha, \beta, b = 0) = 8\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) = \delta. \quad (3.48)$$

A raíz de estas observaciones podemos concluir, que en el caso $b \neq 0$, los parámetros α, β (del caso $b = 0$) se transforman en los nuevos parámetros $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$. Por tanto, a todos los efectos, consideraremos en los próximos cálculos los parámetros $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ como nuestros nuevos parámetros libres α, β , aunque mantendremos la notación $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$, para evitar confusión.

Ahora reescribimos el determinante Δ con las anteriores observaciones sobre los ceros.

Primero ya hemos visto en las ecuaciones (3.3)-(3.5), que dado que $2\frac{\partial}{\partial x} \arctan(\frac{g}{f}) = i\frac{\partial}{\partial x} \log(\frac{f-ig}{f+ig})$, la solución breather de la ecuación mKdV atractiva cuando $b = 0$, está dada por (3.3)-(3.5)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2\frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\Im\{\det(\mathbf{1}-iM(x,t))\}}{\Re\{\det(\mathbf{1}-iM(x,t))\}} \right] \\ &= i\frac{\partial}{\partial x} \log \left[\frac{\Re\{\det(\mathbf{1}-iM(x,t))\} - i\Im\{\det(\mathbf{1}-iM(x,t))\}}{\Re\{\det(\mathbf{1}-iM(x,t))\} + i\Im\{\det(\mathbf{1}-iM(x,t))\}} \right] \\ &= 2\frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\beta \sin(2\alpha x + \delta t + \eta - \phi)}{\alpha \cosh(2\beta x + \gamma t + \psi)} \right], \end{aligned} \quad (3.49)$$

con γ, δ dadas por (3.47) y (3.48) respectivamente. Así, por lo que hemos visto en (3.40) y (3.39), el cuadrado de esta solución puede ser escrito como

$$\begin{aligned} u^2(x, t) &= \left(2\frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\Im\{\det(\mathbf{1}-iM(x,t))\}}{\Re\{\det(\mathbf{1}-iM(x,t))\}} \right] \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(\det(\mathbf{1} + M \cdot M)) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \left(\Re\{\det(\mathbf{1} - iM(x, t))\}^2 + \Im\{\det(\mathbf{1} - iM(x, t))\}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Abordamos ahora el caso cuando $b \neq 0$. De forma intuitiva, si en el caso de dimensión 1 (que corresponde a tener 1×2 ceros de S_{11}), es decir en el caso del b-solitón o solitón con valor constante en infinito, somos capaces de descomponer el determinante Δ dado en (3.31) como producto de dos determinantes de matrices 1×1 , en el caso de dimensión 2 (cuando S_{11} tiene 2×2 ceros) o caso del breather con valor constante en infinito, pensamos que el determinante Δ dado en (3.37) se ha de poder descomponer como producto de dos determinantes de matrices 2×2 .

Después de esta observación y teniendo también en cuenta (3.38), comprobamos después de algunos cálculos, que la expresión equivalente para Δ dada en (3.37) en el caso $b \neq 0$ es:

$$\begin{aligned} \Delta &= \det((\mathbb{1}_{2 \times 2} - iM - ibN) \cdot (\mathbb{1}_{2 \times 2} + iM - ibN)) \\ &= \det(\mathbb{1}_{2 \times 2} - iM - ibN) \det(\mathbb{1}_{2 \times 2} + iM - ibN) \\ &= \Re \{ \det(\mathbb{1}_{2 \times 2} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}^2 + \Im \{ \det(\mathbb{1}_{2 \times 2} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}^2, \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{-me^{2i(\tilde{\alpha}+i\tilde{\beta})x+(-\tilde{\gamma}+i\tilde{\delta})t}}{2} & \frac{i(\tilde{\alpha}+i\tilde{\beta})me^{-2\tilde{\beta}x+(-\tilde{\gamma}+i\tilde{\delta})t}}{2\tilde{\beta}} \\ \frac{i(-\tilde{\alpha}+i\tilde{\beta})m^*e^{-2\tilde{\beta}x-(\tilde{\gamma}+i\tilde{\delta})t}}{2\tilde{\beta}} & \frac{-m^*e^{2i(-\tilde{\alpha}+i\tilde{\beta})x-(\tilde{\gamma}+i\tilde{\delta})t}}{2} \end{pmatrix}, \\ N(x, t) &= \begin{pmatrix} \frac{me^{2i(\tilde{\alpha}+i\tilde{\beta})x+(-\tilde{\gamma}+i\tilde{\delta})t}}{2(\tilde{\alpha}+i\tilde{\beta})} & \frac{-ime^{-2\tilde{\beta}x+(-\tilde{\gamma}+i\tilde{\delta})t}}{2\tilde{\beta}} \\ \frac{-im^*e^{-2\tilde{\beta}x-(\tilde{\gamma}+i\tilde{\delta})t}}{2\tilde{\beta}} & \frac{m^*e^{2i(-\tilde{\alpha}+i\tilde{\beta})x-(\tilde{\gamma}+i\tilde{\delta})t}}{2(-\tilde{\alpha}+i\tilde{\beta})} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Por tanto, el cuadrado de u , dado por la ecuación (3.30) es:

$$\begin{aligned} u(x, t)^2 &= b^2 \\ &+ \frac{d^2}{dx^2} \log \left(\Re \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}^2 + \Im \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}^2 \right) \\ &= \left(b + i \frac{\partial}{\partial x} \log \left[\frac{\Re \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \} - i \Im \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}}{\Re \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \} + i \Im \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}} \right] \right)^2 \\ &= \left(b + 2 \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\Im \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}}{\Re \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}} \right] \right)^2, \end{aligned} \quad (3.53)$$

en donde hemos recurrido a la identidad entre las funciones arctan y log,

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{z}{w}\right) = i \frac{\partial}{\partial x} \log\left(\frac{w - iz}{w + iz}\right). \quad (3.54)$$

Esta expresión para el cuadrado de la solución u , nos da directamente la expresión matricial para la solución breather de la ecuación mKdV con condiciones de frontera no nulas:

$$u(x, t) = b + 2 \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\Im \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}}{\Re \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \}} \right], \quad (3.55)$$

con las matrices $\mathbb{1}$, $N(x, t)$ y $M(x, t)$ dadas por (3.52).

La expresión explícita para la solución breather de la ecuación mKdV con condiciones de frontera no nulas, la obtenemos a partir de (3.55), calculando primero el determinante (escribimos $m = |m|e^{i\phi}$):

$$\begin{aligned} & \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{b^2}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}\right) \frac{\tilde{\alpha}^2 |m|^2}{4\tilde{\beta}^2} e^{-4\tilde{\beta}x - 2\tilde{\gamma}t} - i \frac{b}{2} \left\{ \frac{me^{2i(\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta})x + (-\tilde{\gamma} + i\tilde{\delta})t}}{\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}} + \frac{m^* e^{2i(-\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta})x - (\tilde{\gamma} + i\tilde{\delta})t}}{-\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}} \right\} \\ &+ i \frac{m}{2} e^{2i(\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta})x + (-\tilde{\gamma} + i\tilde{\delta})t} + i \frac{m^*}{2} e^{2i(-\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta})x - (\tilde{\gamma} + i\tilde{\delta})t} + i \frac{b|m|^2}{2\tilde{\beta}} e^{-4\tilde{\beta}x} - i \frac{b\tilde{\beta}|m|^2}{2(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)} e^{-4\tilde{\beta}x - 2\tilde{\gamma}t} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{b^2}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}\right) \frac{\tilde{\alpha}^2 |m|^2}{4\tilde{\beta}^2} e^{-4\tilde{\beta}x - 2\tilde{\gamma}t} + i \frac{m}{2} e^{2i(\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta})x + (-\tilde{\gamma} + i\tilde{\delta})t} + i \frac{m^*}{2} e^{2i(-\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta})x - (\tilde{\gamma} + i\tilde{\delta})t} \\ &+ i \frac{b\tilde{\alpha}^2 |m|^2}{2\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)} e^{-4\tilde{\beta}x - 2\tilde{\gamma}t} + \frac{b|m|}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2} e^{-2\tilde{\beta}x - \tilde{\gamma}t} (\tilde{\alpha} \sin(2\tilde{\alpha}x + \tilde{\delta}t + \phi) - \tilde{\beta} \cos(2\tilde{\alpha}x + \tilde{\delta}t + \phi)). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Por tanto las partes real e imaginaria del determinante (3.56) son (por coherencia con la próxima sección emplearemos la siguiente notación):

$$\begin{aligned} i\Im [f(x, t) + ig(x, t)] &\equiv i\Im \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \} \\ &= i \frac{m}{2} e^{2i(\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta})x + (-\tilde{\gamma} + i\tilde{\delta})t} + i \frac{m^*}{2} e^{2i(-\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta})x - (\tilde{\gamma} + i\tilde{\delta})t} + i \frac{b\tilde{\alpha}^2 |m|^2}{2\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)} e^{-4\tilde{\beta}x - 2\tilde{\gamma}t}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \Re [f(x, t) + ig(x, t)] &\equiv \Re \{ \det(\mathbb{1} - iM(x, t) - ibN(x, t)) \} = 1 + \left(1 - \frac{b^2}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}\right) \frac{\tilde{\alpha}^2 |m|^2}{4\tilde{\beta}^2} e^{-4\tilde{\beta}x - 2\tilde{\gamma}t} \\ &+ \frac{b|m|}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2} e^{-2\tilde{\beta}x - \tilde{\gamma}t} (\tilde{\alpha} \sin(2\tilde{\alpha}x + \tilde{\delta}t + \phi) - \tilde{\beta} \cos(2\tilde{\alpha}x + \tilde{\delta}t + \phi)). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Ahora, definiendo $e^{-2\psi} = \left(1 - \frac{b^2}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}\right) \frac{\tilde{\alpha}^2 |m|^2}{4\tilde{\beta}^2}$, las anteriores expresiones para las partes real e imaginaria se reducen a:

$$\begin{aligned} i\Im [f(x, t) + ig(x, t)] &= 2ie^{-2\tilde{\beta}x - \tilde{\gamma}t - \psi} \\ &\left(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 - b^2}} \cos(2\tilde{\alpha}x + \tilde{\delta}t + \phi) + \left(\frac{b\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 - b^2}\right) (\cosh(2\tilde{\beta}x + \tilde{\gamma}t + \psi) - \sinh(2\tilde{\beta}x + \tilde{\gamma}t + \psi)) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Re [f(x, t) + ig(x, t)] \\ &= 2e^{-2\tilde{\beta}x - \tilde{\gamma}t - \psi} \left(\cosh(2\tilde{\beta}x + \tilde{\gamma}t + \psi) + \frac{b\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 - b^2}} \sin(2\tilde{\alpha}x + \tilde{\delta}t + \phi - \arctan(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}})) \right). \end{aligned}$$

Así, la expresión explícita para el b-breather o breather de la mKdV atractiva con valor constante b en la frontera es:

$$u(x, t) = b + 2 \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{\Im [f(x, t) + ig(x, t)]}{\Re [f(x, t) + ig(x, t)]} \right], \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} & \Im [f(x, t) + ig(x, t)] \\ &= \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 - b^2}} \cos(2\tilde{\alpha}x + \tilde{\delta}t + \phi) + \frac{b\tilde{\beta}(\cosh(2\tilde{\beta}x + \tilde{\gamma}t + \psi) - \sinh(2\tilde{\beta}x + \tilde{\gamma}t + \psi))}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 - b^2}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} & \Re [f(x, t) + ig(x, t)] \\ &= \cosh(2\tilde{\beta}x + \tilde{\gamma}t + \psi) + \frac{b\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 - b^2}} \sin(2\tilde{\alpha}x + \tilde{\delta}t + \phi - \arctan(\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}})). \end{aligned}$$

En el límite $b \rightarrow 0$, (3.59) se reduce a la solución breather de la mKdV atractiva dada en (3.3)-(3.5) (ver[W], salvo traslaciones en las variables de espacio y tiempo x, t e invariancia por escala).

3.2.2. Obtención del breather de la mKdV atractiva con valor constante no trivial en infinito mediante el método de Hirota.

El método de Hirota, tal y como exponemos en el apéndice A (pág.155), es un método ideado por R. Hirota para buscar soluciones especiales de EDPs. Las ideas básicas del método son

- (i) Introducir una transformación de la(s) variable(s) dependiente(s) para reducir la ecuación de evolución a una ecuación bilineal, cuadrática en la(s) variable(s) dependiente(s).
- (ii) Introducir un desarrollo perturbativo en términos de exponenciales, con coeficientes a determinar en la ecuación bilineal.
- (iii) Averiguar dichos coeficientes para obtener solución de la ecuación bilineal.

En esta sección proponemos una modificación de este método, empleando para ello un desarrollo en términos de funciones trigonométricas e hiperbólicas con coeficientes por determinar, en vez de el habitual desarrollo en términos de exponenciales. La ventaja de esta modificación se aprecia a la hora de buscar soluciones más elaboradas, tipo el breather (o

tipo 2-soliton) con valor constante en la frontera.

Para una mejor comparación con la solución breather de M.Wadati en [W]((3.3)-(3.5)), consideramos, sin pérdida de generalidad, en vez de la ecuación (3.1), una ligera modificación de la misma, expresamente:

$$k_t + k_{sss} + 6k^2k_s = 0. \quad (3.61)$$

Proposición 3.2.1. *Definimos, para cualquier $(\alpha, \beta, b, s_0, t_0) \in \mathbb{R}^5$ tal que*

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2 > 0, \quad (3.62)$$

las funciones

$$f(u) = \left(1 - i \frac{2b\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}\right) \cosh(u) - i \frac{2b\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2} \sinh(u), \quad (3.63)$$

$$g(v) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}} \sin(v) + \left(-\frac{\beta^2}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}} + i \frac{2b\beta}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}}\right) \cos(v), \quad (3.64)$$

con $u = \beta(s - s_0) + \gamma(t - t_0)$, $v = \alpha(s - s_0) + \delta(t - t_0)$, $\gamma = \beta(-\beta^2 + 3\alpha^2 - 6b^2)$, $\delta = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 - 6b^2)$.

Entonces, la función ¹

$$k(s, t) = b - i \frac{\partial}{\partial s} \log \left(\frac{f(u) + ig(v)}{\bar{f}(u) - i\bar{g}(v)} \right) = b + 2 \frac{\partial}{\partial s} \arctan \left(\frac{\Im[f(u) + ig(v)]}{\Re[f(u) + ig(v)]} \right) \quad (3.65)$$

es una solución de la ecuación mKdV atractiva

$$k_t + k_{sss} + 6k^2k_s = 0. \quad (3.66)$$

Por simplicidad, llamaremos a estas soluciones *b-breathers*.

Demostración. Siguiendo a [AS, p.201], consideramos, con b fijo, el ansatz

$$k(s, t) = b - i \frac{\partial}{\partial s} \log \left(\frac{G}{F} \right), \quad (3.67)$$

con $G = f(u) + ig(v)$, $F = \bar{f}(u) - i\bar{g}(v)$. Sustituyendo (3.67) en (3.66), obtenemos la siguiente ecuación en F , G :

$$\begin{aligned} G \cdot F [G_t F - GF_t + G_{sss} F - GF_{sss} + 3G_s F_{ss} - 3G_{ss} F_s + 6b^2(G_s F - GF_s)] \\ - 3(G_s F - GF_s)[G_{ss} F + GF_{ss} - 2G_s F_s - 2ib(G_s F - GF_s)] = 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Supongamos que f y g son soluciones complejas de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs en adelante) lineales:

¹ aquí \bar{f} significa complejo conjugado de f .

$$f''(u) = f(u), \quad f(0) = f_0, \quad f'(0) = f'_0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad f_0, f'_0 \in \mathbb{C}, \quad (3.69)$$

$$g''(v) = -g(v), \quad g(0) = g_0, \quad g'(0) = g'_0, \quad \forall v \in \mathbb{R}, \quad g_0, g'_0 \in \mathbb{C}. \quad (3.70)$$

Como tenemos cinco grados de libertad, $(\alpha, \beta, b, s_0, t_0)$, la solución general de ambas EDOs (3.69) y (3.70) tendrá en total cinco parámetros libres (y no ocho como se podría deducir en principio del hecho de que $f_0, f'_0, g_0, g'_0 \in \mathbb{C}$), y esto lo traducimos en términos de las constantes de integración del problema, proponiendo una posible solución de (3.69) y (3.70) como sigue:

$$f(u) = (A + iB) \cosh(u) + iB \sinh(u), \quad (3.71a)$$

$$g(v) = C \sin(v) + (D + iE) \cos(v), \quad (3.71b)$$

donde A, B, C, D, E son las constantes de integración del problema, dependientes de $(\alpha, \beta, b, s_0, t_0)$. Para proponer estas soluciones tenemos en cuenta que tanto f como g se han de reducir a las funciones $\cosh(u)$ y $\frac{\beta}{\alpha} \sin(v - \arctan(\frac{\beta}{\alpha}))$ cuando el parámetro asintótico $b = 0$. Esto descarta varias opciones. El resto de alternativas para distribuir las cinco constantes en (3.71a) y (3.71b) se consiguen moviendo adecuadamente las traslaciones en espacio y tiempo s_0, t_0 . Pasamos ahora a determinar las constantes A, B, C, D, E . Para ello introducimos $G = f + ig$ y $F = \bar{f}(u) - i\bar{g}(v)$ en (3.68):

$$\begin{aligned} & (f + ig)(\bar{f} - i\bar{g})[(f_t + ig_t)(\bar{f} - i\bar{g}) - (f + ig)(\bar{f}_t - i\bar{g}_t) + (f_{sss} + ig_{sss})(\bar{f} - i\bar{g}) \\ & - (f + ig)(\bar{f}_{sss} - i\bar{g}_{sss}) + 3(f_s + ig_s)(\bar{f}_{ss} - i\bar{g}_{ss}) - 3(f_{ss} + ig_{ss})(\bar{f}_s - i\bar{g}_s) \\ & + 6b^2((f_s + ig_s)(\bar{f} - i\bar{g}) - (f + ig)(\bar{f}_s - i\bar{g}_s))] \\ & - 3((f_s + ig_s)(\bar{f} - i\bar{g}) - (f + ig)(\bar{f}_s - i\bar{g}_s))[(f_{ss} + ig_{ss})(\bar{f} - i\bar{g}) + (f + ig)(\bar{f}_{ss} - i\bar{g}_{ss}) \\ & - 2(f_s + ig_s)(\bar{f}_s - i\bar{g}_s) - 2ib((f_s + ig_s)(\bar{f} - i\bar{g}) - (f + ig)(\bar{f}_s - i\bar{g}_s))]. \end{aligned}$$

Desarrollando, obtenemos

$$\begin{aligned} & (|f|^2 + |g|^2 + i(\bar{f}g - f\bar{g}))[\bar{f}f_t - f\bar{f}_t + \bar{g}g_t - g\bar{g}_t + i(\bar{f}g_t - f_t\bar{g} - \bar{f}_t g + f\bar{g}_t) + \bar{f}f_{sss} - f\bar{f}_{sss} + \\ & \bar{g}g_{sss} - g\bar{g}_{sss} + i(\bar{f}g_{sss} - f_{sss}\bar{g} - \bar{f}_{sss}g + f\bar{g}_{sss}) + 3(\bar{f}_{ss}f_s - f_{ss}\bar{f}_s + \bar{g}_{ss}g_s - g_{ss}\bar{g}_s) + \\ & 3i(\bar{f}_{ss}g_s - f_s\bar{g}_{ss} - \bar{f}_s g_{ss} + f_{ss}\bar{g}_s) + 6b^2(\bar{f}f_s - f\bar{f}_s + \bar{g}g_s - g\bar{g}_s) + 6ib^2(\bar{f}g_s - f_s\bar{g} - \bar{f}_s g + f\bar{g}_s)] \\ & - 3(\bar{f}f_s - f\bar{f}_s + \bar{g}g_s - g\bar{g}_s + i(\bar{f}g_s - f_s\bar{g} - \bar{f}_s g + f\bar{g}_s))[\bar{f}f_{ss} + f\bar{f}_{ss} + \bar{g}g_{ss} + g\bar{g}_{ss} + i(\bar{f}g_{ss} + \\ & \bar{f}_{ss}g - f\bar{g}_{ss} - f_{ss}\bar{g}) - 2(|f_s|^2 + |g_s|^2 + i(\bar{f}_s g_s - f_s \bar{g}_s)) - 2ib(\bar{f}f_s - f\bar{f}_s + \bar{g}g_s - g\bar{g}_s \\ & + i(\bar{f}g_s + f\bar{g}_s - f_s \bar{g} - \bar{f}_s g))] = 0. \end{aligned}$$

Teniendo ahora en cuenta que $f(u) = f(\beta s + \gamma t)$ and $g(v) = g(\alpha s + \delta t)$, reescribimos la

anterior ecuación:

$$\begin{aligned}
& (|f|^2 + |g|^2 + i(\bar{f}g - f\bar{g}))[\gamma\bar{f}f' - \gamma f\bar{f}' + \delta\bar{g}g' - \delta g\bar{g}' + i(\delta\bar{f}g' - \gamma f'\bar{g} - \gamma\bar{f}'g + \delta f\bar{g}')] \\
& + \beta^3\bar{f}f''' - \beta^3 f\bar{f}''' + \alpha^3\bar{g}g''' - \alpha^3 g\bar{g}''' + i(\alpha^3\bar{f}g''' - \beta^3 f''' \bar{g} - \beta^3 \bar{f}''' g + \alpha^3 f\bar{g}''') \\
& + 3(\beta^3\bar{f}''f' - \beta^3 f''\bar{f}' + \alpha^3\bar{g}''g' - \alpha^3 g''\bar{g}') + 3i(\alpha\beta^2\bar{f}''g' - \beta\alpha^2 f''\bar{g}'' - \beta\alpha^2\bar{f}'g'' + \alpha^2\beta f''\bar{g}') \\
& + 6b^2(\beta\bar{f}f' - \beta f\bar{f}' + \alpha\bar{g}g' - \alpha g\bar{g}') + 6ib^2(\alpha\bar{f}g' - \beta f'\bar{g} - \beta\bar{f}'g + \alpha f\bar{g}') \\
& - 3(\beta\bar{f}f' - \beta f\bar{f}' + \alpha\bar{g}g' - \alpha g\bar{g}' + i(\alpha\bar{f}g' - \beta f'\bar{g} - \beta\bar{f}'g + \alpha f\bar{g}'))[\beta^2\bar{f}f'' + \beta^2 f\bar{f}'' + \alpha^2\bar{g}g'' \\
& + \alpha^2 g\bar{g}'' + i(\alpha^2\bar{f}g'' + \beta^2\bar{f}''g - \alpha^2 f\bar{g}'' - \beta^2 f''\bar{g}) - 2(\beta^2|f'|^2 + \alpha^2|g'|^2 + i\alpha\beta(\bar{f}'g' - f'\bar{g}')) \\
& - 2ib(\beta\bar{f}f' - \beta f\bar{f}' + \alpha\bar{g}g' - \alpha g\bar{g}' + i(\alpha\bar{f}g' + \alpha f\bar{g}' - \beta f'\bar{g} - \beta\bar{f}'g))] = 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas de f y g dadas en (3.69) y (3.70), podemos agrupar los términos anteriores como sigue

$$\begin{aligned}
& (|f|^2 + |g|^2 + i(\bar{f}g - f\bar{g})) \cdot [h_{11}(u) + h_{12}(u, v) + h_{13}(v)] \\
& - 3(\beta(f'\bar{f} - f\bar{f}') + \alpha(g'\bar{g} - g\bar{g}') + i\alpha(\bar{f}g' + f\bar{g}') - i\beta(f'\bar{g} - \bar{f}'g)) \cdot [h_{21}(u) + h_{22}(u, v) \\
& + h_{23}(v)] = 0,
\end{aligned} \tag{3.72}$$

donde

$$\begin{aligned}
h_{11}(u) &= (\gamma + 4\beta^3 + 6b^2\beta)(f'\bar{f} - f\bar{f}'), \\
h_{12}(u, v) &= ig'\bar{f}(\delta - \alpha^3 + 3\alpha\beta^2 + 6b^2\alpha) + i\bar{g}'f(\delta - \alpha^3 + 3\alpha\beta^2 + 6b^2\alpha) \\
& - if'\bar{g}(\gamma + \beta^3 - 3\alpha^2\beta + 6b^2\beta) - i\bar{f}'g(\gamma + \beta^3 - 3\alpha^2\beta + 6b^2\beta), \\
h_{13}(v) &= (\delta - 4\alpha^3 + 6b^2\alpha)(g'\bar{g} - g\bar{g}'), \\
h_{21}(u) &= -2\beta^2(|f'|^2 - |f|^2) + 2b\beta(f'\bar{f} - f\bar{f}'), \\
h_{22}(u, v) &= i(\beta^2 - \alpha^2)(g\bar{f} - \bar{g}f) - 2i\alpha\beta(\bar{f}'g' - f'\bar{g}') - 2b(\alpha(g'\bar{f} + f\bar{g}') - \beta(f'\bar{g} + g\bar{f}')), \\
h_{23}(v) &= -2\alpha^2(|g'|^2 + |g|^2) + 2b\alpha(g'\bar{g} - g\bar{g}').
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Por tanto, para satisfacer (3.72)(y por tanto (3.66)), debemos cancelar cada uno de los dos corchetes, con términos sólo en la variable u , sólo en la variable v y términos mixtos en (u, v) , que aparecen en la ecuación. Para ello, podemos hacer $h_{12}(u, v) = 0$, sin más que escoger las velocidades γ y δ como sigue

$$\gamma = \beta(-\beta^2 + 3\alpha^2 - 6b^2), \quad \delta = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 - 6b^2). \tag{3.74}$$

Con esta elección e imponiendo las tres condiciones siguientes, para cada $u, v \in \mathbb{R}$ satisfaríamos (3.72) y por tanto (3.66):

$$\begin{aligned} h_{11}(u) + h_{13}(v) &= 0, \\ h_{21}(u) + h_{23}(v) &= 0, \\ h_{22}(u, v) &= 0, \end{aligned} \tag{3.75}$$

esto es,

$$i(\beta^2 - \alpha^2)(g\bar{f} - \bar{g}f) - 2i\alpha\beta(\bar{f}'g' - f'\bar{g}') - 2b\alpha(g'\bar{f} + f\bar{g}') + 2b\beta(f'\bar{g} + g\bar{f}') = 0, \tag{3.76}$$

$$-\beta^2(|f'|^2 - |f|^2) - \alpha^2(|g'|^2 + |g|^2) + ib\beta(f'\bar{f} - f\bar{f}') + ib\alpha(g'\bar{g} - g\bar{g}') = 0, \tag{3.77}$$

$$\beta(f'\bar{f} - f\bar{f}') - \alpha(g'\bar{g} - g\bar{g}') = 0. \tag{3.78}$$

Veamos bajo qué condiciones se satisfacen (3.76), (3.77) y (3.78).

Analizamos separadamente cada uno de los cuatro sumandos de

$$(3.76) = i(\beta^2 - \alpha^2)(g\bar{f} - \bar{g}f) - 2i\alpha\beta(\bar{f}'g' - f'\bar{g}') - 2b\alpha(g'\bar{f} + f\bar{g}') + 2b\beta(f'\bar{g} + g\bar{f}') = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{(i.1)} \quad & i(\beta^2 - \alpha^2)(g\bar{f} - \bar{g}f) \\ &= i(\beta^2 - \alpha^2)\{[C \sin(v) + (D + iE) \cos(v)][(A - iB) \cosh(u) - iB \sinh(u)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -[C \sin(v) + (D - iE) \cos(v)][(A + iB) \cosh(u) + iB \sinh(u)]\} \\ &= i(\beta^2 - \alpha^2)\{C[(A - iB) - (A + iB)] \sin(v) \cosh(u) - 2iBC \sin(v) \sinh(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & +[(A - iB)(D + iE) - (D - iE)(A + iB)] \cos(v) \cosh(u) \\ & -iB[(D - iE) + (D + iE)] \cos(v) \sinh(u)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i(\beta^2 - \alpha^2)\{-2iBC \sin(v) \cosh(u) - 2iBC \sin(v) \sinh(u) \\ & +2i(AE - DB) \cos(v) \cosh(u) - 2iBD \cos(v) \sinh(u)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2(\beta^2 - \alpha^2)\{BC \sin(v) \cosh(u) + BC \sin(v) \sinh(u) - (AE - DB) \cos(v) \cosh(u) \\ & +BD \cos(v) \sinh(u)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{i.2}) \quad & -2i\alpha\beta(\bar{f}'g' - f'\bar{g}') \\
& = -2i\alpha\beta\{[C \cos(v) - (D + iE) \sin(v)][(A - iB) \sinh(u) - iB \cosh(u)] \\
& \quad - [C \cos(v) - (D - iE) \sin(v)][(A + iB) \sinh(u) + iB \cosh(u)]\} \\
& = -2i\alpha\beta\{C[(A - iB) - (A + iB)] \cos(v) \sinh(u) \\
& \quad + [(A + iB)(D - iE) - (D + iE)(A - iB)] \sinh(u) \sin(v) - 2iBC \cosh(u) \cos(v) \\
& \quad + 2iBD \cosh(u) \sin(v)\} \\
& = -2i\alpha\beta\{-2iBC \cos(v) \sinh(u) + 2i[BD - AE] \sinh(u) \sin(v) \\
& \quad - 2iBC \cos(v) \cosh(u) + 2iBD \cosh(u) \sin(v)\} \\
& = 4\alpha\beta\{-BC \cos(v) \sinh(u) + (BD - AE) \sinh(u) \sin(v) - BC \cos(v) \cosh(u) \\
& \quad + BD \cosh(u) \sin(v)\}.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{i.3}) \quad & -2b\alpha(g'\bar{f} + f\bar{g}') \\
& = -2b\alpha\{[C \cos(v) - (D + iE) \sin(v)][(A - iB) \cosh(u) - iB \sinh(u)] \\
& \quad + [C \cos(v) - (D - iE) \sin(v)][(A + iB) \cosh(u) + iB \sinh(u)]\} \\
& = -2b\alpha\{C[(A - iB) + (A + iB)] \cosh(u) \cos(v) + 0 \cdot \sinh(u) \cos(v) \\
& \quad - [(D + iE)(A - iB) + (D - iE)(A + iB)] \cosh(u) \sin(v) \\
& \quad + iB[(D + iE) - (D - iE)] \sinh(u) \sin(v)\} \\
& = -4b\alpha\{AC \cos(v) \cosh(u) + 0 \cdot \cos(v) \sinh(u) - (AD + EB) \sin(v) \cosh(u) \\
& \quad - BE \sin(v) \sinh(u)\}.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(i.4)} \quad + 2b\beta(f'\bar{g} + g\bar{f}') \\
& = 2b\beta\{[C \sin(v) + (D - iE) \cos(v)][(A + iB) \sinh(u) + iB \cosh(u)] \\
& \quad + [C \sin(v) + (D + iE) \cos(v)][(A - iB) \sinh(u) - iB \cosh(u)]\} \\
& = 2b\beta\{C[(A + iB) + (A - iB)] \sin(v) \sinh(u) + 0 \cdot \sin(v) \cosh(u) \\
& \quad + [(D - iE)(A + iB) + (D + iE)(A - iB)] \cos(v) \sinh(u) \\
& \quad + iB[(D - iE) + (D + iE)] \cos(v) \cosh(u)\} \\
& = 4b\beta\{AC \sin(v) \sinh(u) + 0 \cdot \sin(v) \cosh(u) - (AD + EB) \cos(v) \sinh(u) \\
& \quad + EB \cos(v) \cosh(u)\}.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

(ii) Condición (3.77). Sustituyendo (3.71a) y (3.71b) en (3.77), obtenemos

$$\begin{aligned}
& -\beta^2(|f'|^2 - |f|^2) - \alpha^2(|g'|^2 + |g|^2) + ib\beta(f'\bar{f} - f\bar{f}') + ib\alpha(g'\bar{g} - g\bar{g}') \\
& = -\beta^2\{[(A + iB) \sinh(u) + iB \cosh(u)][(A - iB) \sinh(u) - iB \cosh(u)] \\
& \quad - [(A + iB) \cosh(u) + iB \sinh(u)][(A - iB) \cosh(u) - iB \sinh(u)]\} \\
& - \alpha^2\{[C \cos(v) - (D + iE) \sin(v)][C \cos(v) - (D - iE) \sin(v)] \\
& \quad - [C \sin(v) + (D + iE) \cos(v)][C \sin(v) + (D - iE) \cos(v)] + ib(2i)(\beta AB - \alpha CE)\} \\
& = -\beta^2\{(A + iB)(A - iB)(\sinh^2(u) - \cosh^2(u)) + B^2(\cosh^2(u) - \sinh^2(u))\} \\
& - \alpha^2\{C^2(\sin^2(v) + \cos^2(v)) + (D + iE)(D - iE)(\sin^2(v) + \cos^2(v))\} - 2b(\beta AB - \alpha CE) \\
& = -\beta^2(-(A^2 + B^2) + B^2) - \alpha^2(C^2 + D^2 + E^2) - 2b(\beta AB - \alpha CE) \\
& = \beta^2 A^2 - \alpha^2(C^2 + D^2 + E^2) - 2b(\beta AB - \alpha CE) = 0.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

(iii) **Condición** (3.78). Sustituyendo (3.71a) y (3.71b) en (3.78), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
& \beta(f'\bar{f} - f\bar{f}') - \alpha(g'\bar{g} - g\bar{g}') \\
&= \beta\{[(A + iB)\sinh(u) + iB\cosh(u)][(A - iB)\cosh(u) - iB\sinh(u)] \\
&\quad - [(A + iB)\cosh(u) + iB\sinh(u)][(A - iB)\sinh(u) - iB\cosh(u)]\} \\
&\quad - \alpha\{[C\cos(v) - (D + iE)\sin(v)][C\sin(v) + (D - iE)\cos(v)] \\
&\quad - [C\sin(v) + (D + iE)\cos(v)][C\cos(v) - (D - iE)\sin(v)]\} \\
&= \beta\{iB(A + iB)(\cosh^2(u) - \sinh^2(u)) + iB(A - iB)(\cosh^2(u) - \sinh^2(u))\} \\
&\quad - \alpha\{C(D - iE)(\cos^2(v) + \sin^2(v)) - C(D + iE)(\cos^2(v) + \sin^2(v))\} \\
&= i\beta B\{A + iB + A - iB\} - \alpha C\{D - iE - D - iE\} \\
&= 2i(\beta AB + \alpha CE) = 0.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Una vez calculados los cuatro sumandos **(iii.1)**, **(iii.2)**, **(iii.3)**, **(iii.4)** de (3.76), agrupamos términos proporcionales a $\sinh(u)\cos(v)$, $\sinh(u)\sin(v)$, $\cosh(u)\cos(v)$, $\cosh(u)\sin(v)$. De esta forma (3.76) se reduce a

$$\begin{aligned}
& \sinh(u)\cos(v)[-4\alpha\beta BC + 2(\beta^2 - \alpha^2)BD + 4b\beta(AD + EB)] \\
& + \sinh(u)\sin(v)[4\alpha\beta(BD - AE) + 2(\beta^2 - \alpha^2)BC + 4b\alpha BE + 4b\beta AC] \\
& + \cosh(u)\cos(v)[-4\alpha\beta BC - 2(\beta^2 - \alpha^2)(AE - BD) - 4b\alpha AC + 4b\beta BE] \\
& + \cosh(u)\sin(v)[4\alpha\beta BD + 2(\beta^2 - \alpha^2)BC + 4b\alpha(AD + BE)] = 0.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Anulando los coeficientes de cada uno de los pares de funciones

$$\sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v), \cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v),$$

satisfacemos (3.84) y obtenemos el sistema siguiente:

$$-4\alpha\beta BC + 2(\beta^2 - \alpha^2)BD + 4b\beta(AD + EB) = 0, \tag{3.85}$$

$$4\alpha\beta(BD - AE) + 2(\beta^2 - \alpha^2)BC + 4b\alpha BE + 4b\beta AC = 0, \tag{3.86}$$

$$-4\alpha\beta BC - 2(\beta^2 - \alpha^2)(AE - BD) - 4b\alpha AC + 4b\beta BE = 0, \tag{3.87}$$

$$4\alpha\beta BD + 2(\beta^2 - \alpha^2)BC + 4b\alpha(AD + BE) = 0. \tag{3.88}$$

Manipulando las anteriores ecuaciones, obtenemos un sistema equivalente que puede ser resuelto, como vemos a continuación

$$(3.85) - (3.86) = 2(\beta^2 - \alpha^2)AE + 4b\alpha AC + 4b\beta AD = 0,$$

$$(3.87) - (3.88) = -4\alpha\beta AE - 4b\alpha AD + 4b\beta AC = 0,$$

es decir

$$\begin{cases} (\beta^2 - \alpha^2)E + 2b\alpha C + 2b\beta D = 0, \\ -\alpha\beta E - b\alpha D + b\beta C = 0. \end{cases} \quad (3.89)$$

En forma matricial, (3.89) se escribe como

$$\begin{pmatrix} 2b\alpha & 2b\beta \\ b\beta & -b\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\beta^2 - \alpha^2)E \\ \alpha\beta E \end{pmatrix}, \quad (3.90)$$

que podemos resolver en función de la constante E , obteniendo

$$C = \frac{b\alpha(\alpha^2 - \beta^2) + 2b\alpha\beta^2}{2b^2(\alpha^2 + \beta^2)} E = \frac{\alpha}{2b} E, \quad (3.91)$$

$$D = -\frac{b\beta(\beta^2 - \alpha^2) + 2b\alpha^2\beta}{2b^2(\alpha^2 + \beta^2)} E = -\frac{\beta}{2b} E. \quad (3.92)$$

Volviendo a las condiciones (3.83) y (3.82)

$$\beta AB + \alpha CE = 0, \quad (3.93)$$

$$b\alpha^2 A^2 - \alpha^2(C^2 + D^2 + E^2) - 2b(\beta AB - \alpha CE) = 0, \quad (3.94)$$

podemos despejar $\beta AB = -\alpha CE$ y sustituir en (3.94) para obtener

$$\beta^2 A^2 - \alpha^2(C^2 + D^2 + E^2) + 4b\alpha CE = 0. \quad (3.95)$$

Sustituyendo ahora (3.91) y (3.92) en (3.95), obtenemos

$$\begin{aligned} \beta^2 A^2 - \alpha^2(C^2 + D^2 + E^2) + 4b\alpha CE &= 0, \\ \beta^2 A^2 - \alpha^2 \left(\frac{\alpha^2}{4b^2} + \frac{\beta^2}{4b^2} + 1 \right) E^2 + 4b\alpha \frac{\alpha}{2b} E^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\beta^2 A^2 - \frac{\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2)}{4b^2} E^2 = 0.$$

De esta forma, teniendo en cuenta la hipótesis $\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2 > 0$, obtenemos el valor de la constante E en función de la constante A ,

$$E = \pm \frac{2b\beta}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}} A. \quad (3.97)$$

Sustituyendo (3.97) en (3.91), (3.92) y (3.93), obtenemos las constantes

$$C = \frac{\alpha}{2b}E = \pm \frac{\alpha}{2b} \frac{2b\beta}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}}A = \frac{\pm\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}}A, \quad (3.98)$$

$$D = -\frac{\beta}{2b}E = \mp \frac{\alpha}{2b} \frac{2b\beta}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}}A = \frac{\mp\beta^2}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}}A, \quad (3.99)$$

$$B = -\frac{\alpha CE}{\beta A} = \frac{\mp 2b\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}A. \quad (3.100)$$

Por tanto, escogiendo el signo superior en todas las constantes y sustituyéndolas en (3.71a) y (3.71b), obtenemos finalmente

$$f(u) = A\left(1 - i\frac{2b\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2)}\right)\cosh(u) - iA\frac{2b\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2)}\sinh(u), \quad (3.101)$$

$$g(v) = A\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}}\sin(v) + A\left(-\frac{\beta^2}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}} + i\frac{2b\beta}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4b^2}}\right)\cos(v). \quad (3.102)$$

□

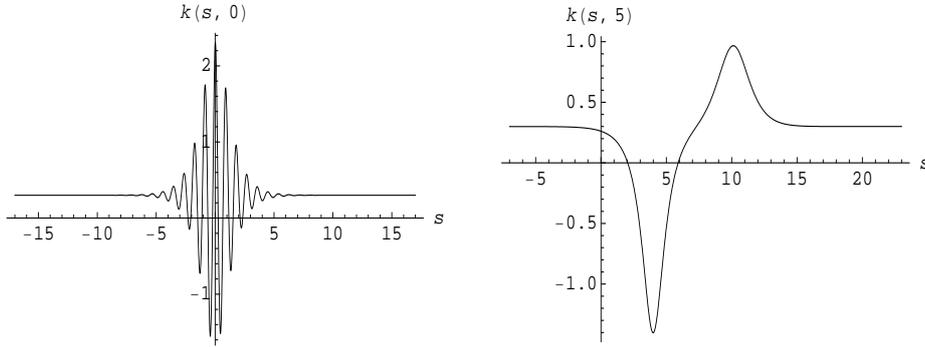


Figura 3.2. Izda. corresponde a la solución breather (3.63), (3.64), (3.65) con $\alpha = 7, \beta = 1, b = 0.3$ en $t = 0$. Dcha. corresponde a la solución polo doble (3.103) con $\beta = 1, b = 0.3$ en $t = 5$.

