

# Estudio Cohomológico de Flujos Riemannianos

José Ignacio Royo Prieto

# ESTUDIO COHOMOLÓGICO DE FLUJOS RIEMANNIANOS

por

**José Ignacio Royo Prieto**

Esta memoria ha sido realizada en parte durante el disfrute de una beca de formación de investigadores predoctoral del Gobierno Vasco.

Esta memoria ha sido realizada bajo la Dirección del Professeur Martinxo SARALEGI ARANGUREN de l'Université d'Artois, y la profesora Marta MACHO STADLER, de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea.

**Leioa, 5 de setiembre de 2003**

**Fecha de lectura:** 24 de octubre de 2004.

**Calificación:** Sobresaliente *cum laude*, por unanimidad.

**Tribunal de la tesis:**

**PRESIDENTE:**

Prof. Gilbert HECTOR (Université Claude Bernard Lyon I);

**SECRETARIO:**

Prof. Agustí REVENTÓS TARRIDA (Universidad Autónoma de Barcelona)

**VOCALES:**

Prof. Xosé MASA VÁZQUEZ (Universidade de Santiago de Compostela);

Prof. Jesús Antonio ÁLVAREZ LÓPEZ (Universidade de Santiago de Compostela);

Prof. Marisa FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ (Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea)

*A mi abuelita Ana*

## Agradecimientos

Son muchas las personas a quienes debo el haber realizado este trabajo, quizá no me acuerde de todas a la hora de nombrarlas en este apartado.

Eskerrik asko, Martintxo, bihotz-bihotzetik. Gracias por ofrecerme este tema de investigación con el que tanto he disfrutado, y gracias por tus matemáticas y tu entusiasmo por ellas. Nunca olvidaré tu enorme generosidad, tu ayuda, tu comprensión y tu apoyo en los momentos duros, que los ha habido. Mi gratitud se extiende a Lan y a los pequeños por la cálida hospitalidad que me habéis ofrecido siempre durante mis estancias en Lille.

Gracias a los miembros del tribunal, por aceptar amablemente la invitación a leer y valorar esta memoria. Gracias en especial al Professeur G.Hector por acceder a escucharla antes de su depósito y sus útiles sugerencias para refinar el resultado 2.21.

Mis compañeros de departamento merecen un lugar aquí; personas que me habéis acompañado y ayudado en muchos aspectos: Raúl, Edurne, Susana, Arantza, Al, Ainhoa, Gustavo, Luis M., Diego. . . Quienes me habéis ayudado y os habéis acordado de mí cuando he estado lejos. No estáis todos citados aquí, pero sabéis que os estoy agradecido.

Gracias al departamento de matemáticas del CSIC, y en especial a Manolo de León, por la estupenda acogida que tuve durante mi estancia en Madrid.

Gracias al grupo de Bilbao del Movimiento de Objeción de Conciencia, por participar conmigo en una de las partes más importantes de mi vida, y cuya historia es inseparable de la historia de esta tesis.

Gracias a mi cuadrilla de amigos y a mi familia: mis padres y mi hermana, por acompañarme, escucharme, vivir conmigo los desvelos siempre inevitables a lo largo de estos años.

Gracias, Sonia, por ser mi apoyo, por luchar, caminar y descansar a mi lado. Por vivir esto conmigo, como el resto de lo mío y lo nuestro.

Por último, gracias con especial cariño a ti, Marta. Por tus matemáticas, por tu continuo ejemplo y entrega, porque esta tesis no se hubiera hecho si no hubieses estado tú. No tengo palabras para expresarlo.

*La literatura, la ciencia y el arte deben de ser servidas por voluntarios. Solo con esa condición conseguirán liberarse del yugo del estado, del capital y de la medianía burguesa que los ahogan.*

...

*Ciencia e industria, saber y aplicación, descubrimiento y realización práctica que conduce a nuevas invenciones, trabajo cerebral y trabajo manual, idea y labor de los brazos, todo se enlaza. Cada descubrimiento, cada progreso, cada aumento de la riqueza de la humanidad, tiene su origen en el conjunto del trabajo manual y cerebral, pasado y presente. Entonces, ¿qué derecho asiste a nadie para apropiarse la menor partícula de ese inmenso todo y decir: Esto es mío y no vuestro?*

(PIOTR KROPOTKIN, *La conquista del Pan*)

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>iii</b>
<b>1. Preliminares sobre foliaciones riemannianas</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones y ejemplos de Foliaciones . . . . .	1
1.2. Foliaciones riemannianas . . . . .	6
1.3. Cohomología básica . . . . .	10
<b>2. Sucesión de Gysin para flujos riemannianos regulares</b>	<b>15</b>
2.1. El problema de Gysin . . . . .	16
2.2. Flujos riemannianos . . . . .	17
2.2.1. Flujos . . . . .	17
2.2.2. Actores que intervienen en los flujos riemannianos . . . . .	22
2.2.3. Estructura local de los flujos riemannianos . . . . .	26
2.3. Sucesión de Gysin . . . . .	29
2.3.1. El Truco de Bredon . . . . .	29
2.3.2. Sucesión de Gysin . . . . .	32
2.3.3. Nulidad de la Clase de Euler . . . . .	40
2.4. Independencia de $[\kappa]$ y $[e]$ . . . . .	44
2.5. Más sucesiones tipo Gysin . . . . .	47
<b>3. Sucesión de Gysin para flujos riemannianos singulares</b>	<b>53</b>
3.1. Foliaciones riemannianas singulares . . . . .	54
3.2. Flujos riemannianos singulares. Truco de Bredon . . . . .	61
3.3. Cohomología de intersección . . . . .	69
3.3.1. Definiciones y primeras propiedades . . . . .	70
3.3.2. Teoremas de de Rham para Cohomología de Intersección . . . . .	73
3.3.3. Dualidad de Poincaré . . . . .	79
3.4. Sucesión de Gysin . . . . .	89
3.4.1. Forma de Euler . . . . .	90
3.4.2. Sucesión de Gysin . . . . .	91

3.4.3.	Clase de Euler . . . . .	94
3.4.4.	Algunas aplicaciones . . . . .	98
3.5.	Cirugía hiperbólica . . . . .	101
<b>4.</b>	<b>Teorema de Localización para Flujos Riemannianos Singulares</b>	<b>105</b>
4.1.	Modelos de Cohomología Equivariante y Modelo de Gysin . . . . .	106
4.1.1.	Cohomología Equivariante para acciones de $\mathbb{S}^1$ . . . . .	106
4.1.2.	Modelo de Gysin para flujos con $[\kappa] = 0$ . . . . .	112
4.2.	Teorema de Localización para Flujos Riemannianos Singulares . . . . .	117
4.2.1.	Revestimiento de trivialización . . . . .	117
4.2.2.	Teorema de Localización . . . . .	119
	<b>Apéndice</b>	<b>123</b>
A.3.	Homología de Intersección . . . . .	124
A.4.	Integración de formas perversas . . . . .	127
	<b>Bibliografía</b>	<b>131</b>

# Introducción

En esta memoria realizamos un *estudio cohomológico de los flujos riemannianos*. Una breve explicación de las palabras del título nos centrará en las materias de estudio y los propósitos de esta memoria.

Trabajaremos con una variedad  $M$ , diferenciable en el sentido  $C^\infty$  y cerrada, es decir, compacta y sin borde. Un *flujo*  $\mathcal{F}$  (de momento, regular) sobre  $M$  lo podemos entender como una foliación orientada de dimensión 1 sobre  $M$ , o bien como una acción diferenciable de la recta real, en cuyo caso las órbitas de la acción vendrían a ser las hojas de la foliación. También podemos pensar en un campo de vectores sin singularidades, siendo las curvas integrales del campo las que determinan la foliación. En estos tres puntos de vista aparecen objetos matemáticos distintos, pero relacionados: dos acciones distintas pueden determinar la misma foliación, debido a una cuestión de reparametrización, y lo mismo sucede al multiplicar un campo no singular por una función estrictamente positiva. El objeto que nos interesará va a ser la foliación  $\mathcal{F}$  que se define, y por lo tanto, los invariantes que estudiaremos no serán alterados por los cambios de parametrización de una acción o campo que los defina.

Cuando hablamos de *estudio cohomológico*, nos referimos a investigar las propiedades de ciertos invariantes cohomológicos de la foliación. Precisando más, nos interesan la cohomología de de Rham  $H^*(M)$ , que sabemos por el Teorema de de Rham que es isomorfa a la singular, y la cohomología del “espacio cociente” o espacio de hojas de  $\mathcal{F}$ . Al trabajar con flujos, este espacio puede resultar muy patológico desde el punto de vista geométrico: en primer lugar, no tiene por qué ser una variedad diferenciable (en el caso de que el flujo sea una acción libre del círculo  $\mathbb{S}^1$ , sí que lo es), y de hecho hay ejemplos sencillos, como el de un flujo lineal de pendiente irracional sobre el toro  $\mathbb{T}^2$ , donde el espacio cociente tiene topología indiscreta, y por lo tanto, no nos aporta información sobre la estructura transversa de ese flujo. Por lo tanto, usaremos la *cohomología básica*  $H^*(M/\mathcal{F})$ , que es la cohomología de las *formas básicas* (una forma de de Rham es básica si cumple  $i_V\omega = i_Vd\omega = 0$  para todo campo  $V$  tangente a  $\mathcal{F}$ ). Esta cohomología ha demostrado ser un invariante

adaptado y rico en propiedades, el invariante adecuado para estudiar la estructura transversa de un flujo (y de foliaciones de cualquier dimensión). Estamos interesados en relacionar la cohomología básica con la de la variedad, y eso lo haremos mediante una sucesión exacta larga, la *sucesión de Gysin*.

La sucesión de Gysin, clásica en topología algebraica (ver, por ejemplo, [5]), se puede construir en la siguiente situación: sea  $\pi: E \rightarrow B$  un fibrado de fibra una esfera  $\mathbb{S}^k$ . La sucesión de Gysin es:

$$\dots \rightarrow H^i(B) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\int} H^{i-k}(B) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(B) \rightarrow \dots,$$

donde  $\int$  es la integración a lo largo de las fibras y  $\varepsilon$  la multiplicación por la clase de Euler del fibrado.

La sucesión de Gysin aparece en el siguiente tipo de flujos: sea una acción libre y diferenciable del círculo  $\mathbb{S}^1$  sobre la variedad cerrada  $M$ . En ese caso, el espacio de órbitas  $M/\mathbb{S}^1$  es una variedad diferenciable y la proyección  $\pi: M \rightarrow M/\mathbb{S}^1$  es un fibrado principal, con lo que reproducimos la situación anterior para  $k = 1$ . La cohomología básica del flujo correspondiente coincide en este caso con la cohomología del espacio de órbitas  $M/\mathbb{S}^1$ . La sucesión de Gysin que tenemos es:

$$\dots \rightarrow H^i(M/\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\int} H^{i-1}(M/\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(M/\mathbb{S}^1) \rightarrow \dots$$

En [42], M. Nicolau y A. Reventós construyen la sucesión de Gysin mostrada para acciones casi-libres de  $\mathbb{S}^1$ .

Nuestro objetivo es extender este resultado al caso de flujos. Como un flujo puede ser en general muy patológico, nos restringiremos a una clase de flujos cuyas propiedades nos permitan abordar su estudio: los *flujos riemannianos*. Un flujo  $\mathcal{F}$  es riemanniano (ver [43]) si existe una métrica  $\mu$  sobre  $M$  cuya componente ortogonal es invariante por  $\mathcal{F}$ . Diremos que este tipo de métricas son *casi-fibradas*. Notamos que las acciones del círculo (o flujos periódicos) inducen foliaciones riemannianas, ya que siempre podemos tomar una métrica que sea invariante por la acción; en particular, su componente ortogonal.

La sucesión de Gysin ha sido construida por F. Kamber y P. Tondeur en [32], para el caso de *flujos isométricos*, es decir, acciones  $\mathbb{R} \times (M, \mu) \rightarrow (M, \mu)$  sin puntos fijos, y que preservan una métrica riemanniana  $\mu$  sobre  $M$ . En particular, los flujos isométricos son riemannianos. La sucesión de Gysin conseguida es:

$$\dots \rightarrow H^i(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^i(M) \rightarrow H^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

El homomorfismo de conexión es la multiplicación por la clase de Euler  $[d\chi] \in H^2(M/\mathcal{F})$ , siendo  $\chi$  la forma fundamental del flujo. Es crucial para obtener el resultado que el grupo de isometrías  $\text{Iso}(M, \mu)$  es compacto.

El objetivo principal de esta memoria es obtener una sucesión de Gysin para *flujos riemannianos singulares*, es decir, flujos riemannianos con puntos fijos. Las diferencias que tenemos que abordar son dos:

1. El flujo es riemanniano, y no isométrico;
2. La existencia de puntos fijos hace que tengamos una foliación singular y no regular.

Para facilitar la comprensión, procederemos en dos etapas: primero resolvemos el caso de flujos riemannianos sin puntos fijos (caso regular), y después con puntos fijos (caso singular).

El capítulo 1 estará dedicado al material preliminar sobre foliaciones, centrando nuestra atención en las foliaciones riemannianas y la cohomología básica. También se recordarán los conceptos básicos sobre foliaciones riemannianas singulares.

En el capítulo 2 nos ocupamos del caso riemanniano regular, que presenta dos diferencias sustanciales con respecto al caso isométrico. Por un lado, la diferencial de la forma fundamental ya no tiene por qué ser una forma básica, tal y como ocurría en el caso isométrico, sino que tenemos una descomposición:

$$d\chi = e + \chi \wedge \kappa,$$

siendo  $e$  la forma de Euler y  $\kappa$  la forma de curvatura media, las cuales podemos suponer básicas (ver [17]). La segunda diferencia fundamental consiste en que ya no tenemos asegurado que  $\mathbb{R}$  viva en un grupo compacto, como sucedía en el caso isométrico. Por lo tanto, abordaremos el problema de una manera distinta, utilizando fuertemente la geometría local de estos flujos, que ha sido descrita en [15]. La comprensión de estos modelos locales junto con una técnica de tipo Mayer-Vietoris nos lleva al primer resultado importante de esta memoria (ver [48]):

**Teorema 2.17 (Sucesión de Gysin para flujos riemannianos regulares).** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano sobre una variedad cerrada  $M$ , y sea una métrica casi-fibrada tal que su forma de curvatura media  $\kappa$  sea básica. Entonces, tenemos la siguiente sucesión exacta:*

$$\dots \rightarrow H^i(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^i(M) \rightarrow H_{\kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \dots, \quad (1)$$

donde el homomorfismo de conexión es la multiplicación por la clase de Euler  $[e] \in H_{-\kappa}^2(M/\mathcal{F})$ .

Los grupos de cohomología  $H_\kappa^*(M/\mathcal{F})$  que aparecen en (1) denotan la cohomología básica  $\kappa$ -torcida, que es la de las formas básicas con la diferencial torcida  $d_\kappa\omega = d\omega - \kappa \wedge \omega$ . Es importante notar que la cohomología básica  $\kappa$ -torcida es dual de la cohomología básica (ver [33]) y que en el caso de que el flujo sea isométrico, ambas cohomologías coinciden.

Si  $\mathcal{F}$  es isométrico, la clase de Euler  $[d\chi] \in H^2(M/\mathcal{F})$  es un invariante de la foliación (es decir, determina una clase que no depende de la métrica elegida), y su nulidad equivale a la presencia de una fibración transversa a  $\mathcal{F}$  (ver [49]). En el caso de flujos riemannianos, probaremos que la clase de Euler  $[e] \in H_{-\kappa}^2(M/\mathcal{F})$  es también independiente de la métrica casi-fibrada que hayamos elegido (en el sentido de 2.19) y su nulidad se puede caracterizar de una forma geométrica en el siguiente teorema, que es el segundo resultado relevante de esta memoria:

**Teorema 2.21.** *Para un flujo riemanniano  $\mathcal{F}$  son equivalentes:*

- i) la clase de Euler se anula;*
- ii) existe una foliación  $\mathcal{G}$  transversa a  $\mathcal{F}$  definida por una 1-forma  $\omega$  cuya torsión es básica.*

*Además, cualquiera de las dos condiciones implica que  $\mathcal{G}$  es transversalmente afín.*

En el capítulo 3 construimos la sucesión de Gysin para flujos riemannianos singulares, es decir, flujos con puntos fijos que admiten una métrica casi-fibrada. Estos flujos son foliaciones riemannianas singulares, en el sentido de P. Molino (ver [38]), de dimensión 1. Molino da una adecuada descripción local de estas foliaciones en [38], donde se prueba que cada componente conexa del conjunto de puntos fijos  $F$  es una variedad compacta.

Utilizaremos la *cohomología de intersección*, la cual ha demostrado ser útil para el estudio de variedades estratificadas. En el caso de una acción no libre del círculo  $\mathbb{S}^1$ , en [28] se construye la siguiente sucesión de Gysin utilizando cohomología de intersección.

$$\dots \rightarrow H_{\bar{p}}^i(M/\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{\bar{p}}^i(M) \rightarrow H_{\bar{p}-\frac{1}{2}}^{i-1}(M/\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\wedge[e]} H_{\bar{p}}^{i+1}(M/\mathbb{S}^1) \rightarrow \dots, \quad (2)$$

En el caso de flujos riemannianos, consideraremos la *cohomología básica de intersección* de un flujo, la cual se calcula con las formas *perversas*, es decir, formas definidas en  $M - F$  que cumplen una cierta condición de regularidad al aproximarse a  $F$ . La herramienta técnica que utilizamos para determinar esa condición de regularidad es la *explosión* de Jänich (ver [31]), que se puede entender como una variedad con

borde  $\widetilde{M}$  donde el flujo es regular y que surge al sustituir cada estrato de puntos fijos por un fibrado sobre cada estrato.

De este modo, las formas perversas son las formas definidas en  $M - F$  que se pueden extender a  $\widetilde{M}$ . La noción de *grado perverso* nos da la medida de la “verticalidad” de una forma perversa con respecto al fibrado  $\partial\widetilde{M} \rightarrow F$ . Los grupos de cohomología  $H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F})$  que definimos se calcularán con formas perversas básicas cuyo grado perverso en cada estrato  $S$  de puntos fijos está acotado por un número  $\bar{p}(S)$ . Hay un grupo de cohomología distinto para cada perversidad  $\bar{p}$ . La cohomología básica de intersección que definimos generaliza la cohomología de intersección de la variedad estratificada  $M/\mathbb{S}^1$  en el caso de una acción del círculo (esto lo probamos en el Apéndice).

Nuevamente con técnicas de tipo Mayer-Vietoris, conseguimos probar un teorema de dualidad que generaliza el del caso regular:

**Teorema 3.26 (Dualidad de Poincaré para la cohomología básica de flujos riemannianos singulares).** *Sea  $(M, \mathcal{F})$  un flujo riemanniano singular y sea una métrica casi-fibrada tal que  $\kappa$  sea básica. Entonces, la forma bilineal*

$$\begin{array}{ccc} H_{\bar{p}}^k(M/\mathcal{F}) \otimes H_{\bar{q}, \kappa}^{n-k-1}(M/\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\alpha] \otimes [\beta] & \longmapsto & \int_M \alpha \wedge \beta \wedge \chi \end{array}$$

es no degenerada para cada par de perversidades  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$  duales ( $\bar{p}(S) + \bar{q}(S) = \text{codim}(S) - 3$ ).

El resultado principal de esta memoria, que generaliza (1) y [28], es como sigue:

**Teorema 3.31 (Sucesión de Gysin para flujos riemannianos singulares).** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano singular sobre una variedad cerrada  $M$ , y sea una métrica casi-fibrada cuya forma de curvatura básica  $\kappa$  sea básica. Entonces, tenemos la siguiente sucesión exacta larga:*

$$\dots \rightarrow H_{\bar{p}}^i(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^i(M) \rightarrow H_{\bar{p}-2, \kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge[e]} H_{\bar{p}}^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \dots,$$

donde el homomorfismo de conexión es la multiplicación por la clase de Euler  $\wedge[e] \in H_{2, -\kappa}^2(M/\mathcal{F})$ .

Notamos que el salto de perversidad que se da en el homomorfismo de conexión se debe a que el grado perverso de la forma de Euler es esencialmente 2. La nulidad de

la clase de Euler  $\wedge[e] \in H_{2,-\kappa}^2(M/\mathcal{F})$  tiene también una caracterización geométrica, similar a la mostrada por G. Hector y M. Saralegi para acciones de  $\mathbb{S}^1$  (ver [28]).

**Teorema 3.36.** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano singular sobre la variedad cerrada  $M$  tal que  $F \neq \emptyset$ . Entonces, son equivalentes:*

- i) *La clase de Euler  $[e] \in H_{2,-\kappa}^2(M/\mathcal{F})$  se anula;*
- ii) *existe una foliación singular  $\mathcal{G}$  transversa a  $\mathcal{F}$  cuya restricción a  $M - F$  está dada por una fibración localmente trivial sobre  $\mathbb{S}^1$ .*

Esta caracterización está relacionada con la del caso sin puntos fijos, dado que en la parte regular, una fibración localmente trivial sobre  $\mathbb{S}^1$  está dada por una 1-forma cuya torsión no sólo es básica, sino nula. Terminamos el capítulo presentando un método para construir ejemplos de flujos riemannianos singulares no isométricos y que denominamos *cirugía hiperbólica*. Este método consiste en insertar en una variedad provista de un flujo isométrico singular un asa que genera un fenómeno similar al flujo sobre  $\mathbb{T}_A^3$  descrito en [15], el cual no es isométrico.

Para terminar el estudio cohomológico de los flujos riemannianos singulares, en el capítulo 4 realizamos una aproximación desde el punto de vista de la cohomología equivariante, con el objetivo de probar un teorema de localización. En el caso de la acción de un grupo de Lie compacto, que es el contexto usual de la cohomología equivariante, este teorema relaciona la cohomología equivariante de la variedad  $M$  con la cohomología de la variedad de los puntos fijos  $F$ .

En el caso de un campo de Killing, la cohomología equivariante y el teorema de localización aparecen en los trabajos de E. Witten. Nosotros propendremos un nuevo modelo (*modelo de Gysin*) con el que definimos el  $\Lambda e$ -módulo de cohomología equivariante  $H_{\mathcal{F}}^*(M/\mathcal{F})$ . Esta definición generaliza la situación anterior en el sentido de que está formulada para un flujo  $\mathcal{F}$  con clase  $[\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F})$  nula, y no para un campo o acción concretos. Usando el modelo de Gysin, mostraremos una prueba del Teorema de Localización para estos flujos, el cual afirma que la inclusión  $F \hookrightarrow M$  induce un isomorfismo al localizar sus  $\Lambda e$ -módulos de cohomología equivariante:

$$H_{\mathcal{F}}^*(M) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e) \cong H^*(F) \otimes \mathbb{R}(e).$$

En el caso de un flujo riemanniano general, la no trivialidad de  $[\kappa]$  nos impide aplicar directamente el modelo de Gysin. Sin embargo, sí que vamos a poder recuperar la cohomología de los puntos fijos de una manera parecida: mediante el

revestimiento de trivialización  $p: \widehat{M} \rightarrow M$  de  $[\kappa]$  (ver [29]) obtendremos un flujo con  $[\kappa] = 0$  sobre el que sí que podremos aplicar el modelo de Gysin y el teorema de localización. El teorema de localización que obtenemos es el siguiente:

**Teorema 4.11 (de localización para flujos riemannianos singulares).** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano singular sobre la variedad cerrada  $M$ , y sea  $F$  la subvariedad de los puntos fijos. Denotamos por  $G$  el grupo del revestimiento  $p: \widehat{M} \rightarrow M$  de trivialización de  $[\kappa]$ . Entonces, la inclusión  $F \hookrightarrow M$  y  $p$  inducen un isomorfismo*

$$(H_{\mathcal{F}}^*(\widehat{M}) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e))^G \cong H^*(F) \otimes \mathbb{R}(e).$$



# Capítulo 1

## Preliminares sobre foliaciones riemannianas

En este capítulo recopilamos un material introductorio sobre teoría de foliaciones, necesario para trabajar con flujos riemannianos singulares y regulares. No hemos pretendido recopilar aquí todos los resultados no originales de este trabajo, de modo que los siguientes capítulos dispondrán también de su propio material previo, el cual será más específico sobre flujos riemannianos.

Esta introducción no pretende, por supuesto, ser exhaustiva. Para una visión completa de la teoría de foliaciones, se pueden consultar [13], [14] y [29]. En [54] se ofrece una introducción a las foliaciones riemannianas junto con una extensa bibliografía.

En una primera sección presentamos las primeras definiciones y ejemplos sobre foliaciones, en la segunda hablaremos de foliaciones riemannianas regulares, en la tercera, enunciaremos varios resultados sobre la cohomología básica de las foliaciones riemannianas, y por último, daremos una descripción local de las foliaciones riemannianas singulares.

A lo largo de toda esta memoria, diferenciable significará de clase  $C^\infty$ . Salvo que se indique lo contrario, todas las variedades serán conexas, orientables y sin borde.

### 1.1. Definiciones y ejemplos de Folaciones

Una foliación sobre una variedad  $M$  es, de forma intuitiva, una partición de  $M$  en subvariedades conexas y de la misma dimensión que llamaremos hojas. La disposición de las hojas estará modelada localmente por un producto. Para definir las foliaciones de manera precisa, usaremos atlas foliados.

**Definición 1.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Un atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_i$  de  $M$  se dice que es un *atlas foliado* de dimensión  $p$  (y codimensión  $q$ , siendo  $p + q = n$ ) si verifica las siguientes condiciones:

- (i) Si  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ , entonces  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ , siendo  $U_1$  y  $U_2$  discos abiertos en  $\mathbb{R}^p$  y  $\mathbb{R}^q$ , respectivamente;
- (ii) Si  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi) \in \mathcal{A}$  y  $U \cap V \neq \emptyset$ , entonces el cambio de coordenadas  $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  es de la forma

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)) \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q.$$

Diremos que dos atlas foliados de la misma dimensión sobre una variedad son *equivalentes* si su unión es de nuevo un atlas foliado sobre esa variedad.

**Definición 1.2.** Una *foliación*  $\mathcal{F}$  de dimensión  $p$  sobre la variedad diferenciable  $M$  es una clase de equivalencia de atlas foliados de dimensión  $p$  sobre  $M$ . Notamos que podemos pensar en  $\mathcal{F}$  como un atlas maximal perteneciente a esa clase. Diremos que  $(M, \mathcal{F})$  es una *variedad foliada*. Una carta perteneciente a un atlas foliado de la clase  $\mathcal{F}$  se denominará *carta foliada* (con respecto a  $\mathcal{F}$ ).

**Observación 1.1.** Si  $M$  es una variedad con borde, las definiciones de atlas foliado y de variedad foliada siguen siendo válidas sin más que añadir la siguiente propiedad adicional: si  $M_0$  es una componente conexa del borde  $\partial(M)$  y  $(U, \varphi)$  es una carta tal que  $U \cap M_0 \neq \emptyset$ , entonces  $\varphi$  toma valores en  $\mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^q$  ó en  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q$ . En el primer caso, diremos que la foliación es *transversa* a la componente del borde, y en el segundo, que es *tangente* a esa componente.

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de dimensión  $p$  sobre  $M$ , y sea  $(U, \varphi)$  una carta foliada, tal que  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ . Diremos que cada conjunto de la forma  $\varphi^{-1}(U_1) \times \{c\}$ , con  $c \in U_2$  es una *placa* de  $U$ , y también de  $\mathcal{F}$ . Un *camino de placas* de  $\mathcal{F}$  es una colección finita de placas  $P_1, \dots, P_k$  de modo que  $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k-1$ . Podemos establecer una relación  $R_{\mathcal{F}}$  de equivalencia en  $M$  de la siguiente manera:

$$x R_{\mathcal{F}} y \text{ si y sólo si existe un camino de placas } P_1, \dots, P_k \text{ con } x \in P_1, y \in P_k.$$

**Definición 1.3.** Sea  $(M, \mathcal{F})$  una variedad foliada, y sea la relación de equivalencia  $R_{\mathcal{F}}$ . Diremos que  $L \subset M$  es una *hoja* de  $\mathcal{F}$  si es una clase de equivalencia de  $R_{\mathcal{F}}$ .

**Proposición 1.1.** Sea  $(M, \mathcal{F})$  una foliación de dimensión  $p$  y sea  $L$  una hoja de  $\mathcal{F}$ . Entonces,  $L$  es una subvariedad conexa de dimensión  $p$  inmersa en  $M$ .

Dada una variedad foliada  $(M, \mathcal{F})$ , con frecuencia denotaremos también por  $\mathcal{F}$  a la partición en hojas que determina el atlas foliado. De hecho, tenemos la siguiente definición alternativa de foliación, que es equivalente a la que hemos dado.

**Definición 1.4.** Una foliación  $\mathcal{F}$  de dimensión  $p$  sobre una variedad  $M$  de dimensión  $n$  es una partición  $\{L_i\}_i$  de  $M$  en subvariedades conexas inmersas en  $M$ , de manera que para cada punto  $x \in M$  existe una carta local  $(U_x, \varphi_x)$  con  $x \in U_x$  tal que si  $U_x \cap L_i \neq \emptyset$ , y  $C$  es una componente conexa de  $\varphi_x(U_x \cap L_i)$ , entonces

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \varphi_x(U_x) : x_{p+1} = c_{p+1}, \dots, x_n = c_n\}$$

para ciertos  $c_{p+1}, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  constantes.

**Definición 1.5.** Sean  $(M, \mathcal{F})$  y  $(N, \mathcal{H})$  sendas variedades foliadas. Diremos que una aplicación diferenciable  $f: M \rightarrow N$  es una aplicación *foliada* si para toda hoja  $L$  de  $\mathcal{F}$  existe una hoja  $P$  de  $\mathcal{H}$  tal que  $f(L) \subseteq P$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{H}$  son *conjugadas* si existe un difeomorfismo foliado  $f: (M, \mathcal{F}) \rightarrow (N, \mathcal{H})$ .

Denotaremos por  $T\mathcal{F}$  al fibrado sobre  $M$  de dimensión  $p$  formado por los vectores tangentes a la foliación, es decir, si  $i_L: L \rightarrow M$  es la inclusión de una hoja cualquiera  $L$  en  $M$ , entonces  $T\mathcal{F} = \bigcup_{L \text{ hoja de } \mathcal{F}} (i_L)_*(TL)$ .

A continuación, presentamos una serie de ejemplos de foliaciones que nos servirán para introducir conceptos y construcciones que aparecerán profusamente en esta memoria.

**Ejemplo 1.1.** Dada una variedad  $M$  tenemos asociadas dos foliaciones triviales: la *foliación por puntos*, donde cada punto de  $M$  es una hoja, y la foliación por una sola hoja: la propia variedad  $M$ . En el primer caso, la dimensión de la foliación es 0, y en el segundo, la dimensión de  $M$ . En esta memoria denotaremos las foliaciones por puntos con la letra  $\mathcal{H}$ .

**Ejemplo 1.2 (Fibrados).** Sea  $\pi: M \rightarrow B$  un fibrado localmente trivial de fibra  $F$ , con  $\dim(M) = n$  y  $\dim(B) = q$ . Entonces, es fácil comprobar que la partición de  $M$  formada por las componentes conexas de  $\pi^{-1}(b)$  para cada  $b \in B$  constituye una foliación de  $M$  de dimensión  $\dim(F) = n - q$ .

**Ejemplo 1.3 (Submersiones).** Sea  $f: M \rightarrow B$  una submersión. Podemos tomar cartas en  $M$  y  $B$  de manera que la aplicación  $f$  en coordenadas es una proyección. Esto implica que los conjuntos de nivel  $f^{-1}(c)$  para cada  $c \in B$  son subvariedades regulares de  $M$ , y de hecho las componentes conexas de cada uno de esos conjuntos de nivel constituyen una foliación de  $M$  de dimensión  $n - q$ , siendo  $\dim(M) = n$  y  $\dim(B) = q$ .

**Ejemplo 1.4 (Campos de vectores).** Sea  $M$  una variedad diferenciable y compacta de dimensión  $n$  y sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo de vectores sin ceros en  $M$ . Notamos que esto es posible si y sólo si la característica de Euler-Poincaré de la variedad es  $\chi(M) = 0$  (ver, por ejemplo, [30]). La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias nos garantiza la existencia de curvas integrales para este campo  $X$ , las cuales definen una foliación de dimensión 1.

**Ejemplo 1.5 (Flujos lineales sobre  $\mathbb{T}^2$ ).** Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  la foliación de dimensión 1 dada por todas las rectas de pendiente  $\theta \in \mathbb{R}$ . Esta foliación es preservada por traslaciones, en particular por traslaciones enteras, y por lo tanto induce una foliación  $\mathcal{F}_\theta$  de dimensión 1 en el toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .

Es bien conocido que el carácter racional o irracional de  $\theta$  determina la dinámica de  $\mathcal{F}_\theta$  de la siguiente manera:

- si  $\theta$  es racional, entonces las trayectorias definidas en  $\mathbb{T}^2$  son periódicas, es decir,  $\mathcal{F}_\theta$  es una foliación de  $\mathbb{T}^2$  por círculos (todas las hojas son difeomorfas a  $\mathbb{S}^1$ );
- si  $\theta$  es irracional, el flujo no puede ser periódico, y de hecho cada hoja es difeomorfa a  $\mathbb{R}$  y densa en  $\mathbb{T}^2$ .

En el ejemplo 2.1 del siguiente capítulo desarrollaremos con más detenimiento la generalización de este importante fenómeno para toros de dimensión  $n \geq 2$ .

**Ejemplo 1.6 (Pull-back de una foliación).** Sea  $(M, \mathcal{F})$  una variedad foliada y sea  $f: N \rightarrow M$  una aplicación diferenciable *transversa* a  $\mathcal{F}$ , es decir, tal que

$$T_{f(x)}M = T_{f(x)}\mathcal{F} + f_{*x}(T_xN) \quad \text{para cada } x \in N.$$

Se puede probar que las componentes conexas de las imágenes inversas por  $f$  de las hojas de  $\mathcal{F}$  determinan una foliación en  $N$  de la misma codimensión que  $\mathcal{F}$ , y que denotaremos por  $f^*(\mathcal{F})$ .

El ejemplo 1.3 es un caso particular de esta situación, así como la *restricción* de  $\mathcal{F}$  a un abierto  $U$  de  $M$ , la cual denotaremos por  $\mathcal{F}|_U = i^*(\mathcal{F})$ , siendo  $i: U \rightarrow M$  la inclusión. Si  $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$  es un revestimiento, entonces tenemos definida en  $\widetilde{M}$  la foliación  $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi^*(\mathcal{F})$ , que diremos que se obtiene por *levantamiento* de  $\mathcal{F}$ .

**Ejemplo 1.7 (Fibrados foliados).** Sea  $(M, \mathcal{F})$  una variedad foliada y sea un fibrado  $\pi: M \rightarrow B$  de fibra  $F$ . Diremos que  $(M, \mathcal{F}, \pi)$  es un *fibrado foliado* si para todo  $b \in B$  tenemos una trivialización local

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F, \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_U & \\ U & & \end{array}$$

donde  $pr_U$  es la proyección sobre  $U$ , y  $\varphi$  es un difeomorfismo foliado para las foliaciones  $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(U)}$  en  $\pi^{-1}(U)$  y  $\{U \times \{y\}\}_{y \in F}$  en  $U \times F$ .

**Ejemplo 1.8 (Suspensión de un difeomorfismo).** Sea  $f \in \text{Diff}(N)$  un difeomorfismo de la variedad  $N$ . Consideramos en la variedad  $\mathbb{R} \times N$  la foliación horizontal  $\mathcal{H} = \{\mathbb{R} \times \{x\} : x \in N\}$ , de dimensión 1. La acción

$$\phi: \mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \times N) \longrightarrow \mathbb{R} \times N$$

dada por  $\phi(n, (t, x)) = (t + n, f^{-n}(x))$  es libre y propiamente discontinua, y por lo tanto, la proyección  $\pi$  sobre el espacio de órbitas  $M = (\mathbb{R} \times N)/\phi$  es un revestimiento. Tenemos, de hecho, el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times N & \xrightarrow{pr_1} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow q \\ M & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

donde  $p$  está inducida por la proyección sobre el primer factor  $pr_1$  y  $q$  es el revestimiento universal de  $\mathbb{S}^1$ . La terna  $\xi_\phi = \{M, \pi, \mathbb{S}^1\}$  es un fibrado de fibra  $N$  sobre  $\mathbb{S}^1$ , con grupo estructural  $\langle f \rangle \leq \text{Diff}(N)$ .

La acción  $\phi$  preserva la foliación  $\mathcal{H}$ , es decir, actúa por difeomorfismos foliados de  $N$ , y por lo tanto, induce en el cociente  $(\mathbb{R} \times N)/\phi$  la foliación de dimensión 1:

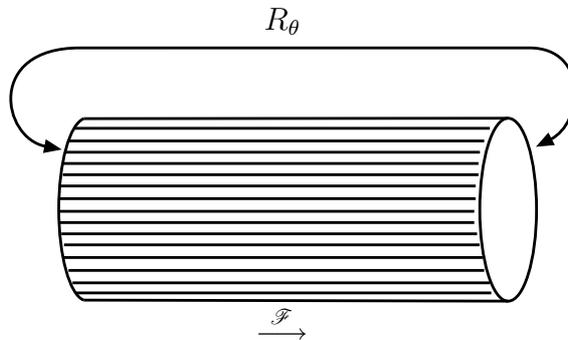
$$\mathcal{F}_\phi = \{\pi(\mathbb{R} \times \{x\}) : x \in N\}.$$

Diremos que  $\mathcal{F}_\phi$  ha sido obtenida por *suspensión del difeomorfismo*  $f \in \text{Diff}(N)$ . Notamos que  $\xi_\phi$  es un fibrado foliado. El flujo lineal  $\mathcal{F}_\theta$  de pendiente  $\theta$  sobre  $\mathbb{T}^2$  (ver ejemplo 1.5) es la suspensión de la rotación  $R_\theta \in \text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  de ángulo  $\theta$ .

Podemos ver  $M$  de otra manera sin más que considerar un dominio fundamental  $[0, 1] \times N$  e identificar los bordes mediante  $f$ , es decir,

$$M = ([0, 1] \times N)/((0, x) \sim (1, f^{-1}(x))).$$

En la figura siguiente se ilustra la suspensión de  $R_\theta$ :



**Ejemplo 1.9 (Suspensión de una representación).** El ejemplo anterior es un caso particular de la siguiente situación: Sean  $B, F$  variedades conexas,  $b_0 \in B$  un punto base y una representación del grupo fundamental de  $B$  en  $\text{Diff}(F)$ , es decir, un homomorfismo de grupos

$$\rho: \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \text{Diff}(F).$$

Sea el revestimiento universal  $\tilde{q}: \tilde{B} \longrightarrow B$ . El isomorfismo  $\text{Aut}(q) \cong \pi_1(B, b_0)$  induce la acción

$$\phi: \pi_1(B, b_0) \times (\tilde{B} \times F) \longrightarrow \tilde{B} \times F,$$

dada por  $\phi([\gamma], (\tilde{b}, y)) = ([\gamma]\tilde{b}, \rho([\gamma])(y))$ . Se puede probar que  $\Phi$  es una acción libre y propiamente discontinua, y que por lo tanto, la proyección  $\pi$  sobre el espacio de órbitas  $M$  es un revestimiento. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} \times F & \xrightarrow{pr_1} & \tilde{B} \\ \pi \downarrow & & \downarrow q \\ M = (\tilde{B} \times F)/\phi & \xrightarrow{p} & B, \end{array}$$

donde  $p$  está inducida por la proyección  $pr_1$ . Esta construcción se llama *suspensión de la representación*  $\rho$ , con fibra  $F$ . Análogamente al ejemplo anterior, tenemos que  $\xi_\rho = (M, p, B)$  es un fibrado de fibra  $F$  y de grupo estructural  $\text{Im}(\rho)$ .

Tenemos en  $\tilde{B} \times F$  la foliación horizontal  $\mathcal{H} = \{\tilde{B} \times \{y\} : y \in F\}$ . Como  $\mathcal{H}$  es invariante por la acción  $\phi$ , induce una foliación  $\mathcal{F}_\phi$  sobre  $M$ , cuyas hojas son de la forma  $\pi(\tilde{B} \times F)$ , con  $y \in F$ . Diremos que  $\mathcal{F}_\phi$  se ha obtenido por *suspensión de la representación*  $\rho$ .

## 1.2. Foliosiones riemannianas

El estudio de las foliaciones riemannianas fue iniciado por Bruce Reinhart en [43], y desde entonces ha sido motivo de una vasta literatura. Una foliación riemanniana es, intuitivamente, una foliación que admite una métrica respecto de la cual mantiene constante la distancia entre hojas próximas. Una tal métrica diremos que es *casi-fibrada*. La definición de Reinhart es la siguiente:

**Definición 1.6.** Sea  $(M, \mathcal{F})$  una variedad foliada. Una métrica riemanniana  $\mu$  sobre  $M$  se dice que es *casi-fibrada* para  $\mathcal{F}$  si se cumple la siguiente condición geométrica: toda geodésica  $\gamma$  que corte perpendicularmente a una hoja en un punto ha de cortar perpendicularmente a todas las hojas por las que pase.

**Definición 1.7.** Una foliación  $\mathcal{F}$  sobre la variedad  $M$  es *riemanniana* si existe una métrica  $\mu$  casi-fibrada para  $\mathcal{F}$ .

Recordamos que el fibrado tangente  $T\mathcal{F}$  está formado por los vectores tangentes a las hojas de  $\mathcal{F}$ . Podemos considerar el fibrado cociente  $Q = TM/T\mathcal{F}$ . La introducción de una métrica riemanniana  $\mu$  induce una descomposición del fibrado tangente

$$TM = T\mathcal{F} \oplus (T\mathcal{F})^\perp, \quad (1.1)$$

y un isomorfismo natural  $\psi: (T\mathcal{F})^\perp \longrightarrow Q$ . Tenemos, de hecho, el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T\mathcal{F} & \longrightarrow & TM & \longrightarrow & (T\mathcal{F})^\perp \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & T\mathcal{F} & \longrightarrow & TM & \longrightarrow & Q \longrightarrow 0 \end{array}$$

Tenemos la descomposición  $\mu = \mu_{T\mathcal{F}} \oplus \mu_\perp$  inducida por (1.1). El isomorfismo  $\psi$  induce, por lo tanto, una métrica en  $Q$  que denotaremos por  $\mu_Q = \psi^*\mu_\perp$ . Diremos que  $\mu_Q$  es la *componente ortogonal* de  $\mu$ .

**Definición 1.8.** Diremos que la componente ortogonal  $\mu_Q$  de una métrica sobre la variedad foliada  $(M, \mathcal{F})$  es *invariante por holonomía* si para todo campo  $X$  tangente a  $\mathcal{F}$  se tiene  $L_X\mu_Q = 0$ .