Si hacemos $b = 0$ en (3.63), (3.64), (3.65), obtenemos (3.3), la ya conocida solución breather de la ecuación mKdV atractiva (ver [W] y [La], pag.139). Si en (3.63)-(3.65) hacemos la traslación $\tilde{v} = v - \arctan(\frac{\beta}{\alpha})$ y tomamos el límite $\alpha \rightarrow 0$, obtenemos la generalización de la solución polo doble obtenida por M.Wadati et al. [OW], que posee un valor de frontera no nulo en el infinito. La fórmula explícita es

$$k(s, t) = b + 2\frac{\partial}{\partial s} \arctan \left(\frac{\tilde{G}(s, t)}{\tilde{F}(s, t)} \right), \quad (3.103)$$

$$\tilde{G}(s, t) = \frac{\beta^2(s - 3(\beta^2 + 2b^2)t)}{\sqrt{\beta^2 - 4b^2}} - \frac{2b\beta}{\beta^2 - 4b^2} (\cosh(\beta(s - (\beta^2 + 6b^2)t)) + \sinh(\beta(s - (\beta^2 + 6b^2)t))),$$

$$\tilde{F}(s, t) = \cosh(\beta(s - (\beta^2 + 6b^2)t)) - \frac{2b(1 - \beta(s - 3(\beta^2 + 2b^2)t))}{\sqrt{\beta^2 - 4b^2}}.$$

Si hacemos $b = 0$, y desarrollamos las derivadas, obtenemos la expresión equivalente (2.9) (pág.45).

3.2.3. Teoría de existencia global del flujo geométrico de la mKdV para soluciones regulares

En esta sección resolvemos el PVI (3.2) para curvas cerradas que son suficientemente regulares. Este resultado está basado en uno previo sobre (3.1) dado por J.Bourgain en [B]. Recordar en este punto que las soluciones breather también aparecieron en el estudio del PVI de la ecuación mKdV como contraejemplo a la dependencia continua de parámetros (ver [KePV1]) en espacios de funciones de baja regularidad. La estabilidad para intervalos de tiempo largos es mucho más delicada. De hecho, aunque hay abundante literatura sobre la estabilidad para todo tiempo de las soluciones en forma de onda viajera para (3.1) en la recta real (ver [Z]), nada se conoce en el caso de las soluciones breather. La situación para las soluciones periódicas es incluso peor, por que la estabilidad orbital de las soluciones tipo onda viajera ha sido obtenida sólo muy recientemente (ver [An2]). Por simplicidad asumiremos que la curva es 2π periódica y por tanto su longitud total es 2π . Recordamos, para posteriores referencias, que usando las ecuaciones de Frenet

$$\begin{cases} \mathbf{t}_s = k\mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_s = -kt. \end{cases} \quad (3.104)$$

donde (\mathbf{t}, \mathbf{n}) son respectivamente, el tangente y el normal a la curva, y entendiendo z como un número complejo $z(s, t) = x(s, t) + iy(s, t)$, (3.2) puede ser reescrita como,

$$\begin{cases} z_t(s, t) = -z_{sss} + \frac{3}{2}z_{ss}^2\bar{z}_s, \\ z(s, 0) = z_0, \quad z(s + 2\pi, 0) = z(s, 0), \\ |z_s|^2 = 1. \end{cases} \quad (3.105)$$

Dado $r > 0$ definimos el espacio de Sobolev $H^r(\mathbb{T})$ como el conjunto de las funciones 2π -periódicas $f(s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ijs}$ tales que

$$\|f\|_{H^r}^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1 + j^2)^r |a_j|^2 < \infty.$$

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1. [PVI para z] Sea $z_0(s)$ una curva cerrada en el plano, y $k_0(s) \in H^r(\mathbb{T})$ con $r \geq 1/2$, $s \in \mathbb{T} = [0, 2\pi]$, su curvatura. Entonces existe $\tau > 0$, con $\tau = \tau(\|k_0\|_{H^{1/2}})$ y una única solución $z = z(s, t)$ de

$$\begin{cases} z_t(s, t) = (-ik_s(s, t) - \frac{1}{2}k(s, t)^2)z_s(s, t) \\ z(s, 0) = z_0 \quad z(s + 2\pi, 0) = z(s, 0), \\ |z_s|^2 = 1, \end{cases} \quad (3.106)$$

tal que $z \in C([0, \tau] : H^{r+2})$. Además z es una función 2π -periódica y si $r \geq 1$, la solución puede ser extendida para todo tiempo $t > 0$.

Demostración. A partir de la suposición $k_0 \in H^r(\mathbb{T})$ podemos usar el resultado probado en [B]. Por tanto existe una única solución $k(s, t) \in C(H^r(\mathbb{T}); [0, \tau])$ para $r \geq \frac{1}{2}$ del PVI.

$$\begin{cases} k_t + k_{sss} + \frac{3}{2}k^2k_s = 0, \\ k(s, 0) = k_0. \end{cases} \quad (3.107)$$

Esta solución es 2π -periódica, y puede ser extendida para todo tiempo $t > 0$ si $r \geq 1$. Además

$$\int_0^{2\pi} k(s, t) ds = \int_0^{2\pi} k_0(s) ds = 2\pi. \quad (3.108)$$

Para construir z necesitamos primero z_s . Usando notación compleja, es suficiente con resolver la EDO que procede de las ecuaciones de Frenet (3.104), $z_{ss}(s, t) = ik(s, t)z_s(s, t)$. Esto nos da $z_s(s, t) = z_s(0, t)e^{i \int_0^s k(s', t) ds'}$, y por tanto z_s es 2π -periódica. A partir de aquí, necesitamos calcular $z_s(0, t)$. Para obtenerla, derivaremos con respecto a s en (3.106) para conseguir $z_{st}(0, t) = -i(k_{ss}(0, t) + k^3(0, t))z_s(0, t)$.

Así, $z_s(0, t) = z_s(0, 0)e^{-i \int_0^t (k_{ss}(0, t') + k^3(0, t')) dt'}$, donde $z_s(0, 0) = (z_0)_s(0)$. Integrando z_s en la variable s obtenemos por un cálculo directo que $z(s, t)$ es una solución de (3.106). Queda por probar que esta z es 2π -periódica en la variable s . Para probarlo, miramos a las curvas $\hat{z}(s, t) = z(s + 2\pi, t)$, y llamamos \hat{k} a las correspondientes curvaturas. Entonces \hat{z} es una solución de (3.106) y \hat{k} resuelve (3.107) con $\hat{k}(s, 0) = k_0(s)$. A partir de la unicidad conseguimos que $\hat{k} = k$ y como consecuencia $\hat{z} = z$, como queríamos. \square

3.3. Experimentos numéricos.

En [KKS1] y [KKS2] ya se probó la existencia de soluciones breathers periódicas que generalizan las soluciones encontradas por M. Wadati. Desafortunadamente, como ya dijimos en la introducción, estas soluciones son obtenidas siguiendo el ansatz dado en (3.3), de forma que éstas tienen media nula y por tanto no pueden ser la curvatura de una curva cerrada. Una cuestión natural es si el ansatz que aparece en la Proposición 3.2.1 (o en (3.59)) permite la existencia de soluciones periódicas no triviales. No hemos sido capaces de responder a esta pregunta todavía, pero en esta sección ideamos experimentos y presentamos resultados numéricos que sugieren fuertemente que la respuesta debe ser positiva. Estos experimentos numéricos los hemos diseñado como sigue. Si construimos las curvas

con curvaturas dadas por las soluciones de la Proposición 3.2.1, escogiendo el parámetro b pequeño y por ejemplo $\beta = 1$ y $\alpha = 10$, lo que obtenemos es un paquete de ondas dado por (3.6) viajando a lo largo de una curva que es básicamente un círculo de radio $1/b$. Ya que las soluciones están definidas para todo s , la curva tendrá eventualmente una autointersección. De esta forma, obtenemos una curva cerrada que no será necesariamente diferenciable. Por tanto, algún procedimiento extra debe ser ideado para "cerrar" la curva de forma diferenciable.

3.3.1. Descripción del método numérico.

Nuestro próximo paso es la construcción de una solución para $t > 0$ del flujo de curvas

$$z_t = -z_{sss} + \frac{3}{2}z_{ss}^2\bar{z}_s, \quad (3.109)$$

cuya condición inicial es una curva cerrada. Sabemos ya que el método pseudo-espectral de colocación es adecuado para aproximar soluciones tipo ondas viajeras y breathers de EDPs mediante un conjunto manejable de armónicos [FW]. Las condiciones de cierre (3.119)-(3.120) sobre z nos sugieren el uso de un sistema ortonormal de funciones exponenciales complejas

$$\{\phi_j(s) = e^{i\omega_j s}\}, \quad \text{con } \omega_j = \frac{2\pi j}{L}.$$

Sustituyendo en (3.109) el desarrollo en serie de Fourier de la curva

$$z(s, t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{Z}_j(t)\phi_j(s),$$

teniendo en cuenta la ortogonalidad $\langle \phi_j, \phi_l \rangle = \delta_{jl}$ de las funciones periódicas ϕ_j en $L^2([-\pi, \pi])$, y sus derivadas espaciales $\phi_j'(s) = i\omega_j\phi_j(s)$, y después, por la condición de finitud del esquema numérico pseudo-espectral, usando la versión truncada de esta serie de Fourier, llegamos al sistema de EDOs siguiente

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{Z}_j = i[\omega_j^3\hat{Z}_j + \frac{3}{2}\hat{V}_j], & j = 0, N-1 \\ \hat{Z}(0) = \mathcal{F}z_0, \end{cases} \quad (3.110)$$

donde $\hat{V}_j = \mathcal{F}V_j$, representa la transformada de Fourier discreta, de la versión discretizada del término no lineal $V = z_{ss}^2\bar{z}_s$. La curva en el instante inicial $z(s, 0)$ está reemplazada por la serie truncada

$$z(s, 0) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{Z}_j^{(0)} e^{i\omega_j s_j}, \quad (3.111)$$

donde los coeficientes de Fourier discretos $\hat{Z}_j^{(0)}$ se calculan por una fórmula de cuadratura en los puntos equidistantes de colocación $s_k = S_l + \frac{k(\Delta S)}{N}$, $k = 0, N-1$, $\Delta S = S_r - S_l$,

$$\hat{Z}_j^{(0)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z(s_k, 0) e^{-i\omega_j s_k}. \quad (3.112)$$

La ventaja de esta aproximación es que el valor de la solución y sus derivadas espaciales pueden ser aceleradas por el algoritmo de la FFT cuando se escogen $N = 2^q, q \in \mathbb{N}$ puntos (aquí trabajaremos con $q = 9$ y/o $q = 10$). La integración en tiempo se realiza por un esquema explícito Runge-Kutta de orden 4(5) (3.113), descrito en [HNW],

$$\hat{Z}_j^{(n+1)} = \hat{Z}_j^{(n)} + \Delta t F(n\Delta t, \hat{Z}_j^{(n)}), \quad (3.113)$$

donde $L = 2\pi/b$ es la longitud del intervalo, Δt es el paso temporal, y $F(n\Delta t, \hat{Z}_j^{(n)})$ es la parte no lineal, que si escribimos $\hat{Z}_j^{(n)} = \hat{X}_j^{(n)} + i\hat{Y}_j^{(n)}$, puede ser descompuesta en sus partes real e imaginaria como sigue

$$\begin{cases} \Re F = -w_j^3 \hat{Y}_j^{(n)} + \frac{3}{2} \left[\hat{X}_{j,s}^{(n)} (\hat{X}_{j,ss}^{(n)} \hat{X}_{j,ss}^{(n)} - \hat{Y}_{j,ss}^{(n)} \hat{Y}_{j,ss}^{(n)}) + 2\hat{X}_{j,ss}^{(n)} \hat{Y}_{j,s}^{(n)} \hat{Y}_{j,ss}^{(n)} \right], \\ \Im F = w_j^3 \hat{X}_j^{(n)} + \frac{3}{2} \left[-\hat{Y}_{j,s}^{(n)} (\hat{X}_{j,ss}^{(n)} \hat{X}_{j,ss}^{(n)} - \hat{Y}_{j,ss}^{(n)} \hat{Y}_{j,ss}^{(n)}) + 2\hat{X}_{j,ss}^{(n)} \hat{X}_{j,s}^{(n)} \hat{Y}_{j,ss}^{(n)} \right]. \end{cases} \quad (3.114)$$

Escogemos también $\epsilon = 10^{-6}$ como la tolerancia relativa y absoluta del integrador en tiempo para comparar resultados y asegurar la validez de la aproximación. Estos cálculos han sido ejecutados por una subrutina FORTRAN disponible en el almacén Netlib. La norma L^2 de la curvatura $k(s, t)$ de la curva $z(s, t)$,

$$\int_{-L}^L k(s, t)^2 ds, \quad (3.115)$$

se ha calculado para comprobar la estabilidad del método. Observar que esta magnitud es una prueba muy exigente de la calidad de la evolución, ya que involucra dos derivadas sobre la curva, que es la cantidad sobre la que hacemos la evolución. Por otra parte también hemos evaluado la integral de la curvatura $k(s, t)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L k(s, t) ds, \quad (3.116)$$

para comprobar si el número de vueltas (3.116) que da el vector tangente es conservado en la evolución.

3.3.2. Métodos para obtener una curva inicial cerrada y diferenciable.

En esta sección presentamos los métodos que hemos diseñado para construir curvas cerradas y diferenciables, usando como componentes básicos las soluciones curvatura tipo

b-breather obtenidas en las secciones 3.2.1 y 3.2.2 (ver Proposición 3.2.1). Recordar que trabajaremos con soluciones de la EDP geométrica

$$k_t + k_{sss} + \frac{3}{2}k^2k_s = 0, \quad (3.117)$$

en vez de (3.61). Por tanto multiplicaremos nuestras soluciones b-breather dadas en (3.63) o (3.103) por un factor dos. Nuestro objetivo es conseguir, como condición inicial de nuestro método numérico, definido en un intervalo espacial $[\sigma_0, \sigma_1]$ a ser determinado, algunas curvas cerradas muy próximas a las curvas asociadas a nuestra curvatura b-breather de la Proposición 3.2.1. Para nuestros propósitos numéricos, es mejor trabajar en el espacio euclídeo \mathbb{R}^2 y usar como sistema de referencia ortonormal, el dado por el tangente y el normal (\mathbf{t}, \mathbf{n}) . Las ecuaciones correspondientes son las ecuaciones de Frenet en el plano, dadas en (3.104)

$$\begin{cases} \mathbf{t}_s = k\mathbf{n} \\ \mathbf{n}_s = -k\mathbf{t}. \end{cases} \quad (3.118)$$

Como ya indicamos en los preliminares 1.2.1 (pág.33), para conseguir una curva cerrada y diferenciable, las condiciones que deben ser satisfechas son

$$\mathbf{0} = z(\sigma_1, 0) - z(\sigma_0, 0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \mathbf{t}(s, 0) ds = \left(\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \cos(\theta(s, 0)) ds, \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sin(\theta(s, 0)) ds \right) \quad (3.119)$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} k(s', 0) ds' = 2\pi, \quad (3.120)$$

es decir, la condición (3.120) significa que el vector tangente debe ser el mismo en los puntos inicial y final de la curva y la condición (3.119) significa que la curva comienza y termina en el mismo punto.

Sabemos que asintóticamente los b-breathers (3.65) están próximos a la constante b . De esta forma las correspondientes curvas estarán próximas a un círculo de radio $\frac{1}{b}$. Hay que notar, sin embargo, que la curva asociada a la curvatura tipo b-breather dada en (3.63) o (3.103), no será una curva cerrada diferencialmente, ya que aunque fuera posible satisfacer la condición (3.119) alargando el dominio de definición, y por tanto consiguiendo que la curva z valga lo mismo en los extremos del dominio, el vector tangente \mathbf{t} será distinto en los extremos del dominio, ya que el término oscilante en la curvatura tipo b-breather modifica el vector tangente haciendo que no se satisfaga la condición (3.120). De esta forma debemos idear métodos para cerrar diferencialmente nuestra curva inicial tipo b-breather. A continuación, presentamos estos métodos.

3.3.2.1 Método con funciones meseta.

Primero, parametrizamos la curva por longitud de arco y trabajamos, no sobre la curvatura, sino sobre la función ángulo $\theta(s, 0) = \int_{l_1}^s k(s', 0) ds'$ con $[l_1, l_2] = [-\pi/b, \pi/b]$, ya que de forma natural nos garantiza que $|z_s(s, t)| = 1$ para todo t . El objetivo es modificar convenientemente la función ángulo $\theta(s, 0)$ para satisfacer las condiciones de cierre de la curva

dadas por (3.119) y (3.120). Por tanto, primero seleccionamos un dominio $[s_l, s_r] \subset [l_1, l_2]$ en el cual $\theta(s_l, 0) + \theta(s_r, 0) = 0$. Después modificamos θ añadiéndole la siguiente función de corte diferenciable (que denominaremos en adelante también como función meseta)

$$\psi_i(s, A, B, \lambda_i) = \begin{cases} 0, & s \in [s_l, A), \\ \exp\left[\frac{-\lambda_i}{(s-A)(B-s)}\right], & s \in (A, B), \\ 0, & s \in (B, s_r], \end{cases} \quad (3.121)$$

donde seleccionamos $[A, B] \subset [s_r, s_l]$, obteniendo una nueva función ángulo $\theta_1(s, 0) = \theta(s, 0) + \psi_1(s, A, B, \lambda_1)$. Moviendo adecuadamente la pendiente λ_1 y el soporte $[A, B]$ de la función de corte ψ_1 , podemos conseguir que $\int_{s_l}^{s_r} \sin(\theta_1(s, 0)) ds \approx 0$ (una precisión de alrededor 10^{-10} será suficiente para nuestros propósitos), pero ocurrirá que

$$\int_{s_l}^{s_r} \cos(\theta_1(s, 0)) ds \neq 0.$$

Ahora, alargamos el dominio $[s_l, s_r]$ para obtener uno nuevo $[S_l, S_r]$, consiguiendo que $\theta_1(S_r, 0) - \theta_1(S_l, 0) = 2\pi$. Seguidamente añadimos y restamos nuevas funciones de corte diferenciables ψ_2 y ψ_3 a la función ángulo θ_1 , obteniendo una nueva función ángulo θ_2 . Repetimos el proceso con la función θ_2 , esto es, moviendo las pendientes y soportes de ψ_2 y ψ_3 para conseguir finalmente que $\int_{S_l}^{S_r} \cos(\theta_2(s, 0)) ds \approx 0$. Una vez obtenida la función ángulo

$$\theta_2(s, 0) = \theta(s, 0) + \psi_1(s, A, B, \lambda_1) - \psi_2(s, A', B', \lambda_2) + \psi_3(s, A'', B'', \lambda_3), \quad (3.122)$$

que nos permitirá satisfacer las condiciones de cierre (3.119) y (3.120), construimos la curva inicial

$$z(s, 0) = (x(s, 0), y(s, 0)), \quad (3.123)$$

con curvatura $k(s, 0) = \frac{d}{ds}\theta_2(s, 0)$, resolviendo numéricamente el sistema

$$\begin{cases} x_s(s, 0) = \cos(\theta_2(s, 0)), & x(S_l, 0) = \frac{1}{b}, \\ y_s(s, 0) = \sin(\theta_2(s, 0)), & y(S_l, 0) = 0, \quad s \in [S_l, S_r]. \end{cases}$$

Esto puede ser hecho fácilmente con el software *MATHEMATICA*. Finalmente redefinimos nuestro dominio inicial dado en (3.119)-(3.120) como $[\sigma_0, \sigma_1] \equiv [S_l, S_r]$.

Comentar, por último, que queremos evitar, para simulaciones con tiempo máximo de ejecución suficientemente largo, que las perturbaciones breather interactúen con las funciones meseta (3.121) introducidas, ya que estas colisiones afectan de manera inelástica a la evolución (ver figura 3.6). Este carácter inelástico de las colisiones entre soluciones de la mKdV y obstáculos, fue descrito recientemente (también para KdV) por C. Muñoz en [Muñ1] y [Muñ2]. Por ello, dado que para mostrar la existencia de este tipo de soluciones breather debemos recurrir a simulaciones a tiempos largos de ejecución (para comprobar que el breather no se dispersa en la evolución), donde la perturbación localizada tipo

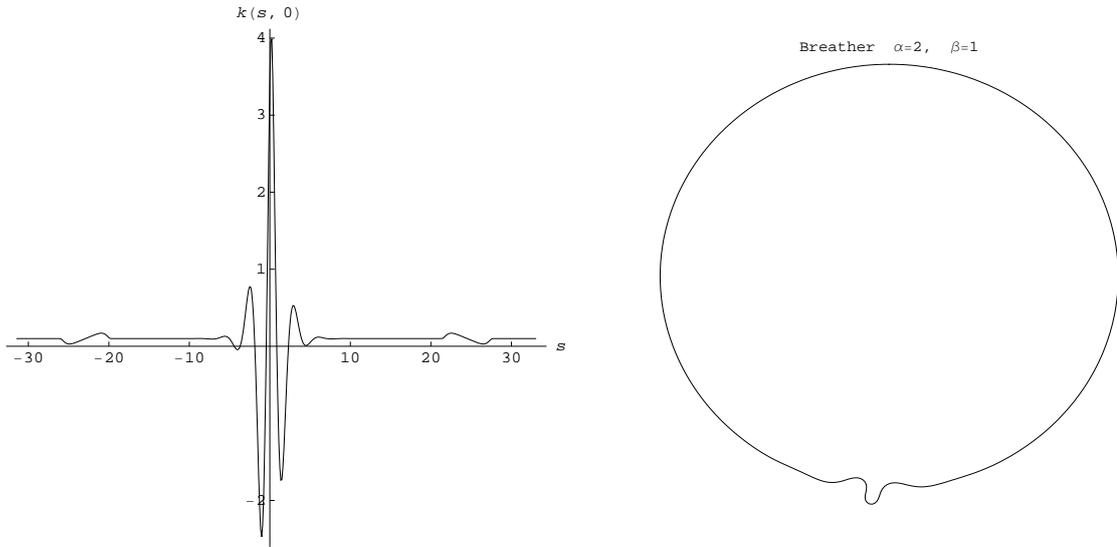


Figura 3.3. Izquierda: curvatura resultante tras añadir funciones meseta (el tamaño de las funciones meseta está aumentado para poder localizarlas). Derecha: curva con breather resultante a partir de la curvatura de la izquierda, con parámetros $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $b = 0.05$.

breather dé al menos una vuelta a la circunferencia de radio $\approx 1/b$ y por tanto colisione con las funciones meseta empleadas para cerrar la curva inicial, hemos recurrido a otros métodos para disminuir primero, y eliminar después, la modificación de la curvatura original mediante funciones "extrañas", tipo meseta, para el flujo geométrico de la mKdV. A continuación presentamos estos métodos.

3.3.2.2 Método con discontinuidad en la curvatura de la curva.

En este método, básicamente lo que hacemos es construir a trozos la curva, teniendo en cuenta que asintóticamente la curvatura b -breather tiende a una constante no trivial b . Para ello, primero imponemos la simetría par a la curvatura inicial (3.63), por medio de una traslación adecuada para eliminar la fase $\arctan(\beta/\alpha)$ y posteriormente considerar que para un parámetro asintótico b suficientemente pequeño, los términos proporcionales a b , se pueden despreciar y por tanto queda una curvatura aproximada en este régimen como sigue

$$k(s, t) \approx 2 \left(b + 2\partial_s \arctan \left(\frac{\sin(\alpha(s+\delta t))}{\cosh(\beta(s+\gamma t))} \right) \right), \quad (3.124)$$

$$\delta = \alpha^2 - 3\beta^2 - 6b^2, \quad \gamma = 3\alpha^2 - \beta^2 - 6b^2.$$

Fijamos b , α , β y definimos la variable ángulo $\theta(s)$ a $t = 0$, de la siguiente forma.

$$\theta(s) = \begin{cases} 2\{bs + 2 \arctan[\frac{\sin(\alpha s)}{\cosh(\beta s)}]\}, & |s| \leq s_0, \\ 2b_1(s - s_0) + \pi/2, & s_0 \leq s \leq s_0 + \frac{\pi}{4b_1}. \end{cases} \quad (3.125)$$

Imponiendo que $\theta(-s) = -\theta(s)$, extendemos la definición del ángulo θ simétricamente alrededor del origen, introduciendo los parámetros s_0 y b_1 ,

$$\theta(s) = \begin{cases} 2b_1(s + s_0) - \pi/2, & -s_0 - \frac{\pi}{4b_1} \leq s \leq -s_0, \\ 2\{bs + 2 \arctan[\frac{\sin(\alpha s)}{\cosh(\beta s)}]\}, & |s| \leq s_0, \\ 2b_1(s - s_0) + \pi/2, & s_0 \leq s \leq s_0 + \frac{\pi}{4b_1}. \end{cases} \quad (3.126)$$

Una vez definido el ángulo θ , determinamos los parámetros s_0 , b_1 para obtener una curva cerrada. Para ello, calculamos numéricamente el parámetro s_0 , imponiendo que

$$\theta(s_0) = 2\{bs_0 + 2 \arctan[\frac{\sin(\alpha s_0)}{\cosh(\beta s_0)}]\} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.127)$$

Esto nos permite hallar el punto s_0 en el cual las tangentes a la curva son verticales, formando un ángulo de $\pi/2$ con la horizontal. Una vez determinado el parámetro s_0 , definimos el parámetro b_1 como

$$b_1 = (2 \int_0^{s_0} \cos[2\{bs + 2 \arctan[\frac{\sin(\alpha s)}{\cosh(\beta s)}]\}] ds)^{-1}. \quad (3.128)$$

Con esta definición de b_1 , cumplimos ya las condiciones de cierre de una curva dadas por (3.119) y (3.120), ya que el carácter par de la curvatura nos permite satisfacer que (con $L = s_0 + \frac{\pi}{4b_1}$)

$$\int_{-L}^L \sin[\theta(s)] ds = 0, \quad (3.129)$$

y directamente también satisfacemos que $\int_{-L}^L k(s, 0) ds = 2\pi$ y $\int_{-L}^L \cos[\theta(s)] ds = 0$. La curva construida se puede ver en Fig.3.5(izquierda). Para valores normales de los parámetros, por ejemplo $\alpha = 2, \beta = 1, b = 0.05$, la discontinuidad en la curvatura $|b - b_1|$ es del orden de 10^{-3} . Este salto en la curvatura afecta a la evolución del breather en la curva, como se puede comprobar en la Fig.3.4. Ante esta circunstancia, decidimos eliminar cualquier perturbación en la curvatura, mediante la construcción de una curva inicial por reflexión especular.

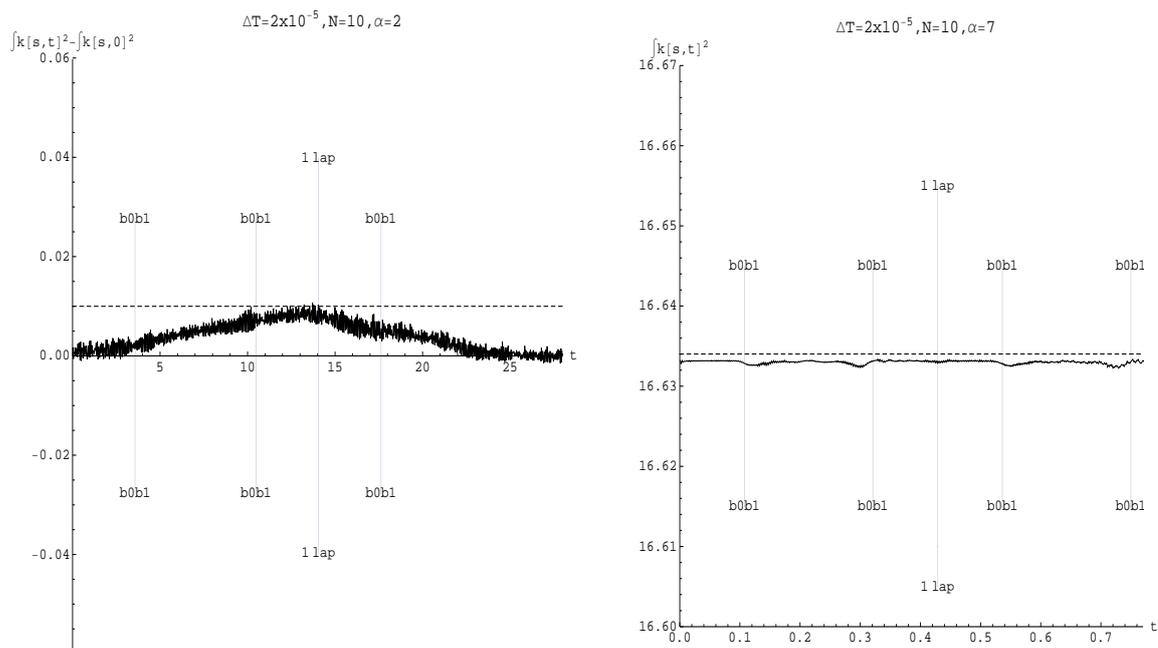


Figura 3.4. Izquierda y Derecha: Evolución de la integral de la curvatura $k(s,t)^2 - k(s,0)^2$ y la integral de $k(s,t)^2$ para distintas frecuencias α , siendo construida esta curvatura con una discontinuidad. Las líneas verticales $b0b1$ localizan la discontinuidad $|b - b_1|$ en la curvatura. El breather derecha tiene parámetros $\alpha = 7, \beta = 1, b = 0.055$, con $s_0 = 22.44$ y la evolución se ha realizado con un paso temporal $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ y 2^{10} puntos en la discretización espacial. El breather izquierda tiene parámetros $\alpha = 2, \beta = 1, b = 0.055$ y la evolución se ha realizado con un paso temporal $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ y 2^{10} puntos en la discretización espacial. La velocidad de ambos breathers es $|3\alpha^2 - \beta^2 - 6b^2|$ y en este caso de frecuencia $\alpha = 2$ y parámetro $s_0 = 39.27$, nos permite localizar dónde están las discontinuidades en la curvatura.

3.3.2.3 Método por reflexión especular de un segmento de curva.

Mediante este método construimos una curva inicial cerrada y diferenciable por reflexión especular de un segmento de curva adecuado. El proceso es el siguiente: fijamos los parámetros de la curvatura b , α , β y definimos la variable ángulo $\theta(s)$ por,

$$\theta(s) = \begin{cases} 0, & -2s_0 \leq s \leq -s_0, \\ 2\{bs + 2 \arctan[\frac{\sin(\alpha s)}{\cosh(\beta s)}]\}, & |s| \leq s_0, \\ 0, & s_0 \leq s \leq 2s_0. \end{cases} \quad (3.130)$$

Calculamos numéricamente el parámetro s_0 , imponiendo que

$$\theta(s_0) = 2\{bs_0 + 2 \arctan[\frac{\sin(\alpha s_0)}{\cosh(\beta s_0)}]\} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.131)$$

De esta forma, localizamos el parámetro s_0 tal que el ángulo del vector tangente a la curva respecto a la horizontal es de $\pi/2$. A partir de aquí construimos la curva inicial $z(s, 0) = (\int^s \cos(\theta(s'))ds', \int^s \sin(\theta(s'))ds')$ por reflexión especular desde el ecuador del círculo, es decir,

$$z(s, 0) = \begin{cases} (x(-s - 2s_0), -y(-s - 2s_0)), & -2s_0 \leq s \leq s_0, \\ (x(s), y(s)), & -s_0 \leq s \leq s_0, \\ (x(-s + 2s_0), -y(-s + 2s_0)), & s_0 \leq s \leq 2s_0. \end{cases} \quad (3.132)$$

La curva construida se puede ver en Fig.3.5(derecha).

3.3.3. Ejemplos de evolución de curvas cerradas por el flujo de mKdV.

3.3.3.1 Curva cerrada simple ($\alpha > 1$).

En este ejemplo mostramos la existencia de curvas con perturbaciones localizadas tipo breather con frecuencia $\alpha > 1$, a partir de simulaciones a tiempos largos de la evolución de la curva inicial por medio del flujo geométrico de la mKdV. Mediante estas simulaciones podemos comprobar cómo el breather mantiene su forma y no se dispersa, tanto cualitativamente viendo como evoluciona la curva con la perturbación breather, como cuantitativamente por medio de la evolución de la norma L^2 de la curvatura de la curva, que como ya dijimos, es una prueba muy exigente de la simulación, ya que involucra dos derivadas sobre la curva, que es la cantidad sobre la que hacemos la evolución.

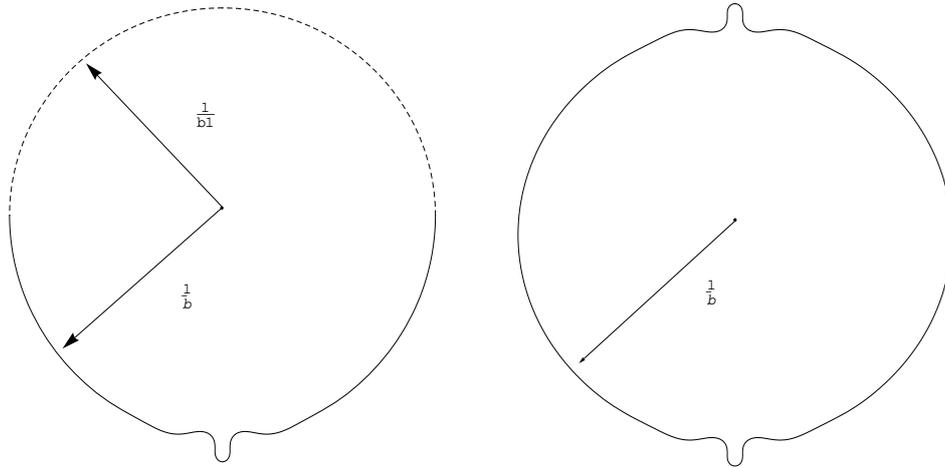


Figura 3.5. Izquierda: curva inicial breather construida con el método 3.3.2 que provoca una discontinuidad en la curvatura. El breather tiene parámetros $\alpha = 2, \beta = 1, b = 0.055$. Derecha: curva inicial breather construida por reflexión especular del semicírculo inferior con breather. El breather tiene los mismos parámetros.

Hemos construido la curva inicial por medio de los tres métodos expuestos en 3.3.2. Cuando los valores de la frecuencia α del breather (3.63)-(3.65) (pág.76) son mayores que 1, la correspondiente curva inicial no tiene autointersecciones, y consiste en un breather sobre un círculo de radio $1/b$, como se puede ver a la derecha de la figura 3.3.

Empleando el método que introduce funciones meseta en la curvatura breather (3.63)-(3.65), obtenemos la curva inicial cerrada con un breather, hacemos la evolución temporal y observamos que debido a que $\alpha > 1$, la velocidad de la joroba del breather permite que se desplace lo suficiente rápido como para interactuar con las funciones meseta añadidas a la curvatura. Esta interacción provoca que la amplitud del breather aumente cada vez que pasa a través de dichas mesetas, y perturba la evolución del breather. Como ejemplo de este comportamiento ver Fig.3.6.

En vista de esto, recurrimos al método 3.3.2, que provoca una discontinuidad acotada en la curvatura de la curva. Construyendo la curva inicial por este método, obtenemos la curva que se puede ver a la izquierda de la figura 3.5. En la figura 3.4 vemos cómo el paso de la perturbación breather a través del salto $|b_0 - b_1|$ genera inestabilidades en la evolución de la norma L^2 de la curvatura. Esto nos lleva a emplear un método que no modifique la curvatura inicial, como es el método por reflexión especular anteriormente expuesto.

La curva que se obtiene, en el caso de dos breathers simétricos con parámetros $\alpha = 2, \beta = 1, b = 0.055$, se puede ver en la Fig.3.5(derecha). Una vez construida esta curva, la introducimos como dato inicial en el flujo geométrico de la mKdV (3.105) para hacer su evolución temporal. Como resultado tenemos dos breathers simétricos que viajan a lo largo del círculo sin dispersarse. Esto se puede ver en las figuras 3.7 y 3.8, en donde representamos la evolución de la curva a distintos tiempos (con paso temporal $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$) y la evolución de la integral de la curvatura $k(s, t)^2 - k(s, 0)^2$ y la integral de la curvatura de esta curva,

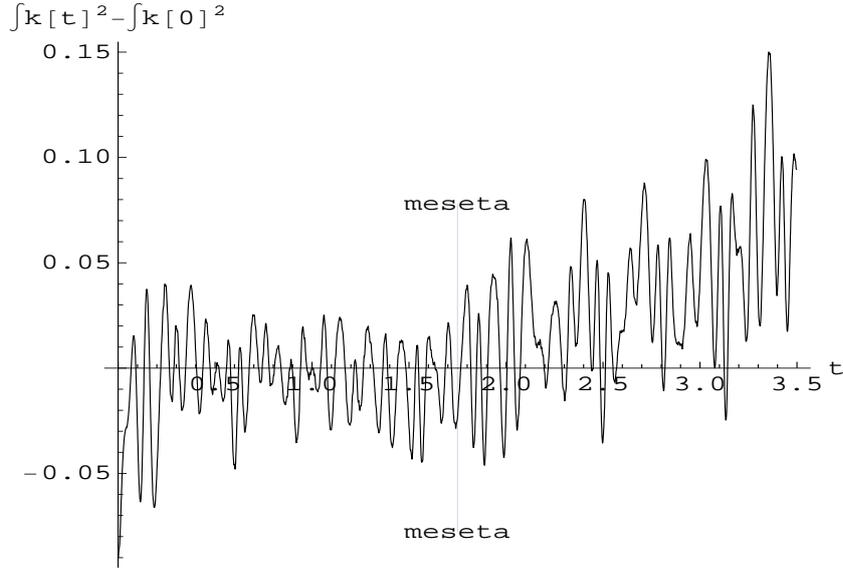


Figura 3.6. Efecto de la interacción de un breather con parámetros $\alpha = 2, \beta = 1, b = 0.055$ con una función meseta introducida para cerrar la curva diferencialmente y localizada en $s = 19.2116$, siendo la velocidad del breather $|3\alpha^2 - \beta^2 - 6b^2|$, por lo que el tiempo que tardará en llegar a la meseta $t \approx \frac{19.2116}{|3\alpha^2 - \beta^2 - 6b^2|} = 1.749$.

que como ya indicamos en (3.116), nos determina el número de vueltas que da el vector tangente a lo largo del dominio de definición. Para facilitar la interpretación de las gráficas tanto en este ejemplo como en los siguientes, hemos introducido en algunas de ellas líneas a trazos horizontales que nos dan una referencia de la magnitud de las oscilaciones.

3.3.3.2 Caso intermedio ($0 < \alpha < 1$).

Cuando el parámetro de frecuencia α en la solución curvatura (3.63)-(3.65) (pág.76) está entre 0 y 1, aparecen interesantes curvas con autointersecciones que se crean y destruyen a intervalos periódicos en la evolución de la curva inicial por el flujo geométrico de la mKdV, como se puede ver en la figura 3.9. Hasta donde sabemos, este es el primer resultado conocido en esta dirección. En este experimento hemos construido la curva inicial mediante el método que introduce funciones meseta (3.121) en la curvatura. Empleamos el método con funciones meseta, ya que en este caso en el que el parámetro $0 < \alpha < 1$, el breather no llega a interactuar con las funciones meseta hasta un tiempo razonablemente largo, con lo que tenemos suficiente tiempo para observar el fenómeno que nos interesa resaltar, es decir, la creación y destrucción de autointersecciones a lo largo de la evolución bajo el flujo geométrico de la mKdV (3.105). Dicho esto, para el método que recurre a funciones meseta, hemos escogido como parámetros del breather $\alpha = 0.8, b = 0.04, \beta = 1$, y como parámetros del método para cerrar la curva: $S_l =, S_r =, A = 10, B = 17, \lambda_1 = 24.7347, A' = -47.36, B' = -30.36, \lambda_2 = 1815.11, A'' = 35.24, B'' = 52.24, \lambda_3 = 1815.11$, y finalmente tenemos como curvatura de la curva $k(s, 0) = \frac{d}{ds}\theta_2(s, 0)$, donde de nuevo θ_2 está dado

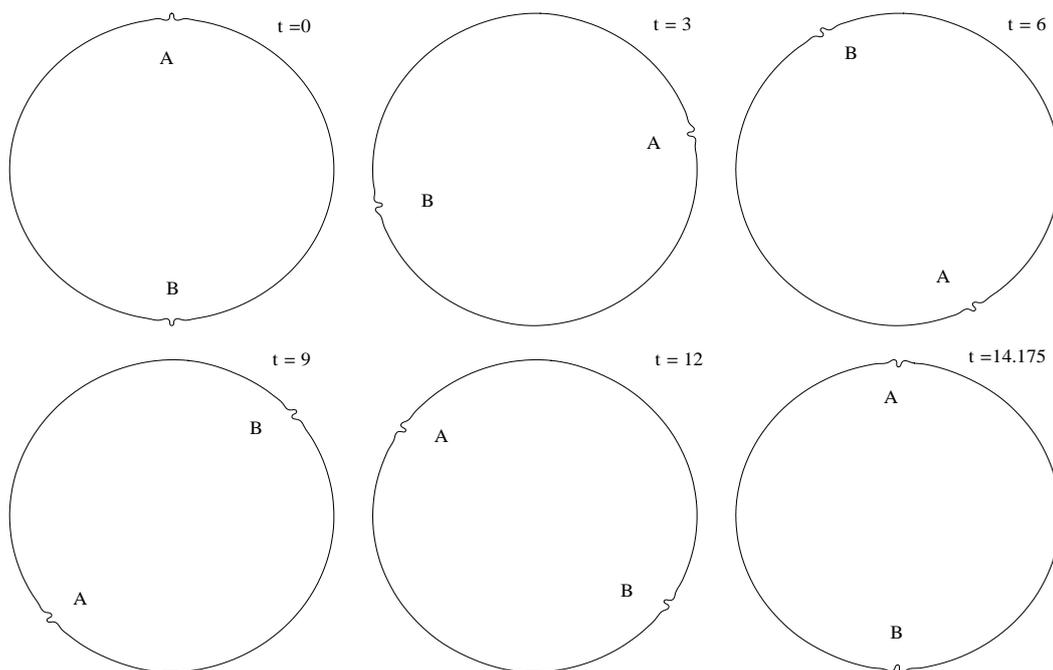


Figura 3.7. Curva simple. Perturbación breather simétrica con $\alpha = 2, \beta = 1, b = 0.02$, viajando a lo largo de la curva en $t = 0, 3, 6, 9, 12, 14.175\Delta t$, $\Delta t = 75 \times 10^{-4}$.

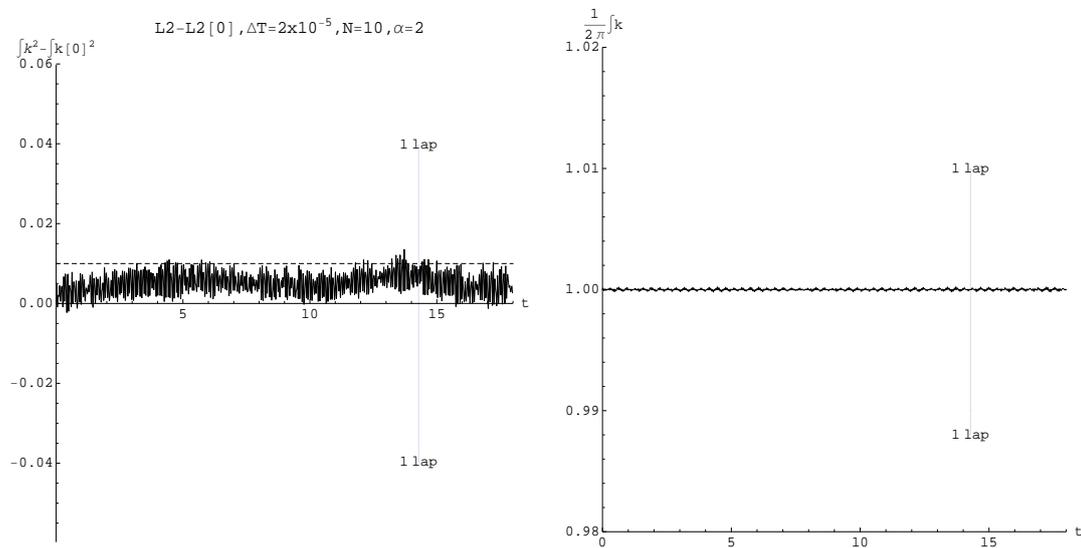


Figura 3.8. Curva simple. Izquierda: Evolución de la integral de $k(s, t)^2 - k(s, 0)^2$ en el caso de la curva especular. El breather tiene parámetros $\alpha = 2, \beta = 1, b = 0.02$ y la evolución se ha realizado con un paso temporal $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ y 2^{10} puntos en la discretización espacial. Derecha: evolución de la integral de la curvatura $k(s, t)$, que representa el número de vueltas dado por el vector tangente a la curva.

en (3.122). La evolución temporal de esta curva inicial está dada en la figura 3.9 y se ha realizado con un paso temporal $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ y 2^9 puntos en la discretización espacial. En la figura 3.10, representamos las cantidades conservadas por la mKdV, dadas por la

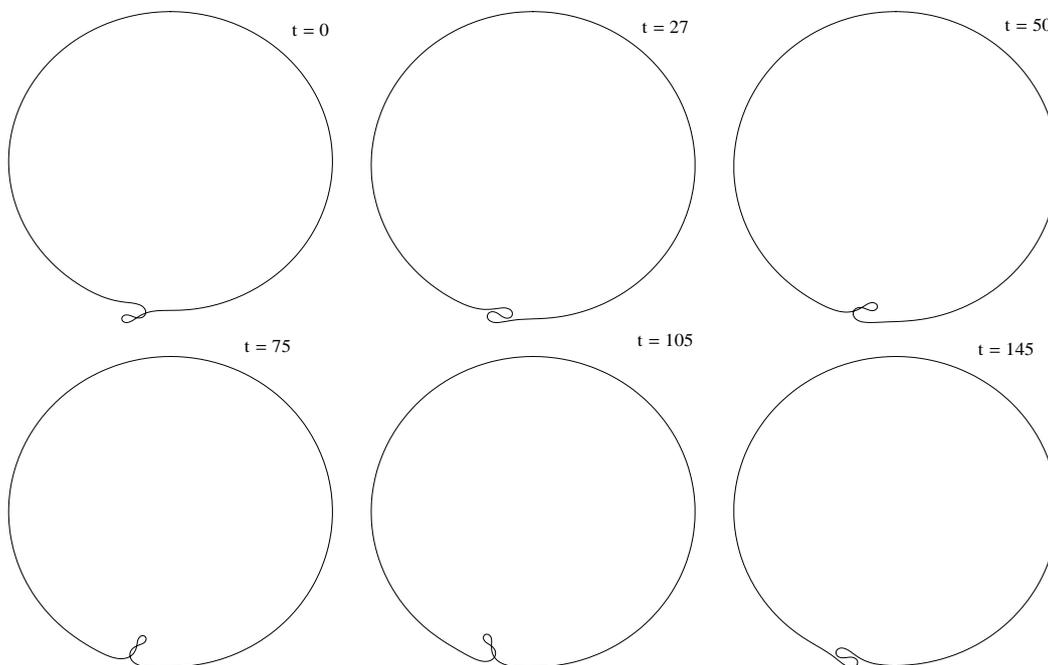


Figura 3.9. Estado intermedio para curva con mesetas en $t = 0, 27, 50, 75, 105, 145\Delta T$, $\Delta T = 10\Delta t$.

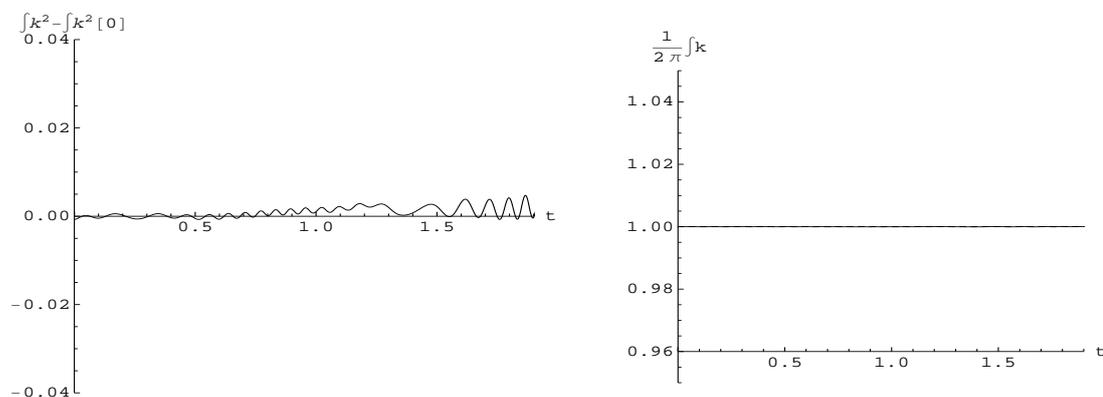


Figura 3.10. Estado intermedio con mesetas :Izquierda, integral de $k(s, t)^2 - k(s, 0)^2$. Derecha, integral de la curvatura $k(s, t)$ (que nos da el n° de vueltas), ambas desde $t = 0$ a $t = 19000\Delta t$. Estando localizada el comienzo de la función meseta en $s = 17.27$, y siendo la velocidad del breather $|3\alpha^2 - \beta^2 - 6b^2|$, la interacción del breather con la función meseta ocurrirá a tiempo $t \approx \frac{17.27}{|3\alpha^2 - \beta^2 - 6b^2|} = 18.97$.

integral de $k(s, t)^2 - k(s, 0)^2$ y por la integral de la curvatura $k(s, t)$, que nos da el número

de vueltas. Observar que en los instantes $t = 27\Delta t$ y $t = 145\Delta t$ de la evolución de la curva con $\alpha = 0.8$, la curva no tiene ninguna autointersección, y que en los tiempos anteriores y posteriores las autointersecciones se crean y destruyen periódicamente.

3.3.3.3 Solución polo doble ($\alpha = 0$).

Este ejemplo tiene relación con la solución polo doble (2.9) presentada en el capítulo 2, en el caso en que el parámetro asintótico $b = 0$. De esta forma, mostramos una curva que retiene las autointersecciones en su evolución, tomando la forma de un par de lazos que se separan uno de otro de manera logarítmica. Usaremos la expresión (3.103) (pág.84) como punto de partida y procedemos como en el caso intermedio anterior.

Dado que en este caso la frecuencia $\alpha = 0$, podemos construir la curva inicial por el método que emplea funciones meseta, ya que la separación entre los lazos es a velocidad logarítmica y en un tiempo razonablemente grande, los dos extremos diferenciados (jorobas) no van a interactuar con las funciones meseta introducidas para cerrar la curva. Nos basta con mostrar que la curva retiene las autointersecciones en su evolución.

En la construcción de la curva hemos escogido como parámetros de la curvatura polo doble $b = 0.045$, $\beta = 1$, y como parámetros del método, $S_l = S_r = A' = -29.9066$, $B' = -19.9066$, $\lambda_2 = 784.93588$, $A'' = 27.8851$, $B'' = 37.8851$, $\lambda_3 = 784.93588$, y finalmente como curvatura de la curva $k(s, 0) = \frac{d}{ds}\theta_2(s, 0)$, donde de nuevo θ_2 está dado en (3.122) con $\theta(s, 0)$ como en el caso anterior, y F, G están dados por (3.63)-(3.65).

Como la forma asintótica de la solución (3.103) cuando $t \rightarrow +\infty$ está dada por la superposición de la constante b más un par soliton/antisoliton

$$k(s, t) \approx b + \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2 + 4b^2}} \operatorname{sech}(u - \delta_+) - \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2 + 4b^2}} \operatorname{sech}(u - \delta_-), \quad u = \beta(x - (\beta^2 + 6b^2)t),$$

con $\delta_{\pm} = \beta \log \left(6\beta \left(\frac{\beta^2 - 4b^2}{\beta^2 + 4b^2} \right)^{\pm \frac{1}{2}} (\beta^2 + 2b^2)t \right)$, esperamos asintóticamente un lazo y un antilazo viajando sobre el círculo, como la curva inducida por esta curvatura. Además, los lazos se separan logarítmicamente en tiempo, teniendo asintóticamente el mismo tamaño.

Representamos las cantidades conservadas y que empleamos para ver la calidad de la evolución de la simulación, por la integral de $k(s, t)^2 - k(s, 0)^2$ y la integral de $k(s, t)$ (ver figura 3.11). La evolución de la curva está dada en la figura 3.12 y hemos empleado un paso temporal $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ y 2^9 puntos en la discretización espacial.

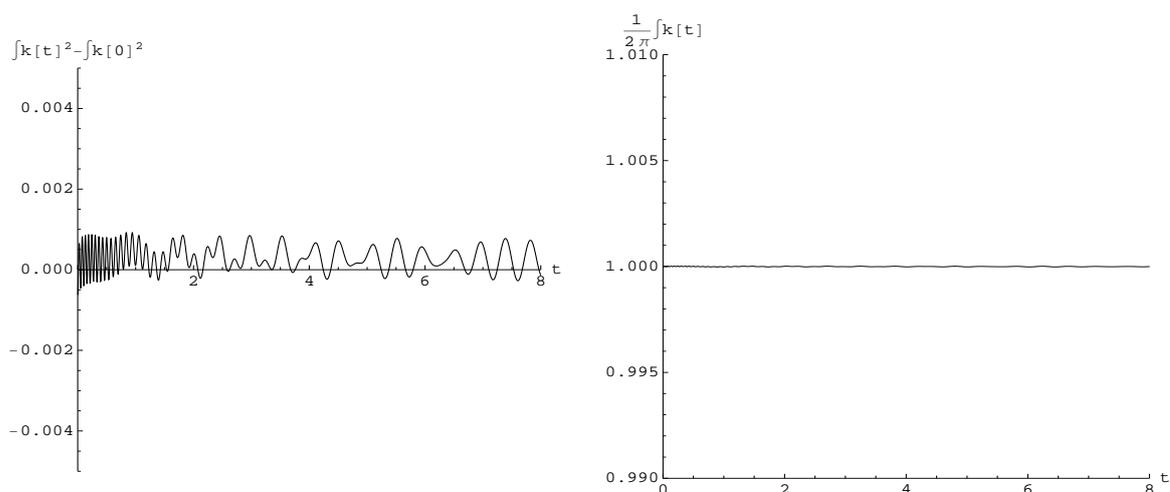


Figura 3.11. Polo doble construido con mesetas: integral de $k(s, t)^2 - k(s, 0)^2$ e integral de la curvatura $k(s, t)$ del polo doble, desde $t = 0$ a $t = 80000\Delta t$.

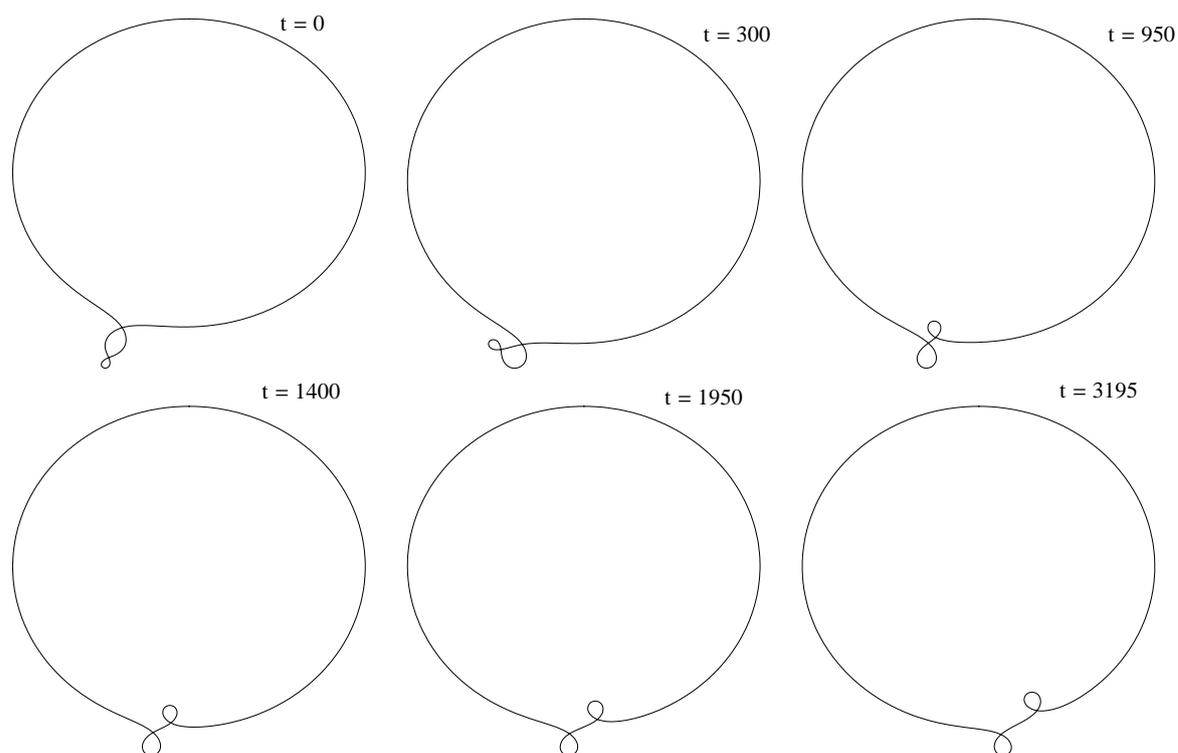


Figura 3.12. Lazo – antilazo sobre el círculo, a $t = 0, 300, 950, 1400, 1950, 3195\Delta T$, $\Delta T = 20\Delta t$.

3.3.3.4 Colisión.

En este ejemplo nos planteamos la pregunta natural de la colisión entre breathers, empleando esta colisión para estudiar la estabilidad de este tipo de datos iniciales bajo el

flujo geométrico de la mKdV (3.105). De esta forma, hemos tomado como curvatura inicial la que resulta al añadir dos breathers (3.63)-(3.65) diferentes, uno con un parámetro de frecuencia mayor que el otro, lo que implica que una perturbación breather se moverá más rápido que la otra sobre el círculo y terminarán colisionando en algún momento.

Al igual que en el caso de frecuencia $0 < \alpha < 1$, presentamos los resultados obtenidos cuando construimos las curvas iniciales mediante el método con funciones meseta.

Seleccionamos los siguientes parámetros para los breathers: $b = 0.0495$, $\alpha_1 = 2.85$, $\alpha_2 = 2.35$, $\beta = 1$, $x_0 = -1$, $t_0 = -1$. Escogemos también los siguientes parámetros para el método de construcción de la curva: $s_0 = \frac{-\pi}{b}$, $s_1 = \frac{\pi}{b}$, $S_l = -32.72495$, $S_r = 34.8305$, $A = 7$, $B = 20$, $\lambda_1 = 629.69974$, $A' = -29.725$, $B' = -18.725$, $\lambda_2 = 338.7296297$, $A'' = 20.8306$, $B'' = 31.8306$, $\lambda_3 = 338.7296297$.

Las diferentes frecuencias $\alpha_1 > \alpha_2$ implican que los breathers tendrán diferentes velocidades de grupo, lo que permitirá que se produzcan colisiones entre las perturbaciones breather. Las traslaciones x_0, t_0 aplicadas sobre uno de los b-breather, nos permitirán separarlos adecuadamente a $t = 0$. La curvatura obtenida es,

$k(s, 0) = \frac{d}{ds}\theta_2(s, 0)$, donde

$$\begin{aligned} \theta_2(s, 0) &= 2 \left(bs + 2 \arctan \left(\frac{G(s, 0, b, \alpha_1, \beta)}{F(s, 0, b, \alpha_1, \beta)} \right) + 2 \arctan \left(\frac{G(s-x_0, -t_0, b, \alpha_2, \beta)}{F(s-x_0, -t_0, b, \alpha_2, \beta)} \right) \right) \\ &+ \psi_1(s, A, B, \lambda_1) - \psi_2(s, A', B', \lambda_2) + \psi_3(s, A'', B'', \lambda_3), \end{aligned} \quad (3.133)$$

con F, G dados por (3.63)-(3.65).

Como podemos ver, la complejidad de la curvatura modificada se incrementa cuando se tienen en cuenta diferentes breathers más las correspondientes funciones meseta. A pesar de esta complejidad, podemos realizar la evolución de la curva, la integral de la diferencia $k(s, t)^2 - k(s, 0)^2$ y también la integral de la curvatura $k(s, t)$, como podemos ver en las figuras 3.13 y 3.14. En la evolución hemos escogido un paso temporal $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ y 2^9 puntos en la discretización espacial.

Hemos contrastado la evolución de esta curva con breathers que colisionan, construida empleando funciones meseta, con la evolución de la curva con breathers con diferentes velocidades, pero ahora construida con el método que modifica por partes la curvatura, siendo la discontinuidad total de la curvatura del orden de $|b - b_1| \approx 5 \times 10^{-3}$. La construimos por este método pues, a pesar de saber que la discontinuidad $|b - b_1|$ en la curvatura afecta ligeramente a la evolución de los breathers sobre la curva, nos interesa resaltar el carácter elástico de las colisiones de los breathers sobre la curva.

Hemos escogido como parámetros de los breathers $\alpha_1 = 2.35$, $\alpha_2 = 2.85$, $\beta = 1$, $b = 0.045$ y hemos introducido una traslación para separar a $t = 0$ los breathers con frecuencia α_2 del breather con frecuencia α_1 . Notar que al ser $\alpha_2 > \alpha_1$, los breathers colisionarán en algún instante, fenómeno que se puede comprobar en la figura 3.15. Hemos empleado 2^{10} puntos en la discretización espacial y hemos usado un paso temporal $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$. La

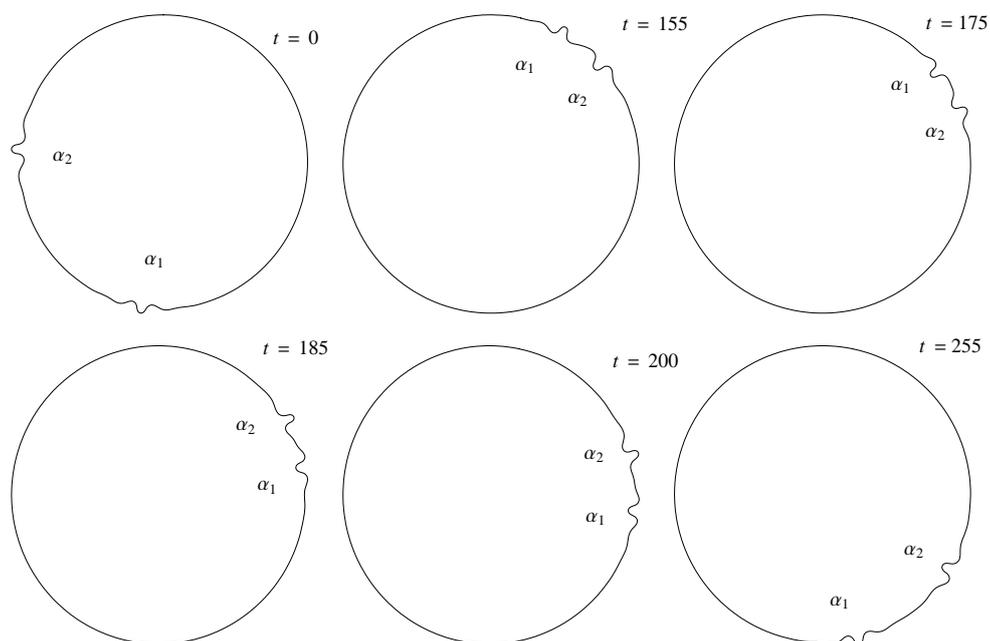


Figura 3.13. Colisión de breathers con frecuencias $\alpha_1 \geq \alpha_2$ en una curva con mesetas, en los instantes $t = 0, 155, 175, 185, 200, 255\Delta t$.

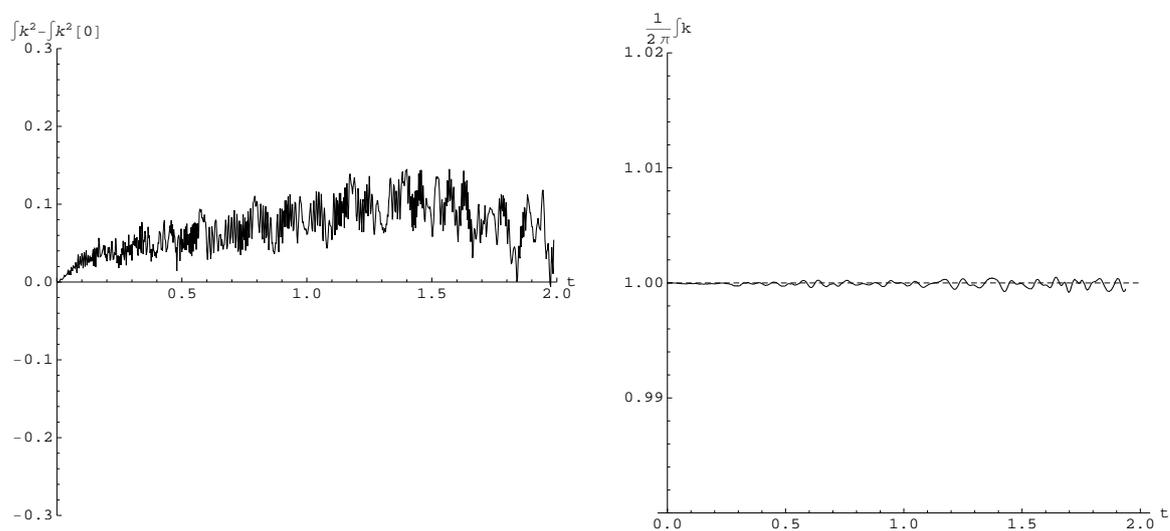


Figura 3.14. Caso de una colisión de breathers en una curva con mesetas: integral de $k(s, t)^2 - k(s, 0)^2$ y $k(s, t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 2000\Delta t$.

evolución de la integral de $k(s, t)^2 - k(s, 0)^2$ y la integral de la curvatura $k(s, t)$, que nos da el número de vueltas del vector tangente a la curva, se pueden ver en la figura 3.16.