Recordemos que  $L_X\mu_Q$  está dada por la fórmula:

$$L_X\mu_Q(V_1, V_2) = L_X(\mu_Q(V_1, V_2)) - \mu_Q([X, V_1], V_2) - \mu_Q(V_1, [X, V_2]) \quad \forall V_1, V_2 \in Q. \quad (1.2)$$

En [43] se prueba la siguiente caracterización de una métrica casi-fibrada:

**Proposición 1.2.** Dada una variedad foliada  $(M, \mathcal{F})$ , una métrica riemanniana  $\mu$  es casi-fibrada para  $\mathcal{F}$  si y sólo si su componente ortogonal  $\mu_Q$  es invariante por holonomía.

**Observación 1.2.** Para comprobar si una foliación es riemanniana, basta que se cumpla  $L_X\mu_Q = 0$  para cada  $X$  perteneciente a una paralelización local, ya que si  $f$  es una función que no se anula en  $M$ , es inmediato de (1.2) que

$$L_{fX}\mu_Q = fL_X\mu_Q.$$

Este carácter local de las foliaciones riemannianas nos permite reconocerlas mediante su expresión en coordenadas. Si tomamos una carta foliada  $(U, \varphi)$ , si la foliación es de dimensión  $p$  y codimensión  $q$  y escribimos  $\varphi = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ , la expresión de  $\mu$  en  $U$  resulta:

$$\mu|_U = \sum_{i,j=1}^p f_{ij}(x, y) dx_i \otimes dx_j + \sum_{k,l=1}^q g_{kl}(y) dy_k \otimes dy_l, \quad (1.3)$$

para ciertas funciones  $f_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $g_{kl} \in C^\infty(\mathbb{R}^q)$ . Recíprocamente, una métrica cuya expresión local es como en (1.3) es casi-fibrada.

**Ejemplo 1.10.** Sea  $X$  un campo de Killing sobre  $(M, \mu)$  sin ceros. Entonces,  $X$  define una foliación de dimensión 1 que es riemanniana. En efecto, la condición  $L_X \mu = 0$  implica  $L_X \mu_Q = 0$ .

**Ejemplo 1.11.** Sea  $G$  un grupo de Lie compacto que actúa por isometrías sobre  $(M, \mu)$ , y tal que todas las órbitas tienen la misma dimensión  $p$ . Las órbitas de la acción definen una foliación  $\mathcal{F}$  en  $M$  de dimensión  $p$ . Si  $V$  es un campo tangente a la foliación, lo podemos expresar en términos de una paralelización de  $G$ , de donde se sigue fácilmente  $L_V \mu = 0$ . En particular,  $L_V \mu_Q = 0$ , es decir,  $\mu$  es una métrica casi-fibrada, y por lo tanto,  $\mathcal{F}$  es una foliación riemanniana.

Hay otras propiedades que puede cumplir una foliación con respecto de una métrica, teniendo en cuenta cómo son sus hojas.

**Definición 1.9.** Una foliación  $\mathcal{F}$  sobre  $M$  se dice *taut* o *minimalizable* si existe una métrica  $\mu$  para la cual cada hoja es una subvariedad minimal.

**Definición 1.10.** Una foliación  $\mathcal{F}$  sobre  $M$  se dice *totalmente geodésica* si existe una métrica  $\mu$  para la cual cada hoja es una subvariedad totalmente geodésica.

**Observación 1.3.** Una foliación totalmente geodésica es, en particular, taut.

Vamos a presentar dos formas diferenciales de capital importancia para nosotros. Sea  $(M, \mathcal{F})$  una variedad foliada, y  $\mu$  una métrica riemanniana sobre  $M$ . Denotamos por  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita asociada a  $\mu$ , y consideramos la proyección del fibrado tangente sobre el normal a la foliación  $\pi: TM \rightarrow Q$ . Consideramos la *segunda forma fundamental* de las hojas de  $\mathcal{F}$  con respecto a  $g$ , que es la forma bilineal  $\alpha: T\mathcal{F} \times T\mathcal{F} \rightarrow Q$ , dada por la fórmula

$$\alpha_x(X, Y) = \pi(\nabla_X Y) \quad \forall X, Y \in T_x \mathcal{F}.$$

La traza de la aplicación de Weingarten  $W$  asociada a  $\alpha$  nos define una 1-forma de  $Q^*$  que podemos extender a  $\Omega^1(M)$ , sin más que imponer que se anule sobre vectores tangentes a  $\mathcal{F}$ . De forma explícita, tenemos la siguiente

**Definición 1.11.** La *forma de curvatura media* asociada a la métrica riemanniana  $\mu$  sobre la variedad foliada  $(M, \mathcal{F})$  de dimensión  $p$  es la 1-forma diferencial  $\kappa \in \Omega^1(M)$  dada en cada  $m \in M$  por la fórmula

$$\kappa_m(X) = \text{Tr}(W(X))_m = \sum_{i=1}^p \mu_Q(\alpha(e_i, e_i), X) \quad \forall X \in T_m M$$

donde  $\{e_1, \dots, e_p\} \subseteq T\mathcal{F}$  son parte de una base ortonormal de  $T_m M$ .

**Definición 1.12.** Diremos que una foliación  $\mathcal{F}$  es *orientable* si  $T\mathcal{F}$  es orientable, y *transversalmente orientable* si  $Q$  lo es.

Es bien conocido que cualesquiera dos de las siguientes condiciones implican la tercera:

- $M$  es orientable;
- $\mathcal{F}$  es transversalmente orientable;
- $\mathcal{F}$  es orientable.

La *forma característica*  $\chi$  es una forma diferenciable de grado  $p = \dim(\mathcal{F})$  y que proporciona el valor 1 cuando la evaluamos en una base ortonormal local de  $T\mathcal{F}$ . De forma más precisa, tenemos:

**Definición 1.13.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación de dimensión  $p$  sobre  $M$  tangencialmente orientable. La *forma característica*  $\chi$  asociada a una métrica  $\mu$  sobre  $M$  es la  $p$ -forma diferencial dada por:

$$\chi(X_1, \dots, X_p) = \det(\mu(X_i, e_j))_{ij} \quad \forall X_1, \dots, X_p \in TM,$$

donde  $\{e_1, \dots, e_p\} \subseteq T\mathcal{F}$  son parte de una base ortonormal de  $T_m M$ .

Diremos que una forma  $\omega \in \Omega^*(M)$  es *horizontal* si  $i_X \omega = 0$  para todo vector  $X$  tangente a  $\mathcal{F}$ . Diremos que es *k-horizontal* si  $i_{X_1} \dots i_{X_k} \omega = 0$  para cualesquiera  $X_1, \dots, X_k$  tangentes a  $\mathcal{F}$ . Notamos que, por su definición,  $\kappa$  es una forma horizontal. Las formas  $\kappa$  y  $\chi$  están relacionadas por la siguiente:

**Proposición 1.3 (H. Rummeler [45]).** *En las condiciones anteriores, existe una forma diferenciable  $p$ -horizontal  $e \in \Omega^{p+1}(M)$  tal que*

$$d\chi = e + \chi \wedge \kappa. \tag{1.4}$$

### 1.3. Cohomología básica

La cohomología básica hace el papel de la cohomología del espacio de hojas en una variedad foliada. Una forma  $\omega \in \Omega^*(M)$  se dice que es *básica* si es horizontal e invariante a lo largo de las hojas, es decir, si se cumple

$$i_X\omega = L_X\omega = 0 \quad \forall X \in T\mathcal{F}.$$

Notamos que esas dos condiciones son equivalentes a  $i_X\omega = i_Xd\omega = 0$ . Si  $(U, \varphi)$  es una carta foliada y  $\varphi = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ , entonces la expresión en coordenadas de  $\omega|_U$  es:

$$\omega|_U = \sum_{j_1 < \dots < j_r} \omega_{j_1 \dots j_r}(y) dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_r}.$$

Denotamos por

$$\Omega^r(M/\mathcal{F}) = \{\omega \in \Omega^r(M) : i_X\omega = i_Xd\omega = 0 \quad \forall X \in T\mathcal{F}\}$$

el complejo de las r-formas básicas, y por  $\Omega^*(M/\mathcal{F})$  el complejo graduado de las formas básicas, que forma un subcomplejo del complejo de de Rham. Dado que tanto el producto como la diferencial exteriores son cerrados para  $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ , tenemos que  $(\Omega^*(M/\mathcal{F}), d, \wedge)$  es un álgebra diferencial graduada. Los grupos de *cohomología básica* son:

$$H^r(M/\mathcal{F}) = \frac{\ker(d: \Omega^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M/\mathcal{F}))}{\operatorname{im}(d: \Omega^{r-1}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^r(M/\mathcal{F}))}$$

Obviamente, el grado máximo que puede tener una forma básica es  $q = \operatorname{codim}(\mathcal{F})$ . Denominaremos a  $H^q(M/\mathcal{F})$  como el grupo *máximo* de cohomología básica. Es fácil probar que la inclusión  $\Omega^*(M/\mathcal{F}) \hookrightarrow \Omega^*(M)$  induce un isomorfismo  $H^0(M/\mathcal{F}) \cong H^0(M)$  y un monomorfismo  $H^1(M/\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(M)$ .

**Observación 1.4.** La notación  $\Omega^*(M/\mathcal{F})$  viene motivada por el caso en el que se tiene un espacio cociente  $M/\mathcal{F}$  (espacio de hojas) con las suficientes propiedades como para que su cohomología ordinaria sea interesante. Por ejemplo, en el caso de una acción libre de un grupo de Lie compacto  $G$  sobre  $M$ , podemos tomar la proyección  $\pi: M \longrightarrow M/G$  sobre el espacio de órbitas, que es una variedad diferenciable. Si denotamos por  $\mathcal{F}_G$  la foliación que definen sus órbitas, entonces

$$\pi^* : \Omega^*(M/G) \xrightarrow{\cong} \Omega^*(M/\mathcal{F}_G)$$

es un isomorfismo de álgebras diferenciales graduadas.

La cohomología básica de una foliación arbitraria puede ser de dimensión infinita, tal y como se ilustra en [23]. El ejemplo que mostramos a continuación es distinto.

**Ejemplo 1.12.** Consideramos el toro 3-dimensional  $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ , y llamamos  $\mathcal{F}$  a la foliación de dimensión 1 definida por el campo

$$X(x_1, x_2, t) = \cos(2\pi t)\partial/\partial x_1 + \sin(2\pi t)\partial/\partial x_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^3).$$

Describamos a continuación la geometría de  $\mathcal{F}$ . Las hojas de  $\mathcal{F}$  son tangentes a las fibras de la proyección  $\pi: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{S}^1$  sobre el tercer factor, es decir, los conjuntos  $T_t = \pi^{-1}(t) \cong \mathbb{T}^2$  son saturados. De hecho,  $\mathcal{F}|_{T_t}$  es un flujo lineal sobre  $T_t$  de dirección  $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ , y según el ejemplo 1.5, una hoja  $L$  de  $\mathcal{F}$  será difeomorfa a  $\mathbb{S}^1$  si y sólo si  $L \subseteq T_t$  y  $\tan(2\pi t) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty, -\infty\}$  y en caso contrario, será difeomorfa a  $\mathbb{R}$  y densa en su  $T_t$  correspondiente. Notamos que la unión de todas las hojas compactas de  $\mathcal{F}$  es un conjunto denso en  $\mathbb{T}^3$ , y que lo mismo sucede para la unión de las hojas no compactas.

Un cálculo directo revela que las formas básicas de grado 1 son de la forma

$$\omega = f(t)dt.$$

Por otro lado, las formas básicas de grado 2 son de la forma

$$-\sin 2\pi t f(t) dx dt + \cos 2\pi t f(t) dy dt,$$

siendo todas ellas cerradas y ninguna exacta. Por lo tanto,  $H^2(M/\mathcal{F}) \cong C^\infty(\mathbb{S}^1)$ .

Como veremos más adelante (proposición 2.7), la dinámica tan patológica que hemos descrito en el ejemplo anterior revela que  $\mathcal{F}$  no puede ser una foliación riemanniana. De hecho, en una foliación riemanniana la cohomología básica es de dimensión finita. Esta y otras propiedades acerca de la cohomología básica de una foliación riemanniana han sido estudiadas en [18], [19], [20],[34] y [36]. A continuación, enunciaremos algunas de estas propiedades.

**Teorema 1.4 (El Kacimi, Nicolau).** *La cohomología básica de una foliación riemanniana sobre una variedad compacta es un invariante topológico.*

**Teorema 1.5 (El Kacimi, Hector, Sergiescu).** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación riemanniana sobre la variedad compacta  $M$ . Entonces, la cohomología básica  $H^*(M/\mathcal{F})$  es de dimensión finita.*

**Teorema 1.6 (El Kacimi, Hector, Kamber, Tondeur).** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación riemanniana de codimensión  $q$  sobre la variedad compacta  $M$ . Entonces,  $H^q(M/\mathcal{F})$  es isomorfo a 0 ó a  $\mathbb{R}$ . En el segundo caso, la cohomología básica  $H^*(M/\mathcal{F})$  cumple la dualidad de Poincaré.*

**Teorema 1.7 (Masa).** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación riemanniana sobre la variedad compacta  $M$ . Entonces, el grupo máximo de cohomología básica  $H^q(M/\mathcal{F})$  es isomorfo a  $\mathbb{R}$  si y sólo si la foliación es taut.*

Sea  $(M, \mathcal{F})$  una foliación riemanniana y sea  $\mu$  una métrica casi-fibrada. La 1-forma de curvatura media  $\kappa$  determina una clase de cohomología básica de la siguiente manera descrita en [2]: Consideramos la descomposición

$$\Omega^*(M) = \Omega^*(M/\mathcal{F}) \oplus \Omega^*(M/\mathcal{F})^\perp,$$

y denotamos por  $\kappa_b$  la componente básica de  $\kappa$  según esa descomposición. Se puede probar que  $\kappa_b$  es cerrada (ver, por ejemplo, [54]), y que por lo tanto, define una clase

$$[\kappa_b] \in H^1(M/\mathcal{F})$$

que, en un principio podría depender de la métrica casi-fibrada elegida. Tenemos, sin embargo, el siguiente e importante teorema.

**Teorema 1.8 (J.A. Álvarez).** *Todas las métricas casi-fibradas sobre una variedad foliada  $(M, \mathcal{F})$  definen la misma clase  $[\kappa_b] \in H^1(M/\mathcal{F})$ . Además, si  $\alpha$  es un 1-ciclo básico tal que  $[\alpha] = [\kappa_b] \in H^1(M/\mathcal{F})$ , entonces existe una métrica casi-fibrada para la cual  $\alpha$  es la componente básica de la forma de curvatura media.*

De los teoremas 1.8 y 1.7 obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.9.** *Una foliación riemanniana sobre una variedad compacta es taut si y sólo si  $[\kappa_b] = 0 \in H^1(M/\mathcal{F})$ .*

Esta caracterización, junto con el hecho de que la aplicación  $H^1(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^1(M)$  inducida por la inclusión natural es inyectiva, nos lleva al siguiente corolario (ver [24],[32]):

**Corolario 1.10 (E.Ghys, F. Kamber, P. Tondeur).** *Toda foliación riemanniana sobre un espacio simplemente conexo es taut.*

**Definición 1.14.** Una foliación es *tensa* si podemos tomar una métrica para la cual la forma de curvatura media sea básica.

El siguiente teorema (ver [17]) prueba que toda foliación riemanniana es tensa.

**Teorema 1.11 (D.Domínguez).** *Para toda foliación riemanniana  $\mathcal{F}$  sobre una variedad compacta  $M$  existe una métrica casi-fibrada  $\mu$  para la cual la 1-forma de curvatura media  $\kappa$  es básica. Recíprocamente, para todo 1-ciclo  $\alpha$  que cumpla  $[\alpha] = [\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F})$  existe una métrica casi-fibrada  $\mu$  con forma de curvatura media  $\alpha$ .*

Para terminar este apartado, estudiaremos cuándo la cohomología básica cumple la dualidad de Poincaré. Según el teorema 1.6, si una foliación riemanniana es taut, entonces cumple la dualidad de Poincaré. No todas las foliaciones riemannianas son taut; el primer ejemplo de foliación riemanniana no taut se debe a Y. Carrière (ver ejemplo 2.6). El teorema 1.7 junto con el hecho de que  $H^0(M/\mathcal{F}) = \mathbb{R}$  para variedades conexas implica que la dualidad de Poincaré no se cumple para foliaciones riemannianas no taut. Para recuperar esta propiedad, introducimos una nueva cohomología.

Tomamos una métrica tal que  $\kappa$  sea básica. Tenemos la *diferencial  $\kappa$ -torcida*  $d_\kappa$ , dada por

$$d_\kappa \omega = d\omega - \kappa \wedge \omega.$$

Definimos la *cohomología  $\kappa$ -torcida*:

$$H_\kappa^*(M/\mathcal{F}) = H^*(\Omega^*(M/\mathcal{F}), d_\kappa).$$

Notamos que si  $\alpha$  es un 1-ciclo básico, la cohomología torcida con la diferencial  $d_\alpha \omega = d\omega - \alpha \wedge \omega$  tan sólo depende de la clase  $[\alpha] \in H^1(M/\mathcal{F})$ . Por lo tanto, la cohomología  $\kappa$ -torcida es un invariante de la foliación. Además, si la foliación es taut, entonces la cohomología básica y la  $\kappa$ -torcida son isomorfas. Para el caso general en el cual  $\mathcal{F}$  puede no ser taut, tenemos el siguiente teorema de dualidad (ver [33])

**Teorema 1.12 (F. Kamber, P. Tondeur).** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación riemanniana transversalmente orientada de codimensión  $q$  sobre la variedad cerrada  $M$ , de dimensión  $n$ , y sea  $\mu$  una métrica casi-fibrada tal que  $\kappa$  sea básica. Entonces, la forma bilineal*

$$H^i(M/\mathcal{F}) \otimes H_\kappa^{q-i}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por  $[\alpha] \otimes [\beta] \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \wedge \chi$  es no degenerada.



## Capítulo 2

# Sucesión de Gysin para flujos riemannianos regulares

La sucesión de Gysin se encuentra típicamente en el marco de la topología algebraica (ver [5]). Dado un fibrado  $\pi: M \rightarrow B$  de fibra una esfera  $\mathbb{S}^k$ , la sucesión de Gysin asociada es la sucesión exacta:

$$\dots \rightarrow H^i(B) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\int} H^{i-k}(B) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(B) \rightarrow \dots,$$

donde  $\int$  es la integración a lo largo de las fibras y  $\varepsilon$  la multiplicación por la clase de Euler del fibrado.

En el caso de una acción libre y diferenciable de  $\mathbb{S}^1$  sobre una variedad  $M$ , el espacio de órbitas  $M/\mathbb{S}^1$  es una variedad diferenciable, y tenemos un fibrado principal  $\pi: M \rightarrow M/\mathbb{S}^1$ , es decir, la situación anterior para  $k = 1$ . La sucesión de Gysin correspondiente es:

$$\dots \rightarrow H^i(M/\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\int} H^{i-1}(M/\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(M/\mathbb{S}^1) \rightarrow \dots \quad (2.1)$$

El principal objetivo de esta memoria es construir una sucesión de este tipo para acciones no ya de  $\mathbb{S}^1$ , sino de  $\mathbb{R}$ , y que induzcan una foliación riemanniana, es decir, para *flujos riemannianos*.

En la primera sección de este capítulo formulamos de una manera más precisa el problema al que queremos dar solución (*problema de Gysin*), y recordamos en qué casos ha sido ya resuelto. En la segunda sección adaptaremos al caso de flujos riemannianos las herramientas y resultados sobre foliaciones riemannianas presentados en el capítulo 1. También estudiaremos otras propiedades de estos flujos, en particular su estructura local. En la tercera sección es donde comenzamos a presentar nuestros resultados originales, dando respuesta al problema de Gysin para flujos riemannianos regulares.

## 2.1. El problema de Gysin

Una acción diferenciable y sin puntos fijos de  $\mathbb{R}$  sobre una variedad cerrada  $M$  determina una foliación  $\mathcal{F}$  de dimensión 1, y estamos interesados en estudiar la relación entre la cohomología de  $M$  y la del espacio de órbitas  $M/\mathcal{F}$  o cohomología básica, que es el invariante adecuado para describir la estructura transversa de  $\mathcal{F}$ . Tenemos la sucesión exacta de complejos diferenciales

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\rho} \Omega^*(M)/\Omega^*(M/\mathcal{F}) \longrightarrow 0, \quad (2.2)$$

donde  $\rho$  la proyección sobre el conúcleo de la inclusión  $\Omega^*(M/\mathcal{F}) \hookrightarrow \Omega^*(M)$ . Esta sucesión es la *sucesión corta de Gysin*. Llamaremos *término de Gysin* al complejo  $\Omega^*(M)/\Omega^*(M/\mathcal{F})$ . La cohomología del término de Gysin se conoce como *cohomología  $\mathcal{F}$ -relativa* (ver [45]), y la denotaremos por  $\mathfrak{G}^*(M, \mathcal{F})$ . De la sucesión corta de Gysin se deriva canónicamente la *sucesión exacta larga de Gysin*:

$$\dots \longrightarrow H^i(M/\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(M) \longrightarrow \mathfrak{G}^i(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Estamos en condiciones de plantear el problema de Gysin:

**Problema de Gysin:** Sea un flujo  $\mathcal{F}$  sobre una variedad cerrada  $M$ . El problema de Gysin consiste en calcular en términos de formas básicas:

- i)  $\mathfrak{G}^*(M, \mathcal{F})$  i.e., la cohomología del término de Gysin ;
- ii) el homomorfismo de conexión  $\varepsilon$ .

Notamos que estos dos datos nos permiten recuperar la cohomología de  $M$  como espacio vectorial, es decir, calcular sus números de Betti.

Como la estructura transversa del flujo  $\mathcal{F}$  puede ser muy complicada, restringiremos nuestro estudio a los flujos riemannianos, donde la cohomología básica ha probado ser un invariante adaptado y rico (ver sección 1.3). En el caso de una acción periódica de  $\mathbb{R}$ , tenemos de hecho una acción del círculo  $\mathbb{S}^1$ , y en este caso la sucesión de Gysin es (2.1). Se puede probar que el homomorfismo de conexión  $\varepsilon: H^*(M/\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^{*+2}(M/\mathbb{S}^1)$  es la multiplicación por la clase de Euler  $[e] \in H^2(M/\mathbb{S}^1)$ . La solución al problema de Gysin para un flujo  $\mathcal{F}_{\mathbb{S}^1}$  de este tipo es, por lo tanto (ver [42]):

**Problema de Gysin para flujos periódicos regulares**

- i)  $\mathfrak{G}^*(M, \mathcal{F}_{\mathbb{S}^1}) = H^{*-1}(M/\mathbb{S}^1)$ ;

ii)  $\varepsilon([\alpha]) = [\alpha \wedge e]$ , para todo  $[\alpha] \in H^*(M/\mathbb{S}^1)$ .

El problema de Gysin ha sido también resuelto para el caso de flujos isométricos, es decir, acciones  $\phi: \mathbb{R} \times (M, \mu) \rightarrow (M, \mu)$  que preservan una métrica riemanniana  $\mu$  sobre  $M$ . En ese caso, un clásico resultado de Myers y Steenrod nos asegura que si  $M$  es compacta, entonces el grupo de isometrías  $\text{Iso}(M, \mu)$  es un grupo de Lie compacto, y por lo tanto, la clausura de  $\mathbb{R}$  en ese grupo es un grupo abeliano compacto, es decir, un toro  $T$ . Por ser  $T$  un grupo compacto, es bien conocido que el complejo  $\Omega^*(M)^T$  de formas invariantes por la acción de  $T$  calcula la cohomología de de Rham de  $M$ . Tenemos el siguiente cuasi-isomorfismo (es decir, isomorfismo en cohomología)

$$\begin{aligned} (\Omega^*(M/\mathcal{F}) \oplus \Omega^{*-1}(M/\mathcal{F}), D) &\xrightarrow{\cong} (\Omega^*(M)^T, d) \\ (\alpha, \beta) &\longrightarrow \alpha + \chi \wedge \beta, \end{aligned}$$

donde  $\chi$  es la 1-forma característica y la diferencial  $D$  está dada por la fórmula  $D(\alpha, \beta) = (d\alpha + d\chi \wedge \beta, -d\beta)$ . De esta descomposición derivamos la sucesión de Gysin:

$$\dots \rightarrow H^i(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^i(M) \rightarrow H^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge[d\chi]} H^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \dots \quad (2.3)$$

Tenemos, por lo tanto, la resolución del problema de Gysin para flujos isométricos ([32]):

### Problema de Gysin para flujos isométricos regulares

i)  $\mathfrak{G}^*(M, \mathcal{F}) = H^{*-1}(M/\mathcal{F})$ ;

ii)  $\varepsilon([\alpha]) = [\alpha \wedge d\chi]$ , para toda  $[\alpha] \in H^*(M/\mathcal{F})$ .

Notamos que hemos utilizado fuertemente la compacidad de  $\overline{\mathbb{R}}$  en  $\text{Iso}(M, \mu)$ , así como el hecho de que  $d\chi$  sea una forma básica. Como veremos en la próxima sección, estas dos circunstancias no se cumplirán en el caso de un flujo riemanniano arbitrario. Por eso, tendremos que abordar el problema de Gysin de una manera diferente, usando la geometría local de estos flujos.

## 2.2. Flujos riemannianos

### 2.2.1. Flujos

Tal y como hemos comentado, un flujo  $\mathcal{F}$  sobre una variedad  $M$  es una foliación orientada de dimensión 1. Podemos pensar también un flujo como si se tratase de una acción  $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  sin puntos fijos. De esta manera, las órbitas de  $\phi$  serían

las hojas de la foliación de dimensión 1. Hay una tercera manera de describir  $\mathcal{F}$ , y es considerar que las hojas están definidas por las curvas integrales de un campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  sin ceros en  $M$ .

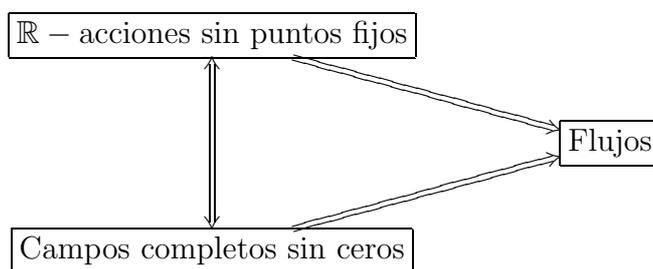
Recordamos que considerar una acción de  $\mathbb{R}$  sin puntos fijos es equivalente a tener un campo sin ceros, según la siguiente correspondencia: dada una acción sin puntos fijos  $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ , el *campo fundamental* de  $\phi$  se define mediante la fórmula:

$$X_m = (\phi_m)_*(d/dt)|_0 \quad \text{para todo } m \in M,$$

siendo  $t$  la carta identidad de  $\mathbb{R}$  y  $\phi_m: \mathbb{R} \rightarrow M$  la aplicación dada por  $\phi_m(t) = \phi(t, m)$ . Recíprocamente, un campo vectorial sin ceros sobre  $M$  determina una acción  $\phi_X: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  dada por

$$\phi_X(t, m) = \gamma_m(t) \quad \text{para todo } m \in M, t \in \mathbb{R},$$

siendo  $\gamma_m$  la curva integral maximal de  $X$  con origen en  $m$ . Dado un flujo  $\mathcal{F}$ , podemos encontrar varios campos y acciones casi-libres (i.e. sin puntos fijos) de  $\mathbb{R}$  que definan sus órbitas, debido a una cuestión de reparametrización. Diremos que esos campos y acciones están *adaptados* a  $\mathcal{F}$ . Podemos reflejar la situación mediante el siguiente diagrama:



El objeto de nuestro estudio es la foliación  $\mathcal{F}$ , si bien con frecuencia trabajaremos con acciones o campos adaptados a  $\mathcal{F}$ .

**Ejemplo 2.1 (Flujos lineales sobre  $\mathbb{T}^n$ ).** Sea el toro  $n$ -dimensional  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ . Consideramos en  $\mathbb{T}^n$  las coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  correspondientes a la proyección de las coordenadas de  $\mathbb{R}^n$ . Un *flujo lineal* sobre  $\mathbb{T}^n$  es el flujo inducido por el campo

$$\theta_1(\partial/\partial x_1) + \dots + \theta_n(\partial/\partial x_n) \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^n),$$

siendo  $\theta_1, \dots, \theta_n$  constantes. Diremos que la *pendiente* o la *dirección* de  $X$  es  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ . La acción  $\phi$  asociada a  $X$  resulta ser, en coordenadas complejas,

$$\phi(t, (z_1, \dots, z_n)) = (e^{i\theta_1 t} z_1, \dots, e^{i\theta_n t} z_n).$$

En el caso  $n = 2$ , el carácter racional o irracional de  $\theta_1/\theta_2$  determina la dinámica del flujo correspondiente sobre  $\mathbb{T}^2$  (ver ejemplo 1.5). Para  $n \neq 2$ , hace falta introducir un nuevo concepto:

**Definición 2.1.** La *corresonancia*<sup>1</sup> de la dirección  $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$  es la dimensión como  $\mathbb{Q}$ -módulo de  $\theta_1\mathbb{Q} + \dots + \theta_n\mathbb{Q} = \{\theta_1q_1 + \dots + \theta_nq_n : (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n\} \subseteq \mathbb{R}$ , es decir, el cardinal del mayor subconjunto  $\mathbb{Q}$ -libre de  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ . Diremos que  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  es *no resonante* si su corresonancia es  $n$ .

Tenemos el siguiente resultado, clásico en la teoría de Sistemas Dinámicos (para una prueba, ver [3]):

**Teorema 2.1 (Kronecker).** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo lineal sobre  $\mathbb{T}^n$  en la dirección  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ . Entonces, la clausura de una hoja cualquiera es difeomorfa a un toro cuya dimensión es la corresonancia de  $\theta$ .*

Son interesantes los casos extremos: si  $\theta$  es no resonante, entonces el flujo es denso en  $\mathbb{T}^n$ . Si por otro lado la corresonancia es 1, entonces el flujo es periódico, y las hojas son todas difeomorfas al círculo  $\mathbb{S}^1$ .

Para visualizar los casos intermedios, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 2.2.** *Sea  $\mathcal{F}_\theta$  un flujo lineal sobre  $\mathbb{T}^n$  con pendiente  $\theta$ , de corresonancia  $r$ . Entonces, existe una rotación  $R$  que determina un difeomorfismo foliado*

$$R: (\mathbb{T}^n, \mathcal{F}_\theta) \longrightarrow (\mathbb{T}^n, \mathcal{F}_{R(\theta)}),$$

de modo que las clausuras de las hojas de  $\mathcal{F}_{R(\theta)}$  son de la forma  $\mathbb{T}^r \times \{c\}$ , con  $c \in \mathbb{T}^{n-r}$ .

**Ejemplo 2.2 (Acción de Hopf).** La *acción de Hopf* es la siguiente acción libre del círculo:

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^3 \\ (z, (z_0, z_1)) &\longmapsto (zz_0, zz_1), \end{aligned}$$

expresada en coordenadas complejas. El espacio de órbitas de  $\phi$  es  $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ , y la proyección sobre el mismo  $\pi: \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2$  se conoce como *fibración de Hopf*. Podemos variar un poco el flujo de la acción de Hopf de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi_\theta: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^3 \\ (t, (z_0, z_1)) &\longmapsto (e^{it}z_0, e^{it\theta}z_1), \end{aligned}$$

con  $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Definimos los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{S}^3$ :

$$T_{\rho_0, \rho_1} = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3 : |z_0|^2 = \rho_0^2, |z_1|^2 = \rho_1^2\},$$

---

<sup>1</sup>Utilizamos el término *corresonancia* en lugar de *resonancia* debido a que en teoría de sistemas dinámicos el concepto de *multiplicidad de resonancia* de  $\theta \in \mathbb{R}^n$  es  $n - r$ , siendo  $r$  lo que hemos definido como corresonancia de  $\theta$ .

siendo  $\rho_0, \rho_1$  constantes no negativas tales que  $\rho_0^2 + \rho_1^2 = 1$ . Estos conjuntos son  $\phi_\theta$ -saturados y difeomorfos a  $\mathbb{T}^2$ , salvo  $T_{0,1}$  y  $T_{1,0}$ , que son difeomorfos a  $\mathbb{S}^1$ . Si restringimos el flujo  $\mathcal{F}_{\phi_\theta}$  a  $T_{\rho_0, \rho_1} \cong \mathbb{T}^2$ , obtenemos un flujo lineal sobre  $\mathbb{T}^2$  de pendiente irracional  $\theta$ , y por lo tanto, de hojas densas.

Es bien conocido que  $\mathbb{S}^3$  se puede descomponer en dos subespacios invariantes por la acción de Hopf:

$$T_1 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3 : |z_0| \leq 1/2\}; \quad T_2 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3 : |z_0| \geq 1/2\},$$

cada uno de ellos difeomorfo a un toro macizo  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Para generalizar esta descomposición, así como para representar de una manera adecuada diversos ejemplos de flujos nos será útil la siguiente construcción:

Sea la esfera impar  $\mathbb{S}^{2p+1}$ , y sean sus coordenadas complejas:

$$\mathbb{S}^{2p+1} = \{(z_0, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^{p+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_p|^2 = 1\}.$$

Definimos la proyección sobre el  $p$ -símplice estándar  $\Delta_p = \langle e_0, \dots, e_p \rangle$  dada por:

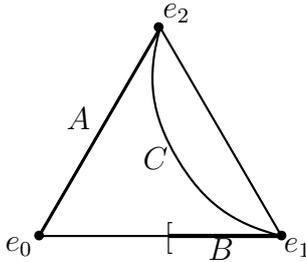
$$\begin{aligned} \gamma : \quad \mathbb{S}^{2p+1} &\longrightarrow \Delta_p \\ (z_0, \dots, z_p) &\longmapsto (|z_0|^2, \dots, |z_p|^2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para cada elemento  $x \in \Delta_p$ , el conjunto  $\gamma^{-1}(x) \subset \mathbb{S}^{2p+1}$  es difeomorfo a un toro  $\mathbb{T}^r$ , siendo  $r$  el número de componentes de  $x$  no nulas. Explícitamente, si  $\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_r} \rangle$  es la cara de mínima dimensión que contiene a  $x$ , entonces

$$\begin{aligned} \psi_x : \quad \gamma^{-1}(x) &\longrightarrow \mathbb{T}^r \\ (z_{i_1}, \dots, z_{i_r}) &\longmapsto (z_{i_1}/|z_{i_1}|, \dots, z_{i_r}/|z_{i_r}|) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo (notar que hemos suprimido las componentes nulas de  $\gamma^{-1}(x)$ ). De esta manera, la proyección (2.4) determina una partición de  $\mathbb{S}^{2p+1}$  en toros de dimensiones consecutivas  $1, 2, \dots, p$ , y que se acumulan según la estructura de las caras del símplice  $\Delta_p$ , tal y como ilustramos en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.3.** Consideramos la proyección  $\gamma : \mathbb{S}^5 \longrightarrow \Delta_2$ . En el siguiente diagrama hemos representado varios subconjuntos de  $\Delta_2$ :



$$\begin{aligned} A &= \langle e_0, e_2 \rangle; \\ B &= \{te_0 + (1-t)e_1 : t \in [0, 1/2]\}; \\ C &= \{t(1-t)e_0 + (1+(t^2-3t)/2)e_1 \\ &\quad + (t(1+t)/2)e_2 : t \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

La imagen inversa por  $\gamma$  de cada vértice es difeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ . Así mismo, es fácil ver que  $\gamma^{-1}(A)$  y  $\gamma^{-1}(C)$  son difeomorfos a  $\mathbb{S}^3$  y que  $\gamma^{-1}(B)$  es difeomorfo a un toro macizo  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

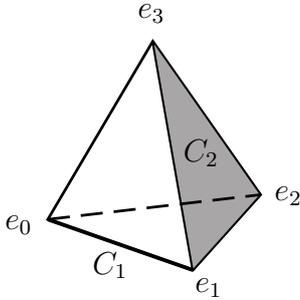
**Ejemplo 2.4 (Flujos lineales sobre esferas).** Dada una dirección  $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ , consideramos en  $\mathbb{S}^{2p+1}$  el flujo  $\mathcal{F}_\theta$  inducido por la acción

$$\begin{aligned} \phi_\theta : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{2p+1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{2p+1} \\ (t, (z_0, \dots, z_p)) &\longmapsto (e^{i\theta_0 t} z_0, \dots, e^{i\theta_p t} z_p) \end{aligned}$$

y la proyección  $\gamma: \mathbb{S}^{2p+1} \longrightarrow \Delta_p$ . Los conjuntos  $\gamma^{-1}(x) \in \mathbb{S}^{2p+1}$  con  $x \in \Delta_p$  son saturados para  $\mathcal{F}_\theta$ . De hecho, si  $\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_r} \rangle$  es la cara de menor dimensión que contiene a  $x$ , entonces el flujo en  $\gamma^{-1}(x)$  es conjugado por el difeomorfismo 2.2.1 al flujo lineal de pendiente  $(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_r})$  sobre  $\mathbb{T}^r$ .

En el caso particular  $\theta = (1, \dots, 1)$ , la acción  $\phi_\theta$  es, de hecho, una acción de  $\mathbb{S}^1$  y se conoce como la *acción de Hopf* sobre  $\mathbb{S}^{2p+1}$ . Como la acción es libre, todas las órbitas son difeomorfas a  $\mathbb{S}^1$ . El espacio de órbitas es difeomorfo al espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^p$ .

**Ejemplo 2.5.** Sea  $\mathcal{F}_\theta$  el flujo lineal sobre  $\mathbb{S}^7$  con pendiente  $\theta = (1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ . Consideramos  $\gamma: \mathbb{S}^7 \longrightarrow \Delta_3$ , así como los siguientes subconjuntos de  $\Delta_3$ :



$$\begin{aligned} C_1 &= \langle e_0, e_1 \rangle; \\ C_2 &= \langle e_1, e_2, e_3 \rangle; \\ \Delta^{(2)} &= 2\text{-esqueleto de } \Delta_3. \end{aligned}$$

Como la corresponsancia de  $(1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$  es 3, las adherencias de las hojas de  $\mathcal{F}_\theta$  son difeomorfas a  $\mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{T}^2$  ó  $\mathbb{T}^3$ . Más explícitamente, si  $L_m$  es la hoja de  $\mathcal{F}_\theta$  que pasa por  $m \in \mathbb{S}^7$ , entonces

$$\begin{aligned} \overline{L_m} \cong \mathbb{S}^1 &\iff \gamma(m) \in \{e_2, e_3\} \cup C_1; \\ \overline{L_m} \cong \mathbb{T}^2 &\iff \gamma(m) \in \Delta^{(2)} - (\overset{\circ}{C}_2 \cup C_1 \cup \{e_2, e_3\}); \\ \overline{L_m} \cong \mathbb{T}^3 &\iff \gamma(m) \in \overset{\circ}{C}_2 \cup \overset{\circ}{\Delta}_3. \end{aligned}$$

La restricción de  $\mathcal{F}_\theta$  a  $\gamma^{-1}(C_1)$  es conjugada a la acción de Hopf sobre  $\mathbb{S}^3$ .

### 2.2.2. Actores que intervienen en los flujos riemannianos

**Definición 2.2.** Un *flujo riemanniano* sobre la variedad  $M$  es una foliación riemanniana orientada sobre  $M$  de dimensión 1. Un *flujo isométrico* es un flujo riemanniano taut.

A partir de ahora trabajaremos con un flujo riemanniano  $\mathcal{F}$  sobre la variedad cerrada  $M$ . Gracias al teorema 1.11, podemos elegir una métrica riemanniana  $\mu$  casi-fibrada de manera que su 1-forma de curvatura media  $\kappa$  sea básica. Fijada una tal métrica  $\mu$ , podemos elegir un campo no singular  $X \in \mathfrak{X}(M)$  unitario para  $\mu$ , es decir, tal que

$$\mu(X, X) = 1.$$

Notamos que, fijada  $\mu$ , existen exactamente dos campos que cumplen la condición de ser unitario: uno para cada orientación de  $\mathcal{F}$ . En efecto, recordemos que la restricción de  $\mu$  a un entorno coordenado  $(U, \varphi)$ , con  $\varphi = (x, y_1, \dots, y_{n-1})$  es, según (1.3):

$$\mu|_U = f(x, y)dx \otimes dx + \sum_{k,l=1}^{n-1} \mu_{ij}(y)dy_i \otimes dy_j, \quad (2.5)$$

de donde  $X|_U = \pm 1/f(x, y)\partial/\partial x$ . Fijamos  $\mu$  y  $X$  tal y como lo hemos descrito. La *1-forma fundamental*  $\chi = i_X \mu \in \Omega^1(M)$  de  $\mathcal{F}$  asociada a  $\mu$  (definición 1.13) está dada por:

$$\chi(Y) = \mu(X, Y) \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{X}(M),$$

y es la forma dual de  $X$ , es decir,  $\chi(X) = 1$ . Aplicamos ahora la fórmula de Rummler (1.3) para el caso de flujos, la cual nos proporciona:

$$d\chi = e + \chi \wedge \kappa, \quad (2.6)$$

para  $e \in \Omega^2(M)$  y  $\kappa \in \Omega^1(M)$  horizontales. Ahora bien, como hemos elegido  $\mu$  de forma que  $\kappa$  sea básica, deducimos que

$$de = -d\chi \wedge \kappa = -e \wedge \kappa,$$

donde hemos usado que  $\kappa$  es cerrada. Tenemos, por lo tanto, que  $i_X de = 0$ , de donde  $e$  es una forma básica de grado 2.

**Definición 2.3.** Diremos que la forma  $e \in \Omega^2(M/\mathcal{F})$  definida por  $e = d\chi - \chi \wedge \kappa$  es la *forma de Euler* asociada a  $\mu$ .

Tenemos, por lo tanto,

$$L_X \chi = \kappa.$$

Trabajaremos siempre con un conjunto de actores que cumpla las propiedades que acabamos de describir, y que recopilamos a continuación:

**Definición 2.4.** Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano sobre la variedad cerrada  $M$ . Entonces, diremos que  $\{\mu, X, \chi, e, \kappa\}$  es un *sistema adaptado de actores* a  $\mathcal{F}$  si se cumple:

- i)  $\mu$  es una métrica sobre  $M$  casi-fibrada para  $\mathcal{F}$ ;
- ii)  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es un campo adaptado a  $\mathcal{F}$  que cumple  $\mu(X, X) = 1$ ;
- iii)  $\chi = i_X \mu$  es la forma característica;
- iv)  $\kappa = L_X \chi \in \Omega^*(M/\mathcal{F})$  es la forma de curvatura media asociada a  $\mu$ ;
- v)  $e \in \Omega^2(M/\mathcal{F})$  es la forma de Euler de  $\mu$ .

Notamos que la elección de  $\mu$  y de  $X$  determina el resto del sistema de actores.

Recordemos que la clase  $[\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F})$  es un invariante de  $\mathcal{F}$  en el sentido de que no depende de la métrica  $\mu$  elegida (teorema 1.8). En particular,  $\mathcal{F}$  es un flujo isométrico si y sólo si  $[\kappa] = 0 \in H^1(M/\mathcal{F})$ . A continuación, justificamos la definición de flujo riemanniano isométrico.

**Lema 2.3.** *Sea  $\mu$  una métrica casi-fibrada para la foliación riemanniana  $(M, \mathcal{F})$ , y sea  $f$  una función básica que no se anule en  $M$ . Entonces,  $\mu' = f\mu$  es una métrica casi-fibrada.*

*Demostración.* Recordamos que una métrica es casi-fibrada si y sólo si su expresión local en un abierto coordenado  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q))$  es del tipo

$$\mu|_U = \sum_{i,j=1}^p f_{ij}(x, y) dx_i \otimes dx_j + \sum_{k,l=1}^q g_{kl}(y) dy_k \otimes dy_l.$$

Como  $f$  es básica, tenemos que  $f|_U = f(y_1, \dots, y_q)$ , y por lo tanto, se sigue que

$$\mu'|_U = \sum_{i,j=1}^p f(y) f_{ij}(x, y) dx_i \otimes dx_j + \sum_{k,l=1}^q f(y) g_{kl}(y) dy_k \otimes dy_l,$$

de donde  $\mu'$  es casi-fibrada. ♣

**Lema 2.4 ([15]).** *Sea  $(M, \mathcal{F})$  un flujo riemanniano isométrico sobre una variedad cerrada. Entonces, existe un campo de vectores adaptado a  $\mathcal{F}$  y que es un campo de Killing para una cierta métrica sobre  $M$ .*

*Demostración.* Sea  $(\mu, X, \chi, e, \kappa)$  un sistema adaptado de actores. Por el teorema 1.9, tenemos que existe una función básica  $f$  tal que  $df = \kappa$ . Consideramos ahora la métrica  $\mu = e^{2f}\mu_1$ . Como  $e^f$  es una función básica que no se anula, aplicando el lema 2.3 tenemos que  $\mu' = e^f\mu$  es una métrica casi-fibrada. Si escribimos

$$X' = e^{-f}X, \quad \chi' = e^f\chi, \quad e' = e^f e,$$

es inmediato comprobar que  $(\mu', X', \chi', e', 0)$  es un sistema adaptado de actores para  $\mathcal{F}$ . Como  $L_{X'}\chi' = \kappa' = 0$ , se sigue que

$$L_{X'}\mu' = L_{X'}(\chi' \otimes \chi') + L_{X'}\mu'_Q = L_{X'}(\chi' \otimes \chi') = 0.$$



**Observación 2.1.** Si  $M$  no es una variedad compacta, el hecho de que la forma de curvatura media  $\kappa$  sea básica no implica necesariamente que sea cerrada (ver [12], ejemplo 2.4).

Un célebre ejemplo debido a Y. Carrière muestra un flujo riemanniano no isométrico. Presentamos a continuación dicho flujo, que fue el primer ejemplo conocido de foliación riemanniana no taut.

**Ejemplo 2.6 ([15]).** Consideramos la matriz

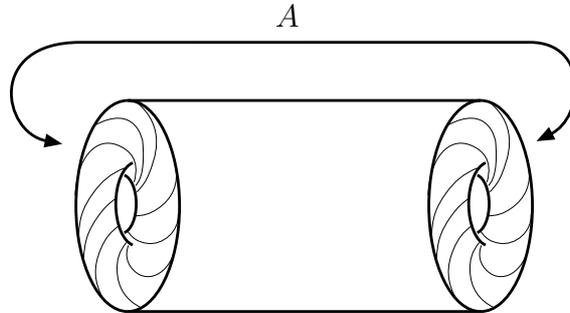
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, 1)$$

Los dos autovalores de  $A$  son irracionales, y cumplen  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ ,  $\lambda_1\lambda_2 = 1$ . Sean  $v_1 = (u, v)$  y  $v_2 = (-v, u)$  los autovectores unitarios correspondientes. Las pendientes  $v/u$  y  $-u/v$  son irracionales, e inducen, por lo tanto, sendos flujos lineales  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  sobre  $\mathbb{T}^2$  con hojas densas.

Notamos que la matriz  $A$  induce un difeomorfismo en  $\mathbb{T}^2$ . Definimos ahora la variedad  $\mathbb{T}_A^3$  como el espacio total de la suspensión de  $A \in \text{Diff}(\mathbb{T}^2)$ , es decir,

$$\mathbb{T}_A^3 = (\mathbb{T}^2 \times [0, 1]) / ((x, 0) \sim (Ax, 1))$$

La aplicación  $\pi: \mathbb{T}_A^3 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $\pi([(x, y), t]) = e^{2\pi it}$  es un fibrado de fibra  $\mathbb{T}^2$ . Como  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  son invariantes por  $A$ , inducen sendos flujos en  $\mathbb{T}_A^3$ , que denotaremos de la misma manera.



Tomamos las coordenadas  $(x, y, t)$  en  $\mathbb{T}_A^3$ , donde  $(x, y)$  provienen de  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  y  $t$  es la carta identidad de  $[0, 1]$ . Tenemos la siguiente paralelización de  $\mathbb{T}_A^3$ :

$$X_1 = \lambda_1^t(u\partial/\partial x + v\partial/\partial y); \quad X_2 = \lambda_2^t(-v\partial/\partial x + u\partial/\partial y); \quad T = \partial/\partial t$$

Notamos que  $X_1$  y  $X_2$  definen  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$ , respectivamente. Tenemos las relaciones

$$[T, X_1] = \log \lambda_1 X_1; \quad [T, X_2] = \log \lambda_2 X_2; \quad [X_1, X_2] = 0.$$

Consideramos la base dual de 1-formas  $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_T\}$ :

$$\gamma_1 = \lambda_1^{-t}(dx + vdy); \quad \gamma_2 = \lambda_2^{-t}(-vdx + udy); \quad T = dt.$$

Se sigue que

$$d\gamma_T = 0; \quad d\gamma_1 = \log \lambda_1 \gamma_1 \wedge \gamma_T; \quad d\gamma_2 = \log \lambda_2 \gamma_2 \wedge \gamma_T.$$

Tomamos ahora una métrica riemanniana  $\mu$  en  $\mathbb{T}_A^3$  tal que  $\{X_1, X_2, T\}$  sea un paralelismo ortonormal, es decir,

$$\mu = \gamma_1 \otimes \gamma_1 + \gamma_2 \otimes \gamma_2 + \gamma_T \otimes \gamma_T.$$

Fijamos  $X = X_1$  y  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ . Entonces,

$$L_X \gamma_2 = L_X \gamma_T = 0 \implies L_X \mu_Q = 0$$

Por lo tanto,  $\mathcal{F}$  es un flujo riemanniano y  $\mu$  es casi-fibrada para  $\mathcal{F}$ . En cambio,

$$L_X \gamma_1 = \log \lambda_1 \gamma_T \implies L_X \mu = L_X(\gamma_1 \otimes \gamma_1) = \log \lambda_1(\gamma_1 \otimes \gamma_T + \gamma_T \otimes \gamma_1).$$

Por lo tanto,  $X$  no es un campo de Killing para  $\mu$ , lo cual no es suficiente para asegurar que  $\mathcal{F}$  no es isométrico. Pero tenemos

**Proposición 2.5.** *El flujo riemanniano  $\mathcal{F}$  definido sobre  $\mathbb{T}_A^3$  no es taut.*

*Demostración.* Mediante un cálculo directo obtenemos:

$$\begin{aligned} \Omega^1(M/\mathcal{F}) &= \{\pi^* g \gamma_2 + \pi^* h \gamma_T : g, h \in C^\infty(\mathbb{S}^1)\} \\ \Omega^2(M/\mathcal{F}) &= \{\pi^* f \gamma_2 \wedge \gamma_T : f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)\} \end{aligned}$$

Es inmediato que todas las 2-formas básicas son cerradas. Ahora bien, para toda  $\omega \in \Omega^2(\mathbb{T}_A^3/\mathcal{F})$  existe  $\eta \in \Omega^1(\mathbb{T}_A^3)$  tal que  $d\eta = \omega$ . Explícitamente, si  $\omega = f(t)\gamma_2 \wedge \gamma_T$ , entonces

$$\eta = \left( \lambda^t C_1 + \lambda_2^t \int_0^t \lambda_2^{-s} f(s) ds \right) \gamma_2,$$

donde  $C_1 = \lambda_2(1 + \int_0^1 \lambda_2^{-s} f(s) ds)$ . Por lo tanto,  $H^2(\mathbb{T}_A^3) = 0$ , y por 1.7 tenemos que  $\mathcal{F}$  no puede ser un flujo taut. ♣

Se puede calcular directamente

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{T}_A^3) &= \langle 1, [\gamma_T], [\gamma_1 \wedge \gamma_2], [\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_T] \rangle; \\ H^*(\mathbb{T}_A^3/\mathcal{F}) &= \langle 1, [\gamma_T] \rangle. \end{aligned}$$

De  $\chi = \gamma_1$  y  $d\chi = \log \lambda_1 \gamma_1 \wedge \gamma_T$  deducimos  $e = 0$  y  $\kappa = \log \lambda_1 \gamma_T$ . Notamos que  $[\kappa] \in H^1(\mathbb{T}_A^3/\mathcal{F})$  es no nula, como corresponde a un flujo no taut.

### 2.2.3. Estructura local de los flujos riemannianos

La estructura local de los flujos riemannianos queda determinada por dos importantes resultados de Y. Carrière.

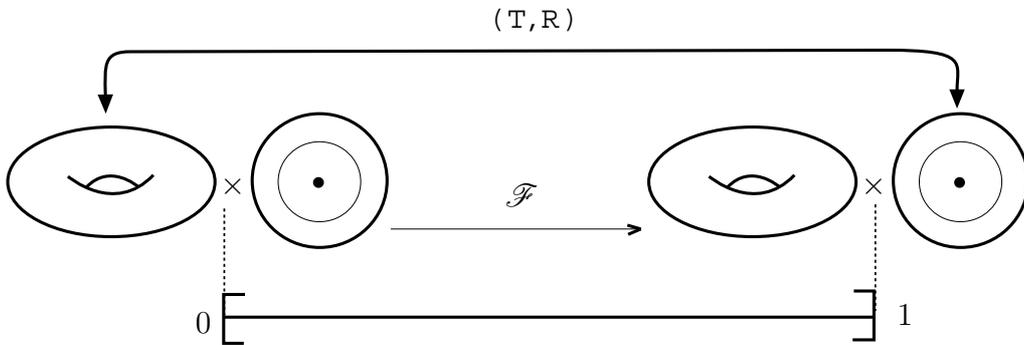
**Proposición 2.6** ([15]). *Sea  $L$  una hoja de un flujo riemanniano  $\mathcal{F}$  sobre la variedad cerrada  $M$ . Entonces,  $\bar{L}$  es difeomorfa a un toro  $\mathbb{T}^k$  y  $\mathcal{F}|_{\bar{L}}$  es difeomórficamente conjugado a un flujo lineal sobre  $\mathbb{T}^k$  con hojas densas.*

El siguiente resultado, que implica el anterior, describe cómo es un entorno saturado de una hoja  $L$ .

**Proposición 2.7** ([15]). *En las condiciones anteriores, existe un entorno  $\mathcal{F}$ -saturado  $U \subseteq M$  de  $\bar{L}$  tal que:*

- i) *existe un difeomorfismo  $U \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^k \times \mathbb{D}^m$  que lleva  $\bar{L}$  sobre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^k \times \{0\}$ ;*
- ii) *el flujo  $\mathcal{F}$  restringido a  $U$  es conjugado al flujo obtenido por la suspensión de un difeomorfismo  $v$  de  $\mathbb{T}^k \times \mathbb{D}^m$  dado por la fórmula  $v(x, y) = (T(x), R(y))$ , siendo  $T$  una traslación irracional de  $\mathbb{T}^k$  y  $R$  una rotación de  $\mathbb{D}^m$ .*

Diremos que un entorno saturado de este tipo es un *entorno de Carrière*.





Como  $|A| = 1$ , se sigue que el bloque  $-I_l$  es un bloque de dimensión par, y por lo tanto consiste en  $m/2$  bloques  $R_\pi$ . Como las matrices  $A$  y  $R$  son conjugadas, se sigue que las suspensiones de los difeomorfismos  $(T, A)$  y  $(T, R)$  también lo son. Por lo tanto, podemos reducirnos a estudiar la suspensión de  $(T, A)$ , para lo cual, distinguiamos dos casos:

- i) **Caso impar** ( $m - 1 = 2p + 1$ ). La matriz  $A$  consta de  $p + 1$  bloques  $R_{\zeta_i}$  dispuestos en la diagonal, pudiendo ser algunos  $R_0$  ó  $R_\pi$ . El flujo generado por la suspensión de  $(T, A)$  está determinado por la acción diagonal:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{S}^{2p+1} &\longrightarrow \mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{S}^{2p+1} \\ (t, (z, \omega)) &\longmapsto (\phi_\theta(z), \phi_\zeta(\omega))' \end{aligned}$$

donde  $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_p)$  y  $\phi_\theta$  y  $\phi_\zeta$  son flujos lineales. Definimos la proyección  $\bar{\gamma}$  como la composición

$$U - \bar{L} \xrightarrow{\psi} \mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{S}^{2p+1} \xrightarrow{pr_2} \mathbb{S}^{2p+1} \xrightarrow{\gamma} \Delta_p.$$

Es claro (ver ejemplo 2.4) que la clausura de la hoja que pasa por  $m \in U - \bar{L}$  es un toro cuya dimensión es la corresonancia de  $(1, \theta_1, \dots, \theta_k, \zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{i_r})$ , siendo  $\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_r} \rangle$  la cara de mínima dimensión que contiene a  $\bar{\gamma}(m)$ . Se sigue, por lo tanto, el enunciado de la proposición.

- ii) **Caso par** ( $m - 1 = 2p + 2$ ). Notamos que la matriz  $A$  tiene que ser forzosamente de la forma

$$A = \begin{pmatrix} R_{\zeta_0} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_{\zeta_p} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Si escribimos  $\mathbb{S}^{2p+2} = \Sigma\mathbb{S}^{2p+1}$ , tenemos  $A = \Sigma A' \in \text{Diff}(\mathbb{S}^{2p+1})$ . Al hacer la suspensión de  $(T, R)$ , las clausuras de las órbitas que pasen los dos polos de  $\Sigma\mathbb{S}^{2p+1}$  serán difeomorfas a  $\mathbb{T}^{k+1}$ , y en el resto, podemos aplicar la discusión del caso impar.



**Ejemplo 2.7.** Sea  $U \cong_{\psi} \mathbb{T}^4 \times \mathbb{D}^6$  un entorno de Carrière generado por la suspensión de  $(T, R) \in \text{Diff}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{D}^6)$ , siendo  $T$  la traslación de pendiente  $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$  y

$$R = \begin{pmatrix} R_{\sqrt{2}} & & \\ & R_{\sqrt{3}} & \\ & & -Id_2 \end{pmatrix}.$$

La corresponsión de  $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}\}$  es 5, y por lo tanto, en  $U$  habrá hojas cuyas clausuras sean difeomorfas a  $\mathbb{T}^4$  y a  $\mathbb{T}^5$ . Si  $\bar{\gamma}$  es la proyección de  $U - \bar{L}$  sobre  $\Delta_2$ , entonces

$$\overline{L_m} \cong \begin{cases} \mathbb{T}^4 & \text{Si } m \in \psi^{-1}(\mathbb{T}^4 \times \{0\}) \cup (\bar{\gamma})^{-1}(\langle e_0, e_2 \rangle); \\ \mathbb{T}^5 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

## 2.3. Sucesión de Gysin

El problema de Gysin para flujos riemannianos presenta dos diferencias fundamentales con respecto al caso isométrico. Por un lado, la diferencial de la forma fundamental no tiene por qué ser una forma básica, sino que se tiene la descomposición dada por la fórmula de Rummler:

$$d\chi = e + \chi \wedge \kappa,$$

con  $e$  y  $\kappa$  básicas, siendo  $(\mu, X, \chi, e, \kappa)$  un sistema completo de actores. Por otro lado, la clausura de  $\mathbb{R}$  en el grupo de difeomorfismos  $\text{Diff}(M)$  no tiene por qué ser compacto. Esto nos obliga a atacar el problema de otra manera, usando la geometría local de este tipo de flujos.

### 2.3.1. El Truco de Bredon

El *truco de Bredon* es lo que en la literatura se conoce como un *argumento de tipo Mayer-Vietoris*, y es especialmente útil para demostrar resultados relacionados con la cohomología, tales como el teorema de de Rham, el teorema de Künneth, la dualidad de Poincaré, etcétera. El truco consiste en un lema topológico mediante el cual si una propiedad enunciada sobre conjuntos de una variedad cumple ciertas condiciones, entonces la verificación local de la propiedad implica que se cumpla globalmente. Su versión más elemental (pensada tan sólo para demostrar el teorema de de Rham, y presentada por G.E. Bredon en 1962) se encuentra en [10], pag. 289, y es como sigue:

**Lema 2.9 (Truco de Bredon).** *Sea  $M$  una  $n$ -variedad diferenciable. Sea  $P(U)$  un enunciado formulado sobre abiertos de  $M$ , que satisface las siguientes propiedades:*

1.  $P(U)$  es cierto si  $U$  es difeomorfo a un convexo abierto de  $\mathbb{R}^n$ ;
2.  $P(U), P(V)$  y  $P(U \cap V)$  implican  $P(U \cup V)$ ; y
3.  $\{U_\alpha\}$  disjuntos y  $P(U_\alpha)$  para todo  $\alpha \implies P(\bigcup_\alpha U_\alpha)$ .

Entonces,  $P(M)$  es cierto.

Para la demostración que hace Bredon del lema 2.9, no hace falta usar la estructura diferenciable de  $M$ . Lo que se utiliza es, en esencia, la existencia de una función propia  $M \rightarrow [0, \infty)$  (i.e., tal que la imagen inversa de un compacto sea un compacto). Por otro lado, la hipótesis 1 puede sustituirse por la condición de que exista una base cerrada para intersecciones finitas cuyos abiertos cumplan la propiedad. La existencia de una función propia se puede garantizar para cualquier espacio segundo numerable, paracompacto y localmente compacto (se toma una partición de la unidad  $\{f_n\}$  subordinada a un cubrimiento numerable localmente compacto  $\{U_n\}$  y se toma  $f(x) = \sum_n n f_n(x)$ ). Por lo tanto, podemos modificar ligeramente el enunciado del lema de la siguiente manera, más adecuada para trabajar con espacios de órbitas, y para la cual sirve la misma prueba de [10]:

**Lema 2.10 (Truco de Bredon para espacios de órbitas).** *Sea  $X$  un espacio topológico segundo numerable, paracompacto y localmente compacto. Sea  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  una base cerrada para intersecciones finitas. Sea  $Q(U)$  un enunciado formulado sobre abiertos de  $X$ , satisfaciendo las siguientes propiedades:*

1.  $Q(U)$  es cierto si  $U \in \mathcal{U}$ ;
2.  $Q(U), Q(V)$  y  $Q(U \cap V)$  implican  $Q(U \cup V)$ ; y
3.  $\{U_\alpha\}$  disjuntos y  $Q(U_\alpha)$  para todo  $\alpha \implies Q(\bigcup_\alpha U_\alpha)$ .

Entonces,  $Q(X)$  es cierto.

Hemos cambiado  $M$  por  $X$  para hacer notar que esta vez  $X$  es un espacio topológico, y no necesariamente una variedad diferenciable. Es esta versión la que se aplica en [47], para resolver el caso semilibre de la sucesión de Gysin de acciones de  $\mathbb{S}^1$ .

En el caso de flujos riemannianos regulares, nos va a valer la siguiente adaptación del truco de Bredon:

**Lema 2.11 (Truco de Bredon para Flujos Riemannianos Regulares).** *Sea  $P$  una afirmación formulada sobre variedades diferenciables (no necesariamente compactas) provistas de un flujo riemanniano regular. Si  $P$  es una propiedad invariante por difeomorfismos foliados y cumple los siguientes axiomas:*

**TB1** *para toda variedad contráctil  $E$  provista de la foliación por puntos,  $P(U, \mathcal{F})$  implica  $P(U \times E, \mathcal{F} \times \mathcal{H})$ ;*

**TB2** si  $M = U \cup V$ , entonces  $P(U, \mathcal{F}), P(V, \mathcal{F}), P(U \cap V, \mathcal{F}) \implies P(M, \mathcal{F})$ ;

**TB3**  $\{U_\alpha\}$  disjuntos y  $P(U_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$  para todo  $\alpha \implies P(\bigcup_\alpha U_\alpha, \mathcal{F})$ ;

**TB4**  $P(U, \mathcal{F})$  es cierta para todo entorno de Carrière  $U$ ,

entonces,  $P(M, \mathcal{F})$  es cierta para todo flujo riemanniano  $\mathcal{F}$  sobre una variedad cerrada  $M$ .

*Demostración.* Procederemos por inducción sobre la dimensión de  $M$ . Los casos de dimensión 0 y 1 son triviales. Supongamos que el teorema es cierto para  $\dim M \leq n$ , y veamos que es cierto para  $\dim M = n + 1$ . Procederemos en tres etapas:

- Etapa 1: En primer lugar, vamos a probar que  $P(U, \mathcal{F})$  es cierto si  $U$  es un abierto  $\overline{\mathcal{F}}$ -saturado de un entorno de Carrière  $(\mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^{n-k}, \mathcal{F})$  de modo que  $U$  no corta al toro central  $\mathbb{T}^{k+1} \times \{0\}$ , es decir,  $U \subseteq \mathbb{T}^{k+1} \times (\mathbb{D}^{n-k} - \{0\})$ . Consideramos la proyección  $\pi$  de  $\mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^{n-k}$  sobre la variedad estratificada  $(\mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^{n-k})/\overline{\mathcal{F}}$ . Notamos que tenemos un difeomorfismo foliado

$$(\mathbb{T}^{k+1} \times (\mathbb{D}^{n-k} - \{0\}), \mathcal{F}) \cong (\mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1} \times (0, 1), \mathcal{F}_{(T,R)} \times \mathcal{H}),$$

donde  $\mathcal{F}_{(T,R)}$  es la suspensión del difeomorfismo  $(T, R) \in \text{Diff}(\mathbb{T}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1})$  y  $\mathcal{H}$  es la foliación por puntos de  $(0, 1)$ . Por lo tanto, tenemos que

$$\pi(U) \subseteq (\mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1})/\overline{\mathcal{F}}_{(T,R)} \times (0, 1).$$

A continuación, aplicaremos el lema 2.10 a la variedad estratificada  $X = \pi(U)$  con la afirmación  $Q$  formulada sobre abiertos  $V$  de  $\pi(U)$  mediante:

$$Q(V) \equiv "P(\pi^{-1}(V), \mathcal{F}) \text{ es cierta}."$$

Tomamos la base  $\mathcal{U}$  en  $\pi(U)$  formada por todos los conjuntos de la forma

$$\pi'(W) \times (a, b) \subseteq \pi(U) : \quad W \text{ es } \overline{\mathcal{F}}_{(T,R)}\text{-saturado,}$$

siendo  $\pi' : \mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1} \longrightarrow (\mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1})/\overline{\mathcal{F}}_{(T,R)}$ .  $Q$  cumple las hipótesis 2 y 3 de 2.10 por TB2 y TB3. Para ver que satisface 1, comprobaremos que  $Q$  es cierta para todos los elementos de  $\mathcal{U}$ . En efecto, por TB1 tenemos

$$Q(\pi'(W) \times (a, b)) \Leftrightarrow P(W \times (a, b), \mathcal{F}_{(T,R)} \times \mathcal{H}) \Leftrightarrow P(W, \mathcal{F}_{(T,R)}),$$

de modo que sólo nos queda probar  $P(W, \mathcal{F}_{(T,R)})$ , lo cual es cierto por hipótesis de inducción.

- Etapa 2: Suponemos ahora que  $U$  está contenido en un entorno de Carrière  $\mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^{n-k}$  y que contiene puntos del toro central. En ese caso, como  $U$  es  $\overline{\mathcal{F}}$ -saturado, se tiene

$$U \cap (\mathbb{T}^{k+1} \times \{0\}) \neq \emptyset \implies \mathbb{T}^{k+1} \times \{0\} \subseteq U.$$

Por lo tanto, existe  $r > 0$  tal que el conjunto

$$U_r = \{(x, y) \in \mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^{n-k-1} : \|y\| < r\}$$

cumple  $U_r \subseteq U$ . Notamos que  $U_r$  es un entorno de Carrière, luego por TB4, cumple  $P$ . Si consideramos el cubrimiento

$$U = U_r \cup U_0; \quad U_0 = U - (\mathbb{T}^{k+1} \times \{0\}),$$

por el caso discutido en la etapa 1, obtenemos  $P(U_0, \mathcal{F})$  y  $P(U \cap U_0, \mathcal{F})$ . Aplicando TB2, obtenemos  $P(U, \mathcal{F})$ .

- Etapa 3: Consideramos ahora la proyección  $\pi: M \longrightarrow M/\overline{\mathcal{F}}$ , y aplicamos nuevamente el lema 2.10 sobre el espacio estratificado  $X = M/\overline{\mathcal{F}}$ . Tomamos el cubrimiento  $\mathcal{U}$  formado por todos los abiertos  $\overline{\mathcal{F}}$ -saturados contenidos en algún entorno de Carrière de  $M$ , y enunciamos la propiedad  $Q$  sobre abiertos  $V$  de  $M/\overline{\mathcal{F}}$ :

$$Q(V) \equiv P(\pi^{-1}(V), \mathcal{F}).$$

Nuevamente, tan sólo hemos de comprobar que  $Q$  es cierta para los elementos de  $\mathcal{U}$ , lo cual se cumple por las etapas 1 y 2.



**Observación 2.2.** La compacidad de  $M$  tan sólo nos ha hecho falta para asegurar la existencia de los entornos de Carrière. De hecho, hemos probado que  $P$  se cumple para todo flujo riemanniano sobre una variedad no necesariamente compacta, pero con la descripción local de Carrière.

### 2.3.2. Sucesión de Gysin

Recordamos que la sucesión de Gysin para un flujo isométrico se deriva canónicamente a partir del cuasi-isomorfismo (2.1). Para el caso riemanniano general definiremos un nuevo cuasi-isomorfismo, adaptando el que hemos citado.

Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano sobre la variedad cerrada  $M$ . Fijamos un sistema adaptado de actores  $(\mu, X, \chi, e, \kappa)$ . Definimos el *complejo de Gysin* como el siguiente complejo graduado de formas diferenciales:

$$\mathcal{G}^*(M, \mathcal{F}) = \Omega^*(M/\mathcal{F}) \oplus \Omega^{*-1}(M/\mathcal{F}).$$

El complejo de Gysin tiene estructura de álgebra con el producto dado por

$$(\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\alpha \wedge \alpha', \beta \wedge \alpha' + (-1)^{\text{grad}(\alpha)} \alpha \wedge \beta').$$

Si además dotamos a  $\mathcal{G}^*(M, \mathcal{F})$  con la diferencial

$$D(\alpha, \beta) = (d\alpha + e \wedge \beta, -d_\kappa \beta),$$

es inmediato comprobar que  $(\mathcal{G}^*(M, \mathcal{F}), \cdot, D)$  es un álgebra diferencial graduada (recordar que  $d_\kappa \beta = d\beta - \kappa \wedge \beta$ ). Notamos que si  $\mathcal{F}$  es isométrico, entonces podemos escoger una métrica para la cual  $\kappa$  se anule (ver lema 2.4), y en ese caso,  $d_\kappa = d$ , con lo que la diferencial  $D$  es la misma que en (2.1). Definimos la *aplicación de Gysin*:

$$\begin{aligned} \Psi : (\mathcal{G}^*(M, \mathcal{F}), D) &\longrightarrow (\Omega^*(M), d) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha + \chi \wedge \beta. \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que (2.16) es un morfismo de álgebras diferenciales graduadas. Probaremos que es un cuasi-isomorfismo usando el truco de Bredon, para lo cual necesitaremos los siguientes lemas.

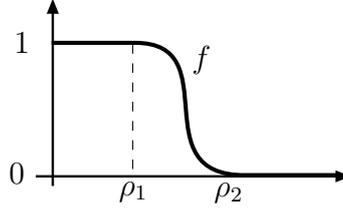
**Lema 2.12.** *Existen particiones de la unidad de  $M$  formadas por funciones diferenciables  $\mathcal{F}$ -básicas, subordinadas a cualquier cubrimiento de abiertos  $\mathcal{F}$ -saturados.*

*Demostración.* Recordamos que el proceso estándar para construir particiones de la unidad diferenciables utiliza entornos coordenados encajados  $V \subset U$  de modo que  $\bar{V}$  es compacto,  $\bar{V} \subseteq U$  y además existe una función diferenciable (*función grano*)  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple  $f > 0$  en  $V$  y  $f = 0$  en  $M - V$ .

Para construir una partición de la unidad como en el enunciado, basta seguir el proceso estándar usando las siguientes funciones grano. Sea  $U$  un entorno de Carrière, y sea  $\psi: U \rightarrow \mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^m$  el difeomorfismo foliado correspondiente. Entonces, denotando  $\mathbb{D}_\rho = \{x \in \mathbb{D}^m : \|x\| \leq \rho\}$ , consideramos los conjuntos

$$U_\rho = \Psi(\mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}_\rho).$$

Para  $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$ , tomamos una función diferenciable  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  como en la siguiente imagen



y la extendemos a  $F: \mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^m \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $F(x, y) = f(\|y\|)$ . La función grano  $F \circ \psi$  es estrictamente positiva en  $B_{\rho_2}$  y nula fuera de  $B_{\rho_2}$ . Como estas funciones grano sólo dependen del radio del disco y el flujo es transversal a éste, son básicas, y por tanto, la partición de la unidad que construimos con ellas, también. ♣

Tenemos la siguiente consecuencia inmediata: si  $U$  y  $V$  son abiertos  $\mathcal{F}$ -saturados de  $M$ , la *sucesión de Mayer-Vietoris* asociada

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & \Omega^*((U \cup V)/\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Omega^*(U/\mathcal{F}) \oplus \Omega^*(V/\mathcal{F}) & \xrightarrow{\rho} & \Omega^*((U \cap V)/\mathcal{F}) & \rightarrow 0 \\
 & \omega & \longmapsto & (\omega|_U, \omega|_V) & & & \\
 & & & (\alpha, \beta) & \longmapsto & \beta|_{U \cap V} - \alpha|_{U \cap V} & 
 \end{array}$$

es exacta. En efecto, por el lema 2.12, podemos tomar una partición de la unidad básica subordinada a  $\{U, V\}$ , de donde se sigue que  $\rho$  es sobreyectiva. El resto de comprobaciones son inmediatas. En consecuencia, podemos derivar la *sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris para cohomología básica*:

$$\rightarrow H^i((U \cup V)/\mathcal{F}) \rightarrow H^i(U/\mathcal{F}) \oplus H^i(V/\mathcal{F}) \rightarrow H^i((U \cap V)/\mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}((U \cup V)/\mathcal{F}) \rightarrow$$

Hemos probado:

**Corolario 2.13.** *La cohomología del complejo de Gysin  $(\mathcal{G}^*(M, \mathcal{F}), D)$  cumple la propiedad de Mayer-Vietoris.*

La filosofía de la propiedad de Mayer-Vietoris es poder deducir propiedades globales a partir de propiedades que se comprueban en modelos locales. A continuación, probaremos que los entornos de Carrière son modelos locales adecuados para nuestro estudio, en el sentido de que el flujo restringido a ellos es isométrico. Eso nos posibilitará aplicar técnicas y resultados ya conocidos para ese tipo de flujos.

**Lema 2.14.** *Todo flujo riemanniano restringido a un entorno de Carrière puede ser embebido foliadamente en un flujo isométrico.*

*Demostración.* Sea  $U \cong \mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^m$  el entorno de Carrière obtenido al suspender  $(T, R)$ . Podemos tomar  $\theta \in \mathbb{R}^k$  y  $\zeta \in \mathbb{R}^r$  de modo que  $T = T_\theta$  y  $R = R_\zeta$ , con

$$T_\theta(x_1, \dots, x_k) = (x_1 + \theta_1, \dots, x_k + \theta_k), \quad R_\zeta(y) = \begin{pmatrix} R_{\zeta_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_{\zeta_r} & \\ & & & -I_l \end{pmatrix} (y),$$

siendo cada  $R_{\zeta_i}$  un giro en  $\mathbb{R}^2$  de ángulo  $\zeta_i$  (ver ejemplo 2.8). Las familias diferenciables de difeomorfismos  $\{T_{t\theta}\}_t$  y  $\{R_{t\zeta}\}_t$  definen una homotopía entre  $(T, R)$  y la identidad. Por lo tanto, el flujo en  $\mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^m$  está dado por la acción

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R} \times \mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^m &\longrightarrow \mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^m \\ (s, ((x_0, x), y)) &\longmapsto (x_0 + s, T_{s\theta}(x), R_{s\zeta}(y)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Procederemos, en cambio, de otra manera: como todo flujo lineal sobre un toro se puede extender a un flujo lineal sobre una esfera impar (sin más que usar la misma expresión en coordenadas complejas), la acción (2.7) se puede extender a

$$\phi': \mathbb{R} \times (\mathbb{S}^{2k+3} \times \mathbb{D}^m) \longrightarrow \mathbb{S}^{2k+3} \times \mathbb{D}^m.$$

De esta manera, tenemos un embebimiento foliado

$$(U, \mathcal{F}) \cong (\mathbb{T}^{k+1} \times \mathbb{D}^m, \mathcal{F}_\phi) \hookrightarrow (\mathbb{S}^{2k+3} \times \mathbb{D}^m, \mathcal{F}_{\phi'}).$$

Es más, podemos extender  $\mathcal{F}_{\phi'}$  a un flujo  $\mathcal{F}'$  sobre  $\mathbb{S}^{2k+3} \times \mathbb{S}^m$  sin más que pegar dos copias de  $\mathbb{S}^{2k+3} \times \mathbb{D}^m$  por el borde mediante la identidad. La naturalidad de las extensiones que hemos descrito implica que el flujo final  $\mathcal{F}'$  es un flujo (regular) riemanniano sobre  $\mathbb{S}^{2k+3} \times \mathbb{S}^m$ , y por el corolario 1.10, ha de ser taut. ♣

**Observación 2.3.** Una consecuencia inmediata del lema 2.14 es que la restricción de un flujo riemanniano a un entorno de Carrière  $U$  es un flujo isométrico para una cierta métrica sobre  $U$ . De hecho, se puede comprobar mediante un cálculo directo (el cual omitimos) que la acción  $\phi$  dada en la demostración del lema preserva la métrica casi-fibrada

$$\mu = (1/f^2) \left( \sum_{i=0}^k dx_i^2 + \sum_{j=1}^r \frac{dy_{2j-1}^2 + dy_{2j}^2}{\zeta_j^2} + dy_{2r+1}^2 + \dots + dy_m^2 \right),$$

siendo  $f$  la función básica dada por  $f(x, y) = 1 + \|\theta\|^2 + \sum_{j=1}^{2r} y_j^2$ .

**Observación 2.4.** El lema precedente nos permite pensar los flujos riemannianos como una colección de entornos de Carrière, es decir, de flujos isométricos, pegados de una cierta manera. Según cómo se haga, podemos ocasionar que globalmente perdamos el carácter isométrico del flujo, tal y como hemos visto en el ejemplo de  $T_A^3$ .

A continuación adaptamos el Lema de Poincaré para la cohomología del complejo de Gysin.

**Lema 2.15.** *Sea  $E$  una variedad contráctil provista de la foliación por puntos, y sea  $(M, \mathcal{F})$  un flujo riemanniano. Entonces, la proyección foliada*

$$\pi: (M \times E, \mathcal{F} \times \mathcal{H}) \longrightarrow (M, \mathcal{F})$$

induce un isomorfismo en cohomología:

$$\pi^*: H^*(\mathcal{G}(M, \mathcal{F}), D) \longrightarrow H^*(\mathcal{G}(M \times E, \mathcal{F} \times \mathcal{H}), D' \times d_E).$$

*Demostración.* Denotamos por  $\mathcal{F}'$ ,  $d'$ ,  $D'$  y  $d'_\kappa$ , respectivamente, a las extensiones canónicas  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}_E$ ,  $d \times d_E$ ,  $D \times d_E$  y  $d_\kappa \times d_E$ . Consideramos el siguiente diagrama de filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\Omega^*(M/\mathcal{F}), d) & \longrightarrow & (\mathcal{G}^*(M, \mathcal{F}), D) & \longrightarrow & (\Omega^*(M/\mathcal{F}), d_\kappa) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi^* \\ 0 & \longrightarrow & (\Omega^*((M \times E)/\mathcal{F}'), d') & \longrightarrow & (\mathcal{G}^*((M \times E), \mathcal{F}'), D') & \longrightarrow & (\Omega^*((M \times E)/\mathcal{F}'), d'_\kappa) \longrightarrow 0. \end{array} \quad (2.8)$$

Las cohomologías  $H^*(M/\mathcal{F})$  y  $H_\kappa^*(M/\mathcal{F})$  verifican el lema de Poincaré (la prueba estándar de [5], por ejemplo, es válida). Por lo tanto, las flechas verticales de los extremos son isomorfismos. Usando el lema de los cinco, se sigue que la del centro también lo es. ♣

Estamos en condiciones de probar la siguiente:

**Proposición 2.16.** *La aplicación de Gysin*

$$\begin{array}{ccc} \Psi: (\mathcal{G}^*(M, \mathcal{F}), D) & \longrightarrow & (\Omega^*(M), d) \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha + \chi \wedge \beta \end{array}$$

es un cuasi-isomorfismo.

*Demostración.* Aplicaremos el lema 2.11 a la afirmación  $P$  formulada sobre abiertos saturados de  $M$ :

$$P(U, \mathcal{F}) \equiv \text{“}\psi_U: (\mathcal{G}^*(U, \mathcal{F}|_U), D) \longrightarrow (\Omega^*(U), d) \text{ es un cuasi-isomorfismo”}$$

Tan sólo hemos de verificar que se cumplen las hipótesis TB1-TB4. Veamos que se cumple TB1: sea la proyección  $\pi: (U \times E, \mathcal{F} \times \mathcal{H}) \longrightarrow (U, \mathcal{F})$ , donde  $(U, \mathcal{F})$  es un abierto saturado y  $(E, \mathcal{H})$  una variedad contráctil foliada por puntos. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}^*(M, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\Psi_M} & \Omega^*(M) \\ \pi^* \downarrow & & \downarrow \pi^* \\ \mathcal{G}^*(M \times E, \mathcal{F} \times \mathcal{H}) & \xrightarrow{\Psi_{M \times E}} & \Omega^*(M \times E) \end{array}$$

Por el lema 2.15 y por el lema de Poincaré para cohomología de de Rham, tenemos que las flechas verticales son cuasi-isomorfismos. Por lo tanto, si  $\Psi_{M \times E}$  es un cuasi-isomorfismo,  $\Psi_M$  también lo es. Hemos confirmado la hipótesis TB1.

Para verificar que se cumple TB2, tomamos  $(M, \mathcal{F})$  y  $M = U \cup V$ , siendo  $U$  y  $V$  saturados. Como el complejo de Gysin cumple la propiedad de Mayer-Vietoris (corolario 2.13), tenemos el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}^*(M, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{G}^*(U, \mathcal{F}) \oplus \mathcal{G}^*(V, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{G}^*(U \cap V, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \\ & & \Psi_M \downarrow & & (\Psi_U, \Psi_V) \downarrow & & \Psi_{U \cap V} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^*(M) & \longrightarrow & \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) & \longrightarrow & \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0, \end{array}$$

del cual se sigue, por el lema de los cinco, que si  $\Psi_U, \Psi_V$  y  $\Psi_{U \cap V}$  son cuasi-isomorfismos, entonces  $\Psi_M$  también lo es. Es decir, se cumple TB2.

Para verificar la hipótesis TB3, consideramos el isomorfismo

$$\Omega^*\left(\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \cong \prod_{\alpha} \Omega^*(U_\alpha), \quad (2.9)$$

donde  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es una familia disjunta. Notamos que este isomorfismo sigue siendo válido también para complejos de formas básicas. De estos dos isomorfismos y del hecho de que la aplicación de Gysin sea natural se deduce la hipótesis TB3.

Para confirmar TB4, tenemos que probar que si  $(U, \mathcal{F}_U)$  es un entorno de Carrière, la aplicación de Gysin  $\Psi_U$  es un cuasi-isomorfismo. Denotamos por  $D_U, \mu_U, \kappa_U, e_U$

las restricciones a  $U$  de  $D, \mu, \kappa$  y  $e$ , respectivamente. Por el lema 2.14, tenemos que  $[\kappa_U] \in H^1(M/\mathcal{F})$  es una clase nula, es decir, existe una función básica  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\kappa_U = df$ . Consideramos ahora el cambio de métrica  $\mu'_U = e^{2f}\mu_U$ . Tenemos:

$$X' = e^{-f}X \quad \chi' = e^f\chi, \quad \kappa'_U = 0, \quad e'_U = e^f e_U.$$

Construimos ahora el siguiente diagrama de aplicaciones diferenciales:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}^*(U, \mathcal{F}_U), D_U) & \xrightarrow{\Psi_U} & (\Omega^*(U), d) \\ \xi \downarrow & \nearrow \Psi'_U & \\ (\mathcal{G}^*(U, \mathcal{F}_U), D'_U) & & \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} \xi(\alpha, \beta) &= (\alpha, e^{-f}\beta); \\ D'_U(\alpha, \beta) &= d\alpha + e' \wedge \beta, -d\beta); \\ \Psi'_U(\alpha, \beta) &= \alpha + \chi' \wedge \beta \end{aligned}$$

para todo  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}^*(U, \mathcal{F}_U)$ . Notamos que  $X'$  es un campo de Killing (ver lema 2.4), y por lo tanto,  $\Psi'_U$  es un cuasi-isomorfismo (recordar (2.1)). Es inmediato comprobar que  $\xi$  es un isomorfismo. Por lo tanto,  $\Psi_U$  es un cuasi-isomorfismo. ♣

Combinando (2.2), la primera fila de (2.8) y la proposición 2.16, construimos el siguiente diagrama de filas exactas.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\Omega^*(M/\mathcal{F}), d) & \xrightarrow{\iota} & (\Omega^*(M), d) & \xrightarrow{\rho} & (\Omega^*(M)/\Omega^*(M/\mathcal{F}), d) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow \Psi & & \uparrow \Psi_\kappa \\ 0 & \longrightarrow & (\Omega^*(M/\mathcal{F}), d) & \longrightarrow & (\mathcal{G}^*(M, \mathcal{F}), D) & \longrightarrow & (\Omega^*(M/\mathcal{F}), d_\kappa) \longrightarrow 0, \end{array} \quad (2.10)$$

donde  $\Psi_\kappa(\beta) = \overline{\chi \wedge \beta}$ . Del lema de los cinco se sigue que  $\Psi_\kappa$  es un cuasi-isomorfismo, lo cual responde a la primera pregunta del problema de Gysin. Además, podemos derivar la sucesión larga de Gysin y calcular de forma estándar el homomorfismo de conexión, tal y como recogemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.17 (Sucesión de Gysin para flujos riemannianos regulares).** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano sobre la variedad cerrada  $M$ , y sea  $\mu$  una métrica para la cual la forma de curvatura media  $\kappa$  sea básica. Entonces, tenemos la siguiente sucesión exacta larga:*

$$\dots \rightarrow H^i(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\iota^*} H^i(M) \xrightarrow{(\Psi_\kappa^*)^{-1} \circ \rho^*} H_{\kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge[e]} H^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \dots, \quad (2.11)$$

donde el homomorfismo de conexión es la multiplicación por la clase de Euler  $[e] \in H_{-\kappa}^2(M/\mathcal{F})$ .