Las curvaturas empleadas para el método con mesetas y el método con una diferencia

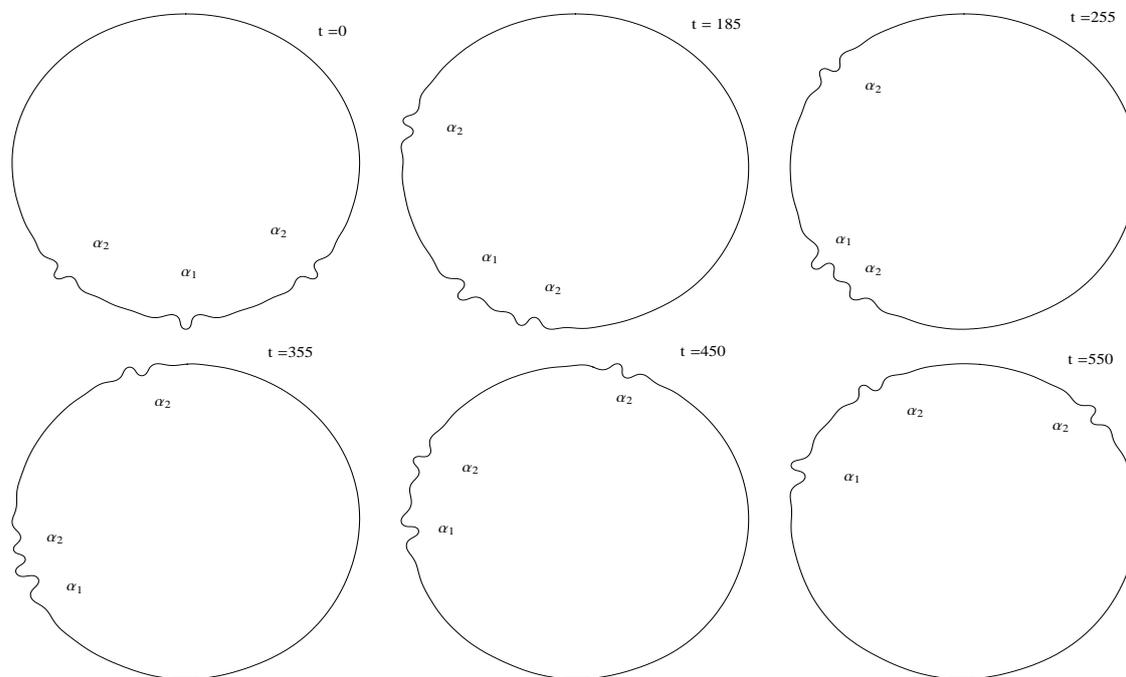


Figura 3.15. Colisión de breathers sobre una curva con discontinuidad $|b - b_1|$ en la curvatura: evolución de la curva con tres breathers, dos con frecuencia α_2 y uno con frecuencia α_1 , $\alpha_2 > \alpha_1$, en los instantes $t = 0$, $t = 185$, $t = 255$, $t = 355$, $t = 450$, $t = 550\Delta t$.

$|b - b_1|$ en la curvatura están indicadas en la figura 3.17

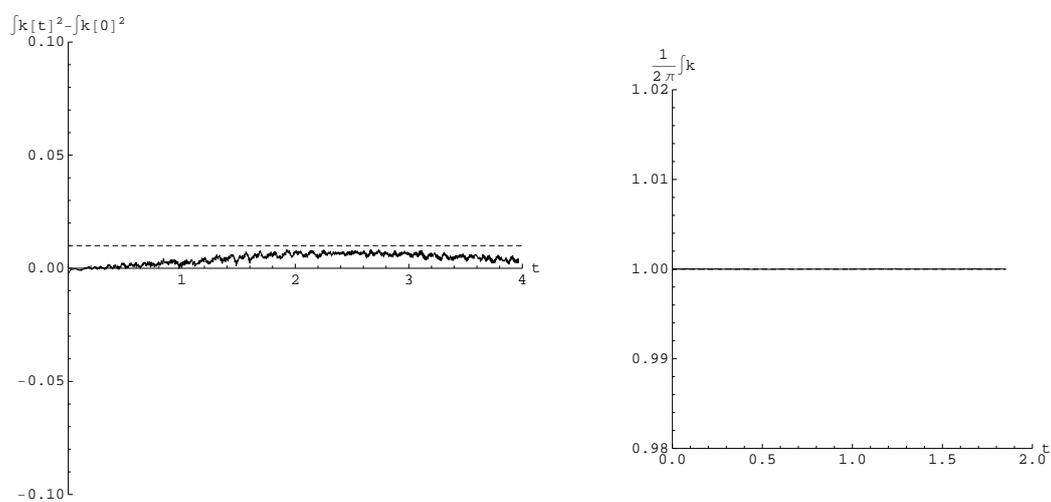


Figura 3.16. Colisión de breathers sobre una curva con diferencia $|b - b_1|$ en la curvatura: integral de $k(s, t)^2 - k(s, 0)^2$ e integral de $k(s, 0)$.

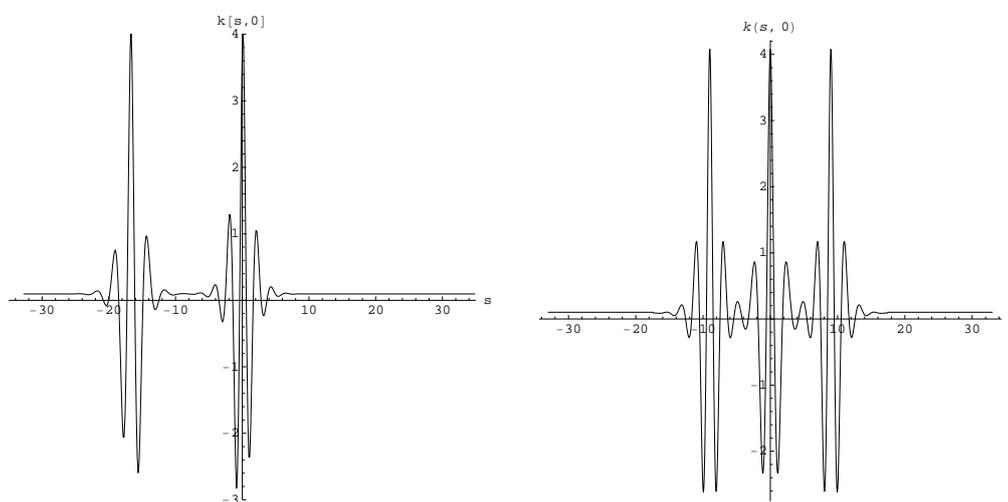


Figura 3.17. Curvaturas en el caso de colisión: izquierda, curvatura construida con mesetas para los breathers de 3.13. Derecha, curvatura construida con salto $|b - b_1|$, para los breathers de 3.15.

Capítulo 4

Regularidad de la ecuación de Gardner para datos en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$

Sumario. En este capítulo probamos que el problema de valor inicial de la ecuación KdV extendida (ecuación de Gardner en adelante) está local y globalmente bien propuesto para datos en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$. Es decir demostramos la existencia, unicidad, persistencia y dependencia continua del dato inicial para un intervalo temporal finito, cuyo tamaño depende de la norma $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$ del dato inicial. Gracias a este resultado local y a leyes de conservación probamos la existencia global en $H^1(\mathbb{R})$.

El estudio que hemos llevado a cabo de la versión geométrica de la ecuación mKdV atractiva, buscando curvas cerradas en el plano con perturbaciones que viajan a lo largo de la curva, nos llevó, como ya vimos en el capítulo 3, a buscar soluciones de la mKdV del tipo una constante más una función que decae exponencialmente en la variable espacial, cuando ésta va a infinito, i.e. funciones de norma $\dot{H}^1(\mathbb{R})$ acotada.

En este capítulo vamos a probar que el problema de valor inicial para la ecuación de Gardner, que verifican las funciones que decaen exponencialmente que nos hemos encontrado en el capítulo anterior, está localmente (en tiempo) bien propuesto para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$ y globalmente bien propuesto para datos iniciales en $H^1(\mathbb{R})$. Es decir, probamos la existencia, unicidad, persistencia y dependencia continua del dato inicial, primero en un intervalo de tiempo finito que depende de la norma $H^s(\mathbb{R})$ del dato inicial, y después para todo $t \in \mathbb{R}$, usando el resultado local y leyes de conservación si el dato inicial está en $H^1(\mathbb{R})$.

La prueba de que el problema de valor inicial de la ecuación mKdV está localmente bien propuesto para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$, fue dado por C.Kenig, G.Ponce y L.Vega en [KePV2]. Ellos utilizan en su demostración estimaciones de la función maximal y el smoothing de T.Kato. En [KePV2] también se demuestra implícitamente que el problema está globalmente bien propuesto en $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$. El resultado global fue mejorado en [CoKeTakTa] por J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka y T. Tao para datos

en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$, utilizando la teoría de existencia para KdV y la transformada de Miura (1.8), tanto para el caso atractivo como repulsivo. Estos son dos métodos distintos de abordar el problema de la existencia local de solución para la ecuación mKdV.

El problema de valor inicial que consideramos para la mKdV es

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + 2(u^3)_x = 0 & u(x, t) = \sigma + v(x, t), \quad \sigma, t, x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) \equiv u_0(x) = \sigma + v_0(x), \quad v_0(x) \in H^s(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (4.1)$$

El factor 2 de la ecuación se puede cambiar reescalando la ecuación. En vista de que $u(x, t) = \sigma + v(x, t)$ es una función de norma no acotada, el problema de valor inicial de la mKdV lo traducimos en el siguiente PVI para la variable auxiliar v . Primero, obtenemos la ecuación para v , al introducir el ansatz para u en la ecuación mKdV,

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + 2(u^3)_x = 0, \quad u(x, t) = \sigma + v(x, t) &\Rightarrow \\ v_t + v_{xxx} + 2((\sigma + v)^3)_x = v_t + v_{xxx} + 6(\sigma + v)^2 v_x = 0 &\Rightarrow \\ v_t + v_{xxx} + 6\sigma^2 v_x + 12\sigma v v_x + 6v^2 v_x = 0. \end{aligned}$$

El sumando $6\sigma^2 v_x$ lo podemos eliminar haciendo el cambio de variable $\bar{x} = x + 6\sigma^2 t$ en la ecuación. De esta forma llegamos a la ecuación para la función auxiliar v , en donde por comodidad denotamos la variable \bar{x} como x :

$$v_t + v_{xxx} + 12\sigma v v_x + 6v^2 v_x = 0.$$

Como vemos, la función v satisface la ecuación KdV extendida (eKdV) o ecuación de Gardner. El PVI asociado es el siguiente:

$$\begin{cases} v_t + v_{xxx} + 6\sigma(v^2)_x + 2(v^3)_x = 0 & \sigma, t, x \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = v_0(x) \in H^s(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (4.2)$$

De esta forma, si $v(x, t)$ es solución del PVI (4.2), $u(x, t) = \sigma + v(x, t)$ es solución del PVI (4.1). Nos proponemos probar que el PVI (4.2) para la función auxiliar $v(x, t)$, cuando $v_0(x) \in H^s(\mathbb{R})$, está localmente bien propuesto para cierto índice s .

4.1. Teoría local para la ecuación de Gardner con datos en $H^{1/4^+}(\mathbb{R})$.

Para probar la existencia local (a tiempo $t = T > 0$) de solución para la ecuación de Gardner (4.2) con datos iniciales en $H^{1/4^+}(\mathbb{R})$, recurriremos a la propiedad de escala para probar primero la existencia local a tiempo $t = 1$ y apoyándonos en este resultado y en

leyes de conservación, extenderlo después a cualquier tiempo $t = T > 0$. Es decir, dada v satisfaciendo (4.2)

$$\begin{cases} v_t + v_{xxx} + 6\sigma(v^2)_x + 2(v^3)_x = 0 & \sigma > 0, t, x \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = v_0(x) \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases} \quad (4.3)$$

mediante la transformación de escala

$$v(x, t) = \lambda^\alpha w(\lambda x, \lambda^3 t), \quad \lambda > 0, \alpha > 2, \quad (4.4)$$

la función w satisface la siguiente ecuación de Gardner asociada,

$$\begin{cases} w_t + w_{xxx} + 6\sigma\lambda^{\alpha-2}(w^2)_x + 2\lambda^{2(\alpha-1)}(w^3)_x = 0 & \sigma, \lambda > 0, \alpha > 2, t, x \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = w_0(x) \in H^s(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (4.5)$$

Esto es fácil de verificar por simple sustitución de (4.4) en (4.3), como vemos a continuación

$$\begin{aligned} 0 &= v_t + v_{xxx} + 6\sigma(v^2)_x + 2(v^3)_x \\ &= \lambda^{\alpha+3}w_t + \lambda^{\alpha+3}w_{xxx} + 6\sigma\lambda^{2\alpha+1}(w^2)_x + 2\lambda^{3\alpha+1}(w^3)_x \\ &= \lambda^{\alpha+3}[w_t + w_{xxx} + 6\sigma\lambda^{\alpha-2}(w^2)_x + 2\lambda^{2(\alpha-1)}(w^3)_x]. \end{aligned}$$

Por tanto, la idea es probar que el PVI (4.5) para w está localmente bien propuesto, a tiempo $t = 1$ y cierto λ a determinar, para posteriormente apoyarnos en este resultado y demostrar, vía la relación $\lambda^3 T = 1$, obtenida a partir de la transformación de escala (4.4), que el PVI (4.3) para v está localmente bien propuesto a tiempo $t = T = \lambda^{-3}$. Podemos ya enunciar los teoremas de existencia local para w y v .

Teorema 4.1.1. *Sea $s > 1/4$ y $\sigma > 0$. Entonces existen constantes $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $\lambda > 0$ y $b \in (1/2, 1)$, tal que para todo $w_0 \in H^s(\mathbb{R})$, existe un único $w \in C([-1, 1] : H^s(\mathbb{R}))$, solución del PVI (4.5)*

$$\begin{cases} w_t + w_{xxx} + 6\sigma\lambda^{\alpha-2}(w^2)_x + 2\lambda^{2(\alpha-1)}(w^3)_x = 0, & \sigma, \lambda > 0, \alpha > 2, t, x \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = w_0(x) \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases}$$

con $\lambda \leq \min(d_1 \|w_0\|_{H^s}^{-\frac{1}{\alpha-2}}, d_2 \|w_0\|_{H^s}^{-\frac{1}{(\alpha-1)s}})$, y w satisfaciendo

$$w \in C([-1, 1] : H^s(\mathbb{R})), \quad (4.6)$$

$$w \in X^{s,b} \subseteq L_{x,loc}^p(\mathbb{R} : L_t^2([-1, 1])), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (4.7)$$

$$\partial_x(w^3) \in X^{s,b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \quad \wedge \quad \partial_x(w^2) \in X^{s,b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}). \quad (4.8)$$

Teorema 4.1.2. *Sea $s > 1/4$ y $\sigma > 0$. Entonces existe $b \in (1/2, 1)$, tal que para cualquier $v_0(x) \in H^s(\mathbb{R})$, existe $T = T(\|v_0\|_{H^s}) > 0$ (con $T(\rho) \rightarrow \infty$ cuando $\rho \rightarrow 0$) y una única solución $v(x, t) \equiv v(t)$ del PVI (4.2) tal que $\sigma + v(t)$ es la única solución de (4.1) en el intervalo de tiempo $[-T, T]$ satisfaciendo*

$$v \in C([-T, T] : H^s(\mathbb{R})), \quad (4.9)$$

$$v \in X^{s,b} \subseteq L_{x, loc}^p(\mathbb{R} : L_t^2([-T, T])), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (4.10)$$

$$\partial_x(v^3) \in X^{s,b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \quad \wedge \quad \partial_x(v^2) \in X^{s,b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}). \quad (4.11)$$

Nota:

Las pruebas de estos teoremas locales descansan en probar ciertas estimaciones lineales y en comprobar que, via la identidad de Duhamel (33), los operadores integrales locales asociados a las ecuaciones (4.5) y (4.2) respectivamente, son contractivos en cierto espacio que definiremos más adelante. En concreto probaremos la existencia de una única solución de la ecuación integral local que, via la identidad de Duhamel, se obtiene de (4.2). Es decir, si para la función w la versión integral de (4.5) es

$$w(t) = W(t)w_0 - 6\sigma\lambda^{\alpha-2} \int_0^t W(t-t')\partial_x(w^2)dt' - 2\lambda^{2(\alpha-1)} \int_0^t W(t-t')\partial_x(w^3)dt',$$

utilizando la función de corte ψ , definida por:

$$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \psi \equiv 1 \quad \text{en} \quad [-1, 1] \quad \text{y} \quad \text{supp} \psi \subseteq (-2, 2), \quad (4.12)$$

obtenemos la versión integral local de (4.5)

$$\begin{aligned} \psi(t)w(t) &= \psi(t)W(t)v_0 - 6\sigma\lambda^{\alpha-2}\psi(t) \int_0^t W(t-t')\partial_x[(\psi(t')w(t'))^2]dt' \\ &\quad - 2\lambda^{2(\alpha-1)}\psi(t) \int_0^t W(t-t')\partial_x[(\psi(t')w(t'))^3]dt', \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde ahora $\psi(t)w(t)$ es solución de (4.5) en el intervalo $[-1, 1]$. Por tanto, el operador integral local $\Phi_1(w)$ viene dado por

$$\begin{aligned} \Phi_{1,w_0}(w) \equiv \Phi_1(w) &= \psi(t)W(t)v_0 - 6\sigma\lambda^{\alpha-2}\psi(t) \int_0^t W(t-t')\partial_x[(\psi(t')w(t'))^2]dt' \\ &\quad - 2\lambda^{2(\alpha-1)}\psi(t) \int_0^t W(t-t')\partial_x[(\psi(t')w(t'))^3]dt', \end{aligned} \quad (4.14)$$

y vamos a probar que Φ_1 define una contracción en cierta bola del espacio de J.Bourgain $X^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, para ciertos $s \geq 0$, $b > 1/2$. La demostración de esta propiedad contractiva pasa por demostrar estimaciones bilineales y trilineales para los términos no lineales de (4.5), es decir $\partial_x(w^2)$ y $\partial_x(w^3)$ respectivamente. Para probar estas estimaciones bilineales y trilineales, recurrimos y trabajamos con el multiplicador norma $[k; \mathbb{R}]$ de T.Tao [T0] (ver

1.3.1, pág. 36). Por ello emplearemos las estimaciones preliminares dadas en la sección 1.3. Finalmente si denotamos $f = \partial_x(g^k)$, $k = 2, 3$ y $g = \psi(t)w(t)$, la siguiente estimación no lineal es clave en la prueba del resultado local del PVI dado por (4.5). Observar que las estimaciones en la norma $X^{s,b}$ presentadas en los lemas preliminares 1.3.3 y 1.3.4 (pág. 36), terminamos en el espacio $X^{s,b-1}$, consecuencia de aplicar la transformada de Fourier al operador libre de (4.1) o (4.5). De esta forma, al aplicar un argumento de aplicación contractiva, necesitamos tener una estimación que devuelva la parte no lineal al espacio $X^{s,b}$. Para ello demostramos las siguientes estimaciones bilineales y trilineales

$$\|\partial_x(g^k)\|_{X^{s,b-1}} \leq c \|g\|_{X^{s,b}}^k, \quad k = 2, 3, \quad c > 0.$$

Necesitaremos la siguiente estimación bilineal:

Lema 4.1.1. *Sea $s > 1/4$. Entonces para todo $u_i = \psi(t)\phi_i(x, t)$, $i = 1, 2$, con soporte en $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ y $b = 1/2 + \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$, se verifica*

$$\|u_1 u_2\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \leq c \|\phi_1\|_{X^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \|\phi_2\|_{X^{-1/2, 1-b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}. \quad (4.15)$$

Demostración. Por la identidad de Plancherel 1.3.5 (pág. 37), es suficiente con probar que

$$\left\| \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-s} \langle \xi_2 \rangle^{1/2}}{\langle \tau_2 - \xi_2^3 \rangle^{1-b} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b} \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \lesssim 1 \quad (4.16)$$

o equivalentemente, después de hacer descomposición diádica en las variables $\xi_j, \lambda_j = (\tau_j - \xi_j^3)$, $j = 1, 2$, así como de la función de resonancia $h(\xi)$ (esto es, $|\xi_j| \sim N_j$, $|\lambda_j| \sim L_j$, $|h(\xi)| \sim H$)

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-s} \langle \xi_2 \rangle^{1/2}}{\langle \tau_2 - \xi_2^3 \rangle^{1-b} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b} \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \\ & \lesssim \left\| \sum_{N_{max} \gtrsim 1} \sum_H \sum_{L_1, L_2, L_3 \gtrsim 1} \frac{\langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{L_1^b L_2^{1-b}} X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3}(\xi, \tau) \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \quad (4.17) \\ & \leq c, \end{aligned}$$

a falta de estimar $X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3}$, que es el multiplicador localizado

$$X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3}(\xi, \tau) := \chi_{|h(\xi)| \sim H} \prod_{j=1}^3 \chi_{|\xi_j| \sim N_j} \chi_{|\lambda_j| \sim L_j}. \quad (4.18)$$

A partir de las identidades

- (i) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$,
- (ii) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + h(\xi) = 0$,

el multiplicador $X_{N_1, N_2, \dots}$ se anula a menos que suceda una de las siguientes posibilidades

$$N_{max} \sim N_{med}, \quad (4.19)$$

$$L_{max} \sim \max(H, L_{med}). \quad (4.20)$$

Supongamos ahora (sin pérdida de generalidad, por las propiedades de simetría e invariancia por traslaciones) que $N_1 \geq N_2 \geq N_3$. De esta forma, por (4.19), tenemos que $N_1 \sim N_2 \gtrsim 1$. Así cuando N_1 recorre los números diádicos, el símbolo de sumación transcurre por regiones disjuntas del espacio de frecuencia en las variables 1, 2.

Como se cumplen las hipótesis del test de Schur (1.3.9), lo podemos aplicar a (4.17) y tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{N_{max} \gtrsim 1} \sum_H \sum_{L_1, L_2, L_3 \gtrsim 1} \frac{\langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{L_1^b L_2^{1-b}} X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3}(\xi, \tau) \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \\ & \leq \sup_{N \gtrsim 1} \left\| \sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \sum_H \sum_{L_{max} \sim \max(H, L_{med})} \frac{\langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{L_1^b L_2^{1-b}} X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3} \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \cdot \end{aligned}$$

Por (4.20) y la desigualdad triangular, se satisfacen al menos una de las siguientes desigualdades

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \sum_{L_1, L_2, L_3 \gtrsim 1} \frac{\langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{L_1^b L_2^{1-b}} \left\| X_{N_1, N_2, N_3; L_{max}; L_1, L_2, L_3} \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \quad (4.21)$$

$$\leq c,$$

o

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \sum_{L_{max} \sim L_{med}} \sum_{H \ll L_{max}} \frac{\langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{L_1^b L_2^{1-b}} \left\| X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3} \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \quad (4.22)$$

$$\leq c.$$

Estas estimaciones se demuestran acudiendo a las estimaciones de T.Tao sobre bloques diádicos para la KdV [T0], es decir, recurriendo al lema 1.3.10 (pág. 39) y sumando directamente.

Fijamos $N \gtrsim 1$. Empezamos por demostrar (4.22).

A partir de la identidad resonante $h(\xi) = \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 = 3\xi_1\xi_2\xi_3$, asumimos que $H \sim N_1N_2N_3$, ya que el multiplicador (4.18) se anula en cualquier otro caso. Por tanto la

restricción $\chi_{|h(\xi)| \sim H}$ es redundante, por lo que la descartamos (recurriendo al principio de comparación (1.3.6), pág.38).

Por la estimación (1.64) del multiplicador, en donde tenemos en cuenta la localización de las variables diádicas, resulta que (4.22) se reduce a probar que

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \sum_{L_{max} \sim L_{med} \gtrsim N_1 N_2 N_3} \frac{\langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{L_1^b L_2^{1-b}} N^{-1} L_{min}^{1/2} (N_1 N_2 N_3)^{1/2} \leq c, \quad (4.23)$$

donde hemos escogido $\min(H, L_{med}) = N_1 N_2 N_3$.

Estimando

(1)

$$N_1 N_2 N_3 \approx N^3,$$

(2)

$$\langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{1/2} \lesssim N^{1/2 + \max(0, -s)},$$

(3)

$$L_1^b L_2^{1-b} \gtrsim L_{min}^b L_{med}^{1-b} \gtrsim L_{min}^b N^{3(1-b)},$$

nos queda por comprobar que

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \sum_{L_{max} \sim L_{med} \gtrsim N_1 N_2 N_3} \frac{N^{1/2 + \max(0, -s)} L_{min}^{1/2} N^{1/2}}{L_{min}^b N^{3(1-b)}} \leq c, \quad (4.24)$$

y realizando sumas en L , nos queda por probar que

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \frac{1}{N^{3-3b-1-\max(0, -s)}} \leq c, \quad (4.25)$$

lo cual es cierto si $3 - 3b - 1 - \max(0, -s) > 0$. Así, recordando que $b = 1/2 + \epsilon$, (4.22) es cierta si $s > -1/2$.

Demostramos ahora (4.21).

Asumimos que $L_{max} \sim N_1 N_2 N_3$ y tratamos con los casos en donde (1.62) se cumple (i.e. $N_{max} \sim N_{min}$, $L_{max} \sim H$). Por (1.62), $N_1, N_2, N_3 \sim N \gtrsim 1$, (4.21) se reduce a probar que

$$\sum_{L_{max} \sim N^3} \frac{N^{-s} N^{1/2}}{L_1^b L_2^{1-b}} L_{min}^{1/2} L_{med}^{1/4} N^{-1/4} \leq c, \quad (4.26)$$

por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{L_{max} \sim N^3} \frac{N^{-s} N^{1/2}}{L_1^b L_2^{1-b}} L_{min}^{1/2} L_{med}^{1/4} N^{-1/4} &\sim \sum_{L_{max} \sim N^3} \frac{N^{-s+1/4}}{L_{min}^b L_{med}^{1-b}} L_{min}^{1/2} L_{med}^{1/4} \\ &\sum_{L_{max} \sim N^3} \frac{N^{-s+1/4}}{L_{min}^{b-1/2} L_{med}^{1-b-1/4}} \leq c. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Si suponemos sin pérdida de generalidad que $L_1 \leq L_2 \leq L_3$, tenemos que en el caso $1 \leq L_1$, (4.27) queda como sigue

$$\sum_{L_{max} \sim N^3} \frac{N^{-s+1/4}}{L_{min}^{b-1/2} L_{med}^{1-b-1/4}} \gtrsim N^{-s+1/4} \leq c, \quad (4.28)$$

que es cierto si $s > 1/4$.

El resto de casos ($L_1 \leq 1 \leq L_2$, $L_2 \leq 1$) se hacen de forma similar y tenemos el mismo resultado.

Ahora tratamos los casos en donde (1.63) se aplica, teniendo en cuenta, al igual que en los casos (1.64) y (1.62), la localización de las variables diádicas. Es decir

$$(i) \quad N \sim N_1 \sim N_2 \gg N_3; \quad H \sim L_3 \gtrsim L_1, L_2,$$

$$(ii) \quad N \sim N_2 \sim N_3 \gg N_1; \quad H \sim L_1 \gtrsim L_2, L_3,$$

$$(iii) \quad N \sim N_1 \sim N_3 \gg N_2; \quad H \sim L_2 \gtrsim L_1, L_3.$$

Caso (i). Por (1.63), (4.21) se reduce a probar que,

$$\sum_{N_3 \ll N} \sum_{1 \lesssim L_1, L_2 \lesssim N^2 N_3} \frac{N^{1/2-s}}{L_1^b L_2^{1-b}} L_{min}^{1/2} N^{-1} \min(N^2 N_3, \frac{N}{N_3} L_{med})^{1/2} \leq c. \quad (4.29)$$

Realizamos sumas en N_3 , concluyendo que ahora hay que probar que

$$\sum_{1 \lesssim L_1, L_2 \lesssim N^3} \frac{N^{1/2-s}}{L_1^b L_2^{1-b}} L_{min}^{1/2} N^{-1} N^{3/4} L_{med}^{1/4} \leq c, \quad (4.30)$$

como

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \lesssim L_1, L_2 \lesssim N^3} \frac{N^{1/2-s}}{L_1^b L_2^{1-b}} L_{min}^{1/2} N^{-1} N^{3/4} L_{med}^{1/4} \leq \sum_{1 \lesssim L_1, L_2 \lesssim N^3} \frac{N^{1/2-s} N^{-1/4}}{L_{min}^b L_{med}^{1-b}} L_{min}^{1/2} L_{med}^{1/4} \\ & = \sum_{1 \lesssim L_1, L_2 \lesssim N^3} \frac{N^{1/4-s}}{L_{min}^{b-1/2} L_{med}^{1-b-1/4}} \leq c, \end{aligned} \quad (4.31)$$

que es cierto si $s > 1/4$.

Ahora basta con considerar (ii), pues (iii) se deduce de ésta. Basta con probar que

$$\sum_{N_{min} \ll N} \sum_{1 \lesssim L_{min}, L_{med} \lesssim N^2 N_{min}} \frac{\langle N \rangle^{-s} N^{1/2}}{L_{min}^b (N^2 N_{min})^{1-b}} L_{min}^{1/2} N_{min}^{1/2} \leq c. \quad (4.32)$$

Podemos asumir que $N_{min} \gtrsim N^{-2}$, ya que la suma en L se anula en otro caso. Haciendo las sumas en L , nos reducimos a

$$\sum_{N^{-2} \lesssim N_{min} \ll N} \frac{\langle N \rangle^{-s} N_{min}^{1/2}}{(N^2 N_{min})^{1-b}} \leq c, \quad (4.33)$$

que se verifica, siempre que $s > -1$.

Para terminar la prueba de (4.21), nos queda tratar los casos en donde (1.64) se aplica. De esta forma (4.21) se reduce a probar que

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \sum_{L_{max} \sim N_1 N_2 N_3} \frac{\langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{L_1^b L_2^{1-b}} L_{min}^{1/2} N^{-1} L_{med}^{1/2} \leq c. \quad (4.34)$$

Realizando sumas en L se reduce a probar que

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \frac{\langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{1/2} N^{-1}}{(N_1 N_2 N_3)^{1/2-b}} \leq c, \quad (4.35)$$

que es cierto si $s > -1/2$.

□

Con el lema (1.3.10) y (4.1.1), ya estamos en condiciones de probar las estimaciones trilineales y bilineales necesarias para demostrar que el problema de valor inicial (4.2) para la ecuación de Gardner está localmente bien propuesto para datos iniciales en $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$. Comenzamos con la estimación trilineal (denotaremos en lo que sigue por ψ , la función de corte definida en (4.12))

Lema 4.1.2. *Sea $s > 1/4$ y $b = 1/2 + \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$. Entonces para todo $u_i = \psi(t)\phi_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$, con soporte en $\mathbb{R} \times [-1, 1]$, y $c > 0$, se verifica*

$$\|\partial_x(u_1 u_2 u_3)\|_{X^{s, b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \leq c \|\phi_1\|_{X^{s, b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \|\phi_2\|_{X^{s, b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \|\phi_3\|_{X^{s, b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}. \quad (4.36)$$

Demostración. Para estimar $\partial_x(u_1 u_2 u_3)$ en la norma $X^{s, b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, recurrimos a la dualidad entre los espacios $X^{s, b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y $X^{-s, 1-b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y empleamos el teorema de Plancherel 1.3.5. Así tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \bar{f} \partial_x(u_1 u_2 u_3) dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-\xi, -\tau) \partial_x \widehat{(u_1 u_2 u_3)}(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (i\xi) \hat{f}(-\xi, -\tau) \widehat{u_1 u_2 u_3}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde $\widehat{u_1 u_2 u_3}(\xi, \tau) = \hat{u}_1 * \hat{u}_2 * \hat{u}_3(\xi, \tau)$.

Por tanto, (4.37) queda de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (i\xi) \hat{f}(-\xi, -\tau) \hat{u}_1 * \hat{u}_2 * \hat{u}_3(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (i\xi) \hat{f}(-\xi, -\tau) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_1(\xi_1, \tau_1) \hat{u}_2 * \hat{u}_3(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (i\xi) \hat{f}(-\xi, -\tau) \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{u}_1(\xi_1, \tau_1) \hat{u}_2(\xi_2, \tau_2) \hat{u}_3(\xi - \xi_1 - \xi_2, \tau - \tau_1 - \tau_2) d\xi_1 d\tau_1 d\xi_2 d\tau_2 d\xi d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (i\xi) \hat{f}(-\xi, -\tau) \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_1(\xi_1, \tau_1) \hat{u}_2(\xi_2, \tau_2) \hat{u}_3(\xi_3, \tau_3) d\xi_1 d\tau_1 d\xi_2 d\tau_2 d\xi_3 d\tau_3,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

donde $\xi_3 = \xi - \xi_1 - \xi_2$, $\tau_3 = \tau - \tau_1 - \tau_2$. Así podemos reescribir (4.38) de la siguiente forma

$$\int_{\Gamma_{3+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} i(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \cdot \left(\prod_{j=1}^3 \hat{u}_j(\xi_j, \tau_j) \right) \cdot \hat{f}(\xi_4, \tau_4). \tag{4.39}$$

Ahora reexpresamos (4.39) en términos de las normas de los espacios $X^{s,b}$ implicados. Para ello, tomando valor absoluto de (4.39),

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Gamma_{3+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \cdot \left(\prod_{j=1}^3 \hat{u}_j(\xi_j, \tau_j) \right) \cdot \hat{f}(\xi_4, \tau_4) \right| \\
&= \left| \int_{\Gamma_{3+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \langle \xi_4 \rangle^s \langle \tau_4 - \xi_4^3 \rangle^{b-1}}{\prod_{j=1}^3 \langle \xi_j \rangle^s \langle \tau_j - \xi_j^3 \rangle^b} \cdot \left(\prod_{j=1}^3 \langle \xi_j \rangle^s \langle \tau_j - \xi_j^3 \rangle^b \hat{u}_j(\xi_j, \tau_j) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\langle \xi_4 \rangle^{-s} \langle \tau_4 - \xi_4^3 \rangle^{1-b} \hat{f}(\xi_4, \tau_4) \right) \right| \\
&\leq \left\| \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \langle \xi_4 \rangle^s \langle \tau_4 - \xi_4^3 \rangle^{b-1}}{\prod_{j=1}^3 \langle \xi_j \rangle^s \langle \tau_j - \xi_j^3 \rangle^b} \right\|_{[3+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \cdot \left(\prod_{j=1}^3 \|f_j(\xi_j, \tau_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right) \|f_4(\xi_4, \tau_4)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&= \left\| \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \langle \xi_4 \rangle^s \langle \tau_4 - \xi_4^3 \rangle^{b-1}}{\prod_{j=1}^3 \langle \xi_j \rangle^s \langle \tau_j - \xi_j^3 \rangle^b} \right\|_{[3+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \cdot \left(\prod_{j=1}^3 \|u_j\|_{X^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \right) \|f\|_{X^{-s,1-b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})},
\end{aligned} \tag{4.40}$$

donde $f_j(\xi_j, \tau_j) = \langle \xi_j \rangle^s \langle \tau_j - \xi_j^3 \rangle^b \hat{u}_j(\xi_j, \tau_j)$, $f_4(\xi_4, \tau_4) = \langle \xi_4 \rangle^{-s} \langle \tau_4 - \xi_4^3 \rangle^{1-b} \hat{f}(\xi_4, \tau_4)$.