Este teorema da la respuesta completa al problema de Gysin que planteábamos en este capítulo:

**Problema de Gysin para flujos riemannianos regulares**

- i) El término de Gysin es:  $\mathfrak{G}^*(M, \mathcal{F}) = H_{\kappa}^{*-1}(M/\mathcal{F})$ ;
- ii) El homomorfismo de conexión es:  $\varepsilon([\alpha]) = [\alpha \wedge e]$ , para todo  $[\alpha] \in H_{\kappa}^*(M/\mathcal{F})$ .

**Observación 2.5.** Si  $\mathcal{F}$  es un flujo isométrico, podemos tomar  $\mu$  tal que  $\kappa$  sea nula. En ese caso,  $d_{\kappa} = d$ , y por lo tanto, la sucesión (2.11) generaliza la obtenida por Kamber y Tondeur (2.3).

**Observación 2.6.** La sucesión de Gysin es independiente de la métrica elegida en el siguiente sentido: si tomamos dos métricas casi-fibradas  $\mu, \mu'$  con formas de curvatura media  $\kappa, \kappa'$  básicas, el diagrama (2.10) proporciona un isomorfismo de cadenas entre cada una de las sucesiones de Gysin asociadas a  $\mu$  y  $\mu'$  y la sucesión canónica (2.1). Por lo tanto, todas las sucesiones de Gysin están relacionadas mediante un isomorfismo de cadenas.

**Observación 2.7.** Combinando el cuasi-isomorfismo  $\Psi_{\kappa}$  y el teorema de dualidad 1.12, obtenemos que los términos  $E_2^{:,1}$  y  $E_2^{:,0}$  de la sucesión espectral de un flujo riemanniano son duales. J.A. Álvarez prueba en [1] con mayor generalidad este resultado, usando técnicas analíticas, diferentes a nuestro enfoque geométrico.

**Observación 2.8.** La sucesión de Gysin es un objeto en la categoría de sucesiones exactas de  $H^*(M/\mathcal{F})$ -módulos.

**Ejemplo 2.8.** Es bien conocido que la cohomología de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^{2k+1}/\mathbb{S}^1$  está generada por una clase de grado 2, que es precisamente la clase de Euler de la acción de Hopf. Como ilustración de los resultados de este capítulo, aplicaremos la sucesión de Gysin (2.11) para calcular la cohomología básica de un flujo riemanniano regular cualquiera sobre una esfera impar.

Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano regular sobre  $\mathbb{S}^{2n+1}$ . Como  $\mathbb{S}^{2n+1}$  es simplemente conexo, tenemos que  $\mathcal{F}$  es isométrico, y por lo tanto, la sucesión de Gysin resulta:

$$\dots \rightarrow H^i(\mathbb{S}^{2n+1}) \longrightarrow H^{i-1}(\mathbb{S}^{2n+1}/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge[e]} H^{i+1}(\mathbb{S}^{2n+1}/\mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbb{S}^{2n+1}) \rightarrow \dots \quad (2.12)$$

Como la cohomología de  $\mathbb{S}^{2n+1}$  es  $\mathbb{R}$  en los grados 0 y  $2n + 1$  y nula en el resto, de (2.12) obtenemos:

$$H^i(\mathbb{S}^{2n+1}/\mathcal{F}) \cong H^{i+2}(\mathbb{S}^{2n+1}/\mathcal{F}) \quad 0 \leq i \leq 2n - 1,$$

siendo la multiplicación por la clase de Euler el isomorfismo. De  $H^0(\mathbb{S}^{2n+1}/\mathcal{F}) = \mathbb{R}$  se sigue que en todos los grados pares la cohomología es  $\mathbb{R}$ . Si escribimos la sucesión (2.12) para  $i = 0$ , obtenemos  $H^1(\mathbb{S}^{2n+1}/\mathcal{F}) = 0$ , y por lo tanto, todos los grados impares son nulos. Hemos obtenido los números de Betti:

$$H^i(\mathbb{S}^{2n+1}/\mathcal{F}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } i = 0, 2, \dots, 2n; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como la multiplicación por la clase de Euler  $[e] \in H^2(\mathbb{S}^{2n+1}/\mathcal{F})$  es un isomorfismo, obtenemos que los generadores de la cohomología son  $\{1, [e], [e^2], \dots, [e^n]\}$ . Hemos probado el isomorfismo de álgebras

$$H^*(\mathbb{S}^{2n+1}/\mathcal{F}) \cong \mathbb{R}[e]/e^{n+1}.$$

Cuando  $\mathcal{F}$  está dado por una acción de  $\mathbb{S}^1$  sin puntos fijos sobre un espacio  $S^{2n+1}$  que tiene la cohomología de una esfera impar, el cociente  $CP^n = S^{2n+1}/\mathbb{S}^1$  tiene la cohomología de un espacio proyectivo complejo. Este tipo de espacios se denominan *espacios proyectivos complejos cohomológicos*.

### 2.3.3. Nulidad de la Clase de Euler

En este apartado probamos que la clase de Euler  $[e] \in H_{-\kappa}^2(M/\mathcal{F})$  no depende de la métrica elegida, y que su nulidad tiene una interpretación geométrica.

Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano sobre la variedad compacta  $M$  y fijemos un sistema completo de actores  $(\mu, X, \chi, \kappa, e)$ . Si  $e = 0$ , es inmediato comprobar que la distribución ortogonal a  $\mathcal{F}$  es integrable. En otras palabras, existe una foliación  $\mathcal{G}$  que es perpendicular al flujo. En efecto, para todo par de campos  $Y, Z$  tales que  $\chi(Z) = \chi(Y) = 0$ , tenemos:

$$\chi([Y, Z]) = d\chi(Y, Z) = (\chi \wedge \kappa)(Y, Z) = 0.$$

Recordamos que una foliación  $\mathcal{G}$  de codimensión 1 está dada por una 1-forma no singular  $\omega$  mediante  $\mathcal{G} = \ker \omega$ . Es bien conocido que en ese caso, existe una 1-forma  $\tau$  tal que  $d\omega = \omega \wedge \tau$ . Se dice que  $\tau$  es una *torsión* de  $\omega$ . En el caso de que  $e = 0$ , la foliación perpendicular está dada por  $\chi$ , y la torsión es  $\kappa$ .

Cuando el flujo sea isométrico, podemos suponer  $\kappa = 0$ . La forma de Euler  $d\chi$  es básica, y define una clase de cohomología

$$[d\chi] \in H^2(M/\mathcal{F})$$

que llamaremos *clase de Euler*, y que no depende de la métrica  $\mu$  elegida. Su nulidad encierra un significado geométrico, descrito en [49] por M. Saralegi: la clase de Euler de un flujo isométrico es nula si y sólo si existe una foliación  $\mathcal{G}$  transversa al flujo y definida por una 1-forma no singular  $\omega$  cerrada. Mediante el teorema de Tischler ([53]), podemos aproximar  $\mathcal{G}$  por una fibración transversa al flujo. Tenemos el siguiente:

**Teorema 2.18 (M. Saralegi).** *Sea  $(M, \mathcal{F})$  un flujo isométrico. Entonces, son equivalentes:*

- i) *existe una fibración transversa a  $\mathcal{F}$ ;*
- ii) *la clase de Euler de  $\mathcal{F}$  se anula.*

**Observación 2.9.** En el caso particular de una fibración de Seifert, la clase de Euler del flujo coincide con la clase de Euler usual, salvo un factor de proporcionalidad. Este factor es exactamente la medida de una hoja genérica de  $\mathcal{F}$ . Por lo tanto, podemos modificar la métrica de modo que ambas clases coincidan.

A continuación, recuperaremos estos resultados en el caso de un flujo riemanniano general. Recordamos que dado un sistema completo de actores, tenemos

$$de = -e \wedge \kappa,$$

y que, por lo tanto, la forma de Euler define una clase:

$$[e] \in H_{-\kappa}^2(M/\mathcal{F}).$$

Veamos que esta clase no depende de la métrica elegida. Sean  $(\mu_i, X_i, \chi_i, e_i, \kappa_i)$ ,  $i = 1, 2$  sendos sistemas completos de actores para  $(M, \mathcal{F})$ . Por el teorema 1.8, tenemos:

$$[\kappa_1] = [\kappa_2] \in H^1(M/\mathcal{F}),$$

es decir, existe una función básica  $f$  tal que  $df = \kappa_2 - \kappa_1$ . Se comprueba inmediatamente que el isomorfismo de álgebras

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (\Omega^*(M/\mathcal{F}), d_{-\kappa_2}) & \longrightarrow & (\Omega^*(M/\mathcal{F}), d_{-\kappa_1}) \\ \omega & \longmapsto & e^f \omega \end{array}$$

es diferencial. Notamos que induce un isomorfismo en cohomología, canónico salvo una constante multiplicativa. Describimos la independencia de la clase de Euler en la siguiente:

**Proposición 2.19.** *En las condiciones anteriores, dado el isomorfismo canónico (salvo constante multiplicativa):*

$$\varphi: H_{-\kappa_2}^2(M/\mathcal{F}) \longrightarrow H_{-\kappa_1}^2(M/\mathcal{F}),$$

se tiene que  $\varphi([e_2])$  y  $[e_1]$  son proporcionales. En particular, la nulidad de la clase de Euler no depende de la métrica  $\mu$  elegida, sino de  $\mathcal{F}$ .

*Demostración.* Procediendo como en la proposición 2.16, podemos probar (ver apartado 2.5) que la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi: (\Omega^*(M/\mathcal{F}) \oplus \Omega^{*-1}(M/\mathcal{F}), D_\kappa) &\longrightarrow (\Omega^*(M), d_{-\kappa}) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha + \chi \wedge \beta \end{aligned}$$

es un cuasi-isomorfismo, donde  $D_\kappa(\alpha, \beta) = (d_{-\kappa}\alpha + e \wedge \beta, -d\beta)$  para todo sistema completo de actores. De ese cuasi-isomorfismo se deriva de forma canónica la siguiente *sucesión de Gysin torcida*:

$$\dots \rightarrow H_{-\kappa}^i(M/\mathcal{F}) \longrightarrow H_{-\kappa}^i(M) \longrightarrow H^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge[e]} H_{-\kappa}^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

El isomorfismo  $\varphi$  induce un isomorfismo de cadenas entre las sucesiones de Gysin torcidas para  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , de la cual extraemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^0(M/\mathcal{F}) & \xrightarrow{\wedge[e_1]} & H_{-\kappa_1}^2(M/\mathcal{F}) \\ \parallel & & \uparrow \wr_{e^f} \\ H^0(M/\mathcal{F}) & \xrightarrow{\wedge[e_2]} & H_{-\kappa_2}^2(M/\mathcal{F}) \end{array}$$

del cual se sigue inmediatamente el resultado. ♣

Recordamos que para una foliación de dimensión  $p$  y codimensión  $q$  y para cada par de cartas foliadas  $\varphi, \psi$ , el cambio de coordenadas es de la forma

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)) \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q.$$

Diremos que una foliación es *transversalmente afín* si existe un atlas foliado para el cual los cambios de coordenadas  $h_2: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$  son aplicaciones afines, es decir, la suma de una traslación y una aplicación lineal. Notamos que si  $h_2$  es además una isometría, tenemos que la foliación es riemanniana. Se tiene la siguiente caracterización:

**Lema 2.20** ([22]). *Una foliación  $\mathcal{G}$  de codimensión 1 es transversalmente afín y orientable si y sólo si está determinada por una 1-forma no singular  $\omega$  cuya torsión  $\tau$  es cerrada.*

Presentamos a continuación el segundo resultado importante de esta memoria.

**Teorema 2.21.** *Para un flujo riemanniano  $\mathcal{F}$  son equivalentes:*

- i) *la clase de Euler se anula;*
- ii) *existe una foliación  $\mathcal{G}$  transversa a  $\mathcal{F}$  definida por una 1-forma  $\omega$  cuya torsión es básica.*

*Además, cualquiera de las dos condiciones implica que  $\mathcal{G}$  es transversalmente afín.*

*Demostración.* Supongamos i) y sea  $(\mu, X, \chi, e, \kappa)$  un sistema completo de actores. Tenemos que existe  $\gamma \in \Omega^1(M/\mathcal{F})$  tal que  $d_{-\kappa}\omega = e$ . Entonces, la forma  $\omega = \chi - \gamma$  es integrable, pues

$$d\omega = e + \chi \wedge \kappa - e + \kappa \wedge \gamma = \omega \wedge \kappa,$$

siendo  $\kappa$  la torsión, que es una forma básica.

Suponemos ahora ii), y sea  $X$  un campo que defina  $\mathcal{F}$ . Podemos suponer que  $\mathcal{G} = \ker \omega$ , con  $\omega(X) = 1$ , de modo que la torsión  $\tau$  de  $\omega$  sea básica. Si  $\mu$  es una métrica casi-fibrada y  $\mu_Q$  es su proyección ortogonal, podemos construir otra métrica casi-fibrada

$$\mu' = \omega \otimes \omega + \mu_Q.$$

Como  $X$  es unitario para  $\mu'$ , se sigue que  $\chi' = i_X \mu' = \omega$ , y que la forma de curvatura media es

$$\kappa' = L_X \chi' = L_X \omega = \tau,$$

que es básica. De  $d\omega = \omega \wedge \tau$  se sigue que  $\{\mu', X, \omega, 0, \tau\}$  es un sistema adaptado de actores, y por lo tanto, la clase de Euler es nula.

La afirmación adicional se sigue inmediatamente del lema 2.20 y del hecho de que si  $\kappa$  es básica, entonces ha de ser cerrada (ver [54]). ♣

**Ejemplo 2.9.** En el ejemplo de  $T_A^3$  (ver 2.6), la forma de Euler para la métrica que construimos es nula, y por lo tanto, la clase de Euler también. De hecho,  $\{T, X_2\}$  definen una distribución integrable transversa al flujo y transversalmente afín (la aplicación afín del cambio de cartas consiste en multiplicar por el valor propio  $\lambda_1$  de  $A$ ).

## 2.4. Independencia de $[\kappa]$ y $[e]$

Para terminar este apartado, mostraremos que las clases de Euler y de  $[\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F})$  son independientes. Un producto  $\mathbb{S}^1 \times M$  y la fibración de Hopf y son ejemplos inmediatos de flujos isométricos con clases de Euler nula y no nula, respectivamente. El ejemplo 2.6 es un flujo riemanniano no isométrico cuya clase de Euler es nula. A continuación, describimos un flujo riemanniano donde tanto la clase de  $[\kappa]$  como la de Euler son no nulas.

**Ejemplo 2.10.** Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}),$$

y sus dos valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , que satisfacen  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$  y  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ . Denotamos por  $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$  la base ortonormal de vectores propios correspondiente. Las matrices  $A, I \in SL(4, \mathbb{Z})$  dadas por

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad I = \begin{pmatrix} Id_2 & Id_2 \\ 0 & Id_2 \end{pmatrix}$$

definen sendos automorfismos del toro  $\mathbb{T}^4$  que denotaremos con las mismas letras. Definimos ahora la variedad  $M^6$  como la suspensión de la representación

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{T}^4) \\ (k, l) &\longmapsto A^k \circ I^l. \end{aligned}$$

Más explícitamente,  $M^6$  es el espacio de órbitas de la acción

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{T}^4 \times \mathbb{T}^2) &\longrightarrow \mathbb{T}^4 \times \mathbb{R}^2 \\ ((k, l), [y_1, y_2, z_1, z_2], (t, x)) &\longmapsto (\rho(k, l)[y_1, y_2, z_1, z_2], (x + k, t + l)). \end{aligned}$$

Notamos que queda definida una fibración  $\pi: M^6 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ . Esta variedad se introduce en otro contexto en [21], donde se estudian algunas de sus propiedades. Tenemos la siguiente paralelización de  $M^6$ :

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_i = \lambda_i^t \left( a_i \frac{\partial}{\partial y_1} + b_i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \\ Z_i &= x \lambda_i^t \left( a_i \frac{\partial}{\partial y_1} + b_i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \lambda_i^t \left( a_i \frac{\partial}{\partial z_1} + b_i \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \quad (2.13)$$

Denotamos por  $\{\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2\}$  la base dual de 1-formas diferenciables, cuya expresión es la siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha &= dt; \quad \beta = dx; \quad \delta_i = \lambda_i^{-t} (a_i dz_1 + b_i dz_2); \\ \gamma_i &= \lambda_i^{-t} (a_i dy_1 + b_i dy_2) - x \lambda_i^{-t} (a_i dz_1 + b_i dz_2) \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \quad (2.14)$$

Calculamos las diferenciales de las formas:

$$\begin{aligned} d\alpha = d\beta = 0; \quad d\delta_i &= (-\log \lambda_i)\alpha \wedge \delta_i \\ d\gamma_i &= (-\log \lambda_i)\alpha \wedge \gamma_2 - \beta \wedge \lambda_2 \end{aligned} \quad (i = 1, 2)$$

y los corchetes de Lie de los campos:

$$[T, Y_i] = (\log \lambda_i)Y_i, \quad [T, Z_i] = (\log \lambda_i)Z_i, \quad [X, Z_i] = Y_i \quad (i = 1, 2)$$

siendo nulos los restantes. Sea  $\mathcal{F}$  el flujo definido por  $Y_1$ , y consideramos la métrica  $\mu$  tal que (2.13) sea un paralelismo ortonormal. Se comprueba inmediatamente que  $L_{Y_1}\mu_Q = 0$ , y que, por lo tanto,  $\mathcal{F}$  es un flujo riemanniano y  $\mu$  es casi-fibrada. Por otro lado, tenemos que

$$L_{Y_1}\mu(Y_1, T) = \mu(Y_1, [Y_1, T]) = -\log \lambda_1 \neq 0,$$

por lo que  $Y_1$  no es un campo de Killing para  $\mu$ . Para ver que no puede existir ningún campo de Killing que defina  $\mathcal{F}$ , identificamos primero el resto de los actores:

$$\chi = \gamma_1, \quad \kappa = (\log \lambda_1)\alpha, \quad e = -\beta \wedge \delta_1, \quad (2.15)$$

de modo que el sistema completo resulta  $\{\mu, Y_1, \gamma_1, -\beta \wedge \delta_1, (\log \lambda_1)\alpha\}$ . Notamos que tanto  $\kappa$  como  $e$  son básicas. Tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 2.22.** *El flujo  $\mathcal{F}$  no es isométrico.*

*Demostración.* Recordamos que la aplicación inducida por la inclusión

$$\iota^*: H^1(M/\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(M^6)$$

es inyectiva, y por lo tanto, basta probar que  $[\alpha] \in H^1(M^6)$  no es nula. Como  $\pi: M^6 \longrightarrow \mathbb{T}^2$  es una fibración, se tiene el monomorfismo

$$\pi^*: H^1(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^1(M^6).$$

Uniendo esto al hecho de que  $[\alpha] = \pi^*([\theta])$ , siendo  $\theta$  uno de los generadores de  $H^1(\mathbb{T}^2)$ , obtenemos el resultado. ♣

Para probar que la clase de Euler es no nula, probaremos primero que la cohomología  $H_{-\kappa}^*(M/\mathcal{F})$  puede calcularse utilizando tan sólo como coeficientes formas básicas para la fibración  $\pi$ . Consideramos el álgebra real

$$\mathfrak{E} = \langle \alpha, \beta, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \rangle,$$

y el complejo diferencial

$$C^\infty(\mathbb{T}^2) \otimes \mathfrak{E}$$

al cual podemos dotar con la diferencial  $d_{-\kappa} = d_{-\alpha}$ . Tenemos el siguiente:

**Lema 2.23.** *La aplicación diferencial*

$$\begin{aligned} \Psi : (C^\infty(\mathbb{T}^2) \otimes \mathfrak{C}, d_{-\kappa}) &\longrightarrow \Omega^*(M^6/\mathcal{F}, d_{-\kappa}) \\ (f, \omega) &\longmapsto (\pi^* f)\omega \end{aligned}$$

es un cuasi-isomorfismo.

*Demostración.* Aplicaremos la segunda versión del truco de Bredon (lema 2.10) a una base  $\mathcal{U}$  formada por convexos geodésicos de  $\mathbb{T}^2$ . Denotamos por  $\mathfrak{C}_U$  al álgebra generada por las restricciones de los generadores de  $\mathfrak{C}$  a  $\pi^{-1}(U)$ . Sea ahora la afirmación  $P$  formulada sobre abiertos  $U$  de  $\mathbb{T}^2$ :

$$P(U) = \text{“la aplicación } \Psi_U : (C^\infty(U) \otimes \mathfrak{C}, d_{-\kappa_U}) \longrightarrow (\Omega^*(\pi^{-1}(U)/\mathcal{F}_U), d_{-\kappa_U}) \text{ es un cuasi-isomorfismo.”}$$

Hemos de comprobar que se cumplen las hipótesis 1, 2 y 3 de 2.10. La hipótesis 2 se deduce del hecho de que las dos cohomologías cumplen la propiedad de Mayer-Vietoris. En efecto, basta levantar una partición de la unidad de  $\mathbb{T}^2$  a  $M^6$  para obtener una partición de la unidad básica. La hipótesis 3 se sigue de (2.9). Por lo tanto sólo nos queda probar que  $P(U)$  es cierto para cada  $U \in \mathcal{U}$ , para lo cual procedemos de la siguiente manera:

- Como  $\kappa_U = \alpha|_U$  es exacta, basta comprobar  $P$  para  $\kappa = 0$ , es decir, sustituyendo  $d_{-\kappa}$  por  $d$ ;
- Por el lema de Poincaré, podemos contraer  $U$ , lo cual nos reduce a comprobar que el cuasi-isomorfismo en una fibra de  $\pi$ . Tenemos el isomorfismo  $H^*(\mathbb{T}^4/\mathcal{F}_{\mathbb{T}}) \cong \langle \gamma_2, \delta_1, \delta_1 \rangle$ , siendo  $\mathcal{F}_{\mathbb{T}}$  el flujo lineal dado por la restricción de  $\mathcal{F}$  a una fibra, con lo cual concluimos la prueba.



**Proposición 2.24.** *La clase de Euler del flujo  $\mathcal{F}$  es no nula.*

*Demostración.* Supongamos, por reducción al absurdo, que existe una 1-forma básica  $\omega$  tal que

$$e = -\beta \wedge \delta_1 = d\omega + \log \lambda_1 \alpha \wedge \omega. \quad (2.16)$$

Usando la paralelización (2.13) y la proposición 2.23, podemos escribir  $\omega$  como:

$$\omega = f_\alpha \alpha + f_\beta \beta + f_{\gamma_2} \gamma_2 + f_{\delta_1} \delta_1 + f_{\delta_2} \delta_2, \quad (2.17)$$

donde las funciones dependen de las coordenadas  $x$  y  $t$ . Un cálculo directo a partir de (2.17) y (2.16) nos lleva a las ecuaciones:

$$X(f_{\delta_1}) = 1 \quad (2.18)$$

$$T(f_{\delta_1}) = 0 \quad (2.19)$$

De la ecuación (2.19) deducimos que  $f_{\delta_1} = i_{Z_1}\omega$  depende sólo de  $x$ . Por lo tanto, podemos considerar que (2.18) es una ecuación en  $\mathbb{S}^1$ . Esta ecuación no tiene solución, y por lo tanto, hemos llegado a una contradicción. ♣

## 2.5. Más sucesiones tipo Gysin

Para terminar este capítulo y a modo de ilustración de las técnicas que hemos descrito, construiremos nuevas sucesiones exactas de tipo Gysin, en las que intervendrán nuevas cohomologías asociadas a un flujo riemanniano, y que generalizan las que ya han aparecido.

Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano sobre la variedad cerrada  $M$ , y sea  $\{\mu, X, \chi, e, \kappa\}$  un sistema completo de actores. Para cada  $l \in \mathbb{Z}$ , definimos la diferencial

$$d_{l\kappa}\omega = d\omega - l\kappa \wedge \omega \quad \text{para todo } \omega \in \Omega^*(M),$$

y los grupos de cohomología correspondientes

$$H_{l\kappa}^*(M) = H^*(\Omega^*(M), d_{l\kappa}), \quad H_{l\kappa}^*(M/\mathcal{F}) = H^*(\Omega^*(M/\mathcal{F}), d_{l\kappa}). \quad (2.20)$$

Notamos que si  $\mathcal{F}$  es un flujo isométrico, las cohomologías anteriores son isomorfas a la básica y a la de de Rham. Necesitaremos los dos siguientes lemas para probar que las cohomologías  $H_{l\kappa}^*(M/\mathcal{F})$  son de dimensión finita.

**Lema 2.25.** *Sea  $U$  un entorno saturado de un entorno de Carrière. Entonces, si  $H^*(U)$  es de dimensión finita, también  $H^*(U/\mathcal{F})$  lo es.*

*Demostración.* Como  $(U, \mathcal{F})$  es un flujo isométrico, la sucesión de Gysin es:

$$\dots \rightarrow H^i(U/\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(U) \xrightarrow{\rho^i} H^{i-1}(U/\mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}(U/\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

de donde obtenemos el isomorfismo de espacios vectoriales:

$$H^i(U/\mathcal{F}) \cong \ker \rho^i \oplus \text{coker } \rho^{i-1}.$$

Por lo tanto, si  $H^{i-1}(U/\mathcal{F})$  es de dimensión finita, tenemos que  $H^{i+1}(U/\mathcal{F})$  también lo es. Como para  $i < 0$  se tiene  $H^i(M/\mathcal{F}) = 0$ , obtenemos el resultado. ♣

El siguiente lema es un caso particular de [58].

**Lema 2.26.** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano sobre una variedad compacta. Entonces, existe un cubrimiento finito  $\mathcal{U}$  formado por entornos de Carrière de modo que toda intersección  $U$  de elementos de  $\mathcal{U}$  contiene una hoja cuya clausura es un retracto foliado por deformación fuerte de  $U$ .*

*Demostración.* En [58], R. Wolak prueba este lema para foliaciones riemannianas singulares. Los entornos que se construyen son entornos tubulares foliados de clausuras de hojas de  $\mathcal{F}$ . Para el caso regular, eso equivale a tomar entornos de Carrière con radios suficientemente pequeños. ♣

Notamos que la existencia de particiones de la unidad básicas garantiza la propiedad de Mayer-Vietoris para estas nuevas cohomologías. Como consecuencia, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.27.** *Si  $M$  es compacta, las cohomologías  $H_{l\kappa}^*(M/\mathcal{F})$  y  $H_{l\kappa}^*(M)$  son de dimensión finita para todo  $l \in \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Podemos tomar un cubrimiento finito  $\mathcal{U}$  como en el lema 2.26, y consideramos  $\mathcal{U}'$  el cubrimiento formado por los elementos de  $\mathcal{U}$  y sus intersecciones finitas. Como el flujo es isométrico en cada elemento  $U$  de  $\mathcal{U}$ , las cohomologías  $H_{l\kappa}^*(U)$  y  $H_{l\kappa}^*(U/\mathcal{F})$  son isomorfas a  $H^*(U)$  y  $H^*(U/\mathcal{F})$ , respectivamente, y lo mismo sucede para los elementos de  $\mathcal{U}'$ . Como tanto los abiertos de  $\mathcal{U}$  como sus intersecciones se pueden retraer a un toro, para todo  $U \in \mathcal{U}'$  tenemos que  $H^*(U)$  es de dimensión finita, y aplicando el lema 2.25, tenemos que  $H_{l\kappa}^*(U)$  y  $H_{l\kappa}^*(U/\mathcal{F})$  son de dimensión finita. Aplicando sucesivamente la propiedad de Mayer-Vietoris con los elementos de  $\mathcal{U}$ , obtenemos el resultado. ♣

**Observación 2.10.** La proposición anterior ilustra cómo en el caso particular de un flujo riemanniano se puede probar la finitud de la cohomología básica utilizando las técnicas usadas en esta memoria.

A continuación, relacionaremos las cohomologías (2.20) mediante dos resultados que generalizan la dualidad de Kamber-Tondeur 1.12 y la sucesión de Gysin 2.11. Las demostraciones no hacen sino aprovechar las pruebas existentes de los teoremas citados, al ser algebraicamente similares.

**Teorema 2.28.** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano sobre la variedad cerrada  $M$ , de dimensión  $n$ , sea  $\mu$  una métrica casi-fibrada tal que  $\kappa$  sea básica, y sea  $l \in \mathbb{Z}$ . Entonces, la forma bilineal*

$$\Phi: H_{(1-l)\kappa}^{n-i-1}(M/\mathcal{F}) \otimes H_{l\kappa}^i(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por  $\Phi([\alpha] \otimes [\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta \wedge \chi$  es no degenerada.

*Demostración.* Tan sólo probaremos aquí que la aplicación del enunciado está bien definida. Para el resto de la prueba se aplica el truco de Bredon tal y como haremos en el teorema 3.26.

Veamos primero que  $\Phi([\alpha] \otimes [\beta])$  no depende del representante de  $[\alpha]$  en  $H_{(1-l)\kappa}^{n-i-1}(M/\mathcal{F})$ . Sean  $\alpha \in \Omega^{n-i-2}(M/\mathcal{F})$  y  $\beta \in \Omega^i(M/\mathcal{F})$  con  $d_{l\kappa}\beta = 0$ . Hemos de probar

$$\Phi([d_{(1-l)\kappa}\alpha] \otimes [\beta]) = \int_M d_{(1-l)\kappa}\alpha \wedge \beta \wedge \chi = 0 \quad (2.21)$$

Tenemos, por un lado,

$$d_{1-l\kappa}\alpha \wedge \beta \wedge \chi = d\alpha \wedge \beta \wedge \chi + (-1)^n \alpha \wedge \beta \wedge \chi \wedge (1-l)\kappa. \quad (2.22)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta \wedge \chi) &= d\alpha \wedge \beta \wedge \chi + (-1)^{n-i} \alpha \wedge l\kappa \wedge \beta \wedge \chi \\ &\quad + (-1)^n (\alpha \wedge \beta \wedge \chi \wedge \kappa + \alpha \wedge \beta \wedge e) \\ &= d\alpha \wedge \beta \wedge \chi + (-1)^{n-i} \alpha \wedge l\beta \wedge \chi + (-1)^n \alpha \wedge \beta \wedge \chi \wedge \kappa, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde hemos utilizado que  $\alpha \wedge \beta \wedge e$  es una forma básica de grado  $n$ , y por lo tanto, ha de ser nula. Combinando (2.22) y (2.23), obtenemos

$$d(\alpha \wedge \beta \wedge \chi) = d_{(1-l)\kappa}\alpha \wedge \beta \wedge \chi,$$

de donde se sigue que

$$\int_M d_{(1-l)\kappa}\alpha \wedge \beta \wedge \chi = \int_M d(\alpha \wedge \beta \wedge \chi) = 0,$$

lo cual demuestra (2.21).

Análogamente, se prueba que si  $\alpha \in \Omega^{n-i-1}(M/\mathcal{F})$  y  $\beta \in \Omega^{i-1}(M/\mathcal{F})$  con  $d_{l\kappa}\beta = 0$ , entonces

$$d(\alpha \wedge \beta \wedge \chi) = (-1)^{n-i-1} \alpha \wedge d_{l\kappa}\beta \wedge \chi$$

y, por lo tanto,

$$\Phi([\alpha] \otimes [d_{l\kappa}\beta]) = \int_M d(\alpha \wedge \beta \wedge \chi) = 0.$$

♣

**Proposición 2.29.** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano sobre la variedad cerrada  $M$ , y sea  $\mu$  una métrica cuya 1-forma de curvatura media  $\kappa$  sea básica. Entonces, la aplicación diferencial*

$$\Psi : (\mathcal{G}^*(M, \mathcal{F}), D_l) \longrightarrow (\Omega^*(M), d_{l\kappa}) \\ (\alpha, \beta) \longmapsto \alpha + \chi \wedge \beta,$$

donde  $D_l(\alpha, \beta) = (d_{l\kappa}\alpha + \beta \wedge e, -d_{(l)\kappa}\beta + \kappa \wedge \beta)$ , es un cuasi-isomorfismo.

*Demostración.* Se comprueba directamente que la aplicación del enunciado es diferencial. Como las cohomologías presentadas tienen las mismas propiedades que las que intervienen en la proposición 2.16, se puede aplicar el truco de Bredon de la misma manera, obteniéndose el resultado. ♣

De la misma manera, se derivan canónicamente las sucesiones de Gysin:

**Proposición 2.30.** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano sobre la variedad cerrada  $M$ , y sea  $\mu$  una métrica para la cual la forma de curvatura media  $\kappa$  sea básica. Entonces, tenemos para cada  $l \in \mathbb{Z}$  la siguiente sucesión exacta larga:*

$$\cdots \rightarrow H_{l\kappa}^i(M/\mathcal{F}) \longrightarrow H_{l\kappa}^i(M) \longrightarrow H_{(l+1)\kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge[e]} H_{l\kappa}^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \cdots, \quad (2.24)$$

donde el homomorfismo de conexión es la multiplicación por la clase de Euler  $[e] \in H_{-\kappa}^2(M/\mathcal{F})$ .

**Observación 2.11.** Estas sucesiones de tipo Gysin dan solución al problema de Gysin planteado por la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (\Omega^*(M/\mathcal{F}), d_{l\kappa}) \longrightarrow (\Omega^*(M), d_{l\kappa}) \xrightarrow{\rho} (\Omega^*(M)/\Omega^*(M/\mathcal{F}), d_{l\kappa}) \longrightarrow 0.$$

**Observación 2.12.** Las sucesiones de Gysin (2.24) son sucesiones exactas de módulos sobre  $H^*(M/\mathcal{F})$ . En efecto, se comprueba inmediatamente que si  $d_{l\kappa}\alpha = 0$  y  $d_{p\kappa}\beta = 0$ , entonces  $d_{(l+p)\kappa}\alpha \wedge \beta = 0$ . En particular, notamos que si  $\alpha$  es un  $d_{(l+1)\kappa}$ -ciclo, entonces  $\alpha \wedge e$  es un  $d_{l\kappa}$ -ciclo.

**Observación 2.13.** Utilizando la notación

$$\Omega_{l\kappa} \oplus \Omega_{l+1} \equiv (\mathcal{G}^*(M, \mathcal{F}), D_l) \quad \text{y} \quad \Omega_{l\kappa} \equiv (\Omega^*(M), d_{l\kappa}),$$

podemos plasmar los resultados de este apartado en el siguiente diagrama de cuasi-isomorfismos.

$$\begin{array}{ccccc} & & & \cdots & \\ & & & \Omega_{-2\kappa} & \\ \Omega_{-2\kappa} & \oplus & \Omega_{-\kappa} & \longrightarrow & \Omega_{-2\kappa} \\ \Omega_{-\kappa} & \oplus & \Omega & \longrightarrow & \Omega_{-\kappa} \\ \Omega & \oplus & \Omega_{\kappa} & \longrightarrow & \Omega \\ \Omega_{\kappa} & \oplus & \Omega_{2\kappa} & \longrightarrow & \Omega_{\kappa} \\ \Omega_{2\kappa} & \oplus & \Omega_{3\kappa} & \longrightarrow & \Omega_{2\kappa} \\ & & & \cdots & \end{array}$$

Notamos que el cuasi-isomorfismo central es la sucesión de Gysin y que entre los complejos básicos (a la izquierda de las flechas), la posición simétrica respecto al símbolo

$\oplus$  de la sucesión de Gysin indica relación de dualidad. La sucesión de Gysin es la única en la que intervienen cohomologías duales. Utilizando la finitud de  $H^*(M/\mathcal{F})$  y  $H_{lk}^*(M)$  (esta última se prueba con un cubrimiento de convexos geodésicos), el diagrama anterior proporciona una manera alternativa de probar que todas las cohomologías que intervienen en él son finitas.



## Capítulo 3

# Sucesión de Gysin para flujos riemannianos singulares

En el capítulo anterior construimos la sucesión de Gysin para flujos riemannianos regulares, los cuales estaban determinados por una acción  $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ . Si permitimos que  $\phi$  tenga puntos fijos, la partición inducida en  $M$  no es ya una foliación regular, pues tenemos órbitas de dimensión 1 y órbitas de dimensión 0 (los puntos fijos). Esta situación es un caso particular de lo que se conoce como *foliaciones singulares*, que se pueden describir de forma intuitiva como foliaciones en las que se permite que las hojas puedan tener dimensiones diferentes. La propiedad métrica que cumplían las foliaciones riemannianas se puede extrapolar a las foliaciones singulares, dando pie a las *foliaciones riemannianas singulares*.

El objetivo de este capítulo es construir la sucesión de Gysin para los *flujos riemannianos singulares*, es decir, flujos con puntos fijos que inducen una foliación riemanniana singular.

Un caso ya resuelto por G. Hector y M. Saralegi (ver [28]) es el de una acción diferenciable  $\phi: \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$ . En ese caso, como la acción no tiene por qué ser libre, el espacio cociente  $M/\mathbb{S}^1$  no es necesariamente una variedad diferenciable, sino una pseudovariedad estratificada. La *cohomología de intersección* es un invariante especialmente útil para estudiar este tipo de espacios: con ella se recupera la dualidad de Poincaré, la cual no satisface la cohomología ordinaria en pseudovariedades estratificadas. La sucesión de Gysin construida con cohomología de intersección en [28] resulta ser:

$$\dots \rightarrow H_{\bar{p}}^i(M/\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{\bar{p}}^i(M) \rightarrow H_{\bar{p}-2}^{i-1}(M/\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\wedge[e]} H_{\bar{p}}^{i+1}(M/\mathbb{S}^1) \rightarrow \dots, \quad (3.1)$$

para cada perversidad  $\bar{p}$  (más adelante explicaremos estos conceptos). La sucesión de

Gysin que obtenemos en el caso de flujos riemannianos singulares, y que generaliza por lo tanto (3.1) es:

$$\dots \rightarrow H_{\bar{p}}^i(M/\mathcal{F}) \rightarrow H_{\bar{p}}^i(M) \rightarrow H_{\bar{p}-2, \kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge^{[e]}} H_{\bar{p}}^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \dots,$$

donde la cohomologías que aparecen son la cohomología de intersección básica y básica torcida.

Utilizaremos la cohomología de intersección (normal y básica) con formas diferenciales *a la Brylinski* (ver [11]) que llamaremos *perversas*: son formas diferenciales definidas en la parte regular de  $M$ , es decir, fuera de los puntos fijos, y que podemos controlar de una cierta manera cerca de estos puntos. La herramienta que usaremos para expresar ese control es la *explosión de Jänich* (más concretamente, una versión foliada).

En la sección 1 hacemos un repaso de la estructura local de las foliaciones riemannianas singulares, descrita por P. Molino en [38], y construimos la explosión. En la siguiente sección, aplicamos esta descripción al caso de los flujos riemannianos singulares. En la sección 3, definimos y estudiamos las propiedades de la cohomología de intersección, y demostramos un teorema de dualidad para la cohomología básica de intersección de los flujos riemannianos singulares. En la sección 4, derivamos la sucesión de Gysin, y por último, describimos la *cirugía hiperbólica*, un método para construir flujos riemannianos singulares no isométricos.

Seguiremos el método de trabajo del capítulo anterior: a partir del estudio local y los cálculos locales, utilizaremos la técnica de Mayer-Vietoris (truco de Bredon adaptado a flujos riemannianos singulares) para probar los resultados globales.

### 3.1. Foliaciones riemannianas singulares

En esta sección con carácter preliminar, presentamos de forma rápida las principales características de las foliaciones riemannianas singulares. Nos centraremos en su estructura local, descrita en profundidad por P. Molino (ver [38]).

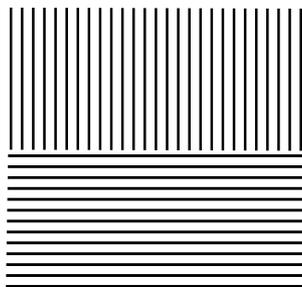
**Definición 3.1.** Una *foliación riemanniana singular* (F.R.S.) sobre la variedad cerrada  $M$  es una partición  $\mathcal{F}$  de  $M$  en subvariedades llamadas *hojas*, de modo que

1. El módulo  $T(\mathcal{F})$  formado por los campos de vectores tangentes a las hojas de la foliación actúa transitivamente sobre cada hoja;

2. Existe una métrica  $\mu$  adaptada a  $\mathcal{F}$  en el siguiente sentido: si una geodésica es perpendicular a una hoja en un punto, entonces sigue siendo perpendicular a todas las hojas que corte. Diremos que una tal métrica es *casi-fibrada*.

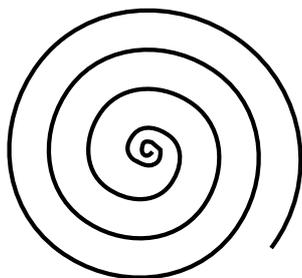
La condición 1. significa que  $\mathcal{F}$  es una *foliación singular* en el sentido de H. Sussman y P. Stefan (ver [52] y [51], respectivamente). Esa definición evita situaciones como las del siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.1.** Consideramos en  $\mathbb{R}^2$  la familia  $\mathcal{V} = \{\{b\} \times (0, \infty) : b \in \mathbb{R}\}$  de semirrectas verticales, y la familia de rectas horizontales  $\mathcal{G} = \{\mathbb{R} \times \{a\} : a \leq 0\}$ . Tenemos que  $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup \mathcal{V}$  es una partición de  $\mathbb{R}^2$  que no cumple la definición de foliación riemanniana regular (definición 1.1), pues no se puede construir una carta foliada que contenga puntos de la recta  $\mathbb{R} \times \{0\}$ .



Por supuesto, la partición  $\mathcal{F}$  tampoco cumple la condición 1. de la definición 3.1. En cuanto a particiones donde las hojas son de dimensiones diversas, esta condición nos permite evitar algunas que no son foliaciones singulares. Por ejemplo, si denotamos por  $\mathcal{H}$  la foliación por puntos del semiplano  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , la partición de  $\mathbb{R}^2$  dada por  $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}$  tampoco es una foliación singular.

La condición 2. de la definición es el requisito para que  $\mathcal{F}$  sea un *sistema transnormal* para  $(M, \mu)$  en el sentido de J. Bolton [4], en el caso particular de que la partición  $\mathcal{F}$  contenga subvariedades de codimensión 1. Con esta condición, que es la extensión a foliaciones singulares de la definición de métrica casi-fibrada en el caso regular, evitamos situaciones de tipo sumidero, en las cuales una hoja puede enrollarse sobre otra, acercándose indefinidamente (ver figura):



Notamos que una F.R.S. en la cual todas las hojas tienen la misma dimensión es exactamente una foliación riemanniana (regular) según las hemos definido en el capítulo anterior. El ejemplo principal de F.R.S. es el siguiente:

**Ejemplo 3.2.** Sea  $(M, \mu)$  una variedad riemanniana conexa y sea  $G \leq \text{Iso}(M, \mu)$  un grupo de isometrías conexo. Se puede comprobar que la partición  $\mathcal{F}$  dada por las órbitas de la acción de  $G$  sobre  $M$  satisface las condiciones de la definición 3.1, y por lo tanto, es una F.R.S.

**Ejemplo 3.3.** Si  $\mathcal{F}$  es una foliación riemanniana regular sobre la variedad compacta  $M$ , la foliación  $\overline{\mathcal{F}}$  definida por las adherencias de las hojas es una foliación riemanniana singular (ver [38]). La conjetura de Molino dice que si  $\mathcal{F}$  es una F.R.S., entonces  $\overline{\mathcal{F}}$  también lo es. Recientemente, G. Hector ha anunciado una prueba de esta conjetura.

La condición métrica que cumplen las foliaciones riemannianas singulares nos va a garantizar una estructura local rica que pasamos a describir a continuación.

Sea  $\mathcal{F}$  una F.R.S. sobre la variedad  $M$ , sea  $\mu$  una métrica casi-fibrada y sea  $P$  una *placa* de  $\mathcal{F}$ , es decir, un abierto relativamente compacto de una hoja de  $\mathcal{F}$ . Podemos tomar el entorno tubular  $\beta_\rho$  de  $P$ , es decir, la imagen por la aplicación exponencial del fibrado por bolas de radio  $\rho$  en el fibrado normal  $N(P)$ . Denotamos por  $S_\rho$  la imagen por la aplicación exponencial de los vectores de  $N(P)$  de longitud  $\rho$ . Llamaremos  $L_y$  a la hoja de  $\mathcal{F}$  que pasa por  $y \in M$ . Para todo  $y \in \beta_\rho$ , llamaremos  $P_y$  a la componente conexa de  $L_y \cap \beta_\rho$  que pasa por  $y$ . Tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.1 ([38]).** *Sea  $\mathcal{F}$  una F.R.S. sobre la variedad  $M$  y sea  $P$  una placa. Entonces, existe un entorno tubular  $\pi: \beta_\rho \rightarrow P$  tal que:*

- i) para todo  $y \in \beta_\rho$ , la proyección  $\pi: P_y \rightarrow P$  es una submersión sobreyectiva;*
- ii) para todo  $x \in P$ , los conjuntos  $\pi^{-1}(x)$  intersecan a todas las placas  $P_y$  de  $\beta_\rho$ , siendo además transversales a las mismas;*
- iii) los conjuntos  $S_{\rho'}$  con  $\rho' < \rho$  son saturados de placas  $P_y$ .*

Un entorno  $\beta_\rho$  como el de la proposición se dirá que es un *entorno tubular distinguido*. Para todo  $\lambda > 0$ , la homotecia  $v \rightarrow \lambda v$  de  $N(P)$  induce una aplicación en un cierto dominio del entorno tubular distinguido  $\beta_\rho$  que denominaremos también *homotecia* y que denotaremos por  $h_\lambda$ . Tenemos el siguiente resultado clave:

**Lema 3.2 (Lema de homotecia, [38]).** *La homotecia  $h_y$  envía placas en placas, respetando, por lo tanto, la foliación en el subconjunto del entorno tubular distinguido donde está definida.*

Aplicando los resultados anteriores, se prueba la siguiente descripción global de  $\mathcal{F}$ . Si las distintas dimensiones de las hojas de  $\mathcal{F}$  van de  $r_0$  a  $r_1$  y  $r_0 \leq r \leq r_1$ , denotaremos por  $\Sigma_r$  al conjunto formado por todas las hojas de dimensión  $r$ . Diremos que  $r_1$  es la dimensión maximal y  $r_0$  la dimensión minimal de las hojas. Llamaremos *estrato de dimensión  $r$*  a cada una de las componentes conexas del conjunto  $\Sigma_r$ . Un estrato se dirá *singular* si su dimensión es estrictamente menor que la maximal. Tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.3 ([38]).** *Sea  $(M, \mathcal{F})$  una F.R.S. y sea  $\mu$  una métrica casi-fibrada. Sean  $r_0, r_1$  las dimensiones minimal y maximal de las hojas, respectivamente. Entonces, se tiene:*

- i) *El conjunto  $\Sigma_r$  es una subvariedad embebida en  $M$ , para todo  $r_0 \leq r \leq r_1$ ;*
- ii) *La restricción de  $\mathcal{F}$  a cada estrato es una foliación riemanniana regular para la cual la restricción de  $\mu$  es una métrica casi-fibrada;*
- iii) *La unión  $\bigcup_{r \leq r'} \Sigma_r$  es una subvariedad compacta de  $M$  para todo  $r_0 \leq r' \leq r_1$ ;*
- iv) *La codimensión de un estrato singular es mayor o igual que 2;*
- v) *El conjunto  $\Sigma_{r_1}$  es un abierto conexo y denso en  $M$ .*

Diremos que  $\Sigma_{r_1}$  es el estrato maximal de  $\mathcal{F}$  y que cada estrato de  $\Sigma_{r_0}$  es un estrato minimal. Nos va a interesar describir los entornos de compactos  $\mathcal{F}$ -saturados, en particular de estratos minimales. En [6], H. Boualem y P. Molino dan una descripción completa de estos entornos:

**Teorema 3.4 ([6]).** *Sea  $(M, \mathcal{F})$  una F.R.S. y sea  $\mu$  una métrica casi-fibrada. Sea  $S$  una subvariedad compacta de codimensión  $k$ , saturada de hojas de  $\mathcal{F}$  de la misma dimensión. Entonces, existe una F.R.S.  $\mathcal{F}_{N(S)}$  en el fibrado normal de  $S$ , un entorno tubular  $T$  de  $S$  en  $M$ , un subfibrado  $E \subseteq N(S)$  por bolas, un embebimiento  $\psi: E \rightarrow M$  y una F.R.S.  $\mathcal{G}$  en  $S^{k-1}$  tales que:*

- i)  $\Psi: (E, \mathcal{F}_{N(S)}) \rightarrow (T, \mathcal{F})$  *es un difeomorfismo foliado;*
- ii) *Para cada  $x \in S$ , la foliación en una sección  $E_x$  está dada por el cono  $C(\mathcal{G})$ ;*

iii)  $N(S)$  admite a  $O(k, \mathcal{G}) = O(k) \cap \text{Diff}(\mathbb{S}^{k-1}, \mathcal{G})$  como grupo estructural (matrices ortogonales que respetan  $\mathcal{G}$ ).

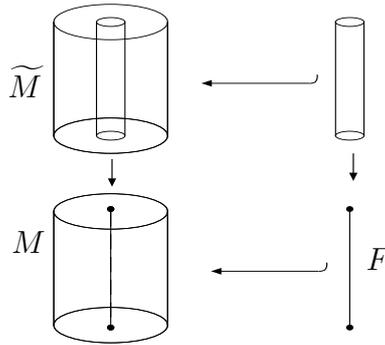
**Observación 3.1.** La foliación  $\mathcal{F}_{N(S)}$  se construye transportando  $C(\mathcal{G})$  a lo largo de las hojas de  $S$ .

**Observación 3.2.** Aunque no lo hayamos enunciado explícitamente, un hecho clave para probar el teorema 3.4 es una versión del lema de homotecia para un conjunto compacto saturado  $S$ . Según ese lema, las homotecias definidas en un entorno tubular de  $S$  preservan la foliación. Además, al igual que ocurría con los entornos distinguidos de placas, las subvariedades  $S_\rho$  formadas por los puntos de  $T$  que están a distancia  $\rho$  de  $S$  son  $\mathcal{F}$ -saturadas, y la foliación restringida a  $S_\rho$  es riemanniana.

## Explosión de Jänich

En este apartado introducimos la explosión, un recurso que permite estudiar las variedades estratificadas. Intuitivamente hablando, la explosión es una técnica que consiste en sustituir en  $M$  una subvariedad  $F$  por un fibrado de  $F$ , obteniendo una variedad con borde  $\widetilde{M}$ . Ilustramos esta idea con un ejemplo sencillo:

**Ejemplo 3.4.** Sea el cilindro macizo  $M = \mathbb{D}^2 \times (0, 1)$ . Tenemos la acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $M$  mediante las rotaciones alrededor del ánima. La subvariedad de los puntos fijos  $F$  es el ánima  $\{0\} \times (0, 1)$ . Al sustituir  $F$  por un tubo, obtenemos la variedad con borde  $\widetilde{M}$ , sobre cual podemos definir la acción de manera libre.



A continuación, abandonaremos momentáneamente la F.R.S.  $\mathcal{F}$  sobre  $M$ , y definiremos la explosión para una subvariedad cerrada cualquiera  $F$  de  $M$ . Describiremos el proceso siguiendo [16] y [31].

Sea  $E$  un fibrado vectorial sobre la variedad  $F$ , y sea  $E_0$  el complementario de la sección nula. Denotamos  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ , que actúa sobre  $E_0$  mediante la multiplicación

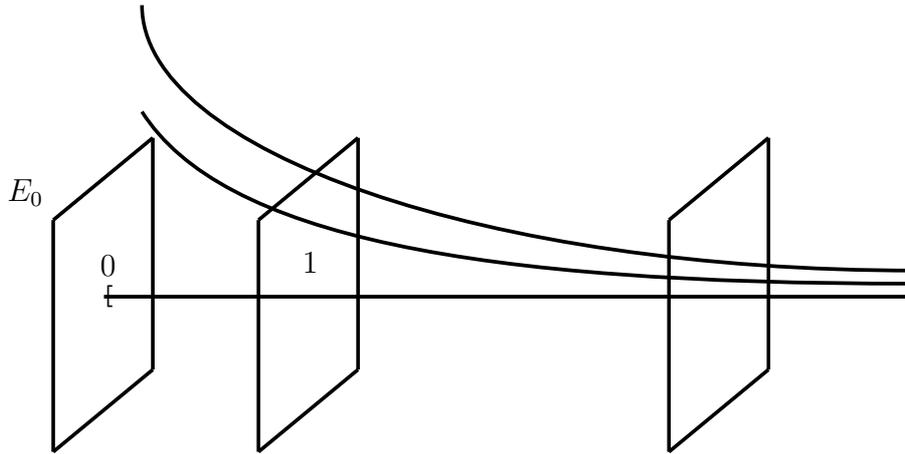
en las fibras. Asociamos a  $E$  el fibrado *cilindro no negativo*  $C_+E$ , definido por:

$$C_+E = (E_0 \times [0, \infty))/\mathbb{R}_+,$$

donde  $s \in \mathbb{R}_+$  actúa sobre  $(x, t) \in E_0 \times [0, \infty)$  mediante  $s \cdot (x, t) = (xs^{-1}, st)$ . El borde de  $C_+E$  es un nuevo fibrado (esférico), y lo denotaremos  $\Sigma E$ , es decir,

$$\Sigma E = (E_0 \times \{0\})/\mathbb{R}_+ \cong E_0/\mathbb{R}_+.$$

Geoméricamente,  $C_+E$  resulta de pegar  $E_0$  con  $\Sigma E$  “adecuadamente”. En la siguiente figura, hemos representado cada copia de  $E_0$  con un plano en el producto  $E_0 \times [0, \infty)$ . En la acción de  $\mathbb{R}_+$  sobre  $E_0 \times [0, \infty)$ , la órbita de un punto  $(x, t)$  con  $t > 0$  es el conjunto  $\{(xs^{-1}, s) : s \in \mathbb{R}_+\}$ , que hemos representado en la figura como una hipérbola.  $E_0 \times \{1\}$  contiene un representante de cada órbita de este tipo. En el nivel  $t = 0$ , tenemos, al pasar al espacio de órbitas,  $\Sigma E$ .



La aplicación  $c: C_+E \rightarrow E$  definida por  $c([x, t]) = tx$ , lleva  $C_+E - \Sigma E$  en  $E_0$  difeomórficamente, y proyecta  $\Sigma E$  sobre  $F$ .

**Ejemplo 3.5.** Si  $E$  es un fibrado vectorial trivial ( $E = F \times \mathbb{R}^{n+1}$ ), el cilindro no negativo de  $E$  resulta

$$C_+E = F \times \mathbb{S}^n \times [0, \infty),$$

y la aplicación  $c$  se define por:

$$\begin{aligned} c: F \times \mathbb{S}^n \times [0, \infty) &\longrightarrow F \times C(\mathbb{S}^n) \\ (x, y, t) &\longmapsto (x, [y, t]) \end{aligned}$$

donde hemos identificado  $\mathbb{R}^{n+1}$  con  $C(\mathbb{S}^n)$ .

Volvemos ahora a la F.R.S.  $\mathcal{F}$  sobre la variedad cerrada  $M$ , y llamamos  $F$  al conjunto de los estratos minimales. Sea  $E \subseteq N(F)$  el fibrado del teorema 3.4 (notamos que tiene varias componentes conexas), y consideramos el embebimiento  $\Psi: E \rightarrow M$ . Definimos ahora una variedad con borde  $\widetilde{M}$  de la siguiente manera: como conjunto va a ser la unión disjunta  $(M - F) \sqcup \Sigma E$ . Definimos la aplicación:

$$\tau: C_+N(F) \rightarrow (M - F) \sqcup \Sigma E, \quad (3.2)$$

dada por

$$\tau([x, t]) = \begin{cases} \Psi(tx) & \text{si } t \neq 0; \\ [x, 0] & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que  $\tau$  es inyectiva. De esta manera,  $\tau(C_+E)$  adquiere, vía  $\tau$ , una estructura de variedad con borde. Notamos que como  $\Psi$  es un difeomorfismo, la estructura diferenciable de  $(M - F) \cap \tau(C_+E)$  como subvariedad de  $M$  es la misma que como subvariedad de  $\widetilde{M}$ . Esto nos da una estructura diferenciable en  $\widetilde{M}$ , para la cual podemos considerar  $\tau$  como aplicación collar. Para referirnos al borde de  $\widetilde{M}$ , usaremos la notación  $\partial\widetilde{M}$ . La aplicación  $c$  induce una aplicación diferenciable

$$\mathcal{L}_M: \widetilde{M} \rightarrow M$$

definida mediante la identidad en  $M - F$  y la proyección de  $\Sigma E$  sobre  $F$ .

La estructura diferenciable de  $\widetilde{M}$  no depende de la aplicación tubular  $\Psi$  que hayamos elegido, lo cual es una consecuencia del siguiente resultado:

**Proposición 3.5 ([16]).** Sean  $E_1$  y  $E_2$  dos fibrados vectoriales con base  $F$ , y sea  $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$  una aplicación diferenciable tal que  $\varphi^{-1}(F) = F$  y tal que la restricción de la aplicación  $\varphi_*: E_1 \rightarrow E_2$  a cada fibra es un isomorfismo lineal. Entonces, existe una única aplicación diferenciable  $\tilde{\varphi}: C_+E_1 \rightarrow C_+E_2$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} C_+E_1 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & C_+E_2 \\ \downarrow c & & \downarrow c \\ E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \end{array}$$

donde  $c([x, t]) = tx$ . De hecho,  $\tilde{\varphi}$  viene dada por la fórmula

$$\tilde{\varphi}([x, t]) = \begin{cases} [t^{-1}\varphi(tx), t] & \text{si } t \neq 0 \\ [\varphi_*(x), 0] & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

A continuación, construimos una foliación riemanniana singular  $\widetilde{\mathcal{F}}$  sobre  $\widetilde{M}$  de manera que la explosión

$$\mathcal{L}: (\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow (M, \mathcal{F})$$

es una aplicación foliada. Para ello, observamos que, en virtud del lema de homotecia referido en la observación 3.2, la acción de  $\mathbb{R}_+$  sobre  $E_0$  respeta la foliación definida en  $E_0$ . Por lo tanto, tenemos que  $\mathcal{F}$  induce foliaciones en  $\Sigma F$  y en  $C_+E$  de manera que la aplicación collar 3.2 es un collar foliado. Notamos que, por densidad, la foliación  $\widetilde{\mathcal{F}}$  obtenida en  $\widetilde{M}$  es única. Para comprobar que además es riemanniana, basta tomar una métrica casi-fibrada  $\mu_\partial$  en  $\partial\widetilde{M}$  y extenderla al collar foliado del borde mediante  $\mu_\partial + dr^2$ , siendo  $r$  el radio del collar. Realizaremos esta construcción de forma más explícita en el caso de flujos.

**Observación 3.3.** En [39], P. Molino construye una explosión  $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}}) \longrightarrow (M, \mathcal{F})$ , similar a la explosión de Jänich, con la diferencia de que  $\widehat{M}$  es una variedad sin borde. Intuitivamente, podemos obtener una variedad  $\widehat{M}$  tal como el resultado de pegar dos copias de la explosión de Jänich  $\widetilde{M}$  por el borde  $\partial\widetilde{M}$  (notamos que esta operación respeta la foliación  $\widetilde{\mathcal{F}}$ ). La ventaja de trabajar con una explosión sin borde es que se pueden realizar explosiones sucesivas, las cuales producirían esquinas en caso de utilizar explosiones de Jänich. Como nosotros vamos a trabajar con flujos, tan sólo vamos a tener dos tipos de estratos, y por lo tanto sólo vamos a tener que explotar una vez, no siendo necesario usar la explosión de Molino.

## 3.2. Flujos riemannianos singulares. Truco de Bredon

En esta sección aplicamos la descripción local de la sección anterior al caso particular de flujos riemannianos singulares.

**Definición 3.2.** Un *flujo riemanniano singular* (f.R.S.) es una F.R.S.  $\mathcal{F}$  dada por las órbitas de una acción diferenciable  $\phi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ , posiblemente con puntos fijos. Equivalentemente, un f.R.S. puede estar dado por las curvas integrales de un campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  con ceros.

**Definición 3.3.** Un flujo riemanniano singular se dirá *isométrico* si está dado por una acción  $\phi: \mathbb{R} \times (M, \mu) \longrightarrow (M, \mu)$  que preserva una métrica riemanniana  $\mu$  sobre la variedad  $M$ .

Notamos que si  $\phi$  no tiene puntos fijos, las nociones de flujo riemanniano singular y flujo singular isométrico coinciden con las de flujo riemanniano regular y flujo isométrico regular que dimos en el capítulo anterior. Un flujo singular isométrico es, por supuesto, un f.R.S., siendo la métrica preservada por el flujo una métrica casi-fibrada.

**Ejemplo 3.6.** Sea la acción  $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$  dada por  $\phi(t, [s, z]) = [s, e^{2\pi it}z]$ , donde hemos identificado  $\mathbb{S}^2$  con la suspensión de  $\mathbb{S}^1$ . Los dos polos  $\{N, S\}$  son puntos fijos y en  $\mathbb{S}^2 - \{N, S\}$  las órbitas son difeomorfas a  $\mathbb{S}^1$ . De hecho, la acción es periódica, lo cual implica que tenemos de hecho una acción de  $\mathbb{S}^1$ , que por ser un grupo compacto, es isométrica.

De ahora en adelante trabajaremos con un f.R.S.  $\mathcal{F}$  sobre una variedad cerrada  $M$ . Llamaremos  $F$  al conjunto de puntos fijos. De este modo, y según la descripción de la sección anterior, tenemos dos partes en  $M$ : el estrato regular  $M - F$  y  $F$ , que puede constar de varias componentes conexas, que son los estratos singulares. Nos referiremos a  $M - F$  y  $F$  como la *parte regular* y la *parte singular* del flujo, respectivamente. Notamos que  $\mathcal{F}$  restringido a  $M - F$  es un flujo riemanniano regular.

Sea  $S$  un estrato de puntos fijos de codimensión  $p$ . Por el teorema 3.4, tenemos que  $S$  posee un entorno tubular  $\pi: T \longrightarrow S$  de modo que, para cada punto fijo  $x \in S$ , la transversal  $\pi^{-1}(x)$  es foliadamente difeomorfa a  $(C\mathbb{S}^{p-1}, C\mathcal{G})$  para una cierta F.R.S.  $\mathcal{G}$  en  $\mathbb{S}^{p-1}$ . Ahora bien, la foliación en  $T$  se recupera trasladando  $\mathcal{G}$  a lo largo de las hojas de  $S$  (ver [6]). Como  $S$  está formada por puntos fijos y  $\mathcal{F}$  es un flujo regular en  $T - S$ , tenemos que  $\mathcal{G}$  es un flujo riemanniano regular sobre la esfera  $\mathbb{S}^{p-1}$ . En particular, por el teorema de la esfera peluda, eso implica que  $\mathbb{S}^{p-1}$  ha de ser una esfera impar, y por lo tanto, la codimensión de cada estrato de puntos fijos ha de ser par. Tenemos, por lo tanto, la siguiente descripción local para los puntos fijos:

**Proposición 3.6.** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad cerrada  $M$ , y sea  $S$  un estrato de puntos fijos. Entonces,  $S$  posee un entorno tubular  $\pi: T \longrightarrow S$  con un atlas foliado*

$$\{\varphi: (\pi^{-1}(U), \mathcal{F}) \longrightarrow (U \times C\mathbb{S}^{2k+1}, \mathcal{H} \times C\mathcal{G})\},$$

donde  $\mathcal{H}$  es la foliación por puntos,  $\mathcal{G}$  es un flujo riemanniano regular sobre  $\mathbb{S}^{2k+1}$  y los abiertos  $U$  son abiertos contráctiles de  $S$ . El grupo estructural del entorno tubular es  $O(2k + 2, \mathcal{G})$ .

Una consecuencia de la estructura local es la siguiente:

**Corolario 3.7.** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad cerrada  $M$  de manera que exista un estrato de puntos fijos  $S$  de codimensión 2. Entonces,  $\mathcal{F}$  es un fibrado de Seifert singular.*

*Demostración.* Sea  $x \in S$  un punto fijo. Por la proposición 3.6, tenemos un entorno de  $x$  conjugado a

$$(U \times C\mathbb{S}^1, \mathcal{H} \times C\mathcal{G}),$$

siendo  $\mathcal{H}$  la foliación por puntos del contráctil  $U \subseteq S$  y  $\mathcal{G}$  la foliación de  $\mathbb{S}^1$  formada por una sola hoja. Se sigue que en un abierto de  $M$  todas las hojas son círculos, y por lo tanto sus clausuras también. Como el conjunto formado por las hojas cuya clausura es de dimensión maximal ha de ser denso en  $M$ , deducimos que  $\overline{L} = \mathbb{S}^1$  (y por lo tanto,  $L = \mathbb{S}^1$ ) para toda hoja no unipuntual  $L$  de  $\mathcal{F}$ . ♣

Trabajaremos con la explosión de Jänich de la parte singular  $F$ . La explosión que obtendremos satisface las siguientes propiedades:

**Definición 3.4.** Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad diferenciable  $M$  y sea  $F$  la subvariedad de los puntos fijos. Una *explosión foliada* de  $(M, \mathcal{F})$  es una variedad con borde  $\widetilde{M}$  provista de un flujo riemanniano (regular)  $\widetilde{\mathcal{F}}$  tangencial al borde, junto con una aplicación foliada

$$\mathcal{L}: (\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow (M, \mathcal{F})$$

tal que:

- i)  $\mathcal{L}: (\widetilde{M} - \partial\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow (M - F, \mathcal{F})$  es un difeomorfismo foliado;
- ii) Para todo punto  $x \in F$  existe un contráctil  $x \in U$  abierto en  $F$  y un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (U \times \mathbb{S}^{2k+1} \times [0, \infty), \mathcal{H} \times \mathcal{G} \times \mathcal{I}) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}}), \\ p \downarrow & & \downarrow \mathcal{L} \\ (U \times C\mathbb{S}^{2k+1}, \mathcal{H} \times C\mathcal{G}) & \xrightarrow{\varphi} & (M, \mathcal{F}) \end{array}$$

donde  $\mathcal{G}$  es un flujo riemanniano regular sobre  $\mathbb{S}^{2k+1}$ , las foliaciones  $\mathcal{H}, \mathcal{I}$  son foliaciones por puntos,  $\tilde{\varphi}, \varphi$  son embebimientos foliados y la aplicación  $p$  está dada por  $p(u, x, t) = (u, [x, t])$ ;

- iii) para todo estrato singular  $S \subseteq F$ , la aplicación

$$\mathcal{L}: (\mathcal{L}^{-1}(S), \widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow (S, \mathcal{F})$$

es un fibrado esférico de grupo estructural  $O(2k + 2, \mathcal{G})$ .

Tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 3.8.** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad  $M$ . Entonces, existe una explosión foliada, y es única.*

*Demostración.* Para cada estrato de puntos fijos  $S$ , podemos tomar un entorno tubular  $\pi: T \rightarrow S$  como el de la proposición 3.6 y seguir el proceso de la explosión de Jänich con su foliación  $\widetilde{\mathcal{F}}$  inducida, tal y como hemos descrito en la sección anterior. El apartado i) de la definición de la definición 3.4 se sigue inmediatamente de dicha construcción. Para construir las cartas de ii), basta tomar un contráctil  $U$  tal que  $x \in U \subseteq F$  y tal que  $\psi: U \times C(\mathbb{S}^{2k+1}) \rightarrow T$  sea una carta trivializante para  $T$ , y usar la expresión de la explosión de Jänich de  $U \times C(\mathbb{S}^{2k+1})$  (ver ejemplo 3.5). Usando la proposición 3.5, podemos levantar  $\psi$  a las explosiones, obteniendo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} U \times \mathbb{S}^{2k+1} \times [0, \infty) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & C_+T & \xrightarrow{\tau} & \widetilde{M} \\ p \downarrow & & c \downarrow & & \downarrow \mathcal{L} \\ U \times C(\mathbb{S}^{2k+1}) & \xrightarrow{\psi} & T & \xrightarrow{\Psi} & M \end{array} ,$$

que nos lleva al diagrama de ii). Notamos que, por la proposición 3.6, si consideramos las foliaciones del enunciado en el diagrama de ii), las aplicaciones son foliadas. Para probar iii), basta notar que si  $U$  es un abierto de  $F$  y  $f: U \rightarrow U$  es un difeomorfismo, por la proposición 3.5, el cambio de cartas correspondiente en  $\mathcal{L}^{-1}(U)$  es una aplicación lineal  $f_*$ , que al preservar las distancias (envía esferas en esferas), ha de ser ortogonal.

La unicidad de la explosión a nivel de espacio (es decir, sin tener en cuenta foliación) se sigue de la propiedad i) y de la proposición 3.5. La unicidad de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  se sigue de la propiedad i), por densidad. ♣

Una consecuencia de la estructura local es que el flujo en  $\partial\widetilde{M}$  es isométrico.

**Proposición 3.9.** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad cerrada  $M$ , sea  $F$  la subvariedad de los puntos fijos y sea  $\mathcal{L}$  la explosión foliada de  $F$ . Entonces, el flujo riemanniano regular  $\mathcal{F}|_{\partial\widetilde{M}}$  es isométrico.*

*Demostración.* Sea  $S$  un estrato de puntos fijos. Sabemos que  $\mathcal{L}: \mathcal{L}^{-1}(S) \rightarrow S$  es un fibrado esférico de grupo estructural  $G = O(2k+2, \mathcal{G})$  para un flujo riemanniano regular  $\mathcal{G}$  sobre  $\mathbb{S}^{2k+1}$ . La métrica euclídea  $\mu_0$  en  $\mathbb{S}^{2k+1}$  es casi-fibrada para  $\mathcal{G}$ . Como  $\mathbb{S}^{2k+1}$  es simplemente conexa (salvo el caso  $k = 0$ , en el que  $[\kappa] = 0$  trivialmente),

tenemos que  $[\kappa_0] = 0$ , y por lo tanto, podemos tomar una función  $f_0: \mathbb{S}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}$  básica para  $\mathcal{G}$ , y tal que  $\kappa_0 = df_0$ . Es más, como  $\mu_0$  y  $X_0$  son invariantes por  $G$ , tenemos que  $\kappa_0$  es también invariante por  $G$ , y en consecuencia podemos tomar una función  $f: \mathbb{S}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}$  invariante por  $G$  y tal que  $\kappa_0 = df$ . En efecto, si definimos

$$f = \frac{1}{|G|} \int_G g^* f_0,$$

La función  $f$  es básica e invariante por  $G$ , y además,

$$\kappa_0 = \int_G g^* \kappa_0 = \int_G dg^* f_0 = d \int_G g^* f_0 = df.$$

Notamos que si hacemos la reparametrización  $\mu_S = e^{2f} \mu_0$ , tenemos  $X_S = e^{-f} X_0$ ,  $\chi_0 = e^f \chi_0$  y  $\kappa_S = 0$ .

Vamos a construir una métrica  $\mu$  en  $\mathcal{L}^{-1}(S)$  cuya  $\kappa$  sea nula. Tomamos un atlas trivializante  $(U_i, \varphi_i)$ , y para cada abierto trivializante

$$\varphi_i: \mathcal{L}^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{S}^{2k+1}$$

tomamos la métrica

$$\mu_i = (\varphi_i)^*(\mu_{U_i} + \mu_S) \text{ sobre } \mathcal{L}^{-1}(U_i),$$

y el campo

$$X_i = (\varphi_i^{-1})_*(X_S) \in \mathfrak{X}(\mathcal{L}^{-1}(U_i)).$$

Notamos que  $X_i$  define un campo global en todo  $\mathcal{L}^{-1}(S)$ . En efecto, sean  $U_i$  y  $U_j$  tales que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Entonces tenemos

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} = F: U_{ij} \times \mathbb{S}^{2k+1} \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{S}^{2k+1},$$

dada por  $F(u, x) = (u, g(u, x))$ , de manera que  $g(u): \mathbb{S}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2k+1} \in G$ . Tenemos:

$$F_{(u, \cdot)_*}(X_S) = F_{(u, \cdot)_*}(e^{-f} X_0) = g(u)_*(e^{-f} X_0) = e^{f \circ g} g(u)_* X_0 = e^f X_0 = X_S.$$

Llamamos por lo tanto  $X$  al campo global. Tomamos  $\{\eta_i\}_i$  una partición de la unidad subordinada a los conjuntos  $U_i$ , y consideramos  $\rho_i = \mathcal{L}^{-1} \circ \eta_i$ . Notamos que es una partición de la unidad básica para  $\mathcal{F}$ .

Definimos ahora la métrica sobre  $\mathcal{L}^{-1}(S)$  dada por:

$$\mu = \sum_i \rho_i \mu_i.$$

Notamos que

$$\mu(X, X) = \sum_i \rho_i \mu_i(X, X) = \sum_i \rho_i \mu_i(X_i, X_i) = \sum_i \rho_i = 1.$$

También tenemos

$$\begin{aligned} \chi &= i_X \mu = i_X \left( \sum_i \rho_i \mu_i \right) \\ &= \sum_i \rho_i i_X \mu_i \quad (\text{por ser } \rho_i \text{ básicas}) \\ &= \sum_i \rho_i i_{X_i} \mu_i \quad (\text{porque estamos en el dominio en el que } X = X_i) \\ &= \sum_i \rho_i \chi_i. \end{aligned}$$

Y ahora

$$\kappa = L_X \chi = L_X \left( \sum_i \rho_i \chi_i \right) = \sum_i \rho_i L_X \chi_i = \sum_i \rho_i L_{X_i} \chi_i = \sum_i \rho_i \kappa_i$$

Sólo falta calcular  $\kappa_i$ . Como  $\varphi_i$  es una isometría, tenemos

$$\kappa_i = \varphi_i^*(\kappa_S) = \varphi^*(0) = 0,$$

de donde se sigue  $\kappa = 0$ , y por lo tanto, el resultado. ♣

### Truco de Bredon

Consideramos a continuación el doble de  $\widetilde{M}$ , que denotaremos por  $D(M)$ . Recordamos que

$$D(M) = \left( (\widetilde{M} \times \{0\}) \sqcup (\widetilde{M} \times \{1\}) \right) / \sim,$$

siendo  $(x, 0) \sim (x, 1)$  si y sólo si  $x \in \partial \widetilde{M}$ . Sabemos que  $\widetilde{M}$  tiene una única estructura diferenciable compatible con la explosión. Para definir una estructura diferenciable en  $D(M)$ , podemos tomar un collar

$$\Psi: \partial \widetilde{M} \times [0, 1] \longrightarrow \widetilde{M}$$

y extenderlo de forma natural

$$\Psi_D: \partial \widetilde{M} \times (-1, 1) \longrightarrow D(M).$$

La estructura diferenciable así definida en  $D(M)$  no depende del entorno collar  $\Psi$  utilizado (ver, por ejemplo, [41], p.63). Tenemos los embebimientos naturales:

$$\iota: \widetilde{M} \longrightarrow D(M) \quad \text{y} \quad (\iota \circ \mathcal{L}^{-1}): M - F \longrightarrow D(M), \quad (3.4)$$

donde  $\iota x = (x, 0)$ . Notamos que la foliación  $\widetilde{\mathcal{F}}$  se extiende de manera natural a un flujo riemanniano regular  $\mathcal{F}_D$  sobre la variedad cerrada  $D(M)$ . Los embebimientos (3.4) son embebimientos foliados.

En el capítulo anterior trabajamos con métricas cuya forma de curvatura media era básica. A continuación precisamos con qué tipo de métricas vamos a trabajar.

**Definición 3.5.** Una métrica  $\mu$  sobre  $M - F$  se dirá que es *adaptada* si es levantable a una métrica  $\widetilde{\mu}$  de  $\widetilde{M}$  cuya forma de curvatura media  $\widetilde{\kappa}$  es básica.

**Lema 3.10.** *Todo flujo riemanniano singular sobre una variedad cerrada  $M$  tiene una métrica adaptada.*

*Demostración.* En primer lugar probamos que  $(D(M), \mathcal{F}_D)$  es una foliación riemanniana. En efecto, sea una métrica  $\mu_0$  casi-fibrada sobre  $M$ . Como la foliación  $\mathcal{F}_\partial$  sobre  $\partial\widetilde{M}$  es riemanniana regular, existe una métrica  $\mu_\partial$  casi-fibrada para  $\mathcal{F}_\partial$ . Tomamos ahora en  $D(M)$  el embebimiento collar

$$\Psi_D: \partial\widetilde{M} \times (-1, 1) \longrightarrow U \subseteq D(M)$$

y una partición de la unidad básica  $\{\rho, 1 - \rho\}$  subordinada al cubrimiento  $(D(M) - \Psi_D(\partial\widetilde{M}), U)$  (para que sea básica, basta con que dependa del radio  $r$  del entorno tubular distinguido que usamos para el collar). Tenemos que la métrica

$$\rho\Psi_D^*(\mu_\partial \oplus dr^2) \oplus \iota^*(\mathcal{L}^{-1})^*\mu_0$$

es casi-fibrada en  $D(M)$ , y por lo tanto,  $\mathcal{F}_D$  es riemanniana.

Por el teorema 1.11, existe una métrica  $\mu_D$  en  $D(M)$  tal que su curvatura media es básica. Esta métrica induce métricas  $\widetilde{\mu}$  y  $\mu$  en  $\widetilde{M}$  y  $M - F$  respectivamente, que satisfacen el enunciado. ♣

**Observación 3.4.** Si consideramos una métrica adaptada  $\mu$ , la forma de curvatura media  $\kappa \in \Omega^1(M - F)$  asociada es también básica.

**Observación 3.5.** Una consecuencia importante de que  $\mathcal{F}$  se extienda a  $(D(M), \mathcal{F}_D)$  es que para todo  $x \in M - F$ , existe un entorno de Carrière. De este modo, ya tenemos la descripción local completa de  $\mathcal{F}$ : alrededor de los puntos fijos tenemos entornos conjugados a

$$(U \times C\mathbb{S}^{2k+1}, \mathcal{H} \times C\mathcal{G}),$$

siendo  $U$  contráctil y  $\mathcal{G}$  un flujo regular isométrico sobre  $\mathbb{S}^{2k+1}$ . Fuera de los puntos fijos, tenemos entornos de Carrière.

Estamos en condiciones de presentar el truco de Bredon, es decir, la técnica de Mayer-Vietoris que utilizamos para el caso de flujos riemannianos singulares. Necesitaremos un nuevo tipo de abierto básico sobre el que probar la propiedad requerida en cada caso, debido a que hay dos tipos de entornos.

**Lema 3.11 (Truco de Bredon para Flujos Riemannianos Singulares).** *Sea  $P$  una afirmación formulada sobre variedades diferenciables (no necesariamente compactas) provistas de un flujo riemanniano (posiblemente singular). Si una propiedad  $P$  invariante por difeomorfismos foliados cumple los siguientes axiomas:*

**TB1** *para toda variedad contráctil  $E$  provista de la foliación por puntos,  $P(U, \mathcal{F})$  implica  $P(U \times E, \mathcal{F} \times \mathcal{H})$ ;*

**TB2** *si  $M = U \cup V$ , entonces  $P(U, \mathcal{F}), P(V, \mathcal{F}), P(U \cap V, \mathcal{F}) \implies P(M, \mathcal{F})$ ;*

**TB3**  *$\{U_\alpha\}$  disjuntos y  $P(U_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$  para todo  $\alpha \implies P(\bigcup_\alpha U_\alpha, \mathcal{F})$ ;*

**TB4**  *$P(U, \mathcal{F})$  es cierta para todo entorno de Carrière  $U$ .*

**TB5**  *$P$  es cierta para  $(C\mathbb{S}^{2k+1}, C\mathcal{G})$ , siendo  $\mathcal{G}$  conjugado a un flujo isométrico regular sobre  $\mathbb{S}^{2k+1}$ ,*

*entonces,  $P$  es cierta para cualquier flujo riemanniano singular sobre una variedad compacta.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano singular sobre la variedad compacta  $M$ . Por el teorema 3.3, el conjunto de los puntos fijos  $F$  es una unión disjunta de subvariedades compactas. Consideramos un entorno tubular  $T$  de  $F$  como en la proposición 3.6. Notamos que tanto en  $M - F$  como en  $T - F$  la restricción de  $\mathcal{F}$  es un flujo riemanniano regular que cumple las condiciones del truco de Bredon para flujos riemannianos regulares (lema 2.11). Por la observación 2.2,  $P$  es cierta en  $M - F$  y en  $T - F$ . Por lo tanto, utilizando TB2, tan sólo nos queda por probar  $P(T, \mathcal{F})$ . Consideramos un estrato  $S$  de  $F$ , y la proyección  $p: T_S \longrightarrow S$  del tubo del estrato  $S$  sobre  $S$ . Vamos a aplicar 2.10 sobre  $S$ . Tomamos en  $S$  un cubrimiento

$\mathcal{U}$  formado por convexos geodésicos trivializantes para  $p$ . Entonces, enunciemos la propiedad:

$$Q(U) \equiv P(p^{-1}(U), \mathcal{F}).$$

Notamos que si  $U \in \mathcal{U}$ , entonces  $p^{-1}(U) \simeq U \times C\mathbb{S}^{2k+1}$ . Aplicando TB1 y TB5, obtenemos  $P(U, \mathcal{F})$ . Por lo tanto, se cumple 1 para  $Q$ . Nuevamente, 2 y 3 se siguen de TB2 y TB3, y por lo tanto, por 2.10, obtenemos  $Q(S)$ , y por lo tanto,  $P(T_S, \mathcal{F})$ . Utilizando TB3, obtenemos  $P(T, \mathcal{F})$ , y concluimos la prueba. ♣

### 3.3. Cohomología de intersección

La *homología de intersección* fue definida por M. Goresky y R. MacPherson (ver [25]) con el objetivo de recuperar la dualidad de Poincaré para pseudovariedades estratificadas, para las cuales la homología singular no satisface dicha dualidad. La homología de intersección se calcula con símlices singulares que intersequen a los estratos de la variedad estratificada de una cierta manera, controlada por el concepto de *perversidad*. En [11], J. L. Brylinsky presenta una cohomología de intersección (dual a la homología de intersección) utilizando formas diferenciales.

En el caso de una acción  $\phi: \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$  con puntos fijos, el espacio de órbitas es una pseudovariedad estratificada. En [28], G. Hector y M. Saralegi obtienen una sucesión de Gysin que relaciona la cohomología de  $M$  con la cohomología de intersección de  $M/\mathbb{S}^1$ . En el caso más general de un flujo riemanniano singular, el espacio de órbitas  $M/\mathcal{F}$  no tiene por qué ser una pseudovariedad estratificada. No obstante, se puede definir una *cohomología básica de intersección*, que coincide con la cohomología de intersección de  $M/\mathbb{S}^1$  en el caso de que  $\mathcal{F}$  esté dado por la acción de  $\mathbb{S}^1$  (ver el apéndice de esta memoria).

Para definir la cohomología básica de intersección de  $(M, \mathcal{F})$  utilizaremos la explosión de la variedad de los puntos fijos  $F$ . Una forma *perversa* o forma *de intersección* será una forma diferencial definida en la parte regular del flujo  $M-F$  que cumpla una cierta condición de regularidad cerca de los puntos fijos. Para expresar esa condición, usamos la explosión  $\mathcal{L}: \widetilde{M} \rightarrow M$  y el concepto de *grado perverso*, que controla cómo es una forma perversa cerca de un estrato.

Definiremos también la cohomología torcida de intersección (con la diferencial  $d_\kappa$ ) y probaremos un teorema de dualidad para la cohomología básica de intersección de un flujo riemanniano singular, que generaliza el teorema 1.12 de F. Kamber y Ph. Tondeur para el caso regular.

### 3.3.1. Definiciones y primeras propiedades

**Definición 3.6.** Sea  $p: E \rightarrow B$  un fibrado localmente trivial, y sea  $\omega$  una forma diferencial de  $E$ . Diremos que el *grado vertical* de  $\omega$  con respecto a  $p$  es el menor entero  $k$  que garantice que si  $X_1, \dots, X_{k+1}$  son campos de  $E$  tangentes a las fibras de  $p$ , entonces  $i_{X_1} \dots i_{X_{k+1}} \omega = 0$ . Por convenio, diremos que el grado vertical de una forma nula es  $-\infty$ .