Para terminar de expresar de manera adecuada la estimación de $\partial_x(u_1 u_2 u_3)$, tenemos en cuenta que cada $u_j = \psi(t) \phi_j(x, t)$, $j = 1, 2, 3$, por lo que recurriendo a la estimación (1.46) del lema 1.3.2, podemos reexpresar la norma

$$\|u_j\|_{X^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \leq c \|\phi_j\|_{X^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})},$$

y concluimos que (4.40) se expresa finalmente como

$$\leq c \left\| \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \langle \xi_4 \rangle^s \langle \tau_4 - \xi_4^3 \rangle^{b-1}}{\prod_{j=1}^3 \langle \xi_j \rangle^s \langle \tau_j - \xi_j^3 \rangle^b} \right\|_{[3+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \cdot \left(\prod_{j=1}^3 \|\phi_j\|_{X^{s,b}} \right) \|f\|_{X^{-s,1-b}}. \tag{4.41}$$

Por tanto, si denotamos $b = 1/2 + \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$, es suficiente con probar

$$\left\| \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \langle \xi_4 \rangle^s \langle \tau_4 - \xi_4^3 \rangle^{b-1}}{\prod_{j=1}^3 \langle \xi_j \rangle^s \langle \tau_j - \xi_j^3 \rangle^b} \right\|_{[3+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \lesssim 1. \quad (4.42)$$

Para ello, dado que, $\xi_4 = -\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 \Rightarrow |\xi_1 + \xi_2 + \xi_3| \sim \xi_4$, y aplicando la desigualdad

$$\langle \xi_4 \rangle^{s+1} \lesssim \langle \xi_4 \rangle^{1/2} \sum_{j=1}^3 \langle \xi_j \rangle^{s+1/2}, \quad (4.43)$$

la norma del multiplicador (4.42) queda como sigue

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \langle \xi_4 \rangle^s \langle \tau_4 - \xi_4^3 \rangle^{b-1}}{\prod_{j=1}^3 \langle \xi_j \rangle^s \langle \tau_j - \xi_j^3 \rangle^b} \right\|_{[3+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \sim \left\| \frac{\langle \xi_4 \rangle^{s+1} \langle \tau_4 - \xi_4^3 \rangle^{b-1}}{\prod_{j=1}^3 \langle \xi_j \rangle^s \langle \tau_j - \xi_j^3 \rangle^b} \right\|_{[3+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \\ & \lesssim \left\| \frac{\langle \xi_4 \rangle^{1/2} \sum_{i=1}^3 \langle \xi_i \rangle^{s+1/2} \langle \tau_4 - \xi_4^3 \rangle^{b-1}}{\prod_{j=1}^3 \langle \xi_j \rangle^s \langle \tau_j - \xi_j^3 \rangle^b} \right\|_{[3+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Teniendo ahora en cuenta que (en donde suponemos sin pérdida de generalidad que la variable dual ξ_2 es la mayor de las tres)

(i)

$$\frac{\sum_{j=1}^3 \langle \xi_j \rangle^{s+1/2}}{\langle \xi_2 \rangle^s} \lesssim \langle \xi_2 \rangle^{1/2}$$

(ii)

$$\langle \tau_2 - \xi_2^3 \rangle^b \geq \langle \tau_2 - \xi_2^3 \rangle^{1-b} \Rightarrow \frac{1}{\langle \tau_2 - \xi_2^3 \rangle^b} \leq \frac{1}{\langle \tau_2 - \xi_2^3 \rangle^{1-b}}$$

(4.44) se reduce a

$$\lesssim \left\| \frac{\langle \xi_4 \rangle^{1/2} \langle \xi_2 \rangle^{1/2} \langle \xi_1 \rangle^{-s} \langle \xi_3 \rangle^{-s} \langle \tau_4 - \xi_4^3 \rangle^{b-1}}{\langle \tau_2 - \xi_2^3 \rangle^{1-b} \prod_{i=1}^2 \langle \tau_{2i-1} - \xi_{2i-1}^3 \rangle^b} \right\|_{[3+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} . \quad (4.45)$$

Si ahora llamamos

$$m(\xi_1, \xi_2) = \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-s} \langle \xi_2 \rangle^{1/2}}{\langle \tau_2 - \xi_2^3 \rangle^{1-b} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b}$$

y recurriendo a la estimación TT^* dada en el lema 1.3.8, la estimación (4.45), se puede reescribir

$$(4.45) = \|m(\xi_1, \xi_2) \cdot \overline{m(-\xi_3, -\xi_4)}\|_{[3+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} = \|m(\xi_1, \xi_2)\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]}^2,$$

y de esta forma nos reducimos a probar

$$\|m(\xi_1, \xi_2)\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} = \left\| \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-s} \langle \xi_2 \rangle^{1/2}}{\langle \tau_2 - \xi_2^3 \rangle^{1-b} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b} \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \lesssim 1, \quad (4.46)$$

que es la estimación bilineal del lema 4.1.1. \square

Probamos ahora la estimación bilineal necesaria para estimar el término cuadrático en (4.3) y terminar de probar así que el problema está localmente bien propuesto.

Lema 4.1.3. *Sea $s > 0$ y $b = 1/2 + \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$. Entonces para todo $u_i = \psi(t)\phi_i(x, t)$, $i = 1, 2$, con soporte en $\mathbb{R} \times [-1, 1]$, y $c > 0$, se verifica*

$$\|\partial_x(u_1 u_2)\|_{X^{s, b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \leq c \|\phi_1\|_{X^{s, b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \|\phi_2\|_{X^{s, b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}. \quad (4.47)$$

Demostración. La demostración es análoga a la prueba del término trilineal dada en el lema 4.1.2. Consideramos la función

$$w(x, t) = \partial_x \left[\prod_{i=1}^2 \psi(t)\phi_i(x, t) \right]. \quad (4.48)$$

Por dualidad de los espacios $X_{\tau=h(\xi)}^{s, b-1}$ y $X_{\tau=-h(-\xi)}^{-s, 1-b}$ (con $h(\xi) = \xi^3$), es suficiente con probar la siguiente estimación sobre la $2+1$ -forma lineal

$$\left| \int_{\Gamma_{2+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \partial_x \left[\prod_{i=1}^2 \psi(t)\phi_i(x, t) \right] \varphi(x_3, t_3) \right| \lesssim \|\phi\|_{X_{\tau=h(\xi)}^{s, b}}^2 \|\varphi\|_{X_{\tau=-h(-\xi)}^{-s, 1-b}}. \quad (4.49)$$

Con el mismo procedimiento que para la estimación trilineal, concluimos que debemos probar la siguiente estimación

$$\left\| \frac{(\xi_1 + \xi_2) \chi_{\xi_1, \xi_2 \neq 0} \langle \xi_3 \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s \langle \lambda_1 \rangle^b \langle \lambda_2 \rangle^b \langle \lambda_3 \rangle^{1-b}} \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \lesssim 1 \quad (4.50)$$

Teniendo ahora en cuenta que $\xi_3 = -\xi_1 - \xi_2 \Rightarrow |\xi_1 + \xi_2| \sim \xi_3$, aplicando la desigualdad

$$\langle \xi_3 \rangle^{s+1} \lesssim \langle \xi_3 \rangle^{1/2} \sum_{j=1}^2 \langle \xi_j \rangle^{s+1/2}, \quad (4.51)$$

y considerando que

$$\frac{\sum_{j=1}^2 \langle \xi_j \rangle^{s+1/2}}{\langle \xi_2 \rangle^s} \lesssim \langle \xi_2 \rangle^{1/2},$$

la norma del multiplicador (4.50) queda como sigue

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{(\xi_1 + \xi_2) \chi_{\xi_1, \xi_2 \neq 0} \langle \xi_3 \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s \langle \lambda_1 \rangle^b \langle \lambda_2 \rangle^b \langle \lambda_3 \rangle^{1-b}} \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \\ & \sim \left\| \frac{\chi_{\xi_1, \xi_2 \neq 0} \langle \xi_3 \rangle^{1/2} \sum_{j=1}^2 \langle \xi_j \rangle^{s+1/2}}{\langle \lambda_3 \rangle^{1-b} \prod_{i=1}^2 \langle \xi_i \rangle^s \langle \lambda_i \rangle^b} \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \sim \left\| \frac{\chi_{\xi_1, \xi_2 \neq 0} \langle \xi_3 \rangle^{1/2} \langle \xi_2 \rangle^{1/2}}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \lambda_3 \rangle^{1-b} \langle \lambda_2 \rangle^b \langle \lambda_1 \rangle^b} \right\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Haciendo ahora descomposición diádica de las variables $\xi_i, \lambda_i, i=1,2,3$ y teniendo en cuenta la desigualdad triangular, la norma del multiplicador (4.52) presenta los casos siguientes

$$N_{max} \sum_{N_{med} \sim N} \sum_{L_1, L_2, L_3 \gtrsim 1} \frac{\langle N_3 \rangle^{1/2} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{\langle N_1 \rangle^s L_1^b L_2^b L_3^{1-b}} \|X_{N_1, N_2, N_3; L_{max}; L_1, L_2, L_3}\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \quad (4.53)$$

$\leq c,$

$$\begin{aligned} & \sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \sum_{L_{max} \sim L_{med}} \sum_{H \ll L_{max}} \frac{\langle N_3 \rangle^{1/2} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{\langle N_1 \rangle^s L_1^b L_2^b L_3^{1-b}} \|X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3}\|_{[2+1; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \\ & \leq c, \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde $X_{N_1, N_2, N_3; H; L_1, L_2, L_3}$ es el multiplicador localizado (4.18).

Fijamos $N \gtrsim 1$. Ahora pasamos a probar (4.54).

Asumimos que $H \sim N_1 N_2 N_3$. Por (1.64), (4.54) se reduce a probar:

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \sum_{L_{max} \sim L_{med} \gtrsim N_1 N_2 N_3} \frac{\langle N_3 \rangle^{1/2} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{\langle N_1 \rangle^s L_1^b L_2^b L_3^{1-b}} L_{min}^{1/2} N_{min}^{1/2} \leq c. \quad (4.55)$$

Tenemos en cuenta las desigualdades

(i)

$$\frac{\langle N_3 \rangle^{1/2} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{\langle N_1 \rangle^s} \lesssim N N_{min}^{-s}$$

(ii)

$$L_1^b L_2^b L_3^{1-b} \gtrsim L_{min}^b L_{med} \Rightarrow \frac{1}{L_1^b L_2^b L_3^{1-b}} \lesssim \frac{1}{L_{min}^b L_{med}}$$

que en nuestro caso se reduce a

$$\frac{1}{L_{min}^b L_{med}} \sim \frac{1}{L_{min}^b (N_{min} N^2)}.$$

De esta forma (4.55) se reduce a probar

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \sum_{L_{max} \sim L_{med} \gtrsim N_1 N_2 N_3} \frac{N L_{min}^{1/2} N_{min}^{1/2-s}}{L_{min}^b (N_{min} N^2)^1} \leq c. \quad (4.56)$$

Ahora como $b > 1/2$, haciendo sumas en L , resulta

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \frac{1}{N^1 N_{min}^{s-1/2+1}} \leq c, \quad (4.57)$$

que es cierta siempre que $s > -1/2$.

Probamos ahora (4.53).

Asumimos ahora que $L_{max} \sim N_1 N_2 N_3$. En el caso de que se cumplan las condiciones de (1.62), i.e. $N_1, N_2, N_3 \sim N \gtrsim 1$. Nos reducimos a

$$\begin{aligned} & \sum_{L_{max} \sim N^3} \frac{N^{-s} N^{1/2} N^{1/2}}{L_{min}^b L_{med}^b N^{3(1-b)}} L_{min}^{1/2} N^{-1/4} L_{med}^{1/4} \\ &= \sum_{L_{max} \sim N^3} \frac{L_{min}^{1/2-b} L_{med}^{1/4-b}}{N^{s-1/2-1/2+1/4+3(1-b)}} \leq c, \end{aligned} \quad (4.58)$$

que es cierto siempre que $s > -3/4$.

Ahora abordamos los casos en los que se verifica (1.63). Por la falta de simetría, consideramos los siguientes casos separadamente:

- (i) $N \sim N_1 \sim N_2 \gg N_3; \quad H \sim L_3 \gtrsim L_1, L_2,$
- (ii) $N \sim N_2 \sim N_3 \gg N_1; \quad H \sim L_1 \gtrsim L_2, L_3,$
- (iii) $N \sim N_1 \sim N_3 \gg N_2; \quad H \sim L_2 \gtrsim L_1, L_3.$

Caso (i). Por (1.63), de (i) se obtiene

$$\sum_{N_3 \ll N} \sum_{1 \lesssim L_1, L_2 \lesssim N^2 N_3} \frac{N_3^{1/2} N^{1/2}}{N^s L_1^b L_2^b (N^2 N_3)^{1-b}} L_{min}^{1/2} N^{-1} \min(N^2 N_3, \frac{N}{N_3} L_{med})^{1/2}, \quad (4.59)$$

luego sumando en N_3 , nos queda

$$\sum_{1 \lesssim L_1, L_2 \lesssim N^3} \frac{N^1 N^{-1} L_{min}^{1/2}}{N^s N^{3(1-b)} L_1^b L_2^b} (N^3 L_{med})^{1/4} \lesssim \sum_{1 \lesssim L_1, L_2 \lesssim N^3} \frac{L_{min}^{1/2-b} L_{med}^{1/4-b}}{N^{s+3(1-b)-3/4}} \leq c, \quad (4.60)$$

que se verifica siempre que $s > -3/4$.

Caso (ii). A partir del caso (i), se tiene

$$\sum_{N_1 \ll N} \sum_{1 \lesssim L_2, L_3 \lesssim N^2 N_1} \frac{\langle N_1 \rangle^{-s} N^{1/2} N^{1/2}}{(N^2 N_1)^b L_2^b L_3^{1-b}} L_{min}^{1/2} N_1^{1/2}, \quad (4.61)$$

luego como $b > 1/2$, sumando en L , resulta

$$\sum_{N^{-2} \lesssim N_1 \ll N} \frac{1}{N_1^{s-1/2+b} N^{2b-1}} \leq c. \quad (4.62)$$

que se verifica, por tanto, siempre que $s > 0$.

Caso (iii). A partir del caso (i), se tiene

$$\sum_{N_2 \ll N} \sum_{1 \lesssim L_1, L_3 \lesssim N^2 N_2} \frac{\langle N \rangle^{-s} N^{1/2} N_2^{1/2}}{(N^2 N_2)^b L_1^b L_3^{1-b}} L_{\min}^{1/2} N_2^{1/2}, \quad (4.63)$$

luego, como $b > 1/2$, sumando en L , resulta

$$\sum_{N^{-2} \lesssim N_2 \ll N} \frac{\langle N \rangle^{-s} N^{1/2} N_2^{1/2}}{(N^2 N_2)^b} N_2^{1/2} \lesssim \sum_{N^{-2} \lesssim N_2 \ll N} \frac{N_2^{1-b}}{N^{s-1/2+2b}} \leq c, \quad (4.64)$$

que se verifica, por tanto, siempre que $s > 0$.

Para terminar la prueba, falta considerar los casos en donde (1.64) se verifica.

Por (1.64) el caso (i) se traduce en probar que:

$$\begin{aligned} & \sum_{N_{\max} \sim N_{\text{med}} \sim N} \sum_{L_{\max} \sim N_1 N_2 N_3} \frac{\langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_3 \rangle^{1/2} \langle N_2 \rangle^{1/2}}{L_1^b L_2^b L_3^{1-b}} L_{\min}^{1/2} N^{-1} L_{\text{med}}^{1/2} \\ & \lesssim \sum_{N_{\max} \sim N_{\text{med}} \sim N} \sum_{L_{\max} \sim N_1 N_2 N_3} \frac{\langle N_3 \rangle^{1/2} \langle N_2 \rangle^{1/2} L_{\min}^{1/2-b} L_{\text{med}}^{1/2-b}}{\langle N_1 \rangle^{-s} (N_1 N_2 N_3)^{1-b}} N^{-1} \leq c. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Como $b > 1/2$, realizando sumas en L , y considerando después que $N_{\max} \sim N_3$, $N_{\text{med}} \sim N_2$, se obtiene

$$\sum_{N_{\max} \sim N_{\text{med}} \sim N} \frac{N^{2(b-1)}}{N_1^{s+1-b}} \leq c, \quad (4.66)$$

que se verifica, por tanto, siempre que $s > -1/2$.

En todos los demás casos, i.e

- (i) $N_{\max} \sim N_1$, $N_{\text{med}} \sim N_2$,
- (ii) $N_{\max} \sim N_2$, $N_{\text{med}} \sim N_1$,
- (iii) $N_{\max} \sim N_2$, $N_{\text{med}} \sim N_3$.

por el lema de simetría 1.3.7 (pág.38), obtenemos la misma condición $s > -1/2$.

□

Estamos ya en condiciones de probar el Teorema (4.1.1).

Demostración. del Teorema (4.1.1)

Consideramos el PVI (4.5) denotando al dato inicial $w_0(x)$ como

$$\|w_0\|_{H^s} = r_w. \quad (4.67)$$

Para $w_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$, el operador localizado (4.14) es

$$\begin{aligned} \Phi_{1,w_0}(w) \equiv \Phi_1(w) &= \psi(t)W(t)w_0 - 6\sigma\lambda^{\alpha-2}\psi(t) \int_0^t W(t-t')\partial_x[(\psi(t')w(t'))^2]dt' \\ &\quad - 2\lambda^{2(\alpha-1)}\psi(t) \int_0^t W(t-t')\partial_x[(\psi(t')w(t'))^3]dt'. \end{aligned}$$

Vamos a probar que Φ_1 define una contracción en la bola del espacio $X^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}(3c_0r_w) := \{w \in X^{s,b} : \|w\|_{X^{s,b}} \leq 3c_0r_w\}. \quad (4.68)$$

Así, combinando (1.3.1), (1.3.3), (4.1.3), (4.1.2), si $w \in \mathcal{B}$ y $\alpha > 2$ se tiene

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(w)\|_{X^{s,b}} &\leq c_0\|w_0\|_{H^s} + c_1\sigma\lambda^{\alpha-2}\|\psi(t)^2\partial_x(w^2(x,t))\|_{X^{s,b-1}} \\ &\quad + c_2\lambda^{2(\alpha-1)}\|\psi(t)^3\partial_x(w^3(x,t))\|_{X^{s,b-1}} \\ &\leq c_0\|w_0\|_{H^s} + c \cdot c_1\sigma\lambda^{\alpha-2}\|w(x,t)\|_{X^{s,b}}^2 + c \cdot c_2\lambda^{2(\alpha-1)}\|w(x,t)\|_{X^{s,b}}^3 \\ &\leq c_0r_w + c \cdot c_1\sigma\lambda^{\alpha-2}(3c_0r_w)^2 + c \cdot c_2\lambda^{2(\alpha-1)}(3c_0r_w)^3 \\ &\leq c_0r_w \{1 + c_0\lambda^{\alpha-2}r_w + c_0^2\lambda^{2(\alpha-1)}r_w^2\} \\ &\leq 3c_0r_w, \end{aligned} \quad (4.69)$$

en donde la última desigualdad es cierta siempre que escojamos λ satisfaciendo

$$(i) \quad r_w\lambda^{\alpha-2}c_0 \leq 1/4, \quad (4.70)$$

$$(ii) \quad r_w^2\lambda^{2(\alpha-1)}c_0^2 \leq 1/4. \quad (4.71)$$

Por tanto, escogiendo λ_0 como el mínimo de (4.70) y (4.71), satisfaremos las anteriores condiciones escogiendo λ como

$$\lambda \leq \lambda_0 = \min(d_1\|w_0\|_{H^s}^{-\frac{1}{\alpha-2}}, d_2\|w_0\|_{H^s}^{-\frac{1}{(\alpha-1)}}), \quad d_1 = \left(\frac{1}{4c_0}\right)^{\frac{1}{\alpha-2}}, d_2 = \left(\frac{1}{4c_0^2}\right)^{\frac{1}{2(\alpha-1)}}, \quad \alpha > 2 \quad (4.72)$$

y podemos concluir que

$$\Phi_1(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}. \quad (4.73)$$

Con los mismos pasos que para probar (4.69), i.e. combinando (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3), (4.1.3), (4.1.2) y (4.69), si $w, \tilde{w} \in \mathcal{B}$ se tiene

$$\begin{aligned} & \|\Phi_1(w) - \Phi_1(\tilde{w})\|_{X^{s,b}} \leq c_0 \sigma \lambda^{\alpha-2} \|\psi(t)^2 \partial_x (w^2(x,t) - \tilde{w}^2(x,t))\|_{X^{s,b-1}} \\ & + c \lambda^{2(\alpha-1)} \|\psi(t)^3 \partial_x (w^3(x,t) - \tilde{w}^3(x,t))\|_{X^{s,b-1}} \\ & = c_0 \sigma \lambda^{\alpha-2} \|\psi(t)^2 \partial_x [(w(x,t) - \tilde{w}(x,t))(w(x,t) + \tilde{w}(x,t))]\|_{X^{s,b-1}} \\ & + c \lambda^{2(\alpha-1)} \|\psi(t)^3 \partial_x [(w(x,t) - \tilde{w}(x,t))(w(x,t)^2 + \tilde{w}^2(x,t) + w(x,t)\tilde{w}(x,t))]\|_{X^{s,b-1}}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

donde, si tenemos en cuenta que,

(i) Estimación bilineal

dados $u_1 = w - \tilde{w}$, $u_2 = w + \tilde{w}$,

$$\|\psi(t)^2 \partial_x (w^2(x,t) - \tilde{w}^2(x,t))\|_{X^{s,b-1}} = \|\psi(t)^2 \partial_x [u_1 u_2]\|_{X^{s,b-1}}.$$

Empleando ahora el lema de la estimación bilineal 4.1.3, obtenemos

$$\begin{aligned} & \leq c_1 \|u_1\|_{X^{s,b}} \|u_2\|_{X^{s,b}} \leq c_1 \|w - \tilde{w}\|_{X^{s,b}} \{ \|w\|_{X^{s,b}} + \|\tilde{w}\|_{X^{s,b}} \} \\ & \leq 3 \cdot 2c_0 c_1 \cdot r_w \|w - \tilde{w}\|_{X^{s,b}}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

(ii) Estimación trilineal

dados $u_1 = w - \tilde{w}$, $v_1 = w$, $v_2 = \tilde{w}$, $u_2 = w + \tilde{w}$,

$$\begin{aligned} & \|\psi(t)^3 \partial_x (w^3(x,t) - \tilde{w}^3(x,t))\|_{X^{s,b-1}} \\ & = \|\psi(t)^3 \partial_x [(w - \tilde{w})(w^2 + \tilde{w}^2 + w\tilde{w})]\|_{X^{s,b-1}} \\ & = \|\psi(t)^3 \partial_x [(w - \tilde{w})(w + \tilde{w})^2 - (w - \tilde{w})w\tilde{w}]\|_{X^{s,b-1}} \\ & = \|\psi(t)^3 \partial_x [u_1 u_2 u_2] - \psi(t)^3 \partial_x [u_1 v_1 v_2]\|_{X^{s,b-1}}. \end{aligned}$$

Empleando ahora el lema de la estimación trilineal 4.1.2, obtenemos

$$\begin{aligned} & \leq c_2 \|u_1\|_{X^{s,b}} \|u_2\|_{X^{s,b}}^2 + c_2 \|u_1\|_{X^{s,b}} \|v_1\|_{X^{s,b}} \|v_2\|_{X^{s,b}} \\ & \leq c_2 \|u_1\|_{X^{s,b}} \{ (\|w\|_{X^{s,b}} + \|\tilde{w}\|_{X^{s,b}})^2 + \|w\|_{X^{s,b}} \|\tilde{w}\|_{X^{s,b}} \} \\ & \leq c_2 \|w - \tilde{w}\|_{X^{s,b}} \{ 2(3c_0 \cdot r_w)^2 + (3c_0 \cdot r_w)^2 \} \\ & = 27c_0^2 c_2 \cdot r_w^2 \|w - \tilde{w}\|_{X^{s,b}}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

De esta forma (4.74) queda de la forma

$$\begin{aligned}
& \|\Phi_1(w) - \Phi_1(\tilde{w})\|_{X^{s,b}} \leq 6cc_0c_1 \cdot \sigma\lambda^{\alpha-2}r_w \|w - \tilde{w}\|_{X^{s,b}} \\
& + 27cc_0^2c_2\lambda^{2(\alpha-1)}r_w^2 \|w - \tilde{w}\|_{X^{s,b}} \\
& \leq (c_0\lambda^{\alpha-2}r_w + c_0^2\lambda^{2(\alpha-1)}r_w^2) \|w - \tilde{w}\|_{X^{s,b}} \\
& \leq \frac{1}{2} \|w - \tilde{w}\|_{X^{s,b}},
\end{aligned} \tag{4.77}$$

donde la última desigualdad se sigue al escoger λ como el mínimo dado en (4.72). De hecho, Φ_1 define una contracción en \mathcal{B} y por tanto existe un único $w \in \mathcal{B}(3c_0r_w)$ que verifica

$$\begin{aligned}
\psi(t)w(t) &= \psi(t)\{W(t)w_0 - 6\sigma\lambda^{\alpha-2} \int_0^t W(t-t')\partial_x[(\psi(t')w(t'))^2]dt' \\
& - 2\lambda^{2(\alpha-1)} \int_0^t W(t-t')\partial_x[(\psi(t')w(t'))^3]dt'\},
\end{aligned} \tag{4.78}$$

y por tanto en el intervalo temporal $[-1, 1]$, $w(\cdot)$ es solución del PVI (4.5). Por el mismo argumento que para probar (4.77), se cumple que

$$\|w - \tilde{w}\|_{X^{s,b}} \leq c \|w_0 - \tilde{w}_0\|_{H^s}. \tag{4.79}$$

Antes de probar la propiedad de persistencia (4.9), probamos que la solución w (4.78) del PVI (4.5), se reduce al dato inicial w_0 , en la norma H^s , cuando $t \rightarrow 0$. Para ello, calculamos

$$\begin{aligned}
\|w(t) - \psi(t)W(t)w_0\|_{H^s} &\leq 6\sigma\lambda^{\alpha-2} \|\psi(t) \int_0^t W(t-t')\partial_x[(\psi(t')w(t'))^2]dt'\|_{H^s} \\
& + 2\lambda^{2(\alpha-1)} \|\psi(t) \int_0^t W(t-t')\partial_x[(\psi(t')w(t'))^3]dt'\|_{H^s}.
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Debemos comprobar si los términos integrales de la derecha de la desigualdad (4.79), tienden a 0, cuando $t \rightarrow 0$. Para ello, vamos a reescribir dichos términos para poder aplicar el lema (1.3.4). Analizamos el comportamiento cuando $\eta \rightarrow 0$ de la siguiente expresión general:

$$\|\psi(\eta) \int_0^\eta W(\eta-t')F(\cdot, t')dt'\|_{H^s}. \tag{4.81}$$

Con el cambio de variable $t'' = \frac{t'}{\eta}$, renombrando $t'' \equiv t'$ y cambiando, sin pérdida de generalidad, la función de corte $\psi(\eta)$ a $\psi(1)$, (4.81) se reescribe como

$$\begin{aligned}
& \|\psi(1) \int_0^1 W(\eta(1-t'))F(\cdot, \eta t')\eta dt'\|_{H^s} \\
& = (\int |\psi(1) \int_0^1 W(\eta(1-t'))(D^s F(\cdot, \eta t'))(x)\eta dt'|^2 dx)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Con el cambio de variable $x = \eta^{1/3}y$, reescribimos (4.82) como

$$\begin{aligned}
& (\int |\psi(1) \int_0^1 W(\eta(1-t'))(D^s F(\cdot, \eta t'))(\eta^{1/3}y)\eta dt'|^2 \eta^{1/3} dy)^{1/2} \\
& = \eta^{1+\frac{1}{6}} (\int |\psi(1) \int_0^1 W(\eta(1-t'))(D^s F(\cdot, \eta t'))(\eta^{1/3}y) dt'|^2 dy)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Analizamos ahora el integrando de (4.83):

$$W(\eta(1-t'))(D^s F(\cdot, \eta t'))(\eta^{1/3}y). \quad (4.84)$$

Definimos,

$$G_1(y, \eta t') = D^s F(\eta^{1/3}y, \eta t') \equiv D^s F_\eta(y, t'), \quad (4.85)$$

donde

$$F_\eta(y, t') = F(\eta^{1/3}y, \eta t'). \quad (4.86)$$

De esta forma,

$$W(1-t')G_1(\cdot, \eta t')(y) = W(\eta(1-t'))(D^s F(\cdot, \eta t'))(\eta^{1/3}y). \quad (4.87)$$

Definimos ahora,

$$G_2(y, t') = G_1(y, \eta t'), \quad (4.88)$$

$$G_3(y, t') = D^{-s}G_2(y, t'). \quad (4.89)$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} D^s W(1-t')G_3(\cdot, t') &= W(1-t')D^s G_3(\cdot, t') = W(1-t')G_2(\cdot, t') \\ &= W(1-t')G_1(\cdot, \eta t'), \end{aligned} \quad (4.90)$$

y ya podemos aplicar la estimación

$$\|\psi(1) \int_0^1 W(1-t')G(\cdot, t')dt'\|_{H^s} \leq c\|G\|_{X^{s,b-1}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} &\eta^{1+\frac{1}{6}} \left(\int |\psi(1) \int_0^1 W(\eta(1-t'))(D^s F(\cdot, \eta t'))(\eta^{1/3}y)dt'|^2 dy \right)^{1/2} \\ &= \eta^{1+\frac{1}{6}} \|\psi(1) \int_0^1 W(1-t')G_3(\cdot, t')dt'\|_{H^s} \leq c\eta^{1+\frac{1}{6}} \|G_3\|_{X^{s,b-1}} \\ &= c\eta^{1+\frac{1}{6}} \|D^{-s}G_2\|_{X^{s,b-1}} = c\eta^{1+\frac{1}{6}} \|G_2\|_{X^{0,b-1}} = c\eta^{1+\frac{1}{6}} \|D^s F_\eta\|_{X^{0,b-1}} \\ &= c\eta^{1+\frac{1}{6}} \|F_\eta\|_{X^{s,b-1}}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Debemos calcular ahora $\|F_\eta\|_{X^{s,b-1}} = \|F(\eta^{1/3}y, \eta t')\|_{X^{s,b-1}}$.

$$\begin{aligned} &\|F(\eta^{1/3}y, \eta t')\|_{X^{s,b-1}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (1+|\tau-\xi^3|)^{2(b-1)} (1+|\xi|)^{2s} |F(\widehat{\eta^{1/3}y, \eta t'}) (\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Como $F(\widehat{\eta^{1/3}y}, \eta t')(\xi, \tau) = \eta^{-4/3} \widehat{F}(\eta^{-1/3}\xi, \eta^{-1}\tau)$, (4.92) se reescribe como

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau - \xi^3|)^{2(b-1)} (1 + |\xi|)^{2s} |\eta^{-4/3} \widehat{F}(\eta^{-1/3}\xi, \eta^{-1}\tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2}. \quad (4.93)$$

Cambiando de variables, $\xi' = \eta^{-1/3}\xi$, $\tau' = \eta^{-1}\tau$, (4.93) queda como

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (1 + \eta|\tau' - \xi'^3|)^{2(b-1)} (1 + \eta^{1/3}|\xi'|)^{2s} |\widehat{F}(\xi', \tau')|^2 \eta^{-8/3} \eta^{4/3} d\xi' d\tau' \right)^{1/2} \\ &= \eta^{-2/3} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (1 + \eta|\tau' - \xi'^3|)^{2(b-1)} (1 + \eta^{1/3}|\xi'|)^{2s} |\widehat{F}(\xi', \tau')|^2 d\xi' d\tau' \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Ahora se nos presentan varios casos, que pasamos a enumerar,

$$(1) \begin{cases} \eta^{1/3}|\xi'| \leq 1, \\ \eta|\tau' - \xi'^3| \leq 1. \end{cases} \quad \text{En este caso} \quad \|F_\eta\|_{X^{s,b-1}} \leq \eta^{-2/3} \|F\|_{X^{s,b-1}}. \quad (4.95)$$

$$(2) \begin{cases} \eta^{1/3}|\xi'| \leq 1, \\ \eta|\tau' - \xi'^3| \geq 1. \end{cases} \quad \text{En este caso} \quad \|F_\eta\|_{X^{s,b-1}} \leq \eta^{b-1-2/3} \|F\|_{X^{s,b-1}}. \quad (4.96)$$

$$(3) \begin{cases} \eta^{1/3}|\xi'| \geq 1, \\ \eta|\tau' - \xi'^3| \leq 1. \end{cases} \quad \text{En este caso} \quad \|F_\eta\|_{X^{s,b-1}} \leq \eta^{s/3-2/3} \|F\|_{X^{s,b-1}}. \quad (4.97)$$

$$(4) \begin{cases} \eta^{1/3}|\xi'| \geq 1, \\ \eta|\tau' - \xi'^3| \geq 1. \end{cases} \quad \text{En este caso} \quad \|F_\eta\|_{X^{s,b-1}} \leq \eta^{s/3+b-1-2/3} \|F\|_{X^{s,b-1}}. \quad (4.98)$$

El peor caso, teniendo en cuenta que $1/2 < b < 1$, es el (2). Por tanto, obtenemos, la estimación (4.91) va como sigue

$$\begin{aligned} c\eta^{1+\frac{1}{6}} \|F_\eta\|_{X^{s,b-1}} &\leq c\eta^{1+1/6+b-1-2/3} \|F\|_{X^{s,b-1}} \\ &= c\eta^{b-1/2} \|F\|_{X^{s,b-1}}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Así, (4.81) tiende a 0 cuando $\eta \rightarrow 0$ y por la continuidad de operador libre $W(t)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|w(t) - \psi(t)W(t)w_0\|_{H^s} = 0.$$

Probamos ahora la propiedad de persistencia (4.9), i.e.

$$w \in C([-1, 1] : H^s(\mathbb{R})).$$

Si escogemos $0 \leq \tilde{t} < t \leq 1$.

$$\begin{aligned} & \|w(t) - w(\tilde{t})\|_{H^s} \\ & \leq \|W(t - \tilde{t})w(\tilde{t}) - w(\tilde{t})\|_{H^s} + (6\sigma\lambda^{\alpha-2})^{1/2} \|\psi(t) \int_{\tilde{t}}^t W(t-t') \partial_x [(\psi(t')w(x, t'))^2] dt'\|_{H^s} \\ & \quad + (2\lambda^{2(\alpha-1)})^{1/2} \|\psi(t) \int_{\tilde{t}}^t W(t-t') \partial_x [(\psi(t')w(x, t'))^3] dt'\|_{H^s}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Tenemos por tanto que comprobar que los términos integrales de la desigualdad tienden a 0 cuando $t \rightarrow \tilde{t}$. Para ello, seguimos el procedimiento que hemos mostrado anteriormente para probar la convergencia al dato inicial w_0 de la solución w . Así, debemos analizar la siguiente expresión general

$$\|\psi(\eta) \int_{\tilde{\eta}}^{\eta} W(\eta - t') F(\cdot + \tilde{\eta}, t') dt'\|_{H^s}. \quad (4.101)$$

Con el cambio de variable $t'' = \frac{t' - \eta}{\Delta\eta} \rightarrow t' = \tilde{\eta} + \Delta\eta t''$, $\Delta\eta = \eta - \tilde{\eta}$, renombrando $t'' \equiv t'$ y cambiando sin pérdida de generalidad la función de corte $\psi(\eta)$ a $\psi(1)$, (4.101) se reescribe como

$$\begin{aligned} & \|\psi(1) \int_0^1 W(\Delta\eta(1 - t')) F(\cdot, \tilde{\eta} + \Delta\eta t') \Delta\eta dt'\|_{H^s} \\ & = (\int |\psi(1) \int_0^1 W(\Delta\eta(1 - t')) (D^s F(\cdot, \tilde{\eta} + \Delta\eta t'))(x) \Delta\eta dt'|^2 dx)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Con el cambio de variable $x = \Delta\eta^{1/3}y$, y definiendo $F_{\tilde{\eta}}(\cdot, \tau) = F(\cdot, \tilde{\eta} + \tau)$, reescribimos (4.102) como

$$\begin{aligned} & (\int |\psi(1) \int_0^1 W(\Delta\eta(1 - t')) (D^s F_{\tilde{\eta}}(\cdot, \Delta\eta t')) (\Delta\eta^{1/3}y) \Delta\eta dt'|^2 \Delta\eta^{1/3} dy)^{1/2} \\ & = \Delta\eta^{1+\frac{1}{6}} (\int |\psi(1) \int_0^1 W(\Delta\eta(1 - t')) (D^s F_{\tilde{\eta}}(\cdot, \Delta\eta t')) (\Delta\eta^{1/3}y) dt'|^2 dy)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Con los mismos pasos que en la prueba de que (4.81) tiende a 0 cuando $\eta \rightarrow 0$, concluimos que para la integral (4.101), tenemos que

$$\begin{aligned} & c\Delta\eta^{1+\frac{1}{6}} \|F_{\tilde{\eta}}\|_{X^{s,b-1}} \leq c\Delta\eta^{1+1/6+b-1-2/3} \|F\|_{X^{s,b-1}} \\ & = c\Delta\eta^{b-1/2} \|F\|_{X^{s,b-1}}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Así, (4.101) va a 0 cuando $\eta \rightarrow \tilde{\eta}$ y por la continuidad de operador W , tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \tilde{t}} \|w(t) - w(\tilde{t})\|_{H^s} = 0.$$

lo que nos da la propiedad de persistencia para w . □

Demostración. del teorema (4.1.2) La prueba del teorema (4.1.2) es directa, después haber probado el teorema (4.1.1). Esto es así dada la relación entre las funciones v y w , a través de la transformación de escala (4.4)

$$v(x, t) = \lambda^\alpha w(\lambda x, \lambda^3 t), \quad \lambda > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.105)$$

Por tanto, de la unicidad y existencia local de solución, a tiempo $t = 1$ del PVI (4.5) para w , obtendremos la unicidad y existencia local de solución, a tiempo $T = \lambda^{-3}$, del PVI (4.3) para v , siempre que determinemos para qué valores de λ , en función de $\|v_0\|_{H^s}$, se verifican (4.70) y (4.71), simultáneamente.