Sea  $(M, \mathcal{F})$  una variedad provista de un f.R.S., y sea  $F$  la parte singular del flujo. Consideramos también la explosión de Jänich:

$$\mathcal{L}: \widetilde{M} \rightarrow M$$

**Definición 3.7.** Una forma  $\omega \in \Omega^*(M - F)$  se dice *perversa* si es levantable a una forma  $\widetilde{\omega} \in \Omega^*(\widetilde{M})$ , de modo que

$$\widetilde{\omega} = \mathcal{L}^* \omega \quad \text{en } \widetilde{M} - \partial \widetilde{M}.$$

Diremos que el *grado perverso* de  $\omega$  con respecto al estrato  $S \subseteq F$  es el grado vertical de  $\widetilde{\omega}|_{\partial \widetilde{S}}$  con respecto al fibrado

$$\mathcal{L}: \partial \widetilde{S} \rightarrow S.$$

Denotaremos el *grado perverso* de  $\omega$  en  $S$  como  $\|\omega\|_S$ .

Si  $\omega$  es una forma perversa, denotaremos por  $\widetilde{\omega}$  a su levantamiento, que notamos que es único. Si  $\omega$  es perversa, entonces  $d\omega$  también lo es, y de hecho,  $\widetilde{d\omega} = d\widetilde{\omega}$ . La suma y el producto de formas perversas son perversos, y de hecho, si  $\omega$  y  $\eta$  son formas perversas, entonces

$$\widetilde{\omega \wedge \eta} = \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\eta} \quad \text{y} \quad \widetilde{\omega + \eta} = \widetilde{\omega} + \widetilde{\eta}.$$

De la definición de grado vertical se sigue además que

$$\|\omega + \eta\|_S \leq \max(\|\omega\|_S, \|\eta\|_S) \quad \text{y} \quad \|\omega \wedge \eta\|_S \leq \|\omega\|_S + \|\eta\|_S$$

para todo estrato de puntos fijos  $S$ . Notamos que el máximo grado perverso de una forma de grado  $p$  es precisamente  $p$ . Trabajaremos con complejos de formas perversas cuyo grado perverso esté controlado.

**Definición 3.8.** En las condiciones anteriores, una *perversidad*  $\overline{p}$  es una función que asigna a cada estrato  $S$  de  $F$  un número entero  $\overline{p}(S)$ .

Denotaremos por  $\bar{0}$  a la perversidad que asigna el valor 0 a cada estrato  $S$  de puntos fijos. Análogamente, usaremos la notación  $\bar{1}, \bar{2}, \dots$ . Dadas dos perversidades  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$ , diremos que  $\bar{p} \geq \bar{q}$  si para todo estrato singular  $S$  se cumple  $\bar{p}(S) \geq \bar{q}(S)$  (escribiremos también  $\bar{p} \leq \bar{q}$ ,  $\bar{p} < \bar{q} \dots$ ). Diremos que una perversidad es *par* o *impar*, *negativa*, *positiva*, etc. si los valores que asignan a cada estrato lo son. Definimos también la *perversidad suma* mediante

$$(\bar{p} + \bar{q})(S) = \bar{p}(S) + \bar{q}(S).$$

Definimos también la perversidad *tope básica*:

$$\bar{t}(S) = \text{cod}(S) - 3 \quad \text{para todo } S.$$

Esta perversidad jugará un papel importante en el teorema de dualidad, así como la siguiente definición:

**Definición 3.9.** Diremos que dos perversidades  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$  son *duales* si cumplen  $\bar{p} + \bar{q} = \bar{t}$ , es decir,  $\bar{p}(S) + \bar{q}(S) = \text{cod } S - 3$  para todo estrato  $S$ .

El *complejo de intersección de perversidad  $\bar{p}$*  es:

$$\Omega_{\bar{p}}^*(M) = \{\omega \in \Omega^*(M - F) \text{ perversa} : \|\omega\|_S \leq \bar{p}(S) \text{ y } \|d\omega\|_S \leq \bar{p}(S) \text{ para todo } S\}.$$

Definimos también el *complejo básico de intersección de perversidad  $\bar{p}$* :

$$\Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) = \Omega_{\bar{p}}^*(M) \cap \Omega^*((M - F)/\mathcal{F}).$$

Notamos que ambos complejos son diferenciales para la diferencial exterior  $d$ .

**Definición 3.10.** Los grupos de cohomología de intersección de perversidad  $\bar{p}$  se definen como:

$$H_{\bar{p}}^*(M) = H^*(\Omega_{\bar{p}}^*(M), d) \quad \text{y} \quad H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) = H^*(\Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}), d).$$

Las siguientes propiedades de la cohomología de intersección son inmediatas a partir de su definición.

- En el caso de que  $\mathcal{F}$  sea un flujo riemanniano regular, tenemos

$$H_{\bar{p}}^*(M) = H^*(M) \quad \text{y} \quad H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) = H^*(M/\mathcal{F}),$$

debido a que  $F = \emptyset$ , y en ese caso la explosión  $\mathcal{L}$  es la identidad de  $M$ , y los complejos de intersección son idénticos al complejo de de Rham y el básico.

- Sean  $k \geq i$  enteros y sea una perversidad  $\bar{p}(S) \geq \bar{k}$ . Entonces, se tiene

$$H_{\bar{p}}^i(M) = H_{\bar{k}}^i(M) \quad \text{y} \quad H_{\bar{p}}^i(M/\mathcal{F}) = H_{\bar{k}}^i(M/\mathcal{F}).$$

- En general,  $H_{\bar{p}}^*(M)$  no tiene por qué tener estructura de álgebra. No obstante, se tiene la aplicación

$$H_{\bar{p}}^*(M) \times H_{\bar{q}}^*(M) \longrightarrow H_{\bar{p}+\bar{q}}^*(M)$$

dada por  $[\alpha], [\beta] \longmapsto [\alpha \wedge \beta]$ . Lo mismo sucede para cohomología básica de intersección.

A continuación presentamos varios casos en los que la cohomología de intersección es isomorfa a cohomologías conocidas.

Las formas perversas de grado perverso 0 se llaman *formas controladas* o *formas de Verona* (ver [55]). Notamos que una forma  $\omega \in \Omega^*(M - F)$  es de Verona si es levantable a  $\tilde{\omega} \in \Omega^*(\tilde{M})$  y si el grado vertical de  $\tilde{\omega}|_{\partial\tilde{M}}$  y el de  $d\omega|_{\partial\tilde{M}}$  son cero, es decir, si existe una forma  $\omega_F \in \Omega^*(F)$  tal que  $\mathcal{L}^*(\omega_F) = \tilde{\omega}|_{\partial\tilde{M}}$ . En [55], A. Verona prueba el isomorfismo

$$H_0^*(M) \cong H^*(M).$$

Notamos que el complejo de las formas de Verona  $\Omega_0^*(M)$  es un álgebra diferencial graduada. Más adelante probaremos que en cohomología básica también tenemos un isomorfismo

$$H_0^*(M/\mathcal{F}) \cong H^*(M/\mathcal{F}).$$

Otro caso conocido es el de perversidades negativas, es decir,  $\bar{p} < \bar{0}$ . En ese caso, tenemos

$$\Omega_{\bar{p}}^*(M) = \{\omega \text{ de Verona} : \omega_F = 0\} \quad \text{y} \quad \Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) = \{\omega \text{ básica de Verona} : \omega_F = 0\}.$$

Más adelante probaremos los isomorfismos

$$H_{\bar{p}}^*(M) \cong H^*(M, F) \quad \text{y} \quad H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \cong H^*(M/\mathcal{F}, F) \quad \text{si } \bar{p} < \bar{0}.$$

Otro caso especial es el de perversidades mayores que  $\bar{t}$ . Para este caso, obtendremos isomorfismos

$$H_{\bar{p}}^*(M) \cong H^*(M - F) \quad \text{si } \bar{p} > \bar{t} + \bar{1}; \quad \text{y} \quad H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \cong H^*((M - F)/\mathcal{F}) \quad \text{si } \bar{p} > \bar{t}.$$

Por lo tanto, las perversidades que nos aportarán información nueva serán las que cumplan  $\bar{0} \leq \bar{p} \leq \bar{t} + \bar{1}$ . Para esas perversidades y en el caso de que  $\mathcal{F}$  esté dada por una acción de  $\mathbb{S}^1$ , en el apéndice de esta memoria probaremos que se recupera la cohomología de intersección de la pseudovariiedad estratificada  $M/\mathbb{S}^1$ . Más explícitamente,

$$H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \cong IH_{\bar{q}}^*(M/\mathbb{S}^1),$$

siendo  $\bar{q}$  la perversidad dual de  $\bar{p}$ .

### 3.3.2. Teoremas de de Rham para Cohomología de Intersección

La homología de intersección de una variedad diferenciable es isomorfa a la homología singular, y cumple la dualidad de Poincaré. En este apartado probaremos que la cohomología de intersección calcula la cohomología de de Rham para perversidades entre  $\bar{0}$  y  $\bar{t} + \bar{1}$ . En cuanto a la cohomología básica, no tenemos el mismo resultado, debido a que estamos estudiando la estructura transversa, e intuitivamente hay una variedad estratificada detrás. Sin embargo, en el caso de perversidad nula sí que obtendremos el isomorfismo de tipo Verona  $H_0^*(M/\mathcal{F}) \cong H^*(M/\mathcal{F})$ . Al final del apartado, presentaremos la sucesión exacta de un par para cohomología de Verona. Obtendremos los resultados de tipo de Rham aplicando el truco de Bredon (lema 3.11), por lo que empezaremos realizando los cálculos locales.

**Lema 3.12.** *Sea  $\mathcal{G}$  un flujo riemanniano regular sobre  $\mathbb{S}^{2k+1}$ , y sea  $\mathcal{F}$  el f.R.S. dado por  $\mathcal{F} = C\mathcal{G}$  sobre  $C\mathbb{S}^{2k+1}$ . Sea  $\bar{p}$  la perversidad que asigna al vértice de  $C\mathbb{S}^{2k+1}$  el valor  $p \in \mathbb{Z}$ . Entonces, se tiene:*

$$H_{\bar{p}}^i(C\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{F}) \cong \begin{cases} H^i(\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{G}) & \text{si } i \leq p; \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración.* Podemos suponer  $i \leq 2k + 1$ , ya que si  $i > 2k + 1$ , entonces por un argumento de grado, el grupo sería nulo. Notamos que si  $\omega \in \Omega^i(C\mathbb{S}^{2k+1} - \{0\})$  es levantable, entonces  $||\omega||_{\{0\}} = i$ . Teniendo esto en cuenta, es fácil identificar el complejo:

$$\Omega_{\bar{p}}^i = \Omega_{\bar{p}}^i(C\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{F}).$$

Procederemos caso por caso:

1. Si  $0 \leq i < p$ ,

$$\Omega_{\bar{p}}^i = \Omega^i((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}),$$

siendo  $\mathcal{H}$  la foliación por puntos de  $[0, 1)$ .

2. Si  $i > p$ ,

$$\Omega_{\bar{p}}^i = \Omega^i((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}, \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\}),$$

3. Si  $i = p$ ,

$$\Omega_{\bar{p}}^i = \{\omega \in \Omega^i((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}) : d\omega \text{ se anula en } \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\}\}$$

Una vez que tenemos bien identificados los complejos, calculamos los grupos de cohomología

$$H_{\bar{p}}^i = H_{\bar{p}}^i(C\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{F}).$$

Recordamos que, por el ejemplo 2.8, tenemos

$$H^i(\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{G}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } i = 0, 2, \dots, 2k; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aplicando esto, obtenemos, caso por caso:

1. Si  $0 \leq i < p$ ,

$$H_{\bar{p}}^i = H^i(\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{G}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{Si } i = 0, 2, \dots, 2[\frac{p-1}{2}] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

2. Si  $i > p + 1$ ,

$$H_{\bar{p}}^i = H^i((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}, \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\}) = 0,$$

lo cual se deduce de la sucesión de Gysin para flujos isométricos regulares y de la del par  $(\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1), \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\})$ .

3. Si  $i = p$ ,

tenemos que los ciclos son:

$$\begin{aligned} Z_{\bar{p}}^p(C\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{F}) &= \{\omega \text{ básica, cerrada y perversa}\} \\ &= Z^p((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}, \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\}). \end{aligned}$$

Los bordes son:

$$d(\Omega_{\bar{p}}^{p-1}) = B^p((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}, \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\}).$$

De modo que obtenemos:

$$H_{\bar{p}}^p = \begin{cases} \mathbb{R} & p \text{ par} \\ 0 & p \text{ impar.} \end{cases}$$

4. Si  $i = p + 1$ ,

tenemos los ciclos:

$$Z_{\bar{p}}^{p+1}(CS^{2k+1}/\mathcal{G} \times \mathcal{H}) = Z^{p+1}((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{F}, \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\}).$$

Ahora, si  $\omega$  está en este conjunto, como la cohomología básica de un par de este tipo es nula, existe una forma  $\eta \in \Omega^p((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}, \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\})$  tal que  $d\eta = \omega$ . Además, esta forma que hemos usado para integrar es válida, pues podemos pensar en

$$\Omega^p((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}, \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\})$$

como un subcomplejo de  $\Omega_{\bar{p}}^p$ . Hemos probado que todo ciclo es borde, y por lo tanto,  $H_{\bar{p}}^{p+1} = 0$ .

Recopilando todos estos cálculos, obtenemos el lema. ♣

**Observación 3.6.** Del cálculo realizado en el lema se sigue que los generadores de  $H_{\bar{p}}(CS^{2k+1}/\mathcal{F})$  son

$$\{1, [e], \dots, [e^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}]\},$$

siendo  $e$  la forma de Euler del flujo  $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ .

De igual manera, se obtiene el siguiente resultado:

**Lema 3.13.** Sea  $\bar{p}$  la perversidad que asigna el valor  $p \in \mathbb{Z}$  al vértice del cono  $CS^k$ . Entonces, se tiene

$$H_{\bar{p}}^i(CS^k) \cong \begin{cases} H^i(\mathbb{S}^k) & \text{si } i \leq p; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La prueba es similar a la del lema 3.12 (en vez de aplicar el cálculo de  $H^*(\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{G})$ , hay que aplicar el de  $H^*(\mathbb{S}^k)$ ).

Las formas perversas son formas definidas tan sólo en  $M - F$ , es decir, la parte regular del f.R.S.  $\mathcal{F}$ . A continuación, mostraremos que toda forma diferencial definida en  $M$  es perversa. Consideramos las restricciones

$$i^*: \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M - F) \quad \text{e} \quad i^*: \Omega^*(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^*((M - F)/\mathcal{F})$$

inducidas por la inclusión  $i: M - F \hookrightarrow M$ . Tenemos el siguiente:

**Lema 3.14.** Para toda perversidad  $\bar{p} \geq 0$ , se tiene

$$i^*(\Omega^*(M)) \subseteq \Omega_{\bar{p}}^*(M) \quad \text{e} \quad i^*(\Omega^*(M/\mathcal{F})) \subseteq \Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}).$$

*Demostración.* Sea  $\omega \in \Omega^*(M)$ . Podemos considerar el pullback de la explosión de Jänich:

$$\mathcal{L}^*: \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(\widetilde{M}).$$

De esta manera,  $\omega|_{M-F}$  es una forma perversa, siendo  $\widetilde{\omega} = \mathcal{L}^*(\omega)$  su levantamiento. Notamos que además el grado vertical de  $\widetilde{\omega}|_{\partial\widetilde{M}}$  será  $\leq 0$ , debido a que

$$\widetilde{\omega}|_{\partial\widetilde{M}} = (\mathcal{L}^*\omega)|_{\partial\widetilde{M}} = \mathcal{L}^*(\omega|_F).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$i^*(\omega) = \omega|_{M-F} \in \Omega_{\bar{0}}^*(M) \subseteq \Omega_{\bar{p}}^*(M) \quad \text{para todo } \bar{p} \geq \bar{0}.$$

Notamos que la misma prueba es válida para el caso básico. ♣

Gracias al lema 3.14, tenemos el homomorfismo

$$i^*: \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega_{\bar{p}}^*(M)$$

para todo  $\bar{p} \geq 0$ . Nuestro próximo objetivo es probar que  $i^*$  es un cuasi-isomorfismo. Para ello, usaremos el truco de Bredon (lema 3.11). Al igual que en la demostración de la proposición 2.16, necesitaremos la siguiente propiedad de la cohomología de intersección:

**Lema 3.15.** *Las cohomologías de intersección  $H_{\bar{p}}^*(M)$  y  $H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F})$  cumplen la propiedad de Mayer-Vietoris.*

*Demostración.* Al igual que para la prueba del corolario 2.13, tan sólo nos hace falta probar la existencia de particiones de la unidad formadas por funciones básicas y diferenciables, subordinadas a cualquier cubrimiento de abiertos  $\overline{\mathcal{F}}$ -saturados. Sabemos que tenemos dos tipos de entornos saturados (ver observación 3.5): entornos de Carrière fuera de los puntos fijos y entornos conjugados a

$$(U \times CS^{2k+1}, \mathcal{H} \times C\mathcal{G}),$$

siendo  $\mathcal{H}$  la foliación por puntos y  $\mathcal{G}$  un flujo riemanniano regular sobre  $S^{2k+1}$ . Podemos tomar funciones diferenciables  $f_\rho: [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$  tales que  $f(t) > 0$  si  $t \in [0, \rho)$  y que  $f(t) = 0$  si  $t > \rho$ . Definimos las funciones grano

$$F_\rho: U \times CS^{2k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dadas por  $F_\rho(u, [t, x]) = f_\rho(t)$ . Notamos que estas funciones grano son básicas, pues el radio de  $CS^{2k+1}$  es ortogonal a  $\mathcal{F}$ . La construcción estándar de particiones de la unidad usando como funciones grano las funciones  $F_\rho$  y las funciones grano del lema 2.12 nos proporciona particiones de la unidad como la que buscamos, y por lo tanto, el resultado. ♣

**Observación 3.7.** Notamos que, dado que las funciones grano que usamos son levantables, las particiones de la unidad que obtenemos también lo son.

Llegamos al siguiente resultado:

**Teorema 3.16 (Teorema de de Rham para cohomología de Intersección).** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad cerrada  $M$  y sea  $\bar{0} \leq \bar{p} \leq \bar{t} + \bar{1}$ . Entonces, la inclusión  $i: M - F \hookrightarrow M$  induce un isomorfismo*

$$i^*: H^*(M) \longrightarrow H_{\bar{p}}^*(M).$$

*Demostración.* Aplicaremos el truco de Bredon (lema 3.11) sobre  $M$  para la afirmación

$$P(U, \mathcal{F}_U) \equiv \text{“la aplicación } i_U^*: H^*(U) \longrightarrow H_{\bar{p}}^*(U) \text{ es un isomorfismo”}.$$

Tan sólo hemos de verificar que se satisfacen las condiciones del lema 3.11. TB1 se cumple porque ambas cohomologías satisfacen el lema de Poincaré; TB2 es cierto debido al lema 3.15; TB3 se sigue igual que en la proposición 2.16, TB4 se da porque si  $U$  es un entorno de Carrière el flujo  $\mathcal{F}_U$  es regular, y en ese caso,  $H_{\bar{p}}^*(U) = H^*(U)$ ; por último, TB5 se cumple por el lema 3.13. ♣

Notamos que si en el teorema sustituimos  $H_{\bar{p}}^*(M)$  por  $H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F})$ , se verifican todos los axiomas del truco de Bredon salvo TB5, que según el lema 3.12 tan sólo se verifica para el caso de perversidad  $\bar{0}$ . Aplicando el truco de Bredon tenemos el siguiente teorema, que recupera el teorema de Verona:

**Teorema 3.17 (Teorema de Verona).** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad cerrada  $M$  y sea  $F$  la variedad de los puntos fijos. Entonces, la inclusión  $i: M - F \hookrightarrow M$  induce un isomorfismo*

$$i^*: H^*(M/\mathcal{F}) \longrightarrow H_{\bar{0}}^*(M/\mathcal{F}).$$

De la misma manera, y a partir de los cálculos locales, se prueba el resultado ya comentado sobre la perversidad  $\bar{t}$ :

**Proposición 3.18.** *En las condiciones anteriores, se tienen los isomorfismos*

$$H_{\bar{p}}^*(M) \cong H^*(M - F) \quad \text{si } \bar{p} > \bar{t} + \bar{1}; \quad \text{y} \quad H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \cong H^*((M - F)/\mathcal{F}) \quad \text{si } \bar{p} > \bar{t}.$$

A continuación, estudiamos la cohomología de intersección con perversidad  $\bar{p} < \bar{0}$ . En este caso, la cohomología va a resultar isomorfa a la cohomología relativa a  $F$ . Para probar esto, se puede construir el cuasi-isomorfismo correspondiente y probarlo mediante el truco de Bredon. Nosotros, sin embargo, lo haremos usando sucesiones exactas análogas a la sucesión exacta de un par.

**Proposición 3.19.** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad cerrada  $M$ , y sea una perversidad  $\bar{p} < \bar{0}$  sobre la variedad de los puntos fijos  $F$ . Entonces, las sucesiones de complejos*

$$0 \rightarrow \Omega_{\bar{p}}^*(M) \xrightarrow{\iota} \Omega_{\bar{0}}^*(M) \xrightarrow{\rho} \Omega^*(F) \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow \Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\iota'} \Omega_{\bar{0}}^*(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\rho'} \Omega^*(F) \rightarrow 0,$$

donde  $\iota, \iota'$  son las inclusiones naturales y  $\rho, \rho'$  las restricciones, son exactas.

*Demostración.* Todos los pasos de la exactitud son directos, salvo la sobreyectividad de las restricciones  $\rho$  y  $\rho'$ . Para ello, consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & \Omega^*(F) & & \\ & \nearrow \rho & \uparrow \rho' & \nwarrow \rho'' & \\ \Omega_{\bar{0}}^*(M) & \xleftarrow{\iota} & \Omega_{\bar{0}}^*(M/\mathcal{F}) & \xleftarrow{i^*} & \Omega^*(M/\mathcal{F}), \end{array}$$

donde  $\rho''$  es la restricción,  $i^*$  está inducido por la inclusión  $i: M - F \hookrightarrow M$  y  $\iota$  es la inclusión natural. Notamos que podemos extender toda forma  $\gamma \in \Omega^*(F)$  a una forma de  $\Omega^*(M/\mathcal{F})$  mediante un entorno tubular  $\pi: T \rightarrow F$  como el de la proposición 3.6. Tenemos entonces que  $\rho''$  es sobreyectiva, y por el diagrama,  $\rho$  y  $\rho'$  también lo son. ♣

**Corolario 3.20.** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad cerrada  $M$ , y sea una perversidad  $\bar{p} < \bar{0}$  sobre la variedad de los puntos fijos  $F$ . Entonces, la inclusión  $i: M - F \hookrightarrow M$  induce los isomorfismos*

$$H_{\bar{p}}^*(M) \cong H^*(M, F) \quad \text{y} \quad H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \cong H^*(M/\mathcal{F}, F).$$

*Demostración.* El resultado se sigue del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_{\bar{p}}^*(M) & \longrightarrow & \Omega_{\bar{0}}^*(M) & \longrightarrow & \Omega^*(F) \longrightarrow 0, \\ & & \uparrow i^* & & \uparrow i^* & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^*(M, F) & \longrightarrow & \Omega^*(M) & \longrightarrow & \Omega^*(F) \longrightarrow 0 \end{array}$$

y del lema de los cinco. Para la cohomología básica, se procede de la misma manera. ♣

Para terminar, aprovechamos el hecho de que la cohomología básica de intersección de los modelos locales es par.

**Proposición 3.21.** *En las condiciones del teorema 3.17, si  $\bar{p}$  es una perversidad par, la inclusión natural*

$$\iota: \Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega_{\bar{p}+1}^*(M/\mathcal{F})$$

induce un isomorfismo

$$H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} H_{\bar{p}+1}^*(M/\mathcal{F}). \quad (3.5)$$

*Demostración.* Aplicamos el truco de Bredon a la afirmación

$P(U, \mathcal{F}_U) \equiv$  “la aplicación  $\iota_U^*: H_{\bar{p}}^*(U/\mathcal{F}_U) \longrightarrow H_{\bar{p}+1}^*(U/\mathcal{F}_U)$  es un isomorfismo”.

Las comprobaciones de los axiomas TB1-TB4 son inmediatas. TB5 se cumple por el lema 3.12: es una consecuencia directa de que la cohomología básica de intersección del cono de una esfera sea par.  $\clubsuit$

### 3.3.3. Dualidad de Poincaré

En este apartado probaremos un teorema de dualidad para cohomología básica de intersección que generaliza el construido por F.Kamber y Ph.Tondeur para el caso de flujos riemannianos singulares (ver [33]). En el teorema aparece una nueva cohomología, la cohomología básica *torcida* de intersección (con la diferencial  $d_\kappa$ ). Para la prueba, usaremos, de forma accesoria, la *cohomología de intersección con soporte compacto*.

#### Cohomología de intersección con soporte compacto

Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad  $M$ , no necesariamente compacta. Definimos el *complejo básico de intersección con soporte compacto*:

$$\Omega_{\bar{p},c}^i(M/\mathcal{F}) = \{\omega \in \Omega_{\bar{p}}^i(M/\mathcal{F}) : \overline{\{x \in M - F : \omega_x \neq 0\}}^M \text{ es compacto en } M\}.$$

**Observación 3.8.** Tenemos :

1. Si  $M$  es compacta, entonces  $\Omega_{\bar{p},c}^i(M/\mathcal{F}) = \Omega_{\bar{p}}^i(M/\mathcal{F})$ .
2. Si  $F = \emptyset$ , el flujo es regular, y tenemos  $\Omega_{\bar{p},c}^i(M/\mathcal{F}) = \Omega_c^i(M/\mathcal{F})$ .

Es bien sabido que la cohomología con soporte compacto no es un functor sobre la categoría de las variedades diferenciables si tomamos como morfismos todas las funciones diferenciables. Sin embargo, puede ser un functor si nos restringimos a ciertas aplicaciones, presentando una doble naturaleza: se comporta como functor contravariante para funciones propias, y covariante para inclusiones de abiertos. Es esta última naturaleza covariante la que usaremos para establecer la propiedad de Mayer-Vietoris y probar el teorema de dualidad.

Vamos, por lo tanto, a calcular la cohomología de este complejo para nuestros modelos locales, para lo cual nos será de utilidad la demostración del siguiente lema:

**Lema 3.22.** *Sea  $\mathcal{G}$  un flujo riemanniano regular sobre  $\mathbb{S}^{2k+1}$ . Entonces, se tiene  $H_c^*((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}) = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\omega$  un ciclo básico de grado  $p$ . Tenemos que  $\omega$  se puede escribir de forma única como  $\omega = \alpha_t + \beta_t \wedge dt$ , donde  $\{\alpha_t\}_t$  y  $\{\beta_t\}_t$  son sendas familias de formas diferenciales de  $\mathbb{S}^{2k+1}$  con parámetro  $t \in [0, 1)$ . Afirmamos que la forma

$$\eta = (-1)^{p+1} \int_{s=1}^{s=t} \beta_s \wedge ds$$

es básica, de soporte compacto y cumple  $d\eta = \omega$ . En efecto, consideramos la descomposición  $d\gamma_t = d_M\gamma_t + (-1)^{\text{grad}(\gamma_t)} \dot{\gamma}_t \wedge dt$  para toda familia de formas diferenciales  $\gamma_t$ . Como  $\omega$  es cerrada, se sigue que

$$0 = d_M\alpha_t + ((-1)^p \dot{\alpha}_t + d_M\beta_t) \wedge dt = 0,$$

de donde  $(-1)^{p+1} \dot{\alpha}_t = d_M\beta_t$ . Usando esto último, tenemos

$$\begin{aligned} d\eta &= \int_{s=1}^{s=t} (-1)^{p+1} d_M\beta_s \wedge ds + \left( \int_{s=1}^{s=t} \beta_s \wedge ds \right) \wedge dt \\ &= \int_{s=1}^{s=t} \dot{\alpha}_s \wedge ds + \beta_t \wedge dt \\ &= \alpha_t + \beta_t \wedge dt = \omega. \end{aligned}$$

Notamos que  $\eta$  es de soporte compacto, por serlo  $\omega$  (y por lo tanto,  $\beta_t$ ). Por último, tenemos que  $\eta$  es básica, pues por un lado,  $i_X\omega = 0$  implica que  $i_X\beta_t = 0$ , y entonces  $i_X\eta = \int i_X\beta_s \wedge ds = 0$ . Por otro lado,  $i_Xd\eta = i_X\omega = 0$ . ♣

**Lema 3.23.** Sea  $\mathcal{G}$  un flujo riemanniano regular sobre  $\mathbb{S}^{2k+1}$ , y sea  $\mathcal{F}$  el f.R.S. dado por  $\mathcal{F} = C\mathcal{G}$  sobre  $C\mathbb{S}^{2k+1}$ . Sea  $\bar{p}$  la perversidad que asigna al vértice de  $C\mathbb{S}^{2k+1}$  el valor  $p$ . Entonces, se tiene:

$$H_{\bar{p},c}^i(C\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{F}) = \begin{cases} H^{i-1}(\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{G}) & \text{si } i > p + 1; \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración.* Procedemos como en el lema 3.12. Denotaremos los complejos de esta manera:

$$\Omega_{\bar{p},c}^i = \Omega_{\bar{p},c}^i(C\mathbb{S}^{2k+1}/C\mathcal{G}).$$

Vamos caso por caso, valiéndonos del caso sin soportes compactos y teniendo en cuenta que  $\Omega_{\bar{p},c}^i(M/\mathcal{F}) = \Omega_{\bar{p}}^i(M/\mathcal{F}) \cap \Omega_c^i(M)$ :

1. Si  $0 \leq i < p$

$$\Omega_{\bar{p},c}^i = \Omega_c^i((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}) \quad (3.6)$$

2. Si  $i = p$

$$\Omega_{\bar{p},c}^i = \{\omega \in \Omega_c^i((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}) : d\omega \text{ se anula en } \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\}\}$$

3. Si  $i > p$

$$\Omega_{\bar{p},c}^i = \Omega_c^i((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}, \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\}),$$

Una vez que tenemos bien identificados los complejos, calculamos los grupos de cohomología

$$H_{\bar{p},c}^i = H_{\bar{p},c}^i(C\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{F}).$$

Si  $0 \leq i < p$ , por el lema 3.22 y por (3.6), obtenemos  $H_{\bar{p},c}^i = 0$ . Para los casos  $i = p$ , notamos que la misma prueba nos sirve para integrar los ciclos de  $\Omega_{\bar{p},c}^i$ , debido a que no imponemos ninguna restricción a los bordes que han de integrarlos. No sucederá así para  $i > p + 1$ , pues los bordes han de anularse en  $\mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\}$ . Por lo expuesto, obtenemos

$$H_{\bar{p},c}^i = 0 \text{ para } 0 \leq i \leq p + 1.$$

Para  $p + 2 \leq i \leq 2k + 1$ , consideramos la sucesión exacta de un par:

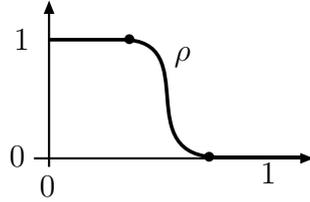
$$0 \rightarrow \Omega_c^*((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}, \mathbb{S}^{2k+1} \times \{0\}) \rightarrow \Omega_c^*((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}) \rightarrow \Omega^*(\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{G}) \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Notamos que la restricción  $\Omega_c^*((\mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1))/\mathcal{G} \times \mathcal{H}) \rightarrow \Omega^*(\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{G})$  está bien definida por ser  $\mathbb{S}^{2k+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{2k+1} \times [0, 1)$  una aplicación propia. Utilizando el lema 3.22 y la sucesión exacta larga de cohomología de (3.7), se sigue el isomorfismo

$$H_{\bar{p},c}^i \cong H^{i-1}(\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{G}) \quad \text{para } p+2 \leq i \leq 2k+1.$$

Por el cálculo de  $H^*(\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{G})$  (ver ejemplo 2.8), obtenemos el resultado.  $\clubsuit$

**Observación 3.9.** Usando (3.7) podemos obtener de forma explícita los generadores de  $H_{\bar{p}}^*(C\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{F})$ . Considerando una función diferenciable  $\rho: [0, 1) \rightarrow [0, 1]$  como en la siguiente figura:



y tomando la forma de Euler  $e$  del flujo  $\mathcal{G}$ , tenemos los generadores:

$$H_{\bar{p}}^*(C\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{F}) = \left\langle [d\rho \wedge e^{[\frac{p}{2}]+1}], [d\rho \wedge e^{[\frac{p}{2}]+2}], \dots, [d\rho \wedge e^k] \right\rangle.$$

**Observación 3.10.** En vista del lema 3.23, la proposición 3.21 es cierta si se enuncia para cohomología básica de intersección con soporte compacto. Es decir, para  $\bar{p}$  par, se tiene:

$$H_{\bar{p},c}^*(M/\mathcal{F}) \cong H_{\bar{p}+1,c}^*(M/\mathcal{F}).$$

### Clase de $[\kappa]$

A partir de ahora, consideraremos una métrica adaptada  $\mu$ , con su correspondiente levantamiento  $\tilde{\mu}$ . Tenemos definido un campo (único salvo signo)  $X$  tal que  $\mu(X, X) = 1$  en  $M - F$ . Este campo es levantable a  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$  de modo que  $\tilde{\mu}(\tilde{X}, \tilde{X}) = 1$  en todo  $\tilde{M}$ . Tenemos definidas las formas características

$$\chi = i_X \mu \in \Omega^1(M - F) \quad \text{y} \quad \tilde{\chi} = i_{\tilde{X}} \tilde{\mu} \in \Omega^1(\tilde{M}).$$

Notamos que el grado perverso de  $\chi$  es 1, pues  $\tilde{X}$  es un campo tangente a las fibras del fibrado  $\partial\tilde{M} \rightarrow F$  e  $i_{\tilde{X}} \tilde{\chi} = 1$ . También tenemos las formas  $\kappa, \tilde{\kappa}, e, \tilde{e}$  que son básicas, por ser  $\mu$  una métrica adaptada. Como  $d\kappa = d\tilde{\kappa} = 0$ , queda definida una clase de cohomología:

$$[\kappa] \in H_{\bar{1}}^1(M/\mathcal{F}),$$

que en un principio, depende de la métrica adaptada que hayamos escogido. Sin embargo, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 3.24.** Sean  $\mu_1$  y  $\mu_2$  dos métricas adaptadas para el f.R.S.  $(M, \mathcal{F})$ . Entonces, tenemos:

$$[\kappa_1] = [\kappa_2] \in H_{\mathbb{I}}^1(M/\mathcal{F}).$$

*Demostración.* Las métricas adaptadas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  inducen respectivamente métricas  $\mu_{D,1}$  y  $\mu_{D,2}$  en  $D(M)$  (notamos que estas extensiones no son únicas). Por el teorema 1.8, tenemos que existe una función básica  $f_D \in \Omega^0(D(M)/\mathcal{F}_D)$  tal que

$$(\kappa_{D,1})_b - (\kappa_{D,2})_b = df_D.$$

Notar que como no tenemos asegurado que las formas  $\kappa_{D,1}$  y  $\kappa_{D,2}$  sean básicas, hemos tomado su componente básica (ver [2]). Observamos que las restricciones a  $M - F$  de esas formas son exactamente  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ . La función  $f_D$  induce una función básica  $f = (\iota \circ \mathcal{L}^{-1})^* f_D$ , de modo que  $\kappa_1 - \kappa_2 = df$ .  $\clubsuit$

Por la proposición 3.21 y por el teorema 3.17, tenemos los isomorfismos

$$H_{\mathbb{I}}^1(M/\mathcal{F}) \xleftarrow[\cong]{\iota} H_0^1(M/\mathcal{F}) \xleftarrow[\cong]{i^*} H^1(M/\mathcal{F}), \quad (3.8)$$

de modo que, de forma intuitiva, podemos considerar  $[\kappa] \in H_{\mathbb{I}}^1(M/\mathcal{F})$  como una clase de  $H^1(M/\mathcal{F})$ . Precisamente, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.25.** Sea  $\mu$  una métrica adaptada, con su correspondiente forma de curvatura media  $\kappa$ . Consideramos los isomorfismos (3.8), y sea  $\alpha \in \Omega^1(M/\mathcal{F})$  un representante de  $(\iota \circ i^*)^{-1}[\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F})$ . Entonces, existe una métrica adaptada  $\mu'$  tal que su forma de curvatura media es  $\alpha|_{M-F}$ .

*Demostración.* Por la proposición 3.21, existe  $f \in \Omega_0^0(M/\mathcal{F}) = \Omega_{\mathbb{I}}^0(M/\mathcal{F})$  tal que:

$$\kappa = \alpha + df \quad \text{en } M - F.$$

Tomamos la reparametrización usual  $\mu' = e^{2f}\mu$ , obteniendo  $X' = e^{-f}X$ ,  $\chi' = e^f\chi$  y, finalmente,

$$\begin{aligned} \kappa' &= L_{X'}\chi' = L_{e^{-f}X}e^f\chi \\ &= e^f(e^{-f}L_X\chi + i_X\chi \wedge d(e^{-f})) \\ &= \kappa - (\kappa - \alpha) = \alpha, \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba.  $\clubsuit$

**Observación 3.11.** En adelante, consideraremos métricas adaptadas tales que su forma de curvatura media esté definida globalmente en  $M$ , y que por lo tanto, su grado perverso sea 0.

**Observación 3.12.** En particular, podemos tomar una métrica adaptada tal que  $\|\kappa\|_S = -\infty$  para todo estrato  $S$ . En efecto, sabemos que el flujo es isométrico en cada componente conexa de  $\partial\widetilde{M}$  (ver proposición 3.9), así que podemos tomar una métrica  $\mu_\partial$  sobre  $\partial\widetilde{M}$  tal que  $\kappa_\partial = 0$ . Tomando una métrica adaptada  $\mu$  cualquiera y  $\rho$  una función como en la observación 3.9, la métrica

$$\widetilde{\mu}' = \rho\Psi_D^*(\mu_\partial + dr^2) + (1 - \rho)\iota^*(\mathcal{L}^{-1})^*\mu$$

es adaptada y su forma de curvatura media  $\widetilde{\kappa}'$  se anula en  $\partial\widetilde{M}$ . No obstante, el grado perverso que nos va a interesar de  $\kappa$  va a ser 0, pues la unicidad del teorema 3.24 no la tenemos garantizada en  $H_{-1}^1(M/\mathcal{F})$ , tal y como podemos apreciar en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.7.** Sea la acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $\mathbb{S}^2 = \Sigma\mathbb{S}^1$ :

$$\Psi: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

dada por  $\Psi(z, [x, s]) = [zx, s]$ . Los puntos fijos son los polos norte y sur  $(N, S)$ . La explosión es el cilindro  $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ . Tomamos una partición de la unidad  $(\rho_N, \rho_S)$  subordinada a los abiertos  $[-1, 1/2)$  y  $(-1/2, 1]$  de  $[-1, 1]$ . Tomamos una métrica  $\mu$  invariante en el cilindro, es decir, con  $\kappa = 0$ . Los cambios de parametrización

$$\mu' = e^{2\rho_N}\mu, \quad \mu'' = e^{2\rho_S}\mu$$

nos proporcionan métricas adaptadas con  $\kappa' = d\rho_N$  y con  $\kappa'' = d\rho_S$ . Si ahora calculamos la sucesión exacta en cohomología básica del par  $(\mathbb{S}^2, \{N, S\})$ , obtenemos que

$$H^1(\mathbb{S}^2/\mathcal{F}, \{N, S\}) = \langle [d\rho_N], [d\rho_S] \rangle,$$

de modo que las métricas adaptadas  $\mu, \mu'$  y  $\mu''$  nos proporcionan formas de curvatura media con clases distintas en  $H_{-1}^1(\mathbb{S}^2/\mathcal{F})$ .

**Observación 3.13.** Notamos que el corolario 1.10 es cierto para f.R.S., es decir, si  $\mathcal{F}$  es un f.R.S. sobre una variedad cerrada y simplemente conexa  $M$ , se tiene  $[\kappa] = 0$ . Es una consecuencia directa del hecho de que la inclusión de formas induce un monomorfismo  $H^1(M/\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(M)$ .

### Cohomología básica torcida de intersección

Recordamos que en el capítulo anterior utilizábamos la cohomología torcida, es decir, la cohomología del complejo básico provisto de la diferencial

$$d_\kappa \omega = d\omega - \kappa \wedge \omega$$

Para el caso regular vamos a utilizar una cohomología análoga: la cohomología torcida perversa. Notamos que dado que el grado perverso de  $\kappa$  es cero, la diferencial

$$d_\kappa: \Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega_{\bar{p}}^{*+1}(M/\mathcal{F})$$

está bien definida. Podemos considerar, pues, los grupos de cohomología

$$H_{\bar{p},\kappa}^*(M/\mathcal{F}) = (\Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}), d_\kappa).$$

Esta cohomología tan sólo depende de la clase  $[\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F})$ . Más explícitamente, si  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son dos métricas adaptadas, y  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  sus formas de curvatura media (que podemos suponer globales), por las proposiciones 3.24 y 3.25, tenemos que existe una función  $f \in \Omega^*(M/\mathcal{F})$  tal que  $\kappa_1 - \kappa_2 = df$ . En ese caso, la aplicación estándar

$$\omega \longmapsto e^f \omega$$

es un isomorfismo de  $H_{\bar{p},\kappa_1}^*(M/\mathcal{F})$  en  $H_{\bar{p},\kappa_2}^*(M/\mathcal{F})$  (notamos que es un isomorfismo de  $H^*(M/\mathcal{F})$ -módulos, no de álgebras). Por lo tanto, esta nueva cohomología no depende de la métrica escogida, sino de  $\mathcal{F}$ .

Para probar el teorema de dualidad, necesitaremos considerar una nueva cohomología: la *cohomología básica de intersección torcida con soporte compacto*. Definimos, para cualquier variedad  $M$ , no necesariamente compacta, y provista de un f.R.S.  $\mathcal{F}$ , la cohomología

$$H_{\bar{p},\kappa,c}^*(M/\mathcal{F}) = H^*(\Omega_{\bar{p},c}^*(M/\mathcal{F}), d_\kappa).$$

**Observación 3.14.** Esta cohomología cumple las propiedades usuales que cumplen las cohomologías que hemos definido. En el caso de la propiedad de Mayer-Vietoris, notamos que dado que el functor es covariante para inclusiones de abiertos, la sucesión exacta corta de Mayer-Vietoris para  $M = U \cup V$  es:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & \Omega_c^*((U \cap V)/\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Omega_c^*(U/\mathcal{F}) \oplus \Omega_c^*(V/\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Omega_c^*((U \cup V)/\mathcal{F}) & \rightarrow 0 \\ & \omega & \longmapsto & (j_*\omega, -j_*\omega) & & & \\ & & & (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha + \beta, & \end{array}$$

donde  $j_*\omega$  es la extensión natural por la función nula.

### Dualidad de Poincaré

**Definición 3.11.** Sean las formas  $\alpha \in \Omega_{\bar{p}}^n(M/\mathcal{F})$  y  $\beta \in \Omega_{\bar{q},c}^*(M/\mathcal{F})$ . Entonces, denotaremos

$$\int_M \alpha \wedge \beta \wedge \chi = \int_{\tilde{M}} \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \wedge \tilde{\chi}.$$

Notamos que como  $\beta$  es de soporte compacto,  $\int_M \alpha \wedge \beta \wedge \chi$  está bien definida aunque  $M$  no sea compacta.

Estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

**Teorema 3.26 (Dualidad de Poincaré para la cohomología básica de flujos riemannianos singulares).** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano singular sobre la variedad cerrada  $M$  y sea una métrica casi-fibrada tal que su forma de curvatura media  $\kappa$  sea básica. Entonces, la forma bilineal*

$$\begin{aligned} \Gamma: H_{\bar{p}}^i(M/\mathcal{F}) \otimes H_{\bar{q},\kappa}^{n-i-1}(M/\mathcal{F}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\alpha] \otimes [\beta] &\longmapsto \int_M \alpha \wedge \beta \wedge \chi \end{aligned}$$

es no degenerada para cada par de perversidades  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$  duales.

*Demostración.* Hemos de comprobar que la aplicación lineal  $\Gamma$  está bien definida, es decir, que no depende de los representantes que tomamos en los grupos de cohomología correspondientes.

Sean  $[\alpha + d\alpha_1] \in H_{\bar{p}}^i(M/\mathcal{F})$  y  $[\beta + d_{\kappa}\beta_1] \in H_{\bar{q},\kappa}^{n-i-1}(M/\mathcal{F})$ . Calculamos:

$$\begin{aligned} \int_M (\alpha + d\alpha_1) \wedge (\beta + d_{\kappa}\beta_1) \wedge \chi &= \int_M \alpha \wedge \beta \wedge \chi + \int_M \alpha \wedge d_{\kappa}\beta_1 \wedge \chi \\ &\quad + \int_M d\alpha_1 \wedge \beta \wedge \chi + \int_M d\alpha_1 \wedge d_{\kappa}\beta_1 \wedge \chi \\ &= \int_M \alpha \wedge \beta \wedge \chi + I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

Tenemos que probar, por lo tanto, que  $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ . Vamos primero con  $I_1$ . Tenemos las igualdades:

$$\begin{aligned} d(\alpha_1 \wedge \beta \wedge \chi) &= d\alpha_1 \wedge \beta \wedge \chi + (-1)^{i-1} \alpha_1 \wedge d\beta \wedge \chi + (-1)^n \alpha_1 \wedge \beta \wedge d\chi \\ &= d\alpha_1 \wedge \beta \wedge \chi + (-1)^{i-1} \alpha_1 \wedge \kappa \wedge \beta \wedge \chi \\ &\quad + (-1)^n \alpha_1 \wedge \beta \wedge e + (-1)^n \alpha_1 \wedge \beta \wedge \chi \wedge \kappa \\ &= d\alpha_1 \wedge \beta \wedge \chi + (-1)^{i-1} (\alpha_1 \wedge \kappa \wedge \beta \wedge \chi - \alpha_1 \wedge \kappa \wedge \beta \wedge \chi) \\ &= d\alpha_1 \wedge \beta \wedge \chi, \end{aligned}$$

donde hemos usado  $\alpha_1 \wedge \beta \wedge e = 0$ , por ser una forma básica de grado  $n$ . Tenemos, por lo tanto, usando el teorema de Stokes,

$$I_1 = \int_{\widetilde{M}} d\widetilde{\alpha}_1 \wedge \widetilde{\beta} \wedge \widetilde{\chi} = \int_{\widetilde{M}} d(\widetilde{\alpha}_1 \wedge \widetilde{\beta} \wedge \widetilde{\chi}) = \int_{\partial\widetilde{M}} \widetilde{\alpha}_1|_{\partial\widetilde{M}} \wedge \widetilde{\beta}|_{\partial\widetilde{M}} \wedge \widetilde{\chi}|_{\partial\widetilde{M}} = 0,$$

debido a que

$$\|\alpha_1 \wedge \beta \wedge \chi\|_S \leq \text{cod}(S) - 2,$$

lo cual impide que la forma  $\widetilde{\alpha}_1|_{\partial\widetilde{M}} \wedge \widetilde{\beta}|_{\partial\widetilde{M}} \wedge \widetilde{\chi}|_{\partial\widetilde{M}}$  pueda ser una forma de volumen de  $\partial\widetilde{M}$ .

Para probar  $I_2 = 0$ , consideramos las igualdades:

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta_1 \wedge \chi) &= d\alpha \wedge \beta_1 \wedge \chi + (-1)^i \alpha \wedge d\beta_1 \wedge \chi + \\ &\quad + (-1)^n \alpha \wedge \beta_1 \wedge e + (-1)^n \alpha \wedge \beta_1 \wedge \chi \wedge \kappa = \\ &= (-1)^i \alpha \wedge d\beta_1 \wedge \chi + (-1)^n \alpha \wedge \beta_1 \wedge \chi \wedge \kappa \\ &= (-1)^i \alpha \wedge d_\kappa \beta_1 \wedge \chi, \end{aligned}$$

de modo que tenemos

$$(-1)^i I_2 = \int_{\widetilde{M}} d\widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\beta}_1 \wedge \widetilde{\chi} = \int_{\widetilde{M}} d(\widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\beta}_1 \wedge \widetilde{\chi}) = \int_{\partial\widetilde{M}} \widetilde{\alpha}|_{\partial\widetilde{M}} \wedge \widetilde{\beta}_1|_{\partial\widetilde{M}} \wedge \widetilde{\chi}|_{\partial\widetilde{M}} = 0,$$

debido esta vez a que

$$\|\alpha \wedge \beta_1 \wedge \chi\|_S \leq \text{cod}(S) - 2.$$

Para probar  $I_3 = 0$  nos basta aplicar los mismos cálculos que en  $I_1$ , sustituyendo  $\beta$  por  $d_\kappa \beta_1$ , o la de  $I_2$  sustituyendo  $\alpha$  por  $d\alpha_1$ .

Para probar que  $\Gamma$  es un isomorfismo, notamos que es equivalente probar que la *aplicación de Poincaré*

$$\Psi_M : H_{\overline{p}}^*(M/\mathcal{F}) \longrightarrow (H_{\overline{q},\kappa}^*(M/\mathcal{F}))^*$$

inducida por  $\Gamma$  es un isomorfismo (esta equivalencia es cierta por tratarse de espacios vectoriales de dimensión finita, lo cual probaremos en la proposición 3.40). Aplicaremos el truco de Bredon para f.R.S. (lema 3.11) sobre la siguiente afirmación  $P$  hecha para f.R.S.  $(U, \mathcal{F}_U)$ :

$P(U, \mathcal{F}_U) \equiv$  “La aplicación  $\Psi_U : H_{\overline{p}}^*(U/\mathcal{F}_U) \longrightarrow (H_{\overline{q},\kappa,c}^*(U/\mathcal{F}_U))^*$  inducida por la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \Gamma_U : H_{\overline{p}}^i(U/\mathcal{F}_U) &\otimes H_{\overline{q},\kappa,c}^{n-i-1}(U/\mathcal{F}_U) &\longrightarrow &\mathbb{R} \\ &(\alpha, \beta) &\longmapsto &\int_U \alpha \wedge \beta \wedge \chi_U \end{aligned}$$

es un isomorfismo”

Notamos que dado que la variedad  $M$  es compacta, la afirmación  $P(M, \mathcal{F})$  es exactamente el enunciado del teorema. Tan sólo nos queda comprobar que se satisfacen los axiomas TB1-TB5. TB1 se cumple por el lema de Poincaré para cohomología con soporte compacto (ver [5], por ejemplo). TB3 se sigue del hecho de que para toda colección arbitraria de conjuntos  $\{U_\alpha\}_\alpha$ , se tiene  $\Omega^*(\bigsqcup_\alpha U_\alpha) = \prod_\alpha \Omega^*(U_\alpha)$  y  $\Omega_c^*(\bigsqcup_\alpha U_\alpha) = \bigoplus_\alpha \Omega_c^*(U_\alpha)$ . TB4 se sigue del hecho de que en los entornos de Carrière el flujo es regular, y por lo tanto, se puede aplicar el teorema de F. Kamber y Ph. Tondeur (teorema 1.12).

Para probar TB2, consideramos  $\mathcal{F}$  en  $M = U \cup V$ . Tenemos el siguiente diagrama de filas exactas que relaciona la sucesión de Mayer-Vietoris de la cohomología de intersección básica con la dual de la torcida de soporte compacto:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow H_p^i(M/\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_p^i(U/\mathcal{F}) \oplus H_p^i(V/\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_p^i((U \cap V)/\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_p^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \cdots \\ \downarrow \Psi_M & & \downarrow \Psi_U, \Psi_V & & \downarrow \Psi_{U \cap V} & & \downarrow \Psi_M \\ \cdots \rightarrow (H_{q,\kappa,c}^i(M/\mathcal{F}))^* & \longrightarrow & (H_{q,\kappa,c}^i(U/\mathcal{F}) \oplus H_{q,\kappa,c}^i(V/\mathcal{F}))^* & \longrightarrow & (H_{q,\kappa,c}^i((U \cap V)/\mathcal{F}))^* & \longrightarrow & (H_{q,\kappa,c}^{i+1}(M/\mathcal{F}))^* \rightarrow \cdots \end{array}$$

Se comprueba que este diagrama es conmutativo (se puede seguir la prueba de [5], pag. 21). El lema de los cinco aplicado a este diagrama nos proporciona TB2.

Por último, notamos que TB5 se sigue de los cálculos locales (lemas 3.12 y 3.23). En efecto, para  $(CS^{2k+1}, C\mathcal{G})$  escribiremos  $\bar{p}(\{0\}) = p$  y  $\bar{q}(\{0\}) = q$ , de donde se sigue, por dualidad,  $p + q = 2k - 1$ . Como  $[\kappa] = 0$ , tenemos los generadores:

$$\begin{aligned} H_p^*(CS^{2k+1}/C\mathcal{G}) &= \langle 1, e, \dots, e^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \rangle \quad y \\ H_{q,\kappa,c}^*(CS^{2k+1}/C\mathcal{G}) &= \langle e^f d\rho \wedge e^{k - \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}, e^f d\rho \wedge e^{k - \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1}, \dots, e^f d\rho \wedge e^k \rangle, \end{aligned}$$

siendo  $e$  la forma de Euler de  $\mathcal{G}$ ,  $f$  una función básica tal que  $\kappa = df$  y  $\rho$  una aplicación como en la observación 3.9. La dualidad se sigue del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{CS^{2k+1}}(e^i, e^{-f} d\rho \wedge e^{k-i}) &= \int_{\mathbb{S}^{2k+1} \times [0,1)} e^{-f} d\rho \wedge e^k \wedge \chi \\ &= \int_{\mathbb{S}^{2k+1} \times [0,1)} d(e^f \rho e^k \wedge \chi) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{2k+1}} e^{f(0)} e^k \wedge \chi \neq 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema de Stokes, el hecho de que  $e^k \wedge \chi$  sea una forma de volumen de  $\mathbb{S}^{2k+1}$ , y también  $e^{k+1} = 0$ , por tratarse de una forma básica de grado máximo.  $\clubsuit$

### 3.4. Sucesión de Gysin

En esta sección construiremos la sucesión de Gysin que relacionará las cohomologías  $H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F})$  y  $H_{\bar{p}}^*(M)$ . Estas sucesiones darán respuesta al *problema de Gysin para perversidad  $\bar{p}$* , motivado por la inclusión

$$\Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \hookrightarrow \Omega_{\bar{p}}^*(M). \quad (3.9)$$

Notamos que en el caso  $\bar{p} > \bar{t} + \bar{1}$ , el estudio realizado para flujos riemannianos regulares nos proporciona la sucesión de Gysin:

$$\rightarrow H^i((M-F)/\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(M-F) \longrightarrow H_{\kappa}^{i-1}((M-F)/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge^{[e]}} H^{i+1}((M-F)/\mathcal{F}) \rightarrow \quad (3.10)$$

En efecto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*((M-F)/\mathcal{F}) & \hookrightarrow & \Omega^*(M-F) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Omega^*(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}) & \hookrightarrow & \Omega^*(\widetilde{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) & \hookrightarrow & \Omega_{\bar{p}}^*(M) \end{array}$$

donde las flechas verticales son cuasi-isomorfismos inducidos por  $\mathcal{L}^{-1}: M-F \rightarrow \widetilde{M}$ . Por el diagrama, resolver el problema de Gysin para  $\bar{p}$  es equivalente a resolver el problema de Gysin planteado por la inclusión

$$\Omega^*((M-F)/\mathcal{F}) \hookrightarrow \Omega^*(M-F),$$

el cual tenemos resuelto, dado que en este caso, el flujo es regular y tenemos la estructura local de un flujo riemanniano sobre una variedad compacta, (es decir, entornos de Carrière). El truco de Bredon es aplicable al flujo  $(M-F, \mathcal{F})$  (ver observacion 2.2). Por la proposición 2.16, obtenemos (3.10). Por lo tanto, nos centraremos en el problema de Gysin para  $\bar{p} \leq \bar{t} + \bar{1}$ .

### 3.4.1. Forma de Euler

En la sucesión de Gysin jugará un papel importante el grado perverso de la forma de Euler, el cual estudiamos a continuación. Al igual que en el caso regular, consideraremos la diferencial

$$d_{-\kappa}\omega = d\omega + \kappa \wedge \omega,$$

así como la cohomología

$$H_{\bar{p},-\kappa}^*(M/\mathcal{F}) = H^*(\Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}), d_{-\kappa}).$$

La forma de Euler cumple  $d_{-\kappa}e = 0$ . Usaremos la siguiente propiedad de esta cohomología.

**Lema 3.27.** *Sea  $\bar{p}$  una perversidad par. Entonces, la inclusión natural*

$$\Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \hookrightarrow \Omega_{\bar{p}+1}^*(M/\mathcal{F})$$

*induce un isomorfismo*

$$H_{\bar{p},-\kappa}^*(M/\mathcal{F}) \cong H_{\bar{p}+1,-\kappa}^*(M/\mathcal{F}).$$

*Demostración.* La prueba es la misma que en el caso con diferencial ordinaria. Tan sólo hay que tener en cuenta que  $\kappa$  es exacta en los entornos de Carrière y en los entornos de tipo  $CS^{2k+1}$ , por lo que podemos aplicar el lema 3.12. ♣

**Proposición 3.28.** *Sea  $\mu$  una métrica adaptada para  $(M, \mathcal{F})$  y sea  $S$  un estrato de puntos fijos. Entonces, el grado perverso de la forma de Euler está dado por:*

$$\|e\|_S = \begin{cases} 2 & \text{si } \text{cod } S > 2; \\ -\infty & \text{si } \text{cod } S = 2. \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $\mu$  una métrica adaptada, y  $e$  su forma de Euler. Sea  $2k+2$  (con  $k > 0$ ) la codimensión del estrato  $S$ . Supongamos, por reducción al absurdo, que  $\|e\|_S \leq 1$ . Afirmamos ahora que existe otra métrica adaptada  $\mu'$  cuya forma de Euler es una forma de Verona. En efecto, por el lema 3.27, tenemos que existen formas

$$\alpha \in \Omega_0^2(M/\mathcal{F}) \quad \text{y} \quad \gamma \in \Omega_1^1(M/\mathcal{F})$$

tales que

$$e = \alpha + d_{-\kappa}\gamma.$$

Consideramos entonces la forma  $\omega = \chi - \gamma$ . Esta forma cumple  $\omega(X) = 1$ , y es levantable. Consideramos la métrica

$$\mu' = (\omega \otimes \omega) \oplus \mu_Q,$$

siendo  $\mu_Q$  la parte ortogonal de  $\mu$ . Tenemos que  $\mu'$  es una métrica casi-fibrada, y su forma característica es  $\omega$ . Calculamos entonces

$$\begin{aligned} d\omega &= e + \chi \wedge \kappa - d\gamma \\ &= \alpha + \kappa \wedge \gamma + \chi \wedge \kappa \\ &= \alpha + (\chi - \gamma) \wedge \kappa \\ &= \alpha + \omega \wedge \kappa, \end{aligned}$$

de modo que deducimos  $e' = \alpha$  y  $\kappa' = \kappa$ . Por lo tanto, tenemos una forma de Euler de grado perverso 0, es decir, de Verona. Esto es una contradicción, porque si nos restringimos a un modelo local  $CS^{2k+1}$ , la restricción de nuestra forma de Verona habría de seguir siendo de Verona por un lado, luego tendría que ser nula. Por otro lado, tendría que generar la cohomología básica de  $S^{2k+1}$ , que no es nula porque  $k > 0$  (ver ejemplo 2.8).

Por último, notamos que en el caso  $\text{cod } S = 2$ , el flujo en un entorno de un punto  $x \in S$  es de la forma  $U \times CS^1$ , por lo que la forma de Euler, que es de grado 2, se anula, y tenemos  $\|e\|_S = -\infty$ . ♣

### 3.4.2. Sucesión de Gysin

La sucesión de Gysin, análogamente a los casos anteriores, se deriva de la siguiente aplicación diferencial, que llamaremos *aplicación de Gysin*:

$$\Psi: (\Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \oplus \Omega_{\bar{p}-2, \kappa}^{*-1}(M/\mathcal{F}), D) \longrightarrow (\Omega_{\bar{p}}^*(M), d), \quad (3.11)$$

siendo  $d$  la diferencial ordinaria,  $D(\alpha, \beta) = (d\alpha + e \wedge \beta, -d_\kappa \beta)$  y  $\Psi(\alpha, \beta) = \alpha + \chi \wedge \beta$ . Nuestro objetivo es probar que (3.11) es un cuasi-isomorfismo. Vamos a probar que en nuestros modelos locales lo es:

**Lema 3.29.** *Sea  $\mathcal{G}$  un flujo riemanniano regular sobre  $S^{2k+1}$ , y sea  $\bar{p} \leq \bar{t} + \bar{1}$  una perversidad sobre el vértice de  $CS^{2k+1}$ . Entonces, la aplicación de Gysin*

$$\Psi: (\Omega_{\bar{p}}^*(CS^{2k+1}/C\mathcal{G}) \oplus \Omega_{\bar{p}-2}^{*-1}(CS^{2k+1}/C\mathcal{G}), D) \longrightarrow (\Omega_{\bar{p}}^*(CS^{2k+1}), d), \quad (3.12)$$

*es un cuasi-isomorfismo.*

*Demostración.* Es claro que  $\Psi$  es un isomorfismo en cohomología para grado cero. Por el lema 3.13, nos bastará probar que podemos integrar cualquier forma de grado positivo del complejo que denotaremos

$$\Omega_{\bar{p}}^* \oplus \Omega_{\bar{p}-2}^{*-1} \equiv \Omega_{\bar{p}}^*(\mathbb{C}\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{C}\mathcal{G}) \oplus \Omega_{\bar{p}-2}^{*-1}(\mathbb{C}\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{C}\mathcal{G}).$$

Vamos a distinguir los casos par e impar:

**Caso par** Sea  $(\alpha, \beta) \in \Omega_{\bar{p}}^{2l+2} \oplus \Omega_{\bar{p}-2}^{2l+1}$  cerrada, con  $l \geq 0$ . Entonces, se cumple:

$$\begin{cases} d\alpha = -\beta \wedge e; \\ d\beta = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

de donde, dado que  $\beta$  es impar, existe  $\gamma \in \Omega_{\bar{p}-2}^{2l}$  tal que  $d\gamma = \beta$ . Aplicando (3.13), obtenemos:

$$d\alpha = -d\gamma \wedge e \implies d(\alpha + \gamma \wedge e) = 0.$$

Como  $\alpha + \gamma \wedge e \in \Omega_{\bar{p}}^{2l+2}$ , tenemos que existe una forma  $\eta \in \Omega_{\bar{p}}^{2l+1}$  tal que:

$$\alpha + \gamma \wedge e = \lambda e^{l+1} + d\eta,$$

siendo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Notamos que, en el caso  $p < 2l+2$  tenemos  $H_{\bar{p}}^{2l+2}(\mathbb{C}\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{C}\mathcal{G}) = 0$ , y por lo tanto, se sigue  $\lambda = 0$ . Admitiendo esta convención, la forma

$$(\eta, -\gamma + \lambda e^l) \in \Omega_{\bar{p}}^{2l+1} \oplus \Omega_{\bar{p}-2}^{2l},$$

integra a  $(\alpha, \beta)$ , pues

$$D(\eta, -\gamma + \lambda e^l) = (d\eta - \gamma \wedge e + \lambda e^{l+1}, d\gamma) = (\alpha, \beta),$$

como queríamos demostrar.

**Caso impar** Sea  $(\alpha, \beta) \in \Omega_{\bar{p}}^{2l+1} \oplus \Omega_{\bar{p}-2}^{2l}$  cerrada, con  $l \geq 0$ . Entonces, se cumple:

$$\begin{cases} d\alpha = -\beta \wedge e; \\ d\beta = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

de donde nuevamente, existe una forma  $\gamma \in \Omega_{\bar{p}-2}^{2l-1}$  tal que  $d\gamma = \beta$ . En efecto, si  $2l > p-2$ , es evidente, y si  $2l \leq p-2$ , tendríamos  $\beta = \lambda e^l + d\gamma$ , de donde por (3.14), tendríamos  $d(\alpha + \gamma \wedge e) = -\lambda e^{l+1}$ , lo cual forzaría  $\lambda = 0$ , por ser  $e$  un

generador de  $H_{\bar{p}}^{2l+2}(C\mathbb{S}^{2k+1}/C\mathcal{G})$  (notar que, además,  $2l + 2 \leq 2k$ ). Tenemos, entonces, por (3.14):

$$\alpha + \gamma \wedge e \in \Omega_{\bar{p}}^{2l+1} \quad \text{y} \quad d(\alpha + \gamma \wedge e) = 0,$$

de donde, nuevamente por el lema 3.12, existe una forma  $\eta \in \Omega_{\bar{p}}^{2l}$  tal que  $\alpha + \gamma \wedge e = d\eta$ . Para terminar, comprobamos que la forma  $(\eta, -\gamma) \in \Omega_{\bar{p}} \oplus \Omega_{\bar{p}-\bar{2}}$  cumple:

$$D(\eta, -\gamma) = (d\eta - \gamma \wedge e, d\gamma) = (\alpha, \beta).$$



Estamos en condiciones de probar la siguiente:

**Proposición 3.30.** *La aplicación de Gysin*

$$\Psi: (\Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \oplus \Omega_{\bar{p}-\bar{2}, \kappa}^{*-1}(M/\mathcal{F}), D) \longrightarrow (\Omega_{\bar{p}}^*(M), d)$$

es un cuasi-isomorfismo para  $\bar{p} \leq \bar{t} + \bar{1}$ .

*Demostración.* Aplicamos el truco de Bredon (lema 3.11) con la afirmación  $P$ , formulada de la siguiente manera:

$$P(U, \mathcal{F}) = \text{“}\Psi_U: (\Omega_{\bar{p}}^*(U/\mathcal{F}_U) \oplus \Omega_{\bar{p}-\bar{2}, \kappa_U}^{*-1}(U/\mathcal{F}_U), D) \longrightarrow (\Omega_{\bar{p}}^*(U), d) \text{”}$$

es un cuasi-isomorfismo”.

Los axiomas TB1-TB3 se verifican igual que en el caso regular (proposición 2.16). TB4 se cumple por el caso regular. Para comprobar TB5, notamos que como  $[\kappa] = 0$  en el modelo  $C\mathbb{S}^{2k+1}$ , nos podemos reducir al caso del lema 3.29.

Una consecuencia directa de la proposición anterior nos lleva al resultado principal de este capítulo:

**Teorema 3.31 (Sucesión de Gysin para flujos Riemannianos Singulares).** *Sea  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano singular sobre la variedad cerrada  $M$ , y sea  $\mu$  una métrica tal que su forma de curvatura media sea básica. Entonces, para cada perversidad  $\bar{p} \leq \bar{t} + \bar{1}$  tenemos la siguiente sucesión exacta larga:*

$$\cdots \rightarrow H_{\bar{p}}^i(M/\mathcal{F}) \longrightarrow H_{\bar{p}}^i(M) \longrightarrow H_{\bar{p}-\bar{2}, \kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge^{[e]}} H_{\bar{p}}^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \cdots, \quad (3.15)$$

donde el homomorfismo de conexión consiste en multiplicar por la clase de Euler  $[e] \in H_{\bar{2}, -\kappa}^2(M/\mathcal{F})$ .

**Observación 3.15.** Particularizando la perversidad  $\bar{p}$  en la sucesión (3.15), se obtienen resultados conocidos.

- a) Para  $\bar{0} \leq \bar{p} \leq \bar{t} + \bar{1}$ , la sucesión de Gysin (3.15) relaciona la cohomología de intersección básica con la cohomología de  $M$ :

$$\dots \rightarrow H_{\bar{p}}^i(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^i(M) \rightarrow H_{\bar{p}-\bar{2}, \kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge[e]} H_{\bar{p}}^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

- b) Para perversidades  $\bar{p} < \bar{0}$ , obtenemos la sucesión

$$\dots \rightarrow H^i(M/\mathcal{F}, F) \rightarrow H^i(M, F) \rightarrow H_{\kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}, F) \xrightarrow{\wedge[e]} H^{i+1}(M/\mathcal{F}, F) \rightarrow \dots \quad (3.16)$$

- c) Si tomamos  $\bar{p} = \bar{0}$ , obtenemos la sucesión

$$\dots \rightarrow H^i(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^i(M) \rightarrow H_{\kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}, F) \xrightarrow{\wedge[e]} H^{i+1}((M)/\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

- d) Para perversidad  $\bar{p} = \bar{t} + \bar{1}$ , obtenemos

$$\dots \rightarrow H^i((M-F)/\mathcal{F}) \rightarrow H^i(M) \rightarrow H_{\bar{t}-\bar{1}, \kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge[e]} H^{i+1}((M-F)/\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

- e) En el caso de que  $[\kappa] = 0$  y  $\bar{p} = \bar{0}$ , tenemos

$$\dots \rightarrow H^i(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^i(M) \rightarrow H^{i-1}(M/\mathcal{F}, F) \xrightarrow{\wedge[e]} H^{i+1}((M)/\mathcal{F}) \rightarrow \dots,$$

ya obtenida por A. Roig y M. Saralegi usando cohomología de Verona (ver [44])

- f) En el caso de un f.R.S. inducido por una acción de  $\mathbb{S}^1$ , la sucesión (3.15) recupera la construida por G. Hector y M. Saralegi en [28].

### 3.4.3. Clase de Euler

En este apartado probamos que la nulidad de la clase de Euler tiene un significado geométrico, al igual que sucede en el caso regular. Comenzamos notando que la clase de Euler  $[e] \in H_{\bar{2}, -\kappa}^2(M/\mathcal{F})$  no depende de la métrica elegida en el sentido de la siguiente proposición.

**Proposición 3.32.** *La nulidad de la clase de Euler no depende de la métrica  $\mu$  elegida, sino de  $\mathcal{F}$ .*

*Demostración.* Sean  $(\mu_i, X_i, \chi_i, e_i, \kappa_i)$ ,  $i = 1, 2$  sendos sistemas completos de actores para el f.R.S.  $(M, \mathcal{F})$ , y sea  $f$  una función tal que  $df = \kappa_2 - \kappa_1$ . Consideramos el isomorfismo canónico (salvo constante multiplicativa):

$$\varphi : \begin{array}{ccc} H_{2, -\kappa_2}^2(M/\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{2, -\kappa_1}^2(M/\mathcal{F}) \\ [\omega] & \longmapsto & [e^f \omega] \end{array},$$

Veamos que  $\varphi([e_2])$  y  $[e_1]$  son proporcionales.

En efecto, procediendo como en el caso regular (ver apartado 2.5) podemos probar que la aplicación

$$\Psi : \begin{array}{ccc} (\Omega_{\mathbb{Z}}^*(M/\mathcal{F}) \oplus \Omega_0^{*-1}(M/\mathcal{F}), D_\kappa) & \longrightarrow & (\Omega^*(M)_{\mathbb{Z}}, d_{-\kappa}) \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha + \chi \wedge \beta \end{array}$$

es un cuasi-isomorfismo, donde  $D_\kappa(\alpha, \beta) = (d_{-\kappa}\alpha + e \wedge \beta, -d\beta)$  para todo sistema completo de actores. De ese cuasi-isomorfismo se deriva de forma canónica la siguiente *sucesión de Gysin torcida* para  $\bar{p} = \mathbb{Z}$ :

$$\dots \rightarrow H_{2, -\kappa}^i(M/\mathcal{F}) \rightarrow H_{2, -\kappa}^i(M) \rightarrow H_0^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge[e]} H_{2, -\kappa}^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

El isomorfismo  $\varphi$  induce un isomorfismo de cadenas entre las sucesiones de Gysin torcidas para  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , de la cual extraemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_0^0(M/\mathcal{F}) & \xrightarrow{\wedge[e_1]} & H_{2, -\kappa_1}^2(M/\mathcal{F}) \\ \parallel & & \uparrow \wr e^f \\ H_0^0(M/\mathcal{F}) & \xrightarrow{\wedge[e_2]} & H_{2, -\kappa_2}^2(M/\mathcal{F}) \end{array}$$

del cual se sigue inmediatamente el resultado. ♣

La nulidad de la clase de Euler tiene la siguiente consecuencia geométrica:

**Lema 3.33.** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad cerrada  $M$ . Entonces, si la clase de Euler  $[e] \in H_{2, -\kappa}^2(M/\mathcal{F})$  es nula, todos los estratos singulares son de codimensión 2 y  $\mathcal{F}$  está dado en la parte regular por una acción de  $\mathbb{S}^1$ .*

*Demostración.* Veamos, en primer lugar, que todos los estratos singulares han de ser de codimensión 2. Si existiese algún estrato singular de codimensión mayor que 2, podemos considerar una inmersión isométrica foliada  $\iota: (\mathbb{S}^{2k+1}, \mathcal{G}) \rightarrow \widetilde{\partial M}$ , con  $k > 0$ . Tenemos  $[e_{\mathcal{G}}] = \iota^*[e] = 0$ , siendo  $e_{\mathcal{G}}$  la forma de Euler de  $\mathcal{G}$ . Pero por

otro lado,  $[e]$  es un generador de  $H^2(\mathbb{S}^{2k+1}/\mathcal{G}) \cong \mathbb{R}$ , por lo que llegamos a una contradicción.

Por el corolario 3.7, tenemos que  $\mathcal{F}$  es una foliación por círculos orientada. Notamos que tenemos inducida en el doble  $D(M)$  una foliación  $\mathcal{F}_D$  que es también orientada y por círculos. Es más, se trata de una foliación Hausdorff (i.e.,  $D(M)/\mathcal{F}_D$  es Hausdorff), lo cual se comprueba fácilmente debido a la existencia de entornos de Carrière. Por un teorema de A. W. Wadsley (ver [56]), tenemos que  $\mathcal{F}_D$  está dado por una acción de  $\mathbb{S}^1$ , y por lo tanto, también  $\mathcal{F}$  en  $M - F$ . ♣

Según este lema, la situación es muy cercana a la de un flujo dado por una acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $M$ . En ese caso la nulidad de la clase de Euler ha sido caracterizada por G. Hector y M. Saralegi en [28], donde prueban el siguiente teorema:

**Teorema 3.34 ([28]).** *Sea  $\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$  una acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $M$ . Entonces, la clase de Euler se anula si y sólo si existe una foliación singular transversa a  $\Phi$  cuya restricción a  $M - F$  es una fibración localmente trivial sobre  $\mathbb{S}^1$ .*

A continuación, probamos que este resultado se mantiene para f.R.S., para lo cual seguiremos la prueba que se presenta en [28]. Necesitaremos el siguiente lema para tener todos los ingredientes de dicha prueba:

**Lema 3.35.** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. tal que la codimensión de cada estrato singular es 2. Entonces, la clase de Euler de  $(M, \mathcal{F})$  se anula si y sólo si se anula la clase de Euler de  $(M - F, \mathcal{F})$ .*

*Demostración.* En primer lugar, notamos que dado que  $\bar{2} > \bar{1} = \overline{-1}$ , la aplicación  $\psi: \Omega_{\bar{2}}^*(M/\mathcal{F}) \rightarrow \Omega^*(M - F)$  dada por  $\psi(\omega) = \omega$  induce un isomorfismo

$$H_{\bar{2}, -\kappa}^*(M/\mathcal{F}) \cong H_{-\kappa}^*((M - F)/\mathcal{F}).$$

Tomamos una métrica adaptada y su restricción a  $M - F$ . La aplicación  $\psi$  induce un morfismo de cadenas entre las sucesiones de Gysin torcidas asociadas a  $M$  y  $M - F$ , respectivamente. Podemos extraer el cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^0(M/\mathcal{F}) & \xrightarrow{\wedge[e]} & H_{\bar{2}, -\kappa}^2(M/\mathcal{F}) \\ \psi^* \downarrow & & \downarrow \psi^* \\ H^0((M - F)/\mathcal{F}) & \xrightarrow{\wedge[e]} & H_{-\kappa}^2((M - F)/\mathcal{F}) \end{array}$$

Como las flechas verticales son isomorfismos, se sigue el resultado. ♣

Llegamos a la caracterización de la nulidad de la clase de Euler.

**Teorema 3.36.** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad cerrada  $M$  tal que  $F \neq \emptyset$ . Entonces, son equivalentes:*

- i) La clase de Euler  $[e] \in H_{2,-\kappa}^2(M/\mathcal{F})$  se anula;*
- ii) existe una foliación singular  $\mathcal{G}$  transversa a  $\mathcal{F}$  cuya restricción a  $M - F$  está dada por una fibración localmente trivial sobre  $\mathbb{S}^1$ .*

*Demostración.* Como la demostración es idéntica a la de [28], tan sólo indicaremos el esquema de la prueba.

*i)  $\implies$  ii)* Por el lema 3.33, tenemos que todos los estratos singulares son de codimensión 2 y que en  $M - F$  el flujo está dado por una acción de  $\mathbb{S}^1$ . Consideramos el flujo  $\mathcal{F}_D$  inducido en  $D(M)$ , dado por una acción de  $\mathbb{S}^1$ . La nulidad de la clase de Euler de  $(M, \mathcal{F})$  implica la de  $(D(M), \mathcal{F})$ , y por [49], tenemos que existe una fibración localmente trivial  $\Upsilon: D(M) \rightarrow \mathbb{S}^1$  transversa a las fibras de  $\mathcal{F}_D$ , la cual induce en  $M - F$  una foliación singular  $\mathcal{G}$  como la del enunciado.

*ii)  $\implies$  i)* Notamos en primer lugar que la codimensión de  $F$  es 2. En efecto, si  $S$  es un estrato de puntos fijos, podemos considerar un entorno de un punto de  $x \in S$  conjugado a

$$U \times C(\mathbb{S}^{2k+1}, \mathcal{H} \times C(\mathcal{G})),$$

y podemos definir una inmersión foliada  $(\mathbb{S}^{2k+1}, \mathcal{G}) \hookrightarrow (M - F, \mathcal{F})$ , siendo  $\mathcal{G}$  un flujo isométrico regular. La fibración dada por *ii)* está definida por una 1-forma cerrada  $\omega$ . La restricción de  $\omega$  a  $\mathbb{S}^{2k+1}$  define una fibración localmente trivial sobre  $\mathbb{S}^{2k+1}$  transversa a  $\mathcal{G}$ . Por [49], tenemos que la clase de Euler de  $(\mathbb{S}^{2k+1}, \mathcal{G})$  se anula, y por lo tanto,  $k = 0$ .

Podemos tomar  $X$  tal que  $\omega(X, X) = 1$ . Tomamos una métrica casi-fibrada cualquiera  $\mu$  sobre  $M$  y consideramos su parte ortogonal  $\mu_Q$ . Definimos ahora la métrica  $\nu = \omega \otimes \omega + \mu_Q$ . Se sigue que la forma fundamental de  $\nu$  es  $\omega$ , y por lo tanto,  $e = 0$ , con lo que la clase de Euler en  $M - F$  es nula. Aplicando el lema 3.35, obtenemos *i)*. ♣

**Observación 3.16.** Esta caracterización está relacionada con la del caso sin puntos fijos, dado que en la parte regular, una fibración localmente trivial sobre  $\mathbb{S}^1$  está dada por una 1-forma cuya torsión no sólo es básica, sino nula.

### 3.4.4. Algunas aplicaciones

Para terminar esta sección, presentamos algunas aplicaciones de la sucesión de Gysin.

#### Caracterización de la nulidad de $[\kappa]$

Recordamos que en el caso de flujos riemannianos regulares la nulidad de la clase  $[\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F})$  equivale a que el flujo sea isométrico y a que  $H^{n-1}(M/\mathcal{F}) \cong \mathbb{R}$ .

En el caso singular, la siguiente implicación siempre es cierta:

**Lema 3.37.** *Para todo flujo singular isométrico sobre una variedad cerrada  $M$  se tiene  $[\kappa] = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\phi: \mathbb{R} \times (M, \mu) \rightarrow (M, \mu)$  una acción isométrica que define  $\mathcal{F}$ . Sabemos que la clausura de  $\mathbb{R}$  en  $\text{Iso}(M, \mu)$  es un grupo compacto  $G$ . Notamos que  $G$  actúa sobre  $M$  y también sobre  $\widetilde{M}$ . Si consideramos ahora una métrica  $\nu$  cualquiera (sobre  $M - F$ ) levantable a  $\tilde{\nu}$ , la métrica promedio  $\nu' = \int_G \nu$  es levantable a  $\tilde{\nu}' = \int_G \tilde{\nu}$ . Por lo tanto, la forma de curvatura media de  $\nu'$  es nula, y tenemos  $[\kappa] = 0$ . ♣

A continuación, probamos un resultado análogo al de P. Molino y V. Sergiescu para el caso regular (ver [40]). Usaremos la siguiente notación: dada una perversidad  $\bar{p}$  y dado  $a \in \mathbb{Z}$ , definimos la perversidad:

$$(\bar{p}, a)(S) = \begin{cases} \bar{p}(S) & \text{si } \text{cod } S > 2; \\ a & \text{si } \text{cod } S = 2. \end{cases}$$

También usaremos la notación

$$H^*(M/\mathcal{F}, \partial(M/\mathcal{F})) = H^*_{(\bar{0}, -1)}(M/\mathcal{F}).$$

Notamos que si no hay estratos de puntos fijos de codimensión 2, tenemos  $H^*(M/\mathcal{F}, \partial(M/\mathcal{F})) = H^*(M/\mathcal{F})$ .

**Proposición 3.38.** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la  $n$ -variedad cerrada  $M$ . Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:*

- i)  $[\kappa] = 0$
- ii)  $H^{n-1}(M/\mathcal{F}, \partial(M/\mathcal{F})) = \mathbb{R}$

$$(iii) \ H_{\kappa}^0(M/\mathcal{F}) = \mathbb{R}.$$

En otro caso, se tiene  $H^{n-1}(M/\mathcal{F}, \partial(M/\mathcal{F})) = H_{\kappa}^0(M/\mathcal{F}) = 0$ .

*Demostración.* (i)  $\implies$  (ii). Supongamos que  $[\kappa] = 0$ . El final de la sucesión de Gysin para  $\bar{p} = (\bar{2}, 0)$  nos proporciona:

$$0 \longrightarrow H^n(M) \longrightarrow H^{n-1}(M/\mathcal{F}, \partial(M/\mathcal{F})) \longrightarrow 0,$$

ya que  $H_{(\bar{0}, -2)}^*(M/\mathcal{F}) = H_{(\bar{0}, -1)}^*(M/\mathcal{F})$ . Se sigue que  $H^{n-1}(M/\mathcal{F}, \partial(M/\mathcal{F})) = \mathbb{R}$ .

(ii)  $\implies$  (iii) Supongamos  $H^{n-1}(M/\mathcal{F}, \partial(M/\mathcal{F})) = \mathbb{R}$ . Por el teorema de dualidad 3.26, tenemos

$$\mathbb{R} \cong H^{n-1}(M/\mathcal{F}, \partial(M/\mathcal{F})) = H_{(\bar{0}, -1)}^{n-1}(M/\mathcal{F}) \cong H_{(\bar{t}, 0), \kappa}^0(M/\mathcal{F}) \cong H_{0, \kappa}^0(M/\mathcal{F}). \quad (3.17)$$

(iii)  $\implies$  (i) Supongamos ahora  $H_{\kappa}^0(M/\mathcal{F}) = \mathbb{R}$ . En ese caso, existe una función básica levantable y no idénticamente nula  $f$  tal que  $df = f\kappa$ . Vamos a construir una métrica  $\mu'$  tal que  $\kappa' = 0$ ; básicamente realizaremos la reparametrización estándar

$$\mu' = e^F \mu,$$

tomando  $F = \log f$ . Por supuesto, tenemos primero que verificar que  $f$  no se anula en  $M - F$ .

Veamos que esta última condición es cierta. En efecto, sea una tal  $f$ . Consideramos  $Z(f) = f^{-1}(0)$ , que es un conjunto cerrado. Veamos que también es abierto. Para ello, tomamos  $x \in M - F$  tal que  $f(x) = 0$ , y construiremos un entorno  $W$  de  $x$  donde  $f$  tenga los mismos ceros que una función constante, y por lo tanto, se anule. Sea  $U$  un entorno de Carrière de  $x$ . Como  $\mathcal{F}_U$  es isométrico, podemos tomar una métrica  $\mu_U$  tal que  $\kappa_U = 0$ . Tomamos otro entorno de Carrière  $W$  de modo que  $x \in \overline{W} \not\subseteq U$  (ver lema 2.12). Podemos construir una partición de la unidad básica  $\{\rho, 1 - \rho\}$  tal que el soporte de  $\rho$  esté en  $U$  y  $\rho$  valga 1 en  $W$ . Definimos ahora la métrica

$$\mu' = \rho\mu_U + (1 - \rho)\mu,$$

que es casi-fibrada. Notamos que se tiene  $\mu_U|_W = \mu'|_W$ , y por lo tanto,  $\kappa'|_W = 0$ .

Por el teorema 3.24, tenemos que existe una función  $g$  básica tal que  $\kappa'_b = \kappa + dg$ , siendo  $\kappa'_b$  la componente básica de  $\kappa'$  (ver [2]). Ahora, tenemos

$$d(fe^g) = e^g df + fd(e^g) = fe^g \kappa + fe^g dg = (fe^g)\kappa'_b,$$

y  $fe^g$  tiene los mismos ceros que  $f$ . De la fórmula anterior, obtenemos  $d(fe^g) = 0$  en  $W$ , y como  $(fe^g)(x) = 0$ , tenemos que  $fe^g$  se anula en todo  $W$ , luego  $f$  se anula en  $W$ , y hemos probado que  $Z(f)$  es abierto.