Para ello debemos calcular la norma $r_w = \|w_0\|_{H^s}$, teniendo en cuenta la relación con la función v , vía la propiedad de escala (4.4) $v(x, t) = \lambda^\alpha w(\lambda x, \lambda^3 t)$, es decir $w_0(x) = \lambda^{-\alpha} v_0(\lambda^{-1} x)$. De esta forma

$$r_w = \|w_0\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{w_0(x)}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad (4.106)$$

ahora,

$$\begin{aligned} \widehat{w_0(x)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} w_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \lambda^{-\alpha} v_0(\lambda^{-1} x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\lambda^{-1} x)\lambda\xi} \lambda^{-\alpha} v_0(\lambda^{-1} x) \lambda d(\lambda^{-1} x) = \lambda^{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\lambda^{-1} x)\lambda\xi} v_0(\lambda^{-1} x) d(\lambda^{-1} x) \\ &= \lambda^{1-\alpha} \widehat{v_0}(\lambda\xi). \end{aligned}$$

Así, (4.106) se reescribe como sigue

$$\begin{aligned} r_w &= \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{w_0(x)}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\lambda^{1-\alpha} \widehat{v_0}(\lambda\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left(\lambda^{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}} (1 + \lambda^{-1} |\lambda\xi|)^{2s} |\widehat{v_0}(\lambda\xi)|^2 \lambda^{-1} d(\lambda\xi) \right)^{1/2} \\ &= \lambda^{1-1/2-\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \lambda^{-1} |\lambda\xi|)^{2s} |\widehat{v_0}(\lambda\xi)|^2 d(\lambda\xi) \right)^{1/2} \\ &= \lambda^{1/2-\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \lambda^{-1} |\lambda\xi|)^{2s} |\widehat{v_0}(\lambda\xi)|^2 d(\lambda\xi) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Es decir, si denotamos por $r_v = \|v_0\|_{H^s}$, tenemos que

$$\begin{aligned} (a) \quad & \lambda^{1/2-\alpha} \left(\int_{\lambda^{-1}|\eta| \leq 1} |v_0(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \leq \lambda^{1/2-\alpha} \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \lambda^{1/2-\alpha} r_v, \\ (b) \quad & \lambda^{1/2-\alpha-s} \left(\int_{\lambda^{-1}|\eta| \geq 1} |\eta|^{2s} |v_0(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \leq \lambda^{1/2-\alpha-s} \|v_0\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R})} \leq \lambda^{1/2-\alpha-s} r_v. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Estamos ya en condiciones de determinar los valores de λ que satisfacen las condiciones (4.70) y (4.71). Para ello consideramos las condiciones más restrictivas sobre r_w ,

$$[(i)] \quad r_w \lambda^{\alpha-2} c_0 \leq 1/4.$$

(i.a)

$$\lambda^{1/2-\alpha} r_v \lambda^{\alpha-2} c_0 \leq 1/4 \rightarrow \lambda^{-3/2} \leq \frac{1}{4c_0 r_v}.$$

(i.b)

$$\lambda^{1/2-\alpha-s} r_v \lambda^{\alpha-2} c_0 \leq 1/4 \rightarrow \lambda^{-3/2-s} \leq \frac{1}{4c_0 r_v}.$$

[(ii)] $r_w^2 \lambda^{2(\alpha-1)} c_0^2 \leq 1/4.$

(ii.a)

$$\lambda^{1-2\alpha} r_v^2 \lambda^{2(\alpha-1)} c_0^2 \leq 1/4 \rightarrow \lambda^{-1} \leq \frac{1}{4c_0^2 (r_v)^2}.$$

(ii.b)

$$\lambda^{1-2\alpha-2s} r_v^2 \lambda^{2(\alpha-1)} c_0^2 \leq 1/4 \rightarrow \lambda^{-1-2s} \leq \frac{1}{4c_0^2 (r_v)^2}.$$

De esta forma, distinguimos dos casos:

(1°)

$$\frac{1}{4c_0 r_v} \leq 1 \rightarrow \lambda > 1.$$

Del caso [(i)], si (i.a) se satisface también lo hará (i.b). Por tanto la condición sobre λ es

$$\lambda^{-3/2} \leq \frac{1}{4c_0 r_v}.$$

Del caso [(ii)], si (ii.a) se satisface también lo hará (ii.b). Por tanto la condición sobre λ es

$$\lambda^{-1} \leq \frac{1}{4c_0^2 (r_v)^2} (\Rightarrow \lambda^{-1/2} \leq \frac{1}{2c_0 (r_v)} \Rightarrow \lambda^{-3/2} \leq \frac{1}{2c_0^2 r_v^2 (4c_0 r_v)})$$

De estas dos condiciones sobre λ , la más restrictiva es

$$\lambda^{-1} \leq \frac{1}{4c_0^2 (r_v)^2}. \tag{4.109}$$

(2°)

$$\frac{1}{4c_0^2 (r_v)^2} \geq 1 \rightarrow \lambda < 1.$$

Del caso [(i)], si (i.b) se satisface también lo hará (i.a). Por tanto la condición sobre λ es

$$\lambda^{-3/2-s} \leq \frac{1}{4c_0 r_v}.$$

Del caso [(ii)], si (ii.b) se satisface también lo hará (ii.a). Por tanto la condición sobre λ es

$$\lambda^{-1-2s} \leq \frac{1}{4c_0^2 (r_v)^2}.$$

De estas dos condiciones sobre λ , la más restrictiva es

$$\lambda^{-3/2-s} \leq \frac{1}{4c_0 r_v}. \quad (4.110)$$

Por tanto, siempre que λ verifique (4.109) o (4.110), podemos concluir que la aplicación $\Phi_{T=\lambda^{-3}}$ define una contracción en \mathcal{B}_v , con \mathcal{B}_v la bola asociada a la bola \mathcal{B} dada en (4.68) a partir de la transformación de escala anterior que nos devuelve a la variable v , y por tanto existe un único $v \in \mathcal{B}_v$ solución del PVI (4.3).

Notar que el tiempo de existencia local es explícito a partir de la relación $\lambda^3 T = 1$ y de los valores de λ (4.109) y (4.110). Es decir,

$$T = \lambda^{-3} \leq \left(\frac{1}{4c_0^2 \|v_0\|_{H^s}^2} \right)^3, \quad \|v_0\|_{H^s} \geq 1, \quad (4.111)$$

$$T = \lambda^{-3} \leq \left(\frac{1}{4c_0 \|v_0\|_{H^s}} \right)^{\frac{6}{3+2s}}, \quad \|v_0\|_{H^s} \leq 1. \quad (4.112)$$

Por el mismo argumento que para probar (4.77), se cumple que

$$\|v - \tilde{v}\|_{X^{s,b}} \leq c \|v_0 - \tilde{v}_0\|_{H^s}. \quad (4.113)$$

La propiedad de persistencia (4.9), i.e.

$$v \in C([-T, T] : H^s(\mathbb{R})),$$

se demuestra directamente a partir de la demostración de la propiedad de persistencia de la función w asociada a v mediante la transformación de escala (4.4).

□

4.2. Teoría global para la ecuación de Gardner con datos en $H^1(\mathbb{R})$.

Probamos aquí que el problema de valor inicial para la ecuación de Gardner (4.2) con datos iniciales en $H^1(\mathbb{R})$, está globalmente bien propuesto. Para ello enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. *Sea $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ y sea u la correspondiente solución local del PVI (4.2) para la ecuación de Gardner, dada por el teorema 4.1.2. Entonces dicha solución se extiende a cualquier intervalo temporal, con*

$$u \in C(\mathbb{R} : H^1(\mathbb{R})). \quad (4.114)$$

Demostración. Vamos a extender ahora el PVI para la ecuación de Gardner, localmente bien propuesto en $H^{1/4^+}$ que encontramos en la sección 4.1 anterior, a toda la recta temporal $t \in \mathbb{R}$ para datos iniciales en $H^1(\mathbb{R})$.

Primero observamos que derivando respecto al tiempo en (4.2), integrando en espacio y usando la integración por partes, obtenemos que

$$\frac{d}{dt} E^f(v(t)) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} (v_x^2 - 4\sigma v^3 - v^4) dx = 0. \quad (4.115)$$

De esta forma la energía de la solución $v(t)$, $E^f(v(t))$ es una cantidad conservada en la evolución y $E^f(v(t)) = E^f(v_0)$ o equivalentemente

$$E^f(v_0) = \int_{\mathbb{R}} (v_x^2 - 4\sigma v^3 - v^4) dx. \quad (4.116)$$

Ahora empleamos la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u(t)\|_{L^{\tau+1}} \leq c \|u_x\|_{L^2}^{\theta} \|u\|_{L^2}^{1-\theta} \leq c \|u_x\|_{L^2}^{\theta} \|u_0\|_{L^2}^{1-\theta}, \quad \theta = \frac{\tau-1}{2(\tau+1)}, \quad (4.117)$$

para estimar los términos no lineales de (4.115) y así tenemos que para $t \in [-T, T]$

$$\|v(t)\|_{L^3} \leq c \|v_x\|_{L^2}^{\theta_3} \|v(t)\|_{L^2}^{1-\theta_3} \leq c \|v_x\|_{L^2}^{\theta_3} \|v_0\|_{L^2}^{1-\theta_3}, \quad \theta_3 = \frac{1}{6}, \quad (4.118)$$

$$\|v(t)\|_{L^4} \leq c \|v_x\|_{L^2}^{\theta_4} \|v(t)\|_{L^2}^{1-\theta_4} \leq c \|v_x\|_{L^2}^{\theta_4} \|v_0\|_{L^2}^{1-\theta_4}, \quad \theta_4 = \frac{1}{4}.$$

Esto es,

$$\|v(t)\|_{L^3}^3 \leq c_3 \|v_x\|_{L^2}^{1/2} \|v_0\|_{L^2}^{5/2}, \quad (4.119)$$

$$\|v(t)\|_{L^4}^4 \leq c_4 \|v_x\|_{L^2} \|v_0\|_{L^2}^3.$$

Así, combinando estas desigualdades con la expresión de la energía (4.115), probamos que si $E^f(v_0) < \infty$, entonces

$$\|v_x(t)\|_{L^2}^2 \leq |E^f(v_0)| + c_3 \|v_x\|_{L^2}^{1/2} \|v_0\|_{L^2}^{5/2} + c_4 \|v_x\|_{L^2} \|v_0\|_{L^2}^3, \quad (4.120)$$

o con la notación $y = y(t) = \|v_x(t)\|_{L^2}$,

$$y^2 \leq |E^f(v_0)| + c_3 \|v_0\|_{L^2}^{5/2} y^{1/2} + c_4 \|v_0\|_{L^2}^3 y. \quad (4.121)$$

Por tanto existe una cota $M = M(\|v_0\|_{H^1}, \sigma) > 0$ e independiente del tiempo local T , tal que

$$\sup_{t \in [-T, T]} \|v_x(t)\|_{L^2} \leq M. \quad (4.122)$$

Esto nos permite replicar el teorema (4.1.2) para extender la solución local v a cualquier intervalo temporal.

□

Capítulo 5

Estabilidad de solitones de media no acotada de la mKdV

Sumario.

En este capítulo abordamos el problema de la estabilidad de solitones de media no acotada de la ecuación mKdV atractiva y repulsiva (signo \pm en el término no lineal, respectivamente)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial s^3} \pm 6k^2 \frac{\partial k}{\partial s} = 0.$$

Esta estabilidad se reducirá a comprobar la estabilidad orbital de los solitones de la ecuación de Gardner, directamente relacionada con la ecuación mKdV por medio de la constante asintótica no trivial a la que tiende la solución.

5.1. Introducción

Una vez que en el capítulo anterior hemos probado que el PVI (4.2) asociado con la ecuación de Gardner está local y globalmente bien propuesto en los espacios $H^{1/4^+}(\mathbb{R})$ y $H^1(\mathbb{R})$ respectivamente, pasamos a estudiar la estabilidad frente a pequeñas perturbaciones en la norma $H^1(\mathbb{R})$, de los solitones de media no acotada de la ecuación mKdV en sus versiones atractiva y repulsiva (ver (5.1)). Dada la relación directa entre la ecuación mKdV y la ecuación de Gardner, este estudio es equivalente a estudiar la estabilidad bajo pequeñas perturbaciones en la norma $H^1(\mathbb{R})$, de los solitones de la ecuación de Gardner (4.2).

$$\frac{\partial}{\partial t} k(s, t) + \frac{\partial}{\partial s^3} k(s, t) \pm 2 \frac{\partial}{\partial s} (k^3(s, t)) = 0. \quad (5.1)$$

Para ello, concretamos los resultados relativos a la estabilidad de soluciones de tipo solitón obtenidos por P.Zhidkov (ver [Z]). En dicho trabajo se enuncia un teorema general de estabilidad de solitones de gKdV en $H^2(\mathbb{R})$, que se anulan en la frontera. En nuestro caso, el resultado de estabilidad que enunciamos se centra en la estabilidad de los solitones de la ecuación de Gardner, ecuación que surge al buscar soluciones de mKdV que sean de tipo solitón y tiendan a una constante b en la frontera. Esta ecuación se caracteriza, por poseer

una no linealidad de tipo polinomial en la variable dependiente.

La ecuación de Gardner, que resulta al buscar este tipo de soluciones de mKdV que tienden a una constante en la frontera ya no es invariante por escala si, como hacemos, mantenemos fija la constante. Por tanto, no podemos emplear dicha propiedad en nuestra prueba de las condiciones necesarias para obtener estabilidad. A pesar de esto, podemos integrar directamente la condición que nos permite establecer la convexidad del funcional de Lyapunov que empleamos en la prueba (combinación lineal de la energía y la masa de la joroba del solitón de media no acotada) y afirmar la convexidad del mismo.

El teorema de estabilidad de solitones de media no acotada que enunciamos aporta explícitamente la velocidad y la ecuación implícita que ha de satisfacer la fase $r(t)$. Por último y gracias a los resultados del capítulo anterior, probamos la estabilidad en la norma $H^1(\mathbb{R})$.

5.2. Caso mKdV atractiva

La ecuación mKdV atractiva es

$$\frac{\partial}{\partial t}k(s, t) + \frac{\partial}{\partial s^3}k(s, t) + 2\frac{\partial}{\partial s}(k^3(s, t)) = 0. \quad (5.2)$$

En general, buscamos soluciones de (5.2) de la forma siguiente

$$k(s, t) = b + f(s, t), \quad f(\pm\infty, t) = 0. \quad (5.3)$$

Introduciendo este ansatz en (5.2) obtenemos la siguiente ecuación de Gardner

$$\frac{\partial}{\partial t}f(s, t) + \frac{\partial}{\partial s^3}f(s, t) + 6b\frac{\partial}{\partial s}(f^2(s, t)) + 2\frac{\partial}{\partial s}(f^3(s, t)) = 0. \quad (5.4)$$

Si concretamos más, lo que queremos es encontrar soluciones de (5.2) de tipo onda viajera de la forma siguiente

$$k(s, t) = b + \phi(s - c_b t), \quad c_b > 0, \quad \phi(\pm\infty) = 0. \quad (5.5)$$

Podemos obtener este tipo de ondas viajeras, integrando directamente la EDO que aparece al introducir (5.5) en (5.2). En general, esta integración no es posible en gran parte de las ecuaciones de evolución no lineales, por lo que se intentaría deducir la existencia de este tipo de soluciones de forma cualitativa, por medio de diagramas de fase. En cambio, para el caso de mKdV (atractiva y repulsiva), la integración se puede realizar directamente.

Exponemos a continuación, cómo se hace en el caso atractivo:

introducimos el ansatz (5.5) en (5.2), obteniendo $-c_b\phi' + \phi''' + 2((b + \phi)^3)' = 0$;

integrando una vez y teniendo en cuenta que $\phi(\pm\infty) = 0$, llegamos a

$$\begin{cases} \phi'' + 2\phi^3 + 6b\phi^2 + (6b^2 - c_b)\phi = 0 \\ \phi(\pm\infty) = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Las soluciones de este problema pueden ser encontradas explícitamente mediante integración, y a continuación exponemos el proceso: multiplicando la EDO no lineal de (5.6) por el factor integrante ϕ' , integrando y teniendo en cuenta que $\phi(\pm\infty) = 0$, resulta la siguiente EDO,

$$(\phi')^2 + \phi^4 + 4b\phi^3 + (6b^2 - c_b)\phi^2 = 0, \quad (5.7)$$

que reescribimos como

$$(\phi')^2 = [-\phi^2 - 4b\phi - (6b^2 - c_b)]\phi^2 \rightarrow \frac{(\phi')^2}{\phi^2[-\phi^2 - 4b\phi - (6b^2 - c_b)]} = 1.$$

Tomando ahora la raíz cuadrada positiva e integrando, resulta

$$\int \frac{d\phi}{\phi\sqrt{\phi^2 + 4b\phi + (6b^2 - c_b)}} = \int idz.$$

Ahora, llamando $\tilde{z} = iz$ y factorizando $\phi^2 + 4b\phi + (c_b - 6b^2) = (\phi - c_1)(\phi - c_2)$, donde

$$c_1 = -2b + \sqrt{c_b - 2b^2}, \quad c_2 = -2b - \sqrt{c_b - 2b^2}, \quad (5.8)$$

llegamos a la siguiente expresión que puede ser integrada directamente,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\phi}{\phi\sqrt{\phi^2 + 4b\phi + (6b^2 - c_b)}} &= \int \frac{d\phi}{\phi\sqrt{(\phi - c_1)(\phi - c_2)}} \\ &= \frac{2\sqrt{(\phi - c_1)(\phi - c_2)}}{\sqrt{c_1 c_2}} \frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{c_2}\sqrt{\phi - c_1}}{\sqrt{c_1}\sqrt{\phi - c_2}}\right)}{\sqrt{(\phi - c_1)(\phi - c_2)}}. \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos la siguiente ecuación,

$$\frac{2\sqrt{(\phi - c_1)(\phi - c_2)}}{\sqrt{c_1 c_2}} \frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{c_2}\sqrt{\phi - c_1}}{\sqrt{c_1}\sqrt{\phi - c_2}}\right)}{\sqrt{(\phi - c_1)(\phi - c_2)}} = \tilde{z}.$$

Ahora, despejamos ϕ con algunas manipulaciones básicas, y llegamos a que,

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{z}) &= \frac{c_1 c_2 \operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{c_1 c_2}}{2} \tilde{z}\right)^2}{c_2 - c_1 \tanh\left(\frac{\sqrt{c_1 c_2}}{2} \tilde{z}\right)^2} = \frac{c_1 c_2 \operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{c_1 c_2}}{2} \tilde{z}\right)^2}{c_2 - c_1 (1 - \operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{c_1 c_2}}{2} \tilde{z}\right)^2)} \\ &= \frac{c_1 c_2}{c_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{c_1 c_2}{2}} \tilde{z}\right)^2 - c_1 (\cosh\left(\sqrt{\frac{c_1 c_2}{2}} \tilde{z}\right)^2 - 1)} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + (c_2 - c_1) \left(\frac{1 + \cosh\left(\sqrt{c_1 c_2} \tilde{z}\right)}{2}\right)} \\ &= \frac{2c_1 c_2}{c_2 + c_1 + (c_2 - c_1) \cosh\left(\sqrt{c_1 c_2} \tilde{z}\right)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora las raíces c_1 , c_2 obtenidas en (5.8), teniendo en cuenta que $\tilde{z} = i(x - c_b t)$ y denotando el parámetro velocidad por $c_0 = c_b - 6b^2$, obtenemos la expresión para el b-solitón del caso atractivo,

$$\phi_{b,c_0}(x - c_b(b, c_0)t) = \frac{c_0}{2b + \sqrt{4b^2 + c_0} \cosh\left(\sqrt{c_0}(x - (6b^2 + c_0)t)\right)}, \quad (5.9)$$

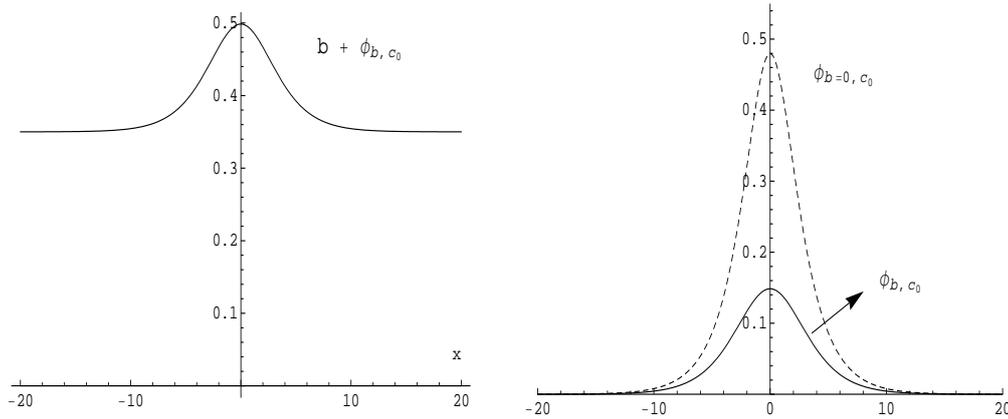


Figura 5.1. Izda. Gráfica de $b + \phi_{b,c_0}$ con $b = 0.35$, $c_0 = 0.23$. Dcha. Comparación de las jorobas del solitón de mKdV(trazo a rayas) y de ϕ_{b,c_0} (trazo grueso), ambas $c_0 = 0.23$.

$$c_b(b, c_0) = 6b^2 + c_0.$$

Por otra parte, las soluciones tipo solitón periódico con valores no triviales en la frontera del dominio también se pueden obtener integrando directamente la EDO no lineal que aparece cuando se sustituye el ansatz correspondiente. Estas soluciones corresponden a las curvaturas de la curvas denominadas V-estados, y que como ya indicamos en la introducción fueron obtenidas por primera vez por G.Deem y N.Zabusky en [DZ] y posteriormente, abordando un problema de solitones en el efecto Hall cuántico, por C.Wexler y A.Dorsey en [DoWe]. Pasamos a obtener estos solitones periódicos de media no nula.

Sin pérdida de generalidad (pues multiplicando por un factor 2 la variable dependiente, obtendríamos la ecuación mKdV (5.2)), buscaremos los solitones periódicos de la forma $k(s, t) = k(s - ct)$ de la ecuación mKdV geométrica

$$\frac{\partial}{\partial t}k(s, t) + \frac{\partial}{\partial s^3}k(s, t) + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial s}(f^3(s, t)) = 0. \quad (5.10)$$

Introduciendo $k(s - ct)$ en (5.10), e integrando dos veces, tras multiplicar por k' , obtenemos la siguiente EDO no lineal (con a, d constantes de integración y denotando z por $z = s - ct$)

$$\frac{1}{2}(k(z)')^2 = -\frac{1}{8}k(z)^4 + \frac{c}{2}k(z)^2 + ak(z) - 2d,$$

o integrando directamente

$$\frac{dk}{dz} = \sqrt{-\left(\frac{1}{4}k^4 - ck^2 - 2ak + 4d\right)}. \quad (5.11)$$

Despejando z e integrando, obtenemos

$$z - z_0 = \pm \int_{k_0}^k \frac{dk}{\sqrt{-V(k)}}, \quad V(k) = \frac{1}{4}k^4 - ck^2 - 2ak + 4d. \quad (5.12)$$

Dependiendo de los ceros del potencial $V(k)$ se tienen las siguientes posibilidades:

- (a) La curvatura está fijada y V tiene sólo un cero en dicha curvatura. Genera círculos como curvas.
- (b) La curvatura es definida positiva, lo que genera curvas de frontera convexa (elipses).
- (c) Curvaturas positivas y negativas, generan elipses achatadas.
- (d) Cuando V tiene cuatro ceros, aparecen curvas con autointersecciones.

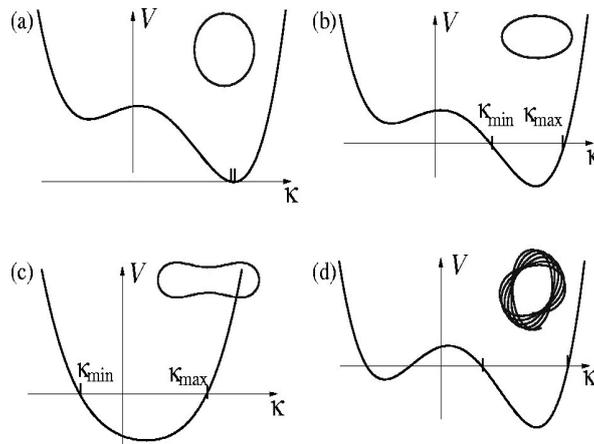


Figura 5.2. Potencial V (5.12) con distintas raíces.

Aquí describiremos tan sólo el caso en el que el potencial V tiene dos ceros reales $\alpha \geq k \geq \beta$ y dos ceros complejos conjugados $A, \bar{A} = m \pm in$. Entonces reescribimos la raíz cuadrada como sigue

$$\sqrt{(\alpha - k)(k - \beta)(k - A)(k - \bar{A})} = \sqrt{(\alpha - k)(k - \beta)((k - b_1)^2 + a_1^2)},$$

$$a_1^2 = -\frac{(A - \bar{A})^2}{4}, b_1 = \frac{A + \bar{A}}{2}$$

Denotando $p = \sqrt{(\alpha - b_1)^2 + a_1^2}$, $q = \sqrt{(\beta - b_1)^2 + a_1^2}$, y cambiando la variable dependiente k a $\bar{k} = \frac{k}{2}$ y renombrando $k \equiv \bar{k}$, según Byrd [Byr, p.133, ec.259.00], la integral (5.12) es

$$z - z_0 = \pm \int_{k_0}^k \frac{dk}{\sqrt{-V(k)}} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \mathcal{F}[\cos^{-1}(\frac{(\alpha - k)q - (k - \beta)p}{(\alpha - k)q + (k - \beta)p}), \sqrt{\frac{(\alpha - \beta)^2 - (p - q)^2}{4pq}}]. \quad (5.13)$$

Recordar que si la integral elíptica incompleta de primera especie viene dada por $u = \mathcal{F}(\phi, k)$, entonces $\phi = \mathcal{F}^{-1}(u, k) \equiv am(u, k)$, donde am denota la amplitud de Jacobi. Con

esta observación y escogiendo z_0 , obtenemos,

$$\cos^{-1} \left(\frac{(\alpha-k)q-(k-\beta)p}{(\alpha-k)q+(k-\beta)p} \right) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sqrt{pq}}{2} z, \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)^2-(p-q)^2}{4pq}} \right] = am \left(\frac{\sqrt{pq}}{2} z, \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)^2-(p-q)^2}{4pq}} \right),$$

$$\frac{(\alpha-k)q-(k-\beta)p}{(\alpha-k)q+(k-\beta)p} = \cos(am \left(\frac{\sqrt{pq}}{2} z, \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)^2-(p-q)^2}{4pq}} \right)) = cn \left(\frac{\sqrt{pq}}{2} z, \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)^2-(p-q)^2}{4pq}} \right),$$

y despejando k se obtiene

$$k(z) \equiv k(s - ct) = \frac{(\alpha q + \beta p) - (\alpha q - \beta p) cn \left(\frac{\sqrt{pq}}{2} z, \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)^2-(p-q)^2}{4pq}} \right)}{(q+p) - (p-q) cn \left(\frac{\sqrt{pq}}{2} z, \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)^2-(p-q)^2}{4pq}} \right)},$$

$$p = \sqrt{(\alpha - b_1)^2 + a_1^2}, \quad q = \sqrt{(\beta - b_1)^2 + a_1^2}, \quad a_1 = \Im(A), \quad b_1 = \Re(A), \quad A = m + in. \quad (5.14)$$

Hasta donde sabemos la estabilidad de este tipo de solitones periódicos de mKdV no ha sido obtenida todavía y tan sólo recientemente se ha probado la estabilidad orbital de ondas cnoidales de media nula de KdV por J. Angulo en [An1] y de soluciones dnoidales de mKdV también por J. Angulo en [An2].

En este capítulo nos proponemos estudiar la estabilidad orbital del solitón ϕ_{b,c_0} dado en (5.9), que es equivalente a la estabilidad orbital del solitón de media no nula, $b + \phi_{b,c_0}$ (ya que estudiamos el comportamiento a b fijo, de pequeñas perturbaciones en la norma $H^1(\mathbb{R})$ de ϕ_{b,c_0}). Antes de esto, si llamamos

$$\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{R}} \{ f_x^2 - f^4 - 4bf^3 \} dx, \quad (5.15)$$

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^2 dx,$$

a la energía y la norma L^2 del solitón de la ecuación KdV extendida (5.4), caracterizamos la solución ϕ_{b,c_0} como el punto crítico del funcional de Lyapunov,

$$E(\xi) = \mathcal{E}(\xi) + 2(c_b - 6b^2)\mathcal{F}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \{ \xi_x^2 - \xi^4 - 4b\xi^3 + (c_b - 6b^2)\xi^2 \} dx. \quad (5.16)$$

Si llamamos al punto crítico $\Psi(z) = \phi_{b,c_0}(z)$, $z = x - c_b(b, c_0)t$, entonces perturbando el funcional (5.16) alrededor de este punto crítico con una función "pequeña" η , obtenemos

$$\begin{aligned}
E(\Psi + \eta) - E(\Psi) &= \int_{\mathbb{R}} \{2\Psi_x \eta_x + \eta_x^2 - 4\Psi^3 \eta - 4\Psi \eta^3 - 6\Psi^2 \eta^2 - \eta^4 \\
&- 12b\Psi \eta^2 - 12b\Psi^2 \eta - 4b\eta^3 + 2(c_b - 6b^2)\Psi \eta + (c_b - 6b^2)\eta^2\} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \{2[-\Psi_{xx} - 2\Psi^3 - 6b\Psi^2 + (c_b - 6b^2)\Psi] \eta + [\eta_x^2 + (c_b - 6(b + \Psi)^2)\eta^2] - 4\Psi \eta^3 \\
&- 4b\eta^3 - \eta^4\} dx.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

De esta forma llegamos a la siguiente caracterización de $\Psi(z) = \phi_{b,c_0}(z)$ y del operador linealizado L :

$$-\Psi'' - 2\Psi^3 - 6b\Psi^2 + (c_b - 6b^2)\Psi = 0, \tag{5.18}$$

$$L = -\partial_{xx} + c_b - 6(b + \Psi)^2. \tag{5.19}$$

Notas:

- (i) Escogeremos en lo sucesivo $\Psi \equiv \phi_{b,c_0}$ y fijaremos el parámetro asintótico "b". Como estamos interesados en soluciones reales, no triviales y regulares, fijado $b \in \mathbb{R}$, el parámetro c_0 lo escogemos en el intervalo $c_0 \in (0, \infty)$. De esta forma la aplicación

$$c_0 \in (0, \infty) \xrightarrow{\Phi} \phi_{b,c_0} \in H^1(\mathbb{R}) \tag{5.20}$$

será $C^1(\mathbb{R}^+ : H^1(\mathbb{R}))$.

- (ii) Emplearemos la notación usual para denotar el producto escalar de dos funciones $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, como $(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g} dx$.

El teorema principal de estabilidad en el caso atractivo es el siguiente:

Teorema 5.2.1. *Sea $b \in \mathbb{R}$, $c_0 \in (0, \infty)$ y $u_{b,c_0}(x, t) = b + \phi_{b,c_0}(x - c_b(b, c_0)t) \in \dot{H}^1(\mathbb{R})$ una solución de la ecuación mKdV atractiva (5.2), donde $\phi_{b,c_0} \in H^1(\mathbb{R})$ satisface (5.6). Entonces*

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \equiv \delta(\epsilon, b, c_0) > 0$ y una función $C^2(\mathbb{R})$, $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

si $\|u_0 - (b + \phi_{b,c_0})\|_{H^1(\mathbb{R})} < \delta$, entonces

$$\sup_{t>0} \|u(\cdot, t) - u_{b,c_0}(\cdot + r(t))\|_{H^1(\mathbb{R})} < \epsilon,$$

donde $u(x, t)$ es la única solución de mKdV atractiva con dato inicial $u_0 = u(x, 0) \in \dot{H}^1(\mathbb{R})$ y donde $\sup_t |r'(t) + (c_0 + 6b^2)| \leq K\epsilon$, $K > 0$.

Para probar este teorema necesitaremos los resultados que exponemos a continuación.

Proposición 5.2.1. *Sea $b \in \mathbb{R}$, $c_0 \in (0, \infty)$ y ϕ_{b,c_0} la solución onda viajera dada por (5.6). Entonces el operador linealizado $L = -\partial_{xx} + c_0 + 6b^2 - 6(b + \phi_{b,c_0})^2$ definido en $H^2(\mathbb{R})$ tiene un único autovalor negativo simple, cero es también un autovalor simple con autofunción $\phi'_{b,c_0} = \partial_x \phi_{b,c_0}$ y el resto del espectro es positivo y separado de cero.*

Demostración. La prueba se desarrolla en dos etapas:

- (i) Veamos que 0 es un autovalor con autofunción $\partial_x \phi_{b,c_0}$,
 $L(\partial_x \phi_{b,c_0}) = (-\partial_{xx} + (c_0 + 6b^2) - 6(b + \phi_{b,c_0})^2)(\partial_x \phi_{b,c_0}) = -\partial_{xxx} \phi_{b,c_0} + c_b \partial_x \phi_{b,c_0} - 6(b + \phi_{b,c_0})^2 \partial_x \phi_{b,c_0} = -[\partial_{xxx}(b + \phi_{b,c_0}) + \partial_t(b + \phi_{b,c_0}) + 2\partial_x((b + \phi_{b,c_0})^3)] = 0$,
entonces, $L(\partial_x \phi_{b,c_0}) = 0 \cdot \partial_x \phi_{b,c_0} = 0$.
Por otra parte, ya que $\phi_{b,c_0} > 0$ y $\phi_{b,c_0}(x) = \phi_{b,c_0}(|x|) \implies \partial_x \phi_{b,c_0}$ tiene un cero en $x = 0$, luego $\partial_x \phi_{b,c_0}$ cambia de signo y por tanto no puede ser el punto crítico del operador L , luego L tiene un único autovalor negativo, ya que debe existir otra autofunción correspondiendo al punto crítico del operador L .
- (ii) Debemos calcular el espectro continuo del operador L probando que su intersección con el espectro discreto es vacía.

Para ello nos apoyamos en un resultado clásico de [DunS, th.16,pág.1448] :

como $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x)$, $q(x) = c_0 + 6b^2 - 6(b + \phi_{b,c_0})^2$.

Ya que $\phi_{b,c_0}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0$, se tiene que $q(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} c_0$, lo que implica que

$$\sigma_{ess}(L) = \sigma(L) - \sigma_{dis}(L) = [c_0, \infty).$$

Como no nos interesa la solución nula, tomamos $c_0 > 0$, y de aquí se deduce que el espectro está separado del origen.

□

Proposición 5.2.2. *Para cada $c_0 \in (0, \infty)$, la función*

$$c_0 \in (0, \infty) \longmapsto d(c_0) = \mathcal{E}(\phi_{b,c_0}) + 2c_0 \mathcal{F}(\phi_{b,c_0}) \in \mathbb{R},$$

es estrictamente convexa.

Demostración. Sea $d(c_0) = \mathcal{E}(\phi_{b,c_0}) + 2c_0 \mathcal{F}(\phi_{b,c_0})$, con $\mathcal{E}(\phi_{b,c_0})$, $\mathcal{F}(\phi_{b,c_0})$ definidas en (5.15). Entonces,

$$\begin{aligned} d'(c_0) &= (\mathcal{E}'(\phi_{b,c_0}) + 2c_0 \mathcal{F}'(\phi_{b,c_0}), \frac{d\phi_{b,c_0}}{dc_0}) + 2\mathcal{F}(\phi_{b,c_0}) \\ &= (-(\phi_{b,c_0})_{ss} - 2\phi_{b,c_0}^3 - 6b\phi_{b,c_0}^2 + c_0\phi_{b,c_0}, \frac{d\phi_{b,c_0}}{dc_0}) + 2\mathcal{F}(\phi_{b,c_0}) = 2\mathcal{F}(\phi_{b,c_0}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi_{b,c_0}^2(s, t) ds. \end{aligned}$$

Como \mathcal{F} es un invariante de mKdV, por simplicidad consideramos \mathcal{F} a $t = 0$. De esta forma, tenemos que

$$d''(c_0) = \frac{\partial}{\partial c_0} \int_{\mathbb{R}} \phi_{b,c_0}^2 ds = 2 \int_{\mathbb{R}} \phi_{b,c_0} \partial_{c_0} \phi_{b,c_0} ds. \quad (5.21)$$

Esta integral puede ser calculada explícitamente, obteniendo

$$d''(c_0) = \frac{\sqrt{c_0}}{c_0 + 4b^2} > 0, \quad (5.22)$$

siempre que $c_0 \in (0, \infty)$. Veamos cómo integrar (5.21). Ya que $\phi_{b,c_0} \equiv \phi_{b,c_0}(s, 0) = \frac{c_0}{2b + \sqrt{4b^2 + c_0} \cosh(\sqrt{c_0}s)}$, la integral (5.21) queda

$$2 \int_{\mathbb{R}} \phi_{b,c_0} \partial_{c_0} \phi_{b,c_0} ds = \frac{c_0}{\sqrt{c_0 + 4b^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{4b\sqrt{c_0 + 4b^2} + (c_0 + 8b^2) \cosh(z) - (c_0 + 4b^2)z \sinh(z)}{(2b + \sqrt{c_0 + 4b^2} \cosh(z))^3} dz, \quad (5.23)$$

donde hemos realizado el cambio de variable $z = \sqrt{c_0}s$. Reescribimos (5.23) de una forma más adecuada para su integración, dividiéndola en dos subintegrales I_1 , I_2

$$(5.23) = \frac{c_0}{\sqrt{c_0 + 4b^2}} \{I_1 + I_2\},$$

donde

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{4b\sqrt{c_0 + 4b^2} + (c_0 + 8b^2) \cosh(z)}{(2b + \sqrt{c_0 + 4b^2} \cosh(z))^3} dz, \quad (5.24)$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{-(c_0 + 4b^2)z \sinh(z)}{(2b + \sqrt{c_0 + 4b^2} \cosh(z))^3} dz. \quad (5.25)$$

(5.24) e (5.25) son integrales inmediatas, que pueden obtenerse con la ayuda de un libro de tablas integrales. Recurriendo por ejemplo a [GrR] (págs. 107 – 108 y 126 – 127), para $n, m \in \mathbb{N}$ y $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, necesitaremos las siguientes identidades,

$$\int \frac{A+B \cosh(x)}{(C+D \cosh(x))^m} dx = \frac{CB-DA}{(m-1)(C^2-D^2)} \frac{\sinh(x)}{(C+D \cosh(x))^{m-1}} + \frac{1}{(m-1)(C^2-D^2)} \int \frac{(m-1)(CA-DB) + (m-2)(CB-DA) \cosh(x)}{(C+D \cosh(x))^{m-1}} dx, \quad (5.26)$$

$$\int \frac{CA-DB}{(C+D \cosh(x))} dx = -\frac{1}{\sqrt{D^2-A^2}} \arcsin\left(\frac{D+C \cosh(x)}{A+B \cosh(x)}\right), \quad D^2 - A^2 > 0,$$

y también,

$$\int \frac{x^n \sinh(x)}{(C+D \cosh(x))^m} dx = -\frac{x^n}{(m-1)D(C+D \cosh(x))^{n-1}} + \frac{n}{(m-1)D} \int \frac{x^{n-1}}{(C+D \cosh(x))^{m-1}} dx. \quad (5.27)$$

Utilizando (5.26) y (5.27), deshaciendo el cambio de variable $z = \sqrt{c_0}s$ y evaluando en $\pm\infty$, obtenemos (5.22). □

Proposición 5.2.3. *Sea $b \in \mathbb{R}$, $c_0 \in (0, \infty)$ y supongamos que $d''(c_0) > 0$. Sea*

$$\mathcal{A} = \{ \psi \in H^1(\mathbb{R}) : (\psi, \phi_{b,c_0}) = 0 = (\psi, \partial_x \phi_{b,c_0}) \}.$$

Entonces,

$$(L\psi, \psi) \geq C \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, \quad C > 0, \quad \forall \psi \in H^1(\mathbb{R}), \quad (\psi, \phi_{b,c_0}) = 0 = (\psi, \partial_x \phi_{b,c_0}). \quad (5.28)$$

Demostración. Por hipótesis,

$$0 < d''(c_0) = -\left(L \frac{\partial \phi_{b,c_0}}{\partial c_0}, \frac{\partial \phi_{b,c_0}}{\partial c_0}\right) \Rightarrow \left(L \frac{\partial \phi_{b,c_0}}{\partial c_0}, \frac{\partial \phi_{b,c_0}}{\partial c_0}\right) < 0.$$

Teniendo en cuenta la proposición 5.2.1, que nos da las propiedades espectrales del operador linealizado L definido en (5.19), podemos expresar $\frac{\partial \phi_{b,c_0}}{\partial c_0}$ en términos de los subespacios asociados a cada autovalor de L como

$$\frac{\partial \phi_{b,c_0}}{\partial c_0} = a_0 \mathcal{X}_0 + l_0 \partial_x \phi_{b,c_0} + p_0,$$

donde $L\mathcal{X}_0 = \lambda_0 \mathcal{X}_0$, $\lambda_0 < 0$, $\|\mathcal{X}_0\| = 1$ y $(Lp_0, p_0) > 0$. De esta forma

$$\begin{aligned} \left(L \frac{\partial \phi_{b,c_0}}{\partial c_0}, \frac{\partial \phi_{b,c_0}}{\partial c_0}\right) &= \left(L(a_0 \mathcal{X}_0 + l_0 \partial_x \phi_{b,c_0} + p_0), a_0 \mathcal{X}_0 + l_0 \partial_x \phi_{b,c_0} + p_0\right) \\ &= a_0^2 \lambda_0 + (Lp_0, p_0) < 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Por tanto existe $\rho \in (0, 1)$ e independiente de ψ , tal que

$$0 \leq (Lp_0, p_0) \leq -\rho a_0^2 \lambda_0 \Rightarrow (Lp_0, p_0)^{-1} \geq -\frac{1}{\rho a_0^2 \lambda_0}. \quad (5.30)$$

Sea $\psi \in \mathcal{A}$, que reescrita en términos de los subespacios de autofunciones del operador linealizado L dado en (5.19), queda como $\psi = a\mathcal{X}_0 + l\partial_x \phi_{b,c_0} + p$, con p en el subespacio de L , ortogonal al subespacio generado por $\{\mathcal{X}_0, \partial_x \phi_{b,c_0}\}$.

De esta forma,

$$(L\psi, \psi) = (L(a\mathcal{X}_0 + l\partial_x \phi_{b,c_0} + p), a\mathcal{X}_0 + l\partial_x \phi_{b,c_0} + p) = a^2 \lambda_0 + (Lp, p).$$

A partir de la proposición 5.2.1, se sigue que

$$(Lp, p) \geq C_1 \|p\|_{L^2}^2, \quad C_1 > 0, \quad (5.31)$$

con C_1 independiente de ψ . Por otra parte, sabemos que

$$\begin{aligned} 0 &= -(\phi_{b,c_0}, \psi) = (L(\phi_{b,c_0}), \psi) = (L(a_0 \mathcal{X}_0 + l_0 \partial_x \phi_{b,c_0} + p_0), a\mathcal{X}_0 + l\partial_x \phi_{b,c_0} + p) \\ &= aa_0 \lambda_0 + (Lp_0, p) \implies (Lp_0, p) = -aa_0 \lambda_0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ahora, aplicando Cauchy-Schwartz podemos acotar la cantidad (Lp, p) , como sigue,

$$\begin{aligned} (Lp, p)^{1/2}(Lp_0, p_0)^{1/2} &\geq |(Lp_0, p)| \geq -\lambda_0|a||a_0| \Rightarrow \\ (Lp, p) &\geq -\frac{(\lambda_0|a||a_0|)^2}{na_0^2\lambda_0}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

De esta forma, recurriendo a (5.33), obtenemos

$$\begin{aligned} (L\psi, \psi) &= a^2\lambda_0 + (Lp, p) = a^2\lambda_0 + \sqrt{\rho}(Lp, p) + (1 - \sqrt{\rho})(Lp, p) \\ &\geq a^2\lambda_0 - \sqrt{\rho}\frac{(\lambda_0|a||a_0|)^2}{na_0^2\lambda_0} + (1 - \sqrt{\rho})(Lp, p) \\ &= (1 - \frac{1}{\sqrt{\rho}})a^2\lambda_0 + (1 - \sqrt{\rho})(Lp, p) \geq C_2\|a\mathcal{X}_0 + p\|_{L^2}^2, \quad C_2 > 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Recordando que $\psi \in \mathcal{A}$, recurrimos a $(\psi, \partial_x \phi_{b,c_0}) = 0$, para estimar $\|a\mathcal{X}_0 + p\|_{L^2}^2$:

$$\begin{aligned} \|a\mathcal{X}_0 + p\|_{L^2}^2 &= \|(a\mathcal{X}_0 + l\partial_x \phi_{b,c_0} + p) - l\partial_x \phi_{b,c_0}\|_{L^2}^2 = \|\psi - l\partial_x \phi_{b,c_0}\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\psi - l\partial_x \phi_{b,c_0})^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \{\psi^2 + l^2(\partial_x \phi_{b,c_0})^2\} dx > \|\psi\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Por tanto,

$$(L\psi, \psi) \geq C_3\|\psi\|_{L^2}^2, \quad C_3 > 0. \quad (5.36)$$

Por último, veamos que se cumple

$$(L\psi, \psi) \geq C_4\|\psi\|_{H^1}^2, \quad C_4 > 0. \quad (5.37)$$

Directamente,

$$\begin{aligned} (L\psi, \psi) &= ([-\partial_{xx} + c_0 - (6\phi_{b,c_0}^2 + 12b\phi_{b,c_0})]\psi, \psi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ -\psi\psi_{xx} + c_0\psi^2 - 6(\phi_{b,c_0}^2 + 2b\phi_{b,c_0})\psi^2 \right\} dx \geq \int_{\mathbb{R}} \psi_x^2 + c \int_{\mathbb{R}} \psi^2 \\ &\geq C_4\|\psi\|_{H(\mathbb{R})^1}^2, \quad C_4 > 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

□

Todavía necesitamos un resultado relativo a las acotaciones que satisface la energía E .

Proposición 5.2.4. *Sea $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\phi_{b,c_0})$ y $(\psi, \phi'_{b,c_0}) = 0$. Entonces $\exists A_1, B_1, C_1$ constantes positivas dependiendo sólo de b, c_0 y ϕ_{b,c_0} , tal que*

$$\Delta E \equiv E(\psi) - E(\phi_{b,c_0}) \geq \mathcal{P}(\|\psi - \phi_{b,c_0}\|_{H^1}),$$

$$\mathcal{P}(\|\psi - \phi_{b,c_0}\|_{H^1}) = A_1 \|\psi - \phi_{b,c_0}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - B_1 \|\psi - \phi_{b,c_0}\|_{H^1(\mathbb{R})}^3 - C_1 \|\psi - \phi_{b,c_0}\|_{H^1(\mathbb{R})}^4. \quad (5.39)$$

Demostración. Sea ψ una pequeña perturbación (en la norma $H^1(\mathbb{R})$) de ϕ_{b,c_0} , que escribimos como

$$\psi = (1 + a)\phi_{b,c_0} + w, \quad (5.40)$$

donde escogemos w verificando $(w, \phi_{b,c_0}) = 0$ y $a \in \mathbb{R}$. Denotando por

$$h(x, t) = \psi - \phi_{b,c_0} = a\phi_{b,c_0} + w,$$

observamos que

(i) si $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\phi_{b,c_0})$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi_{b,c_0}^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \psi^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (h + \phi_{b,c_0})^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (h^2 + \phi_{b,c_0}^2 + 2h\phi_{b,c_0}) dx \Rightarrow \\ \int_{\mathbb{R}} h^2 dx &= (-2) \int_{\mathbb{R}} h\phi_{b,c_0} dx = (-2) \int_{\mathbb{R}} (a\phi_{b,c_0} + w)\phi_{b,c_0} dx = (-2a) \int_{\mathbb{R}} \phi_{b,c_0}^2 dx, \\ a\|\phi_{b,c_0}\|_{L^2}^2 &= -\frac{1}{2}\|h\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (5.41)$$

(ii) si $\int_{\mathbb{R}} \psi \partial_x \phi_{b,c_0} dx = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} ((1 + a)\phi_{b,c_0} + w) \partial_x \phi_{b,c_0} dx = \int_{\mathbb{R}} ((1 + a)\phi_{b,c_0} \partial_x \phi_{b,c_0} + w \partial_x \phi_{b,c_0}) dx, \\ (w, \partial_x \phi_{b,c_0}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Por otra parte, si calculamos la diferencia $\Delta E \equiv E(\psi) - E(\phi_{b,c_0})$ como en (5.17), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta E &\equiv E(\psi) - E(\phi_{b,c_0}) = E(\phi_{b,c_0} + h) - E(\phi_{b,c_0}) \\ &= (Lh, h) - 4 \int_{\mathbb{R}} (b + \phi_{b,c_0}) h^3 dx - \int_{\mathbb{R}} h^4 dx \geq (Lh, h) - d_1 \|h\|_{L^3(\mathbb{R})}^3 - d_2 \|h\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 \\ &\geq (Lh, h) - d'_1 \|h\|_{H^1(\mathbb{R})}^3 - d'_2 \|h\|_{H^1(\mathbb{R})}^4, \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde la última desigualdad se deduce de las siguientes estimaciones de Gagliardo-Nirenberg:

$$\|g\|_{L^p} \leq c \|g\|_{L^q}^{1-\theta} \|g\|_{W^{1,r}}^\theta, \quad \theta = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1}. \quad (5.44)$$

Escogiendo $r = 2$ y llamando $x = \|g\|_{H^1}$, $y = \|g\|_{L^q}$, obtenemos esta estimación directamente relacionada con (5.44),

$$\|g\|_{L^p}^s \leq cy^{s(1-\theta)}x^{s\theta} \leq c(\theta x^s + (1-\theta)y^s). \quad (5.45)$$

A partir de (5.45), obtenemos las estimaciones que nos permiten probar la última desigualdad de (5.43):

$$\|g\|_{L^3}^3 \leq c'\|g\|_{L^2}^{3(1-\theta)}\|g\|_{H^1}^{3\theta} \leq c'(\frac{1}{6}\|g\|_{H^1}^3 + (1-1/6)\|g\|_{L^2}^3) = c'\|g\|_{H^1}^3. \quad (5.46)$$

$$\|g\|_{L^4}^4 \leq c''\|g\|_{L^2}^{4(1-\theta)}\|g\|_{H^1}^{4\theta} \leq c''(\frac{1}{4}\|g\|_{H^1}^4 + (1-1/4)\|g\|_{L^2}^4) = c''\|g\|_{H^1}^4. \quad (5.47)$$

Ahora, por (5.40) y (5.41), w verifica las hipótesis de la proposición 5.2.3, y por tanto

$$(Lw, w) \geq C\|w\|_{H^1}^2, \quad C > 0. \quad (5.48)$$

Por (5.43), nos interesa reescribir (5.48) en términos de h . De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} (Lw, w) &= (L(h - a\phi_{b,c_0}), h - a\phi_{b,c_0}) = (Lh, h) + a^2(L\phi_{b,c_0}, \phi_{b,c_0}) - 2a(Lh, \phi_{b,c_0}) \\ &\leq (Lh, h) + 2\tilde{C}a^2\|\phi_{b,c_0}\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (5.49)$$

De esta forma reescribimos (5.48) como sigue,

$$\begin{aligned} (Lh, h) + 2C'a^2\|\phi_{b,c_0}\|_{H^1}^2 &\geq (Lw, w) \geq C\|w\|_{H^1}^2 \geq \frac{C}{2}\|h\|_{H^1}^2 - \frac{3}{2}Ca^2\|\phi_{b,c_0}\|_{H^1}^2, \\ (Lh, h) &\geq \frac{C}{2}\|h\|_{H^1}^2 - 2C'a^2\|\phi_{b,c_0}\|_{H^1}^2 - \frac{3}{2}Ca^2\|\phi_{b,c_0}\|_{H^1}^2 \\ &\geq \frac{C}{2}\|h\|_{H^1}^2 - 2\tilde{C}'a^2 - \frac{3}{2}\tilde{C}a^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Teniendo ahora en cuenta (5.41), $a^2 = \frac{\|h\|_{L^2}^4}{4\|\phi_{b,c_0}\|_{L^2}^4}$ y absorbiendo las constantes \tilde{C} , \tilde{C}' y el denominador de a^2 en una nueva constante $\Gamma > 0$, podemos simplificar (5.50) como sigue

$$\begin{aligned} (Lh, h) &\geq \frac{C}{2}\|h\|_{H^1}^2 - 2\tilde{C}'a^2 - \frac{3}{2}\tilde{C}a^2 = \frac{C}{2}\|h\|_{H^1}^2 - 2\tilde{C}'\frac{\|h\|_{L^2}^4}{4\|\phi_{b,c_0}\|_{L^2}^4} - \frac{3}{2}\tilde{C}\frac{\|h\|_{L^2}^4}{4\|\phi_{b,c_0}\|_{L^2}^4} \\ (Lh, h) &\geq \frac{C}{2}\|h\|_{H^1}^2 - \Gamma\|h\|_{L^2}^4 \geq \frac{C}{2}\|h\|_{H^1}^2 - \Gamma\|h\|_{H^1}^4. \end{aligned} \quad (5.51)$$

De esta forma, concluimos que

$$\begin{aligned} \Delta E \equiv E(\psi) - E(\phi_{b,c_0}) &\geq (Lh, h) - d_1\|h\|_{H^1}^3 - d_2\|h\|_{H^1}^4 \\ &\geq \frac{C}{2}\|h\|_{H^1}^2 - d_1\|h\|_{H^1}^3 - \tilde{d}_2\|h\|_{H^1}^4, \end{aligned} \quad (5.52)$$

y

$$\mathcal{P}(\|h\|_{H^1}) = \frac{C}{2}\|h\|_{H^1}^2 - d_1\|h\|_{H^1}^3 - \tilde{d}_2\|h\|_{H^1}^4, \quad A_1 = \frac{C}{2}, \quad B_1 = d_1, \quad C_1 = \tilde{d}_2. \quad (5.53)$$

□

Analicemos ahora la fase r que aparece en el teorema de estabilidad. Con este fin, para $\delta_0 < \frac{\|\phi_{b,c_0}\|_{L^2}}{2}$ escogemos $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ un dato inicial para (5.6), que sea una pequeña perturbación de la onda viajera ϕ_{b,c_0} , y tal que $\|\psi - \phi_{b,c_0}\|_{H^1} < \delta_0$. Sea $u \in C(\mathbb{R} : \dot{H}^1(\mathbb{R}))$ la solución de mKdV atractiva (5.2) correspondiente al dato inicial $u_0 = u(x, 0) = b + \psi(x, 0)$. Definimos la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por,

$$F(r, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \{u(x, t) - (b + \phi_{b,c_0}(x+r))\}^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \{\psi(x, t) - \phi_{b,c_0}(x+r)\}^2 dx. \quad (5.54)$$

Dado que $\phi_{b,c_0} \in H^\infty(\mathbb{R})$, F es una función C^∞ en la variable r y C^1 en la variable t . Con estas propiedades de F podemos definir la siguiente función asociada,

$$\begin{aligned} G(r, t) &= \frac{\partial F}{\partial r} = - \int_{\mathbb{R}} \{u(x, t) - (b + \phi_{b,c_0}(x+r))\} \partial_x \phi_{b,c_0}(x+r) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \partial_x \phi_{b,c_0}(x+r) dx. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Sea $F(r, 0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [\psi(x, 0) - \phi_{b,c_0}(x+r)]^2 dx$. Dado que

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} F(r, 0) = \frac{1}{2} \{ \|\psi\|_{L^2}^2 + \|\phi_{b,c_0}\|_{L^2}^2 \} > \frac{1}{2} \|\phi_{b,c_0}\|_{L^2}^2, \quad (5.56)$$

$$F(0, 0) = \frac{1}{2} \|\psi - \phi_{b,c_0}\|_{L^2}^2 < \delta_0^2 < \frac{1}{2} \|\phi_{b,c_0}\|_{L^2}^2,$$

podemos concluir que $F(r, 0)$ alcanza un mínimo en algún punto $(r_0, 0)$, que por invariancia por traslaciones, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es $(r_0 = 0, 0)$, y entonces concluir que $G(0, 0) = 0$. Derivamos ahora $G(r, t)$ con respecto a r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial r} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = - \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \phi_{b,c_0}''(x+r) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \{u(x, t) - (b + \phi_{b,c_0}) + (b + \phi_{b,c_0})\} \phi_{b,c_0}''(x+r) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \{h(x, t) \phi_{b,c_0}'' + (b + \phi_{b,c_0})(b + \phi_{b,c_0})''\} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \{h(x, t)(b + \phi_{b,c_0})'' - ((b + \phi_{b,c_0})')^2\} dx, \end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{\partial G}{\partial r} = - \int_{\mathbb{R}} \left\{ -((b + \phi_{b,c_0})')^2 + h(x, t)(b + \phi_{b,c_0})'' \right\} dx, \quad (5.57)$$

con,

$$h(x, t) = \psi(x, t) - \phi_{b,c_0}(x + r) = u(x, t) - (b + \phi_{b,c_0}(x + r)), \quad (5.58)$$

dónde $u(x, t) = b + \psi(x, t)$ y r será especificada más adelante.

Derivamos ahora $G(r, t)$ con respecto a t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= - \int_{\mathbb{R}} u_t \phi'_{b,c_0}(x + r) dx = - \int_{\mathbb{R}} (-u_{xxx} - 2(u^3)_x) \phi'_{b,c_0}(x + r) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \{u \phi''''_{b,c_0} + 2u^3 \phi''_{b,c_0}\} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \{(u - (b + \phi_{b,c_0}) + (b + \phi_{b,c_0}))(b + \phi_{b,c_0})'''' \\ &\quad + 2(u - (b + \phi_{b,c_0}) + (b + \phi_{b,c_0}))^3 (b + \phi_{b,c_0})''\} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \{(h + (b + \phi_{b,c_0}))(b + \phi_{b,c_0})'''' + 2(h + (b + \phi_{b,c_0}))^3 (b + \phi_{b,c_0})''\} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \{h(b + \phi_{b,c_0})'''' + 6h(b + \phi_{b,c_0})^2 (b + \phi_{b,c_0})'' + 6h^2 (b + \phi_{b,c_0})(b + \phi_{b,c_0})'' \\ &\quad + 2h^3 (b + \phi_{b,c_0})'' + (b + \phi_{b,c_0})(b + \phi_{b,c_0})'''' + 2(b + \phi_{b,c_0})^3 (b + \phi_{b,c_0})''\} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \{h v'''' + 6h v^2 v'' + 6h^2 v v'' + 2h^3 v'' + v v'''' + 2v^3 v''\} dx, \end{aligned} \quad (5.59)$$

donde en la última igualdad hemos escogido $v = b + \phi_{b,c_0}$. Debemos analizar los dos últimos sumandos de (5.59), que no son proporcionales a h . Si ϕ_{b,c_0} verifica la EDO (5.6),

$$\begin{aligned} \phi''_{b,c_0} &= -2\phi_{b,c_0}^3 - 6b\phi_{b,c_0}^2 + c_0\phi_{b,c_0} \Rightarrow (b + \phi_{b,c_0})'' \\ &= -2(\phi_{b,c_0} + b - b)^3 - 6b(\phi_{b,c_0} + b - b)^2 + c_0(\phi_{b,c_0} + b - b), \end{aligned}$$

que en términos de la nueva variable $v = b + \phi_{b,c_0}$, reescribimos como,

$$\begin{aligned} v'' &= -2(v - b)^3 - 6b(v - b)^2 + c_0(v - b) \\ &= -2(v^3 - 3bv^2 + 3b^2v - b^3) - 6b(b^2 + v^2 - 2bv) + c_0(v - b) \\ v'' &= -2v^3 + (c_0 + 6b^2)v - (4b^3 + c_0b), \\ v''' &= -6v^2v' + (c_0 + 6b^2)v', \\ v'''' &= -12v(v')^2 - 6v^2v'' + (c_0 + 6b^2)v''. \end{aligned}$$

De esta forma, los dos últimos sumandos de (5.59) se escriben como sigue,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} vv'''' + 2v^3v'' &= \int_{\mathbb{R}} -12v^2(v')^2 - 6v^3v'' + (c_0 - 6b^2)vv'' + 2v^3v'' \\
&= \int_{\mathbb{R}} -12v^2(v')^2 - 4v^3v'' + (c_0 + 6b^2)vv'' = \int_{\mathbb{R}} -12v^2(v')^2 + 12v^2(v')^2 + (c_0 + 6b^2)vv'' \\
&= \int_{\mathbb{R}} (c_0 + 6b^2)vv'',
\end{aligned}$$

en donde obtenemos la última igualdad tras integrar por partes. Ahora, agrupando términos llegamos a,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial t} &= - \int_{\mathbb{R}} \{h v'''' + 6h v^2v'' + 6h^2vv'' + 2h^3v'' + vv'''' + 2v^3v''\} dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \{-12hv(v')^2 - 6hv^2v'' + (c_0 + 6b^2)hv'' + 6h v^2v'' + 6h^2vv'' \\
&\quad + 2h^3v'' + vv'''' + 2v^3v'' + (c_0 + 6b^2)vv''\} dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \{(c_0 + 6b^2)[(v')^2 - hv''] - 12hv(v')^2 + 6h^2vv'' + 2h^3v''\} dx.
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Como la necesitaremos proximamente, calculamos la segunda derivada respecto al tiempo de la función G : derivando con respecto al tiempo la segunda línea de (5.59) e integrando por partes dos veces, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= - \int_{\mathbb{R}} \{u \phi_{b,c_0}^{(vii)} + 2u^3 \phi_{b,c_0}^{(v)} + 24u^4 u_x \phi_{b,c_0}'' + 12u^5 \phi_{b,c_0}''' \\
&\quad + 3u_x^3 \phi_{b,c_0}'' + 15uu_x^2 \phi_{b,c_0}''' + 6u^2 u_x \phi_{b,c_0}^{(iv)}\} dx.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

De esta forma, asumiendo que $u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$, tenemos que la función G es de clase C^2 con respecto a t , estando su segunda derivada temporal dada por (5.61).

Con estas definiciones, ya estamos en condiciones de probar el teorema de estabilidad.

Demostración. (**Teorema 5.2.1**)

Dividimos la prueba en dos partes dependiendo si el dato inicial, perturbación de la solución fundamental ϕ_{b,c_0} , tiene o no la misma norma L^2 , que la solución fundamental.

- (i) Sea $u(x, 0) = b + \psi(x, 0)$ el dato inicial de la solución $u(x, t)$, que es perturbación de la solución b-soliton $b + \phi_{b,c_0}(x, t)$ de mKdV atractiva.

$$\text{Supongamos que } \mathcal{F}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \psi^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \phi_{b,c_0}^2 dx = \mathcal{F}(\phi_{b,c_0}).$$

Sea $\epsilon > 0$. Buscamos un $\tilde{\delta}(\epsilon) > 0$ tal que si $0 < \delta < \tilde{\delta}(\epsilon)$ y $\|\psi - \phi_{b,c_0}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \leq \delta$, entonces

$$\|u(\cdot, t) - (b + \phi_{b,c_0}(\cdot + r))\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \leq \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para ello, sea $\delta_1 > 0$, tal que el polinomio $\mathcal{P}(\|\psi - \phi_{b,c_0}\|_{H^1(\mathbb{R})})$ sea estrictamente creciente en $[0, \delta_1]$. Definimos

$$\delta_2 = \min \left\{ \epsilon, \delta_1, \frac{\|(b + \phi_{b,c_0})'\|_{L^2}^2}{2\|(b + \phi_{b,c_0})''\|_{L^2}}, \frac{\|\phi_{b,c_0}\|_{L^2}}{20} \right\}. \quad (5.62)$$

Como el funcional de Lyapunov E definido en (5.16) es continuo en el subespacio vectorial de $H^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{S} = \{\psi \in H^1(\mathbb{R}) : \mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\phi_{b,c_0})\}$,

dado $\epsilon > 0$, $\exists \tilde{\delta}(\epsilon) > 0$, tal que si $0 < \delta < \tilde{\delta}(\epsilon)$, entonces

$$\delta < \delta_2, \quad (5.63)$$

y si

$$\|\psi(\cdot, 0) - \phi_{b,c_0}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \delta \Rightarrow \Delta E = E(\psi) - E(\phi_{b,c_0}) < \mathcal{P}(\delta_2). \quad (5.64)$$

Supongamos entonces que $0 < \delta < \tilde{\delta}(\epsilon)$ y escogemos $\psi \in H^1$ tal que

$$\|\psi(\cdot, 0) - \phi_{b,c_0}(x + r)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \delta. \quad (5.65)$$

Con esta elección de ψ y recordando la derivada respecto a r de G (5.57), concluimos que

$$\frac{\partial G}{\partial r}|_{(r,t)} > 0, \quad \forall (r, t) \in \Omega,$$

donde

$$\Omega = \left\{ (r, t) : \|h(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|u(\cdot, t) - (b + \phi_{b,c_0}(x + r))\|_{H^1(\mathbb{R})} < \frac{\|(b + \phi_{b,c_0})'\|_{L^2}^2}{\|(b + \phi_{b,c_0})''\|_{L^2}} \right\}. \quad (5.66)$$

Observar que con la elección de δ_2 dada en (5.62), $(0, 0) \in \Omega$. Evaluando la derivada respecto a r de G (5.57) en $(0, 0)$ tenemos que

$$\frac{\partial G}{\partial r}|_{(0,0)} \geq \left\{ \|(b + \phi_{b,c_0})'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|\psi - \phi_{b,c_0}\|_{L^2(\mathbb{R})} \|(b + \phi_{b,c_0})''\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\} > 0, \quad (5.67)$$

y $G(0, 0) = 0$, pues alcanzamos el mínimo de $F(r, 0)$, como vimos en (5.56).

Así, por el teorema de la función implícita aplicado a la función G , existe $T > 0$ y una función $C^2((-T, T) : \mathbb{R})$, $r : (-T, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $r(0) = 0$, tal que (la función $r(t)$ es C^2 por (5.61))

$$G(r(t), t) = 0, \quad \forall t \in (-T, T). \quad (5.68)$$

Escogemos T de forma maximal, pues si éste no lo fuera, siempre podemos extender el tiempo de definición del teorema de la función implícita, hasta generar el intervalo maximal en el que podemos definir la función implícita r .

Con este resultado, podemos derivar implícitamente (5.68), para obtener

$$\frac{d}{dt}G(r(t), t) = 0 = \frac{\partial G}{\partial r}r'(t) + \frac{\partial G}{\partial t} \Rightarrow$$

$$r'(t) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial t}}{\frac{\partial G}{\partial r}}. \quad (5.69)$$

Sustituyendo (5.57) y (5.60) en (5.69), obtenemos

$$r'(t) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial t}}{\frac{\partial G}{\partial r}} = -\frac{-\int_{\mathbb{R}}\{(c_0 + 6b^2)[-(v')^2 + hv''] - 12hv(v')^2 + 6h^2vv'' + 2h^3v''\}dx}{-\int_{\mathbb{R}}\{-(v')^2 + hv''\}},$$

es decir,

$$\begin{cases} r'(t) = -(c_0 + 6b^2) - \frac{\int_{\mathbb{R}} h\{-12v(v')^2 + 6hvv'' + 2h^2v''\}dx}{\int_{\mathbb{R}}\{-(v')^2 + hv''\}}, \\ r(0) = 0. \end{cases} \quad (5.70)$$

Recordamos que,

$$h(x, t) = u(x, t) - (b + \phi_{b,c_0}(x + r(t))) \quad \wedge \quad v(x, t) = b + \phi_{b,c_0}(x + r(t)).$$

Sabemos por la proposición 5.2.4, que

$$\Delta E(t) = E(\psi) - E(\phi_{b,c_0}) \geq \mathcal{P}(\|h\|_{H^1(\mathbb{R})}).$$

Como ΔE es constante en el tiempo, tenemos que

$$\mathcal{P}(\|h\|_{H^1(\mathbb{R})}) \leq \mathcal{P}(\delta_2). \quad (5.71)$$

Al ser \mathcal{P} estrictamente creciente en el intervalo $[0, \delta_1]$ y $\|h\|_{H^1(\mathbb{R})}$ una función continua en t , cuyo valor en $t = 0$ es menor que δ_1 , (5.71) implica que

$$\|u(x, t) - (b + \phi_{b,c_0}(x + r(t)))\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \delta_2, \quad \forall t \in (-T, T). \quad (5.72)$$

Esto implica directamente que $T = +\infty$, pues si $T < +\infty$, a partir de (5.72), deducimos que la adherencia de $\Omega' = \{(r(t), t) : -T < t < T\}$ está contenida en Ω dado en (5.66). Así existe $\rho > 0$ tal que r puede ser definido $\forall t \in (-T - \rho, T + \rho)$. Pero r está definido de manera maximal en $(-T, T)$, y por tanto no puede ser definido en $t > T$. Por tanto $T \not< +\infty$, luego $T = +\infty$. Ahora, escogiendo ϵ suficientemente pequeño, reescribimos (5.72) como

$$\|u(x, t) - (b + \phi_{b,c_0}(x + r(t)))\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.73)$$

y $r'(t) \rightarrow -(c_0 + 6b^2) + O(\epsilon)$, con esta elección de ϵ .

- (ii) Sea $\epsilon > 0$ y sea $u_0 = u(x, 0) = b + \psi(x, 0)$ un dato inicial de mKdV atractiva, tal que $\mathcal{F}(\psi) \neq \mathcal{F}(\phi_{b,c_0})$.

Escogemos ψ de tal forma que $\|\psi(\cdot, 0) - \phi_{b,c_0}(\cdot + r)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \delta$, con δ a ser determinado todavía. Entonces,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(\psi) - \mathcal{F}(\phi_{b,c_0})| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (\psi^2 - \phi_{b,c_0}^2) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (\psi - \phi_{b,c_0})(\psi + \phi_{b,c_0}) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} (\psi - \phi_{b,c_0})(\psi - \phi_{b,c_0} + 2\phi_{b,c_0}) dx \right| \leq \delta(\delta + 2\|\phi_{b,c_0}\|_{L^2}) \\ &\leq 2\delta(1 + \|\phi_{b,c_0}\|_{L^2}) = M_1\delta. \end{aligned}$$

Como \mathcal{F} es un funcional estrictamente monótono en la variable c_0 (ya que $d''(c_0) > 0$, por la proposición 5.2.2), se deduce que para δ suficientemente pequeño, existe e cerca de c_0 , para el cual $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\phi_{b,e})$. De hecho

$$M_1\delta \geq |\mathcal{F}(\psi) - \mathcal{F}(\phi_{b,c_0})| = |\mathcal{F}(\phi_{b,e}) - \mathcal{F}(\phi_{b,c_0})| = d''(\hat{e})|e - c_0|, \quad (5.74)$$

donde \hat{e} está entre e y c_0 . Como $d''(c_0)$ (ver (5.22)) está acotada inferiormente en $(0, +\infty)$, concluimos que $|e - c_0| \leq M_2\delta$, con $M_2 \equiv M_2(M_1, d''(\hat{e}))$. Por otra parte, como la aplicación $c_0 \in (0, +\infty) \xrightarrow{\Phi} \varphi_{b,c_0} \in H^1(\mathbb{R})$ es $C^2(\mathbb{R}^+, H^1)$, tenemos que

$$\|\phi_{b,e} - \phi_{b,c_0}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq M_3\delta, \quad M_3 \equiv M_3(M_2, \Phi). \quad (5.75)$$

Escogiendo δ tal que $M_3\delta < \delta_2/2$, podemos terminar la demostración, al aplicar el caso anterior, en el que tenemos igualdad de normas L^2 , al dato inicial ψ , visto como una perturbación de $\phi_{b,e}$. De esta forma, con la anterior elección de δ , existe una fase $R(t)$, tal que

$$\|u(\cdot, t) - (b + \phi_{b,e}(\cdot + R(t)))\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \delta_2/2. \quad (5.76)$$

Por tanto, con (5.75) y (5.76) podemos concluir que

$$\|u(x, t) - (b + \phi_{b,c_0}(x + R(t)))\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \delta$$

La función fase $R(t)$, garantizada por el apartado (i), permanece C^2 y es solución de la EDO implícita,

$$R'(t) = -(e + 6b^2) - \frac{-\int_{\mathbb{R}} \hat{h}\{-12v(v')^2 + 6\hat{h}vv'' + 2\hat{h}^2v''\} dx}{-\int_{\mathbb{R}} \{(v')^2 + \hat{h}v''\}},$$

con $\hat{h}(x, t) = u(x, t) - (b + \phi_{b,e}(x + R(t)))$.

Como $\|\hat{h}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{\delta_2}{2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, se sigue que, para ϵ suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} R'(t) &= -(e + 6b^2) + O(\epsilon) = -(e - c_0 + c_0 + 6b^2) + O(\epsilon) \\ &= -(c_0 + 6b^2) + (c_0 - e) + O(\epsilon) = -(c_0 + 6b^2) + O(\delta) + O(\epsilon) \\ &= -(c_0 + 6b^2) + O(\epsilon). \end{aligned}$$

□

5.3. Caso mKdV repulsiva

La estabilidad de los solitones de media no acotada en el caso repulsivo se prueba de manera análoga al caso atractivo. Por tanto indicaremos los cambios que necesitaremos en los resultados del caso atractivo, para obtener los análogos al caso repulsivo.

La ecuación mKdV repulsiva es

$$\frac{\partial}{\partial t}k(s, t) + \frac{\partial}{\partial s^3}k(s, t) - 2\frac{\partial}{\partial s}(k^3(s, t)) = 0. \quad (5.77)$$

La onda viajera $k(s, t) = b + f(s - c_b t)$, $c_b > 0$, $f(\pm\infty) = 0$, con f dada por (5.9), es solución real de (5.2), por lo que si cambiamos el parámetro asintótico b por ib , la función f se transforma como $f(s - c_b t) = -i\tilde{f}(s + c_b t)$ y por tanto, la anterior solución real atractiva $b + f(s - c_b t)$ se transforma en una solución imaginaria pura atractiva $i(b - \tilde{f}(s + c_b t))$, y la parte imaginaria $(b - \tilde{f}(s + c_b t))$ de esta solución atractiva es solución real repulsiva. Con los cambios de variables $b \rightarrow ib \wedge f \rightarrow -i\tilde{f}$, el PVI (5.6) se transforma en

$$\begin{cases} \tilde{f}'' - 2\tilde{f}^3 + 6b\tilde{f}^2 + (c_b - 6b^2)\tilde{f} = 0 \\ \tilde{f}(\pm\infty) = 0 \end{cases} \quad (5.78)$$

De esta forma, los solitones de media no acotada en el caso repulsivo se escriben como

$$k(s, t) = b - \tilde{f}(s + c_b t), \quad c_b > 0, \quad \tilde{f}(\pm\infty) = 0.$$

donde

$$\tilde{f}(s + c_b(b, c_0)t) \equiv \varphi_{b, c_0}(s, t) = \frac{c_0}{2b + \sqrt{4b^2 - c_0} \cosh(\sqrt{c_0}(s + (6b^2 - c_0)t))}, \quad (5.79)$$

$$c_b(b, c_0) = 6b^2 - c_0 > 0.$$

Nos proponemos estudiar la estabilidad orbital de $b - \varphi_{b, c_0}$, que es equivalente a la estabilidad orbital de φ_{b, c_0} .

Si en el funcional (5.16) que caracteriza la solución onda viajera atractiva hacemos la transformación $\xi \rightarrow -i\xi \wedge b \rightarrow ib$, obtenemos el funcional que caracteriza la solución onda viajera repulsiva φ_{b, c_0} .

$$E(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \{\xi_x^2 + \xi^4 - 4b\xi^3 - (c_b - 6b^2)\xi^2\} dx. \quad (5.80)$$

Podemos caracterizar el punto crítico $\tilde{\Psi}(z) = \varphi(z)$, $z = x + c_b(b, c_0)t$ del funcional (5.80) y el operador linealizado del caso repulsivo, sin más que aplicar los cambios de va-

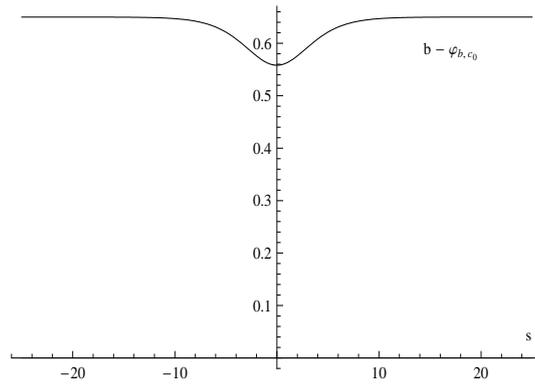


Figura 5.3. Gráfica de b-soliton repulsivo con $b = 0.65$, $c_0 = 0.23$.

riables $R \rightarrow -i\tilde{R} \wedge b \rightarrow ib$ a (5.18), que caracteriza el punto crítico atractiva y al operador linealizado del caso atractiva (5.19).

De esta forma, caracterizamos el punto crítico $\tilde{\Psi}$ y el operador linealizado L del caso repulsivo:

$$-\Psi'' + 2\Psi^3 - 6b\Psi^2 - (c_b - 6b^2)\Psi = 0, \quad \Psi(\pm\infty) = 0. \quad (5.81)$$

$$L = -\partial_{xx} - c_b + 6(b - \Psi)^2, \quad (5.82)$$

Notas:

- (i) Escogeremos en lo sucesivo $\tilde{\Psi} \equiv \varphi_{b,c_0}$ y fijaremos el parámetro "b". Como estamos interesados en soluciones reales, no triviales y regulares, fijado $b \in \mathbb{R}$, el parámetro c_0 lo escogemos en el intervalo $c_0 \in (0, 4b^2)$ (frente al dominio $(0, \infty)$ de c_0 del caso atractiva). De esta forma la aplicación

$$c_0 \in (0, 4b^2) \xrightarrow{\Phi} \varphi_{b,c_0} \in H^1(\mathbb{R}) \quad (5.83)$$

será $C^1((0, 4b^2) : H^1(\mathbb{R}))$.

- (ii) Nuestro objetivo es estudiar la estabilidad orbital de $b - \varphi_{b,c_0} = b - f(x + c_b(b, c_0)t)$.

El teorema principal de estabilidad en el caso repulsivo es el siguiente:

Teorema 5.3.1. *Sea $b \in \mathbb{R}$, $c_0 \in (0, 4b^2)$ y $u_{b,c_0}(x, t) = b - \varphi_{b,c_0}(x + c_b(b, c_0)t) \in \dot{H}^1(\mathbb{R})$ una solución de la ecuación mKdV repulsivo (5.77), donde $\varphi_{b,c_0} \in H^1(\mathbb{R})$ satisface (5.78).*

Entonces

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta \equiv \delta(\epsilon, b, c_0) > 0$ y una función $C^2(\mathbb{R})$, $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

si $\|u_0 - (b - \varphi_{b,c_0})\|_{H^1(\mathbb{R})} < \delta$, entonces

$$\sup_{t>0} \|u(\cdot, t) - u_{b,c_0}(\cdot + r(t))\|_{H^1(\mathbb{R})} < \epsilon,$$

donde $u(x, t)$ es la única solución de mKdV repulsiva con dato inicial $u_0 = u(x, 0) \in \dot{H}^1(\mathbb{R})$ y donde $\sup_t |r'(t) + (c_0 - 6b^2)| \leq K\epsilon$, $K > 0$.

Para probar este teorema necesitaremos los resultados obtenidos en el caso atractivo modificando adecuadamente los argumentos. Pasamos a explicar cómo se enuncian y adaptan estos resultados atractiva al caso repulsivo.

Proposición 5.3.1. *Sea $b \in \mathbb{R}$, $c_0 \in (0, 4b^2)$ y φ_{b,c_0} la solución onda viajera dada por (5.78). Entonces el operador linealizado $L = -\partial_{xx} + c_0 - 6b^2 + 6(b - \varphi_{b,c_0})^2$ definido en $H^2(\mathbb{R})$ tiene un único autovalor negativo simple, cero es también un autovalor simple con autofunción $\varphi'_{b,c_0} = \partial_x \varphi_{b,c_0}$ y el resto del espectro es positivo y separado de cero.*

Demostración. La prueba y las conclusiones en el caso repulsivo son análogas al caso focusing. \square

Proposición 5.3.2. *Para cada $c_0 \in (0, 4b^2)$, la función*

$$c_0 \in (0, 4b^2) \mapsto d(c_0) = \mathcal{E}(\varphi_{b,c_0}) + 2c_0 \mathcal{F}(\varphi_{b,c_0}) \in \mathbb{R},$$

es estrictamente convexa.

Demostración. Sea $d(c_0) = \mathcal{E}(\varphi_{b,c_0}) + 2c_0 \mathcal{F}(\varphi_{b,c_0})$, con $\mathcal{E}(\varphi_{b,c_0})$, $\mathcal{F}(\varphi_{b,c_0})$ definidas (implícitamente) en (5.80). Entonces,

$$\begin{aligned} d'(c_0) &= (\mathcal{E}'(\varphi_{b,c_0}) + 2c_0 \mathcal{F}'(\varphi_{b,c_0}), \frac{d\varphi_{b,c_0}}{dc_0}) + 2\mathcal{F}(\varphi_{b,c_0}) \\ &= (-\varphi_{b,c_0}{}_{ss} + 2\varphi_{b,c_0}^3 - 6b\varphi_{b,c_0}^2 + c_0\varphi_{b,c_0}, \frac{d\varphi_{b,c_0}}{dc_0}) + 2\mathcal{F}(\varphi_{b,c_0}) = 2\mathcal{F}(\varphi_{b,c_0}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{b,c_0}^2(s, t) ds. \end{aligned}$$

Como \mathcal{F} es un invariante de mKdV, por simplicidad consideramos \mathcal{F} a $t = 0$. De esta forma, tenemos que

$$d''(c_0) = \frac{\partial}{\partial c_0} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{b,c_0}^2 ds = 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi_{b,c_0} \partial_{c_0} \varphi_{b,c_0} ds. \quad (5.84)$$

Esta integral puede ser calculada explícitamente, obteniendo

$$d''(c_0) = \frac{\sqrt{c_0}}{4b^2 - c_0} > 0, \quad (5.85)$$

siempre que $c_0 \in (0, 4b^2)$, por lo que de aquí obtendríamos la convexidad de $d(c_0)$.

La prueba de (5.85) es análoga a la dada en la proposición 5.2.2 y no la repetiremos aquí. \square

Proposición 5.3.3. Sea $b \in \mathbb{R}$, $c_0 \in (0, 4b^2)$ y supongamos que $d''(c_0) > 0$. Sea

$$\mathcal{A} = \{\psi \in H^1(\mathbb{R}) : (\psi, \varphi_{b,c_0}) = 0 = (\psi, \partial_x \varphi_{b,c_0})\}.$$

Entonces,

$$(L\psi, \psi) \geq C \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, \quad C > 0, \quad \forall \psi \in H^1(\mathbb{R}), \quad (\psi, \varphi_{b,c_0}) = 0 = (\psi, \partial_x \varphi_{b,c_0}). \quad (5.86)$$

Demostración. La prueba y las conclusiones en el caso repulsivo son análogas al caso atractiva. \square

Proposición 5.3.4. Sea $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\varphi_{b,c_0})$ y $(\psi, \varphi'_{b,c_0}) = 0$. Entonces $\exists A_1, B_1, C_1$ constantes positivas dependiendo sólo de b, c_0, φ_{b,c_0} , tal que

$$\begin{aligned} \Delta E \equiv E(\psi) - E(\varphi_{b,c_0}) &\geq \mathcal{P}(\|\psi - \varphi_{b,c_0}\|_{H^1}), \\ \mathcal{P}(\|\psi - \varphi_{b,c_0}\|_{H^1}) &= A_1 \|\psi - \varphi_{b,c_0}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - B_1 \|\psi - \varphi_{b,c_0}\|_{H^1(\mathbb{R})}^3 - C_1 \|\psi - \varphi_{b,c_0}\|_{H^1(\mathbb{R})}^4. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Demostración. La demostración es análoga a la de la proposición 5.2.4. \square

Las expresiones (5.57) y (5.60) del caso atractivo se transforman en el caso repulsivo en

$$\frac{\partial G}{\partial r} = 2 \int_{\mathbb{R}} \{(v')^2 - h(x, t)v''\} dx, \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 2 \int_{\mathbb{R}} \{(c_0 - 6b^2)[(v')^2 - hv''] - 12hv(v')^2 + 6h^2vv'' + 2h^3v''\} dx, \quad (5.89)$$

donde $v(x, t) = b - \varphi_{b,c_0}(x + r(t))$ y $h(x, t) = u(x, t) - (b - \varphi_{b,c_0}(x + r(t)))$.

Por tanto, la expresión del caso focusing para $r'(t)$ dada en (5.70) se convierte, en el caso repulsivo, en

$$r'(t) = -(c_0 - 6b^2) - \frac{2 \int_{\mathbb{R}} h\{-12v(v')^2 + 6hvv'' + 2h^2v''\} dx}{2 \int_{\mathbb{R}} \{(v')^2 - hv''\}}. \quad (5.90)$$

Demostración. (**Teorema 5.3.1**)

La prueba del teorema en el caso repulsivo es idéntica a la prueba del caso atractivo, si seguimos los mismo pasos, donde ahora recurrimos a la versión repulsiva de las proposiciones 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 y 5.2.4. \square

Apéndice A

Apéndice A

Sumario. En este apéndice exponemos el método de Hirota, un método clásico de resolución de ecuaciones de evolución no lineales y su aplicación a la ecuación mKdV para buscar soluciones concretas. En particular, los ejemplos que se muestran son los de las soluciones básicas del solitón y breather de mKdV atractiva.

A.1. El método de Hirota

Esta técnica para encontrar soluciones especiales de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, ha permitido un avance significativo para aquellas ecuaciones que admiten soluciones tipo solitón. Hay que observar que este método funciona virtualmente para aquellas ecuaciones en donde el método de scattering inverso es conocido y a veces ha funcionado sobre ecuaciones sobre las que todavía no se dispone de un método de scattering inverso desarrollado. Las ideas básicas del método son (siguiendo a [AS, p.179])

- (i) Introducir una transformación de la(s) variable(s) dependiente(s) para reducir la ecuación de evolución a una ecuación bilineal, cuadrática en la(s) variable(s) dependiente(s), usando para ello la definición de los siguientes operadores definidos por Hirota:

$$D_x^m D_t^n a \cdot b \equiv (\partial_x - \partial'_x)^m (\partial_t - \partial'_t)^n a(x, t) b(x', t')|_{x'=x, t'=t}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.1})$$

- (ii) Introducir un desarrollo perturbativo en términos de exponenciales, con coeficientes a determinar en la ecuación bilineal.
- (iii) Averiguar dichos coeficientes para obtener solución de la ecuación bilineal.

Para la ecuación mKdV

$$u_t + u_{xxx} + 6u^2 u_x = 0,$$

el método de Hirota se aplica de la siguiente forma:

sustituyendo la expresión $u = \frac{G}{F}$ en la ecuación mKdV y usando la definición de los operadores de Hirota (A.1), obtenemos

$$(D_t + D_x^3)G \cdot F + \frac{6}{F^2}(D_x G \cdot F)\left(\frac{1}{2}D_x^2 F \cdot F - G^2\right) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Como, F, G son ambos arbitrarios, podemos desacoplar la ecuación (A.2), y obtener

$$(D_t + D_x^3)G \cdot F = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$D_x^2 F \cdot F = 2G^2. \quad (\text{A.4})$$

Si suponemos que $u \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, podemos introducir en (A.3)-(A.4), el siguiente desarrollo en F y G :

$$\begin{aligned} F &= 1 + \epsilon^2 F_2 + \epsilon^4 F_4 + \dots, \\ G &= \epsilon G_1 + \epsilon^3 G_3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Donde truncamos cada desarrollo, dependiendo del tipo de solución que estemos buscando. Es decir, en el caso del solitón de mKdV, las ecuaciones quedarían:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_x^3)G_1 &= 0 \Rightarrow G_1 = e^{\eta_1}, \quad \eta_1 = k_1 x - k_1^3 t + \eta_1^{(0)}, \\ \partial_x^2 F_2 &= G_1^2 \Rightarrow F_2 = \frac{1}{4k_1^2} e^{2\eta_1}, \\ F_j &= 0, \quad j \geq 4, \\ G_j &= 0, \quad j \geq 3. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Escogiendo $\epsilon = 1$, la solución tipo solitón se obtiene como:

$$u = \frac{G}{F} = \frac{e^{\eta_1}}{1 + \frac{1}{4k_1^2} e^{2\eta_1}} = k_1 \operatorname{sech}(\eta_1).$$

De forma similar se puede obtener la solución tipo 2-solitón de mKdV, escogiendo:

$$\begin{aligned} G &= e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + \frac{1}{4k_2} \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 e^{\eta_1 + 2\eta_2} + \frac{1}{4k_2} \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 e^{2\eta_1 + \eta_2}, \\ F &= 1 + \frac{1}{4k_1^2} e^{2\eta_1} + \frac{1}{4k_2^2} e^{2\eta_2} + \frac{2}{k_1 + k_2} e^{\eta_1 + \eta_2} + \frac{(k_1 - k_2)^4}{16k_1^2 k_2^2 (k_1 + k_2)^4} e^{2\eta_1 + 2\eta_2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Observar que F puede ser reescrita de la forma

$$F = \left(\frac{1}{2k_1} e^{\eta_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{(k_1 - k_2)^2}{4k_1 k_2 (k_1 + k_2)^2} e^{\eta_1 + \eta_2}\right)^2 \equiv g^2 + f^2.$$

Con esta reescritura, G se redefine como

$$G = 2D_x g \cdot f,$$

y así

$$u = \frac{G}{F} = 2 \frac{D_x g \cdot f}{g^2 + f^2} = 2 \frac{g_x f - g f_x}{f^2 (1 + (g/f)^2)},$$

o

$$u = 2\partial_x(\arctan\left[\frac{g}{f}\right]) \equiv i\partial_x(\log\left[\frac{f-ig}{f+ig}\right]). \quad (\text{A.8})$$

Si escribimos $\tilde{f} = f + ig$, obtenemos la transformación de la variable dependiente u como sigue (\tilde{f}^* significa complejo conjugado de \tilde{f})

$$u = i\partial_x(\log(\frac{\tilde{f}^*}{\tilde{f}})) \equiv 2\partial_x(\arctan(\frac{\Im\tilde{f}}{\Re\tilde{f}})). \quad (\text{A.9})$$

Con esta nueva transformación de la variable dependiente, que de hecho será la que utilizaremos a lo largo de la memoria y de forma generalizada para soluciones $u \rightarrow b$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, obtenemos, tras sustituir el anstaz (A.9) en la ecuación mKdV, las siguientes ecuaciones bilineales

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^3)\tilde{f}^*\tilde{f} &= 0, \\ D_x^2\tilde{f}^*\tilde{f} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

La solución tipo N-soliton se obtendría sustituyendo en (A.10), el siguiente desarrollo para \tilde{f} ,

$$\tilde{f}_N = 1 + \epsilon\tilde{f}_N^{(1)} + \epsilon^2\tilde{f}_N^{(2)} + \dots$$

igualando potencias del parámetro ϵ y escogiendo $\epsilon = 1$. Las soluciones soliton y 2-soliton se obtendrían haciendo

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= 1 + e^{\eta_1 + i\pi/2}, \\ \tilde{f}_2 &= 1 + e^{\eta_1 + i\pi/2} + e^{\eta_2 + i\pi/2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + i\pi + A_{12}}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde $e^{A_{12}} = (\frac{k_1+k_2}{k_1+k_2})^2$ y $\eta_i = k_i x - k_i^3 t + \eta_i^{(0)}$.

Escogiendo $k_1 = -i(\alpha + i\beta)$ y $k_2 = -i(-\alpha + i\beta)$ y sustituyendo obtendríamos la solución breather de mKdV.

El N-soliton de mKdV tendría la siguiente estructura,

$$\tilde{f}_N = \sum_{\mu=0,1} \exp\left(\sum_{i=1}^N \mu_i(\eta_i + i\frac{\pi}{2}) + \sum_{1 \leq i < j} \mu_i \mu_j A_{ij}\right). \quad (\text{A.12})$$

Bibliografía

- [abe80] K. Abe and O. Inoue. *Fourier expansion solution of the Korteweg-de Vries equation*. J. Comp. Phys., 34:202-210, 1980.
- [AS] M.J. Ablowitz y H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia, 1981.
- [AlBH] J. Albert, J. Bona y D. Henry *Sufficient conditions for stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves*, Physica D, **24**, (1987), 343-366.
- [AleGV] M.A. Alejo, C. Gorria y L. Vega, *Discrete Conservation laws and the convergence of long time simulations of the mKdV equation*. submitted.
- [An1] J. Angulo, *Stability of Cnoidal waves*, Adv. Differential Equations, **11**, 12, (2006), 1312-1374.
- [An2] J. Angulo, *Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions to the Schrödinger and the modified Korteweg de Vries equations*, J. Differential Equations, **235**, (2007), 1-30.
- [AuYF] T. Au-Yeung, P C W Fung y C. Au, *Modified Kdv solitons with non-zero vacuum parameter obtainable from the ZS-AKNS inverse method*, J. Phys. A: Math. Gen. 17 (1984) 1425-1436.
- [Bel] M. Beals, *Self-Spreading and Strength of Singularities for solutions to semilinear wave equations*, Annals of Math. **118**, (1983), 187-214.
- [Ben] T.S. Benjamin, *The stability of solitary waves*, Proc. R. Soc. Lond. A 1972 338, 153-183.
- [BeKV] G. Beylkin, J.M. Keiser y L. Vozovoi, *A new class of time discretization schemes for the solution of nonlinear pdes*, J. Comput. Phys. 147 (2) (1998) 361-387.
- [B] J. Bourgain, *Fourier Transform Restriction Phenomena for Certain Lattice subsets and Applications to Nonlinear Evolution Equations*, Geometric and Functional Analysis, **3**, n°3, (1993), 107-156, 209-262.
- [Br] R.C. Brower, D. Kessler, J. Koplik y H. Levine *Geometrical models of interface evolution*, Phys. Rev. A., **28**, (1984), 1335.
- [Bon] J. Bona, *On the Stability Theory of Solitary Waves*, Proc. R. Soc. Lond. A 1975 344, 363-374
- [BonSc] J. Bona y R. Scott, *Solutions of the KdV equation in fractional order Sobolev spaces*, Duke Math. J. **43** (1976) 87-99.
- [BonSm] J. Bona y R. Smith, *The IVP for the KdV equation*, Roy. Soc. Lond. A **278** (1975) 555-601.
- [Buc] J.C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, Chichester, 1987.

- [But] T.F. Buttke, *A fast adaptive vortex method for patches of constant vorticity in two dimensions.*, J. Comput. Phys., **89**, (1990), no.1, 161-186.
- [Byr] P. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists.* 1954, Springer.
- [chan85] T.F.Chan y T.Kerkhoven, *Fourier Methods with Extended Stability Intervals for the Korteweg-de Vries Equation*, SIAM J. Numer. Anal., **22**, (1985), no.22, 441-454.
- [CLai] K.W.Chow y D.W.Lai, *Coalescence of Ripplons, Breathers, Dromions and Dark Solitons*, J.Phys.Soc.Japan, **70**, n°3, (2001), 666-677.
- [CGD] K.W.Chow, R.Grimshaw y E.Ding, *Interactions of breathers and solitons in the extended Korteweg-de Vries equation*, Wave Motion, **43**, (2005), 158-166.
- [ChK] T.F. Chan y T. Kerkhoven, *Fourier methods with extended stability intervals for the Korteweg-de Vries equation*, SIAM J. Numer. Anal. **22** (3) (1985) 441-454.
- [CtCoTa] M. Christ, J. Colliander y T. Tao. *Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations.* Amer. J. Math, **125** (2003), 1235-1293.
- [CoKeTakTa] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka y T. Tao. *Sharp global well-posedness results for periodic and non-periodic KdV and modified KdV on \mathbb{R} and \mathbb{T} .* JAMS, **16** (2003), 705-749.
- [DaTa] E.Date y S.Tanaka, *Periodic Multi-solitons of Korteweg-de Vries Equation and Toda Lattice*, Prog. Theort.Phys., **59**, n°13, (1976), 107-125.
- [DZ] G.Deem y N.Zabusky, *Vortex Waves: Stationary V-states, Interactions, Recurrence and Breaking*, Phys.Rev.Lett., **40**, n°13,(1978), 859-862.
- [delahoz09] F.de la Hoz, *Numerical study of a flow of regular planar curves that develop singularities at finite time.* SIAM J. Appl. Math., **70**:279-301, 2009.
- [delahoz07] F.de la Hoz, *Self-similar solutions for the 1-D Schrödinger map on the hyperbolic plane.* Math. Zeit. (2007) 257:61-80.
- [DoWe] A. Dorsey y C.Wexler, *Contour dynamics, waves and solitons in the quantum Hall effect*, Phys.Rev. B, **60**, n°15, (1999), 10971-10983.
- [Du] B.A.Dubrovin, *Periodic Problems for the KdV equation in the class of finite band potentials*, Funktsional Analiz i Ego Prilozheniya, **9**, n°3,(1975), 41-51.
- [DuMaNo] B.A.Dubrovin, V.E.Matveev y S.P.Novikov *Nonlinear equations of KdV type, finite zone linear operators and Abelian varieties*, Russian Math. Surveys **31**, n°1,(1976), 56-146.
- [DuNo] B.A.Dubrovin y S.P.Novikov *Periodic and conditionally periodic analogs of the many-soliton solutions of the KdV*, Sov.Phys.-JETP, **40**, n°6,(1974), 1058-1063.
- [DuZ] Q. Du y W. Zhu, *Analysis and applications of the exponential time differencing schemes and their contour integration modifications*, BIT Numerical Mathematics **45** (2) (2005) 307-328.
- [DunS] N.Dunford, J.T.Schwartz *Linear Operators, part II*, Interscience (1963).
- [FW] KB. Fornberg y G.B. Whitham, *A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phe- nomena*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A **289** (1361) (1978) 373-404.
- [FuMiy] Y.Fukumoto y T. Miyazaki, *Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity*, Journal of Fluid Mechanics (1991), **222**, 369-416.

- [GaGG] L.R.T. Gardner, G.A. Gardner y T. Geyikli, *Solitary wave solutions of the mKdV equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 124 (4) (1995) 321-333.
- [Gag] M.E.Gage, *Curve shortening makes convex curves circular*, Invent.Math. **76** (1984) 357.
- [GoP1] R.E.Goldstein y D.M.Petrich, *The Korteweg-de Vries Hierarchy as Dynamics of Closed Curves in the Plane*, Phys.Rev.Lett., **67**, n°23, (1991), 3203-3206.
- [GoP2] R.E.Goldstein y D.M.Petrich, *Solitons, Euler's Equation, and the Geometry of Curve Motion*, Singularities in Fluids, Plasmas and Optics Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, Series: NATO Science Series C: (closed) , Vol. 404 (1993), 93-109
- [GotO] D. Gottlieb y S.A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. 1977.
- [GrR] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic New York, (1969).
- [Guo] Guo Ben-Yu. *Spectral methods and their applications*. World Scientific, Singapore, 1998.
- [HNW] E. Hairer, S.P. Norsett y G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*, Springer-Verlag, 1993, 2nd EDITION.
- [HLW] E. Hairer, CH.Lubitch y G. Wanner, *Geometric Numerical Integration: Structure Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 2002.
- [Hai] E. Hairer., *Symmetric projection methods for differential equations on manifolds*. BIT, 40:726-734,2000.
- [Ha] H. Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech., **51**, (1972), 477-485.
- [Hi] R.Hirota, *A new form of Bäcklund transformation and its relation to the inverse scattering problem*, Prog. Theoret. Phys., 52, (1974), 1498-1512.
- [HiS] R.Hirota y J.Satsuma, *A simple structure of superposition formula of the Bäcklund transformation*, Jour. Phys. Soc. Japan, 45, (1978), 1741-1750.
- [HelM1] M.A. Helal y M.S. Mehann. *A comparison between two different methods for solving kdv-burgers equation*. Chaos, Solitons and Fractals, 28:320-326, 2006.
- [HelM2] M.A. Helal y M.S. Mehann. *A comparative study between two different methods for solving the general Korteweg-de Vries equation (gkdv)*. Chaos, Solitons and Fractals, 33:725-739, 2007.
- [IK] H.Inoue y T.Kawata, *Inverse Scattering Method for the Nonlinear Evolutions under Non-vanishing Conditions*, J.Phys.Soc.Japan,44 n°5(1978),1722-1729.
- [JSR] J.Scott Russell, *Report on Waves*: Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844 (London 1845), pp 311-390, Plates XLVII-LVII.
- [Kato1] T.Kato, *On the KdV equation*, Manuscripta Math. **29** (1979),27-50.
- [Kato2] T.Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized)KdV equation*, Advances in Math.Supp. Stu., Stu. Appl. Math. **8** (1983),93-128.
- [KKS1] P.G.Kevrekidis, A. Khare y A. Saxena, *Breather lattice and its stabilization for the modified Korteweg-de Vries equation*, Phys.Rev. E, **68**, 0477011-0477014, (2003).
- [KKS2] P.G.Kevrekidis, A. Khare y A. Saxena., *On some classes of mKdV periodic solutions*, Journal of Physics A : Mathematical and General, **37**, (2004), 10959-10965.

- [KePV0] C.Kenig, G. Ponce y L.Vega, *Well-posedness of the IVP for the KdV*, J.Amer. Math.Soc., **4**, (1991) 323-347.
- [KePV1] C.Kenig, G. Ponce y L.Vega, *On the Ill-posedness of some Canonical Dispersive Equations*, Duke Mathematical Journal, **106**, n°3, (2001) 617-633.
- [KePV2] C.Kenig, G. Ponce y L.Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (4) (1993) 527-620.
- [KePV3] C.Kenig, G. Ponce y L.Vega, *The Cauchy problem for the KdV equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math. Journ. **71** (1) (1993) 1-20.
- [KePV4] C.Kenig, G. Ponce y L.Vega, *A Bilinear Estimate with Applications to the KdV equation*, Journ.Amer.Math.Soc. **8** (2) (1996) 573-603.
- [KlaMa1] S.Klainermann y M.Machedon, *On the optimal local regularity for gauge field theories*, Diff. and Integral Eq. **10** (1997) 1019-1030.
- [KlaMa2] S.Klainermann y M.Machedon, *Space-time Estimates for Null forms and the Local Existence Theorem.*, Comm.Pure Appl.Math. **46** (1993) 1221-1268.
- [KdV] D.J. Korteweg y G. de Vries, *On the change of form long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves*, Phyls.Mag. **39** (1895), 422-443.
- [KrF] S.N.Kruzhkov y A.V.Faminskii, *Generalized solutions of the Cauchy problem for the KdV equation*, Math.USSR Sbornik **48** (1984),93-138.
- [La] G.L.Lamb, *Elements of Soliton Theory*, Pure Appl.Math., Wiley, New York, 1980.
- [LiP] F.Linares y G.Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Springer Universitext.
- [MarMe1] Y.Martel y F.Merle, *Stability of Two Soliton Collision for Nonintegrable gKdV Equations*, Commun. Math. Phys. **286**, 39-79 (2009).
- [MarMe2] Y.Martel y F.Merle, *Stability and Asymptotic Stability in the Energy Space of the Sum of N Solitons for Subcritical gKdV Equations*, Commun. Math. Phys. **231**, 347-373 (2002).
- [McTr] H.McKean y E.Trubowitz, *Hill's Operator and Hyperelliptic Function Theory in the presence of Infinitely Many Branch Points*, Comput. Math. Appl. **29** (1976), 143-226.
- [Muñ1] C.Muñoz, *On the inelastic 2-soliton collision for gKdV equations with general nonlinearity*, International Mathematics Research Notices (2010) 1624-1719.
- [Muñ2] C.Muñoz, *On the soliton dynamics under a slowly varying medium for generalized KdV equations*, preprint.
- [MuE] G.M. Muslu y H.A. Erbay, *A split-step fourier method for the complex modified Korteweg-de Vries equation*, Comput. Math. Appl. **45** (1-3) (2003) 503-514.
- [NSW] K.Nakayama, H.Segur y M.Wadati, *Integrability and motion of curves*, Phys.Rev.Lett. **69** n°18, (1992), 2603-2606.
- [OW] K.Ohkuma y M.Wadati, *Multiple-Pole Solutions of the Modified Korteweg-de Vries Equation*, J.Phys.Soc.Japan, **51**, n°6, (1982), 2029-2035.
- [SC] J.M. Sanz-Serna y M.P. Calvo, *Numerical Hamiltonian Problems*, Chapman Hall, London, 1994.
- [SV] J.M. Sanz-Serna y G. Verwer, *Convergence of method of lines approximations to partial differential equations*, Computing **33** (1984), pp. 297-313.

- [Sau] J.C. Saut, *Sur quelques generalisations de l'équation de KdV*, J.Math. Pures Appl. **58**, (1979) 21-61.
- [SauT] J.C. Saut y R.Teman, *Remarks on the KdV equation*, Israel J.Math. **24**, (1976) 78-87.
- [Sha] A.B. Shamardan, *Central Finite difference schemes for nonlinear dispersive waves*. Comput. Math. Appl, 19(4):9-15, 1990.
- [Shin] H.J. Shin, *Three-dimensional Curve Motions Induced by the Modified Korteweg-de Vries Equation*, Progr. Theor. Phys. 119 (2008) 701-725.
- [Sj] A.Sjöberg, *On the KdV equation: existence and uniqueness*, J.Math.Anal.Appl. **29**, (1970) 569-579.
- [Sw] P.N.Swarztrauber, *Fast Fourier Transform subroutine for FORTRAN*, <http://www.netlib.org/bihar>, 1979.
- [T0] T.Tao, *Multilinear Weighted Convolution of L^2 Functions, and Applications to non-linear Dispersive Equations* Amer.J.Math. **123** (2001) 839-908.
- [T1] T.Tao, *Why are solitons stable?* Bull.Amer. Math.Soc. **46** (1) (2009) 1-33.
- [Tha] B.Thaller, *The Dirac Equation*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 1992.
- [Tr] E.Trubowitz, *The Inverse problem for periodic potentials*, Comput. Math. Appl. **30** (1977), 321-337.
- [W] M.Wadati, *The modified Korteweg-de Vries Equation*, J.Phys.Soc.Japan, **34**, n°5, (1973), 1289-1296.
- [We1] M.I.Weinstein, *Modulational Stability of Ground States of Nonlinear Schrödinger Equations*. SIAM Journal on Mathematical Analysis **16**, 472 (1985).
- [We2] M.I.Weinstein, *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive equations*, Comm.Pure App. Math. **39** (1986), 51-68.
- [Wh] G.B. Whitham, *Linear and Non-linear Waves*, New York, Wiley-Interscience, 1974. 651 p, 1974.
- [ZaS] V.E. Zakharov y A.B.Shabat, *Interaction between solitons in a stable medium*, Sov. Phys. JETP, **37**, 823-828.
- [ZhLi] ZHA Qi-Lao y LI Zhi-Bin, *Darboux Transformation and Multi-Solitons for Complex mKdV Equation*, CHIN.PHYS.LETT. Vol. 25, No. 1 (2008) 8.
- [Z] P.E. Zhidkov, *Korteweg-de Vries and Nonlinear Schrödinger Equations: Qualitative Theory*, Lecture Notes in Mathematics, 1756, Springer Verlag, 2001.