Como  $M - F$  es conexa, si  $f$  tuviese algún cero, sería idénticamente nula, lo cual es imposible. Hemos probado que  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in M - F$ .

Tomamos la reparametrización:

$$\mu' = f^2 \mu, \quad (3.18)$$

que nos proporciona

$$X' = (1/f)X, \quad \chi' = f\chi.$$

Ahora, calculamos:

$$\begin{aligned} \kappa' &= L_{X'}\chi' = L_{(1/f)X}(f\chi) \\ &= f((1/f)L_X\chi + d(1/f)i_{X}\chi) \\ &= f((1/f)\kappa - (1/f^2)df) \\ &= f((1/f)\kappa - (1/f^2)f\kappa) = 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto,  $[\kappa] = 0$ .

Por último, notamos que si  $H^{n-1}(M/\mathcal{F}) \neq 0$ , por los isomorfismos (3.17), se sigue que  $H_\kappa^0(M/\mathcal{F}) \neq 0$ , y la prueba de (ii)  $\implies$  (iii) nos proporciona  $[\kappa] = 0$ . En consecuencia, se tiene la última afirmación del enunciado. ♣

**Observación 3.17.** Si no hay estratos de codimensión 2, en el enunciado de la proposición anterior se puede sustituir  $H^{n-1}(M/\mathcal{F}, \partial(M/\mathcal{F}))$  por  $H^{n-1}(M/\mathcal{F})$ .

**Observación 3.18.** Ilustramos con un ejemplo la necesidad de que en el enunciado de la proposición 3.38 aparezca  $H^{n-1}(M/\mathcal{F}, \partial(M/\mathcal{F}))$  en lugar de  $H^{n-1}(M/\mathcal{F})$ . Si consideramos la acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $\mathbb{S}^2$  con dos puntos fijos, el flujo es isométrico. Tenemos  $H^1(\mathbb{S}^2/\mathcal{F}) = 0$  y  $H^1(\mathbb{S}^2/\mathcal{F}, \partial(\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^1)) \cong H^1([0, 1], \{0, 1\}) = \mathbb{R}$ .

### Finitud de la cohomología básica de intersección

En este apartado probamos que si  $M$  es compacta, entonces  $H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F})$  y  $H_{\bar{p}, \kappa}^*(M/\mathcal{F})$  son de dimensión finita.

**Lema 3.39.** Sea  $\beta_r$  un entorno distinguido de radio  $r$  de un punto fijo de un f.R.S sobre una variedad compacta, y sea  $U$  un abierto saturado de  $\beta_r$ . Entonces, si  $H^*(U)$  es de dimensión finita, también lo es  $H_{\bar{p}}^*(U)$  para toda perversidad  $\bar{0} \leq \bar{p} \leq \bar{t}$  constante.

*Demostración.* Notamos que como en  $\beta_r$  se tiene  $[\kappa] = 0$ , también se tiene en  $U$ . Como  $U$  tiene la estructura local de un flujo riemanniano regular sobre una variedad compacta, podemos considerar la sucesión de Gysin:

$$\dots H_{\bar{p}}^i(U/\mathcal{F}) \longrightarrow H_{\bar{p}}^i(U) \xrightarrow{\rho^i} H_{\bar{p}-2}^{i-2}(U/\mathcal{F}) \rightarrow \dots,$$

de donde se sigue:

$$H_{\bar{p}}^i(U/\mathcal{F}) \cong \ker \rho^i \oplus \operatorname{coker} \rho^{i-1},$$

Notamos que como  $H_{\bar{p}}^*(U) \cong H^*(U)$  es de dimensión finita, tenemos que si  $H_{\bar{p}-2}^{i-2}(U/\mathcal{F})$  es de dimensión finita, también  $H_{\bar{p}}^i(U/\mathcal{F})$  lo será. Como  $H_{\bar{p}}^i(U/\mathcal{F}) = 0$  para todo  $i < 0$  y toda perversidad  $\bar{p}$ , obtenemos el resultado. ♣

**Proposición 3.40.** *Si  $\mathcal{F}$  es un f.R.S. sobre una variedad compacta  $M$ , las cohomologías  $H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F})$  y  $H_{\bar{p},\kappa}^*(M/\mathcal{F})$  son de dimensión finita.*

*Demostración.* Para el caso  $\bar{0} \leq \bar{p} \leq \bar{1}$ , procederemos igual que en el caso regular (proposición 2.27). Podemos tomar un cubrimiento finito  $\mathcal{U}$  (ver [58]), formado por entornos de Carrière y por entornos distinguidos  $\beta_r$  de puntos fijos, y de manera que para cada intersección (finita)  $W$  de abiertos de  $\mathcal{U}$ , existe una hoja  $L$  tal que su clausura es un retracto por deformación fuerte de  $W$ . Al igual que en la proposición 2.27, aplicando sucesivamente el lema 3.39 y Mayer-Vietoris, obtenemos el resultado.

Para las perversidades restantes, los grupos son  $H^*(M/\mathcal{F}, F)$ ,  $H^*((M-F)/\mathcal{F})$ ,  $H_{\kappa}^*(M/\mathcal{F}, F)$  y  $H_{\kappa}^*((M-F)/\mathcal{F})$ . La finitud de los dos primeros se sigue fácilmente de la sucesión del par y aplicando Mayer-Vietoris, respectivamente. Para los otros dos, basta aplicar las sucesiones de Gysin (3.10) y (3.16). ♣

## 3.5. Cirugía hiperbólica

A modo de ilustración, terminamos este capítulo con un método para construir flujos riemannianos singulares no isométricos. Consideramos la esfera de dimensión cuatro

$$\mathbb{S}^4 = \Sigma\mathbb{S}^3,$$

Consideramos el flujo sobre  $\mathbb{T}^2$  dado por una de las direcciones propias de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notamos que este flujo se puede extender a un flujo lineal de tipo Hopf en  $\mathbb{S}^3$ . La suspensión de ese flujo nos proporciona un flujo en  $\mathbb{S}^4$  con dos puntos fijos (los polos de  $\mathbb{S}^4$ ). Por la naturalidad de estas extensiones, el flujo resultante es isométrico.

Consideramos el rombo  $R = \Sigma[0, 1]$ , y definimos la aplicación:

$$\gamma: \mathbb{S}^4 = \Sigma\mathbb{S}^3 \longrightarrow \Sigma[0, 1]$$

dada por  $\gamma([t, (z_1, z_2)]) = [t, |z_1|]$ . De esta manera, tenemos:

$$\gamma^{-1}(x) \cong \begin{cases} \mathbb{T}^2 & x \in \overset{\circ}{R}; \\ \mathbb{S}^1 & x \in \partial R - \{N, S\}; \\ \{*\} & x \in \{N, S\}, \end{cases}$$

donde  $\overset{\circ}{R}$  denota el interior de  $R$ . Definimos ahora la variedad  $M^4$  de la siguiente manera. Consideramos en el interior de  $R$  dos discos abiertos y disjuntos  $D_1, D_2$ . Entonces,

$$M^4 - \gamma^{-1}(D_1 \sqcup D_2)$$

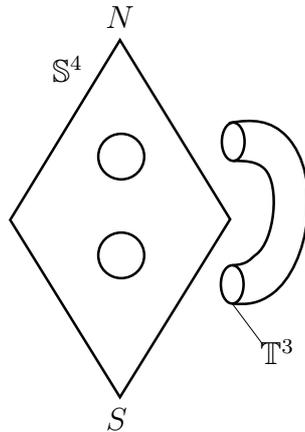
es una variedad con borde  $\mathbb{T}^3 \sqcup \mathbb{T}^3$ . Si pegamos ambos bordes con el difeomorfismo

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Diff}(\mathbb{T}^3),$$

obtenemos una variedad:

$$M^4 = \left( \mathbb{S}^4 - \left\{ (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{T}^2) \sqcup (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{T}^2) \right\} \right) / B$$

Equivalentemente, podemos pegar un asa  $\mathbb{T}^3 \times [0, 1]$  mediante  $B$  en  $\mathbb{T}^3 \times \{0\}$  y mediante la identidad en  $\mathbb{T}^3 \times \{1\}$ .



Notamos que las excisiones e identificaciones que hemos realizado preservan el flujo  $\mathcal{F}$ . Es más, el flujo  $\mathcal{F}$  definido sobre  $M^4$  es riemanniano (basta considerar una métrica sobre el asa que pegamos y utilizar una partición de la unidad básica). Tenemos la siguiente

**Proposición 3.41.** *El flujo  $\mathcal{F}$  definido sobre  $M^4$  no es isométrico.*

*Demostración.* Si  $\mathcal{F}$  fuera isométrico, se cumpliría  $[\kappa] = 0$ , y por la proposición 3.38, debería cumplirse  $H^3(M/\mathcal{F}) = \mathbb{R}$ . Utilizando Mayer-Vietoris, podemos calcular directamente la cohomología básica de  $M^4$ , cuyos números de Betti resultan ser

$$H^i(M^4/\mathcal{F}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{para } i = 0, 2; \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{para } i = 1; \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Como  $H^3(M/\mathcal{F}) = 0$ , por la proposición 3.38, el flujo  $\mathcal{F}$  no puede ser isométrico.





## Capítulo 4

# Teorema de Localización para Flujos Riemannianos Singulares

La *cohomología equivariante* aborda el estudio de acciones (no necesariamente libres) de grupos de Lie compactos sobre variedades, y se puede interpretar como una teoría de cohomología adecuada para el estudio de la estructura transversa de la acción o espacio de órbitas. Una de las aplicaciones más importantes de la cohomología equivariante es el *Teorema de Localización*. Este relativamente reciente resultado relaciona la cohomología del espacio de puntos fijos  $F$  con la cohomología equivariante de  $M$ .

Nuestro objetivo en este capítulo es obtener un Teorema de Localización para flujos riemannianos singulares, para lo cual aplicaremos el estudio realizado en los capítulos anteriores. Para el caso de flujos con  $[\kappa] = 0$ , añadiremos un modelo de cohomología equivariante a los ya existentes (de Borel, Weil y Cartan) que denominaremos *modelo de Gysin*, y que nos muestra más explícitamente el carácter básico de la cohomología equivariante, es decir, que podemos calcularla a partir de datos básicos. Daremos una prueba del teorema de localización para flujos con  $[\kappa] = 0$ , usando el modelo de Gysin.

En el caso de flujos con  $[\kappa] \neq 0$ , el modelo de Gysin no se puede aplicar para definir la cohomología equivariante. No obstante, recuperaremos la cohomología de los puntos fijos de  $\mathcal{F}$  de manera similar al teorema de localización. Para ello, tendremos que usar un flujo auxiliar, el del *revestimiento de trivialización*  $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$  de la clase  $[\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F})$ , ya introducido en otro contexto en [29] por G. Hector y U. Hirsch.

En la sección primera haremos un rápido repaso de los modelos clásicos de cohomología equivariante para acciones de  $S^1$ , y del Teorema de Localización. A con-

tinuación, introducimos el *modelo de Gysin* para cohomología equivariante, válido para f.R.S. con  $[\kappa] = 0$ , y probamos un teorema de localización para estos flujos. En la segunda sección abordaremos el caso  $[\kappa] \neq 0$ : introducimos el revestimiento de trivialización y probamos el Teorema de Localización para flujos riemannianos singulares en general.

## 4.1. Modelos de Cohomología Equivariante y Modelo de Gysin

En esta sección realizamos un breve repaso de los distintos modelos de cohomología equivariante y presentaremos un modelo (modelo de Gysin) para calcular la cohomología equivariante en el caso de flujos riemannianos singulares con  $[\kappa] = 0$ .

### 4.1.1. Cohomología Equivariante para acciones de $\mathbb{S}^1$

La cohomología equivariante es un invariante clásico que ha demostrado ser adecuado para el estudio desde el punto de vista cohomológico de la acción de un grupo de Lie compacto  $G$  sobre una variedad diferenciable. Como estamos interesados en flujos, realizaremos un breve repaso de cómo se construyen los modelos clásicos de cohomología equivariante en el caso de una acción de  $\mathbb{S}^1$ . Seguiremos, mayormente, la presentación que hacen V.W. Guillemin y S. Sternberg en [27] para grupos compactos cualesquiera, a la cual referimos para las demostraciones.

#### Modelo de Borel

Sea  $\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \longrightarrow M$  una acción diferenciable sobre la variedad cerrada  $M$ . Cuando  $\Phi$  es libre, el espacio de órbitas  $M/\mathbb{S}^1$  es una variedad diferenciable. Si la acción no es libre,  $M/\mathbb{S}^1$  no tiene por qué ser una variedad diferenciable, y la situación puede ser más compleja aún si en vez de  $\mathbb{S}^1$ , la acción es de un grupo compacto cualquiera. La cohomología equivariante puede entenderse como un intento de abordar el estudio cohomológico del espacio de órbitas sustituyendo  $H^*(M/\mathbb{S}^1)$  por otra cohomología adecuada.

Intuitivamente, la idea es sustituir la variedad  $M$  por un espacio del mismo tipo de homotopía sobre el cual tengamos una acción libre de  $\mathbb{S}^1$ , para después considerar su cociente. Para ello, consideramos un espacio topológico contráctil  $E$  sobre el cual  $\mathbb{S}^1$  actúe de forma libre, y podemos considerar la acción diagonal

$$\mathbb{S}^1 \times (M \times E) \longrightarrow M \times E$$

que es una acción libre. Notamos que el espacio  $M \times E$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $M$ . Tenemos la siguiente definición

**Definición 4.1.** En las condiciones anteriores, la *cohomología equivariante* de  $M$  es la cohomología singular del cociente  $(M \times E)/\mathbb{S}^1$ , y la denotaremos así:

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(M) = H^*((M \times E)/\mathbb{S}^1).$$

Esta construcción se conoce como *modelo de Borel*. Tenemos las siguientes puntualizaciones para justificar la definición:

- Hay que probar la existencia del espacio contráctil  $E$  sobre el cual existe una acción libre del círculo. Se puede construir un espacio tal para cualquier acción de cualquier grupo compacto, pero forzosamente no puede ser una variedad de dimensión finita. La elección estándar que haremos es considerar el espacio

$$\mathbb{S}^\infty = \lim \mathbb{S}^{2k+1} = \{(z_1, z_2, \dots, 0, \dots) \mid \sum |z_i| = 1\}.$$

y la acción natural

$$z \cdot (z_1, \dots, z_k, 0, \dots) = (z \cdot z_1, \dots, z \cdot z_k, 0, \dots)$$

- Se puede probar también que la definición 4.1 no depende del contráctil  $E$  que tomemos.

La siguiente propiedad de la cohomología equivariante es esencial:

**Proposición 4.1 (axioma básico).** Si la acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $M$  es libre, tenemos

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(M) \cong H^*(M/\mathbb{S}^1)$$

El siguiente diagrama conmutativo aglutina a todos los personajes de esta construcción:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}^\infty & \longleftarrow & M \times \mathbb{S}^\infty & \longrightarrow & M \\ p \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty & \xleftarrow{\pi} & (M \times \mathbb{S}^\infty)/\mathbb{S}^1 & \longrightarrow & M/\mathbb{S}^1 \end{array}$$

El fibrado principal  $p$  se conoce como fibrado universal, que tiene como base al espacio clasificante  $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ , que es el cociente de  $\mathbb{S}^\infty$  por  $\mathbb{S}^1$ , y se puede pensar como un límite directo de espacios proyectivos complejos. El anillo de cohomología equivariante  $H_{\mathbb{S}^1}^*(M)$  tiene estructura de  $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)$ -módulo, por medio de la proyección  $\pi$  del diagrama. Recordamos que cohomología de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$  es:

$$H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) = \mathbb{R}[e],$$

que es el anillo de polinomios en una variable  $e$  (utilizamos esa notación por representar la 2-forma de Euler de la acción de Hopf). Denotaremos este anillo como

$$H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) = \Lambda e,$$

de modo que la cohomología equivariante es un functor contravariante que va de la categoría de los  $\mathbb{S}^1$ -espacios a los  $\Lambda e$ -módulos.

**Ejemplo 4.1.** La cohomología equivariante de un espacio unipuntual es:

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(\text{pto.}) = \Lambda e.$$

Sobre la variedad  $F$  de los puntos fijos por la acción  $\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \longrightarrow M$ , tenemos:

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(F) = H^*(F) \otimes \Lambda e,$$

dado que la acción en  $F$  es trivial.

### Modelo tipo de Rham

Nuestro objetivo ahora es dar un modelo de cohomología equivariante usando formas diferenciales. Con ese fin, hemos de adaptar los conceptos utilizados en el modelo topológico (de Borel) con el espacio  $M$  en términos del álgebra diferencial graduada  $\Omega^*(M)$ . Presentamos esta adaptación de conceptos a modo de “traducción”:

**Espacio - Álgebra diferencial graduada (dga)** En vez de trabajar con  $M$ , trabajaremos con  $\Omega^*(M)$ .

**Acción sobre un espacio-Acción sobre un dga** Se define una acción sobre un dga  $A$  como una representación de  $\mathbb{S}^1$  como automorfismos de  $A$ , junto con operadores  $d, i_X, L_X$  que son coherentes con la representación y que satisfacen las ecuaciones de Weil:

$$\begin{aligned} i_X i_X &= 0 \\ di_X + i_X d &= L_X \\ dL_X - L_X d &= 0 \\ d^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Se debe a Cartan la idea de considerar el conjunto de estas ecuaciones como la definición de acción sobre un espacio.

**Espacio de órbitas-formas básicas** Las formas (o elementos) básicos son aquellos elementos  $a \in A$  horizontales e invariantes, es decir,  $i_X a = i_X da = 0$ . La cohomología de los elementos básicos  $A_{bas}$  se denomina cohomología básica, y la denotaremos por  $H_{bas}^*(A)$ .

**Espacio contráctil-álgebra acíclica** Un dga  $\mathcal{E}$  es acíclica si  $H^*(\Omega^*(\mathcal{E}), d) = \mathbb{R}$ .

**Acción libre-forma fundamental no singular** Diremos que una acción sobre un dga es libre si existe un elemento  $\chi$  de  $A$  que cumple el papel de forma fundamental, es decir, que es invariante y que es no singular ( $i_X \chi = 1$ ).

Estamos en condiciones de definir la cohomología equivariante de una  $\mathbb{S}^1$ -dga:

**Definición 4.2.** El anillo de cohomología equivariante de un  $\mathbb{S}^1$ -dga es:

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(A) = H_{bas}^*(A \otimes \mathcal{E}, d)$$

siendo  $\mathcal{E}$  es un  $\mathbb{S}^1$ -álgebra acíclica sobre la cual acción es libre.

Análogamente al caso topológico, siempre existe  $\mathcal{E}$ , y además, esta definición no depende del álgebra acíclica libre escogida. Nosotros tomaremos  $A = \Omega^*(M)$  y como álgebra acíclica  $\Omega^*(\mathbb{S}^\infty)$ . De ese modo, el *modelo de de Rham* para cohomología equivariante resulta:

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(\Omega^*(M)) = H_{bas}(\Omega^*(M) \otimes \Omega^*(\mathbb{S}^\infty), d)$$

Tenemos el Teorema de de Rham equivariante:

**Teorema 4.2 (de de Rham para cohomología equivariante).** *Sea  $M$  un  $\mathbb{S}^1$ -espacio. Entonces,*

$$H_{\mathbb{S}^1}(M) \cong H_{\mathbb{S}^1}^*(\Omega^*(M)).$$

En la siguiente tabla plasmamos la analogía de conceptos de ambos modelos.

Espacio $M$	dga $\Omega(M)$
Acción : $\mathbb{S}^1 \times M \longrightarrow M$	Representación $\rho: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \text{Aut}(\Omega(M))$ y operadores $d, i_X, L_X$
Espacio de órbitas	cohomología básica
Espacio contráctil $E \simeq \text{pto}$	Álgebra acíclica $H(\mathcal{E}) = \mathbb{R}$
Acción libre sobre $M$	1-forma fundamental $\chi$ invariante no singular ( $i_X \chi = 1$ )

### Modelos de Weil y Cartan

El modelo de formas diferenciales anterior resulta complicado para los cálculos. El modelo de Weil consiste en tomar el modelo de formas diferenciales anterior considerando el  $\mathbb{S}^1$ -álgebra acíclica más económica, en cierto sentido. Ese álgebra es el álgebra de Weil, que se define como:

$$W = \Lambda(\mathfrak{g}^*) \otimes S(\mathfrak{g}^*),$$

siendo  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie del grupo que actúa. Como en nuestro caso, el grupo es  $\mathbb{S}^1$ , el álgebra de Weil se simplifica mucho:

$$W = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\chi) \otimes \Lambda e,$$

donde  $\chi$  es la 1-forma de volumen de  $\mathbb{S}^1$ , y  $e$  representa la forma de Euler. La diferencial se define como

$$d_W(\chi \otimes 1) = (1 \otimes e) \quad \text{y} \quad d_W(1 \otimes e) = 0.$$

Es el  $\mathbb{S}^1$ -álgebra más económica en el sentido siguiente: dada otra álgebra acíclica con forma fundamental no singular, entonces, existe un homomorfismo de  $W$  en esa nueva álgebra.

Sustituyendo  $\Omega^*(\mathbb{S}^\infty)$  por  $W$ , llegamos al *Modelo de Weil de Cohomología equivariante*:

$$H_{bas}^*(\Omega^*(M) \otimes W).$$

Aun siendo un modelo más esquemático, todavía no es el modelo óptimo para los cálculos. Mediante el isomorfismo de Mathai-Quillen, podemos transformar el complejo diferencial anterior en otro más sencillo, a saber:

$$(\Omega^*(M)^{\mathbb{S}^1} \otimes \Lambda e, d_{\mathbb{S}^1}),$$

que llamamos *Complejo de Cartan*. La diferencial anterior está definida por

$$d_{\mathbb{S}^1}(\omega \otimes e^r) = d\omega \otimes e^r - i_X\omega \otimes e^{r+1}.$$

A la cohomología de ese complejo le llamamos *Modelo de Cartan* para la cohomología equivariante. Llegamos, pues, a la caracterización final de la cohomología equivariante:

**Teorema 4.3.** *El modelo de Cartan calcula la cohomología equivariante, es decir,*

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(M) \cong H^*(\Omega^*(M)^{\mathbb{S}^1} \otimes \Lambda e, d_{\mathbb{S}^1}).$$

Observamos lo siguiente:

- Para la equivalencia de los distintos modelos, es crucial el hecho de que  $\mathbb{S}^1$  es compacto, y de ese modo, las formas invariantes por la acción de  $\mathbb{S}^1$  calculan la cohomología de de Rham.
- En el modelo de Cartan la estructura de  $\Lambda e$ -módulo es mucho más explícita que en el modelo de Borel, por ejemplo.

### Teorema de Localización

La estructura de  $\Lambda e$ -módulo de la cohomología equivariante nos permite distinguir entre los elementos de torsión y los que no son de torsión. Ejemplos extremos son los puntos fijos, cuya cohomología equivariante no tiene torsión, y una acción libre, donde todos los elementos son de torsión. El teorema de localización afirma que si eliminamos los elementos de torsión, la cohomología equivariante de la variedad es la misma que la de sus puntos fijos. De forma más precisa:

**Teorema 4.4 (de localización).** *Sea  $M$  una  $\mathbb{S}^1$ -variedad, y sea  $F$  la variedad de los puntos fijos. Entonces, la restricción de  $M$  a  $F$  induce un morfismo en cohomología equivariante:*

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(M) \longrightarrow H_{\mathbb{S}^1}^*(F)$$

*cuyo núcleo son los elementos de torsión de  $H_{\mathbb{S}^1}^*(M)$ , y cuyo conúcleo es de torsión.*

Podemos expresar este teorema de una forma más algebraica. Si consideramos el conjunto multiplicativamente cerrado

$$S = \Lambda e - \{0\},$$

podemos localizar cualquier  $\Lambda e$ -módulo con denominadores en  $S$ . Por ejemplo, el localizado de la cohomología equivariante de una variedad es:

$$S^{-1}H_{\mathbb{S}^1}^*(M) = H_{\mathbb{S}^1}^*(M) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e).$$

Notemos que el resultado de la localización no es un objeto graduado. El teorema de localización afirma, por lo tanto, que los localizados de  $H_{\mathbb{S}^1}^*(M)$  y  $H_{\mathbb{S}^1}^*(F)$  son isomorfos:

$$S^{-1}H_{\mathbb{S}^1}^*(M) \cong S^{-1}H_{\mathbb{S}^1}^*(F) = H^*(F) \otimes \mathbb{R}(e)$$

**Ejemplo 4.2.** Se puede probar que la cohomología equivariante de un espacio con cohomología par es un  $\Lambda e$ -módulo libre. Por ejemplo,

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \otimes \Lambda e \implies S^{-1}H_{\mathbb{S}^1}^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \otimes \mathbb{R}(e)$$

sea cual sea la acción de  $\mathbb{S}^1$ . Por lo tanto, para cualquier acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , se tiene:

$$H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \otimes \mathbb{R}(e) \cong H^*(F) \otimes \mathbb{R}(e).$$

#### 4.1.2. Modelo de Gysin para flujos con $[\kappa] = 0$

La cohomología equivariante para flujos isométricos aparece en el trabajo de E. Witten (ver [57]), donde aplica técnicas de cohomología equivariante para estudiar las singularidades de un campo de Killing sobre una variedad. En este apartado definiremos un modelo de cohomología equivariante de tipo Cartan para flujos riemannianos singulares con  $[\kappa] = 0$ . Nuestra aportación consistirá en dos aspectos: por un lado, nuestra cohomología equivariante generaliza la anterior, pues está asociada una foliación  $\mathcal{F}$  con  $[\kappa] = 0$ , y no a una parametrización concreta de esa foliación (campo de Killing). Por otro lado, nuestro modelo revela que la cohomología equivariante se puede calcular a partir de datos esencialmente básicos. Para nuestra definición, adaptaremos el modelo que aparece en [44] para acciones de  $\mathbb{S}^1$  y que presentamos a continuación.

Sea  $\mathcal{F}$  el f.R.S. dado por una acción diferenciable  $\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$  sobre la variedad cerrada  $M$ . Denotaremos por  $\Omega_v^*(M/\mathbb{S}^1)$  y  $\Omega_v^*(M/\mathbb{S}^1, F)$  a los complejos  $\Omega_0^*(M/\mathcal{F})$  y  $\Omega_{-1}^*(M/\mathcal{F})$ , respectivamente, ya que son los complejos de Verona. Con estos complejos se puede calcular la cohomología equivariante (ver [44]):

**Proposición 4.5** ([44]). *En el caso de una acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre la variedad cerrada  $M$ , se tiene un isomorfismo*

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(M) \cong H^*(\{\Omega_v^*(M/\mathbb{S}^1) \oplus \Omega_v^*(M/\mathbb{S}^1, F)\} \otimes \Lambda e, D_{\mathbb{S}^1}),$$

siendo  $D_{\mathbb{S}^1}((\alpha, \beta) \otimes e^r) = (d\alpha + e \wedge \beta, -d\beta) \otimes e^r - (\beta, 0) \otimes e^{r+1}$ .

*Demostración.* Del cuasi-isomorfismo  $\Omega^*(M)^{\mathbb{S}^1} \cong \Omega_v^*(M)^{\mathbb{S}^1}$  inducido por la inclusión  $M - F \hookrightarrow M$  se sigue que el complejo  $(\Omega_v^*(M)^{\mathbb{S}^1} \otimes \Lambda e, d_{\mathbb{S}^1})$  calcula la cohomología equivariante de  $M$ . Por otro lado, tenemos que la aplicación de Gysin

$$\Psi: \Omega_v^*(M/\mathbb{S}^1) \otimes \Omega_v^{*-1}(M/\mathbb{S}^1, F) \rightarrow \Omega_v^*(M)^{\mathbb{S}^1}$$

es un isomorfismo, y se sigue el enunciado. ♣

Sea ahora  $\mathcal{F}$  un flujo riemanniano singular con  $[\kappa] = 0$  para una métrica adaptada  $\mu$ . Mantendremos las notaciones

$$\Omega_v^*(M/\mathcal{F}) = \Omega_0^*(M/\mathcal{F}) \quad \text{y} \quad \Omega_v^*(M/\mathcal{F}, F) = \Omega_{-1}^*(M/\mathcal{F}).$$

**Definición 4.3.** En las condiciones anteriores, el *modelo de Gysin* de cohomología equivariante consiste en el complejo

$$\Omega_{\mathcal{F}}^*(M) = \{\Omega_v^*(M/\mathcal{F}) \oplus \Omega_v^*(M/\mathcal{F}, F)\} \otimes \Lambda e$$

provisto de la diferencial

$$d_{\mathcal{F}}((\alpha, \beta) \otimes e^r) = (d\alpha + e \wedge \beta, -d_{\kappa}\beta) \otimes e^r - (e^{-f}\beta, 0) \otimes e^{r+1}$$

siendo  $e$  la forma de Euler de  $\mu$  y siendo  $f$  una función básica tal que  $\kappa = df$ . Llamaremos *cohomología equivariante de  $\mathcal{F}$*  a la cohomología del modelo de Gysin, y la denotaremos por

$$H_{\mathcal{F}}^*(M) = H^*(\Omega_{\mathcal{F}}^*(M), d_{\mathcal{F}})$$

Notamos que  $H_{\mathcal{F}}^*(M)$  es un  $\Lambda e$ -módulo.

En un principio, el modelo de Gysin para f.R.S. depende de la elección de  $\mu$  y también de la elección de  $f$  tal que  $\kappa = df$ . No obstante, el lema siguiente garantiza que  $H_{\mathcal{F}}^*(M)$  es independiente de dichas elecciones.

**Lema 4.6.** Sean  $\mu$  y  $\mu'$  son dos métricas adaptadas al f.R.S.  $\mathcal{F}$  y sean  $f$  y  $f'$  funciones básicas tales que  $df = \kappa$  y  $df' = \kappa'$ . Denotamos por  $d_{\mathcal{F}}$  y  $d'_{\mathcal{F}}$  a las diferenciales del modelo de Gysin asociadas a  $(\mu, f)$  y  $(\mu', f')$  respectivamente. Entonces, existe un isomorfismo diferencial de  $\Lambda e$ -módulos

$$(\Omega_{\mathcal{F}}^*(M), d_{\mathcal{F}}) \cong (\Omega_{\mathcal{F}}^*(M), d'_{\mathcal{F}}).$$

*Demostración.* Notamos que el resultado se sigue de los dos hechos siguientes:

- i) el modelo de Gysin con actores  $(e, \kappa, f)$  es isomorfo al modelo de Gysin con actores  $(e^f e, 0, 0)$ ;
- ii) Si  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son métricas adaptadas con  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ , entonces los modelos de Gysin con actores  $(e_1, 0, 0)$  y  $(e_2, 0, 0)$  son isomorfos.

Para probar *i*), se comprueba directamente que la aplicación

$$(\alpha, \beta) \otimes e^r \longmapsto (\alpha, e^{-f}\beta) \otimes e^r$$

es un isomorfismo entre los modelos de Gysin para  $(e, \kappa, f)$  y  $(e^f, 0, 0)$ .

Para probar *ii*), notamos que dado que la clase de Euler es invariante, existe una forma  $\gamma \in \Omega_{\frac{1}{2}}^1(M/\mathcal{F})$  tal que  $e_2 - e_1 = d\gamma$ . Es inmediato comprobar que la aplicación

$$(\alpha, \beta) \otimes e^r \longmapsto (\alpha - \gamma \wedge \beta, \beta) \otimes e^r$$

es un isomorfismo entre los modelos de Gysin para  $(e_1, 0, 0)$  y  $(e_2, 0, 0)$ . ♣

**Observación 4.1.** Notamos que en el caso de que  $\mathcal{F}$  esté dado por una acción de  $\mathbb{S}^1$ , tenemos

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(M) \cong H_{\mathcal{F}}^*(M).$$

**Observación 4.2.** El modelo de Gysin revela que la cohomología equivariante de una acción de  $\mathbb{S}^1$  se puede recuperar con datos básicos, a saber, los complejos  $\Omega_v^*(M/\mathcal{F})$  y  $\Omega_v^*(M/\mathcal{F})$  y la clase de Euler. En este sentido es más intrínseco que los modelos clásicos presentados, que se definen en términos de la acción de  $\mathbb{S}^1$ .

**Observación 4.3.** Si  $\mathcal{F}$  está dado una acción  $\Phi: \mathbb{R} \times (M, \mu) \longrightarrow (M, \mu)$  que preserva una métrica  $\mu$ , podemos considerar el modelo de Cartan

$$H^*(\Omega^*(M)^{\mathbb{R}} \otimes \Lambda e, d_{\mathbb{R}}),$$

donde

$$d_{\mathbb{R}}(\omega \otimes e^r) = d\omega \otimes e^r - i_X \omega \otimes e^{r+1}.$$

Notamos que es necesario que  $\kappa = 0$  para poder trabajar con el complejo de las formas invariantes por  $\mathbb{R}$ . La ventaja del modelo de Gysin con respecto a este es que podemos trabajar con métricas para las que no se cumpla necesariamente  $\kappa = 0$ , bastando que  $[\kappa] = 0$ .

La cohomología equivariante de un f.R.S. con  $[\kappa] = 0$  es un  $\Lambda e$ -módulo que se puede localizar, al igual que en el apartado anterior. El localizado de la cohomología equivariante es el  $\mathbb{R}(e)$ -espacio vectorial

$$H_{\mathcal{F}}^*(M) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e).$$

Notamos que el localizado no es un objeto graduado. A continuación, vamos a probar el teorema de localización para la cohomología equivariante de flujos riemannianos singulares. Si bien las pruebas clásicas sirven para el modelo de Cartan para acciones de  $\mathbb{R}$  por isometrías, nosotros presentaremos una prueba usando el modelo de Gysin.

**Teorema 4.7 (de localización).** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. con  $[\kappa] = 0$ , y sea  $F$  la variedad de los puntos fijos. Entonces la inclusión  $F \hookrightarrow M$  induce un isomorfismo*

$$H_{\mathcal{F}}^*(M) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e) \cong H^*(F) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e)$$

*entre las localizaciones de sus respectivas cohomologías equivariantes.*

*Demostración.* El homomorfismo  $\nabla$  está dado por la fórmula

$$\nabla([\sum_r (\alpha_r, \beta_r) \otimes e^r] \otimes Q(e)) = \sum_r [\alpha_{rF}] \otimes e^r Q(e), \quad (4.2)$$

siendo  $\alpha_{rF}$  la forma inducida en  $F$  por la forma de Verona  $\alpha_r$ . Para construir la inversa de  $\nabla$  necesitaremos un natural  $N$  lo suficientemente grande como para que  $e^k = 0$  para todo  $k \geq N$ . Podemos asegurar esto último tomando  $N = n = \dim M$ . Definimos ahora:

$$\begin{aligned} \Delta([\gamma] \otimes Q(e)) &= [(\gamma_M, 0) \otimes e^n + \sum_{k=1}^n (0, e^{kf} d\gamma_M \wedge e^{k-1}) \otimes e^{n-k}] \otimes \frac{Q(e)}{e^n} \\ &= [(\gamma_M, 0) \otimes e^n + (0, e^f d\gamma_M) \otimes e^{n-1} \\ &\quad + (0, e^{2f} d\gamma_M \wedge e) \otimes e^{n-2} \\ &\quad \dots \\ &\quad + (0, e^{nf} d\gamma_M \wedge e^{n-1} \otimes 1)] \otimes \frac{Q(e)}{e^n}, \end{aligned}$$

siendo  $\gamma_M$  una extensión básica de  $F$  a  $M$  (como en la sucesión del par  $(M/\mathcal{F}, F)$ ). Para asegurar que  $\Delta$  está bien definida hay que realizar las siguientes comprobaciones:

1. La forma

$$(\gamma_M, 0) \otimes e^n + \sum_{k=1}^n (0, e^{kf} d\gamma_M \wedge e^{k-1}) \otimes e^{n-k}$$

es  $d_{\mathcal{F}}$ -cerrada (se comprueba directamente);

2. La definición no depende de la extensión  $\gamma_M$  que elijamos. En efecto, si  $\gamma'_M$  es otra extensión básica, entonces tenemos que  $\alpha = \gamma_M - \gamma'_M \in \Omega_v^*(M/\mathcal{F}, F)$ , de modo que basta probar que la forma

$$\omega = (\alpha, 0) \otimes e^n + \sum_{k=1}^n (0, e^{kf} d\alpha \wedge e^{k-1}) \otimes e^{n-k}$$

es exacta. Esto se cumple, ya que podemos comprobar directamente que

$$d_{\mathcal{F}}(-\sum_{k=1}^n (0, e^{kf} \alpha \wedge e^{k-1}) \otimes e^{n-k}) = \omega.$$

Notamos que en este punto es crucial el hecho de que  $\alpha_F = 0$ , ya que de otro modo no podríamos considerar las formas del tipo  $(0, e^{kf} \alpha \wedge e^{k-1})$ .

3. Hay que comprobar que la expresión  $\Delta([\gamma] \otimes Q(e))$  no depende del representante de la clase  $[\gamma]$ , es decir, que  $\Delta([d\gamma], Q(e)) = 0$ . En efecto, basta tener en cuenta que si  $\gamma_M$  es una extensión básica de  $\gamma$ , entonces  $d\gamma_M$  es una extensión básica de  $d\gamma$ , y por lo tanto,

$$\Delta([d\gamma] \otimes Q(e)) = [(d\gamma_M, 0) \otimes 1] \otimes Q(e) = [d_{\mathcal{F}}((\gamma_M, 0) \otimes 1)] \otimes Q(e) = 0.$$

Nos queda comprobar que  $\nabla$  y  $\Delta$  son inversas, una de la otra. Es evidente que  $\Delta \circ \nabla = Id$ . La comprobación de  $\nabla \circ \Delta = Id$  es más larga, pero directa, y la mostramos a continuación. Sea

$$\omega = \sum_r (\alpha_r, \beta_r) \otimes e^r$$

un  $d_{\mathcal{F}}$ -ciclo. Entonces, se cumple

$$d\alpha_r + \beta_r \wedge e - e^{-f}\beta_{r-1} = 0 \quad \forall r \geq 0. \quad (4.3)$$

Tenemos, por lo tanto,:

$$\begin{aligned} \Delta \circ \nabla([\omega] \otimes Q(e)) &= \Delta\left(\sum_r [\alpha_r] \otimes e^r Q(e)\right) \\ &= \sum_r [(\alpha_r, 0) \otimes e^n + \sum_{k=1}^n (0, e^{kf} d\alpha_r \wedge e^{k-1}) \otimes e^{n-k}] \otimes \frac{e^r Q(e)}{e^n} \\ &= \left[ \sum_r (\alpha_r, 0) \otimes e^{n+r} + \sum_{k=1}^n \sum_r (0, e^{kf} d\alpha_r \wedge e^{k-1}) \otimes e^{n-k+r} \right] \otimes \frac{Q(e)}{e^n} \\ &= \left[ \sum_{i \geq 0} \left( \alpha_{i-n}, \sum_{k=n-i}^n e^{kf} d\alpha_{i-n+k} \wedge e^{k-1} \right) \otimes e^i \right] \otimes \frac{Q(e)}{e^n} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Calculamos aparte el último sumatorio usando la fórmula (4.3):

$$\begin{aligned} \sum_{k=n-i}^n e^{kf} d\alpha_{i+k-n} \wedge e^{k-1} &= \sum_{k=n-i}^n e^{kf} (e^{-f}\beta_{i+k-n-1} - \beta_{i+k-n} \wedge e) \wedge e^{k-1} \\ &= \beta_{i-n} + \sum_{k=n-i}^{n-1} e^{kf} \beta_{i+k-n} \wedge e^k - \sum_{k=n-i}^n e^{kf} \beta_{i+k-n} \wedge e^k \quad (4.5) \\ &= \beta_{i-n} - e^{nf} \beta_i \wedge e^n \\ &= \beta_{i-n}. \end{aligned}$$

Juntando (4.4) y (4.5), obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}\Delta\nabla([\omega] \otimes Q(e)) &= [\sum_i (\alpha_{i-n}, \beta_{i-n}) \otimes e^i] \otimes \frac{Q(e)}{e^n} \\ &= [\sum_i (\alpha_i, \beta_i) \otimes e^i] \otimes Q(e) \\ &= [\omega] \otimes Q(e),\end{aligned}$$

de modo que  $\nabla$  y  $\Delta$  son inversas y hemos terminado la prueba. ♣

## 4.2. Teorema de Localización para Flujos Riemannianos Singulares

En la sección anterior hemos definido la cohomología equivariante para f.R.S. con  $[\kappa] = 0$  mediante el modelo de Gysin, y hemos probado un teorema de localización. En esta sección trabajaremos con f.R.S. generales. El hecho de que  $[\kappa]$  no sea necesariamente nula nos impide definir una cohomología equivariante de  $\mathcal{F}$  con el modelo de Gysin. No obstante, recuperaremos también la cohomología de los puntos fijos de  $\mathcal{F}$  de una manera similar al teorema de localización de la sección anterior, valiéndonos de un f.R.S. con  $[\kappa] = 0$  asociado naturalmente a  $(M, \mathcal{F})$ : el *revestimiento de trivialización* de  $[\kappa]$  (ver [29]).

### 4.2.1. Revestimiento de trivialización

Comenzamos describiendo brevemente la construcción y algunas propiedades del revestimiento de trivialización asociado a una forma cerrada  $\omega \in \Omega^1(M)$  (ver [29] para los detalles). Consideramos el *homomorfismo de los periodos*, dado por

$$\begin{aligned}Per_\omega : \pi_1(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\alpha] &\longmapsto \int_\alpha \omega.\end{aligned}$$

Notamos que está bien definido, gracias al teorema de Stokes. Notamos también que esta definición no depende del representante de  $[\omega] \in H^1(M)$  escogido. Por ser un homomorfismo sobre un grupo abeliano, queda inducido un homomorfismo:

$$Per_\omega : H_1(M) \longrightarrow \mathbb{R},$$

que corresponde a la clase  $[\omega] \in H^1(M)$  mediante el isomorfismo de de Rham. El grupo  $\Pi_\omega = \text{im } Per_\omega$  se conoce como *grupo de los periodos*. Si  $\Pi_\omega = 0$ , se tiene que  $\omega$  es una forma exacta.

Consideramos ahora el revestimiento regular

$$p: \widehat{M} \longrightarrow M,$$

correspondiente a  $\ker Per_\omega$ , que es un subgrupo normal de  $\pi^1(M)$ . Se dice que  $p$  es el *revestimiento de trivialización de la clase*  $[\omega]$ . Notamos que  $\Pi_\omega$  es el grupo de automorfismos del revestimiento  $p$ . Tenemos que  $\widehat{\omega} = p^*\omega$  es una forma exacta.

Sea ahora  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad cerrada  $M$ . Consideramos el revestimiento de trivialización de  $[\kappa] \in H^1(M)$ :

$$p: \widehat{M} \longrightarrow M.$$

Consideramos en  $\widehat{M}$  la foliación  $\widehat{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$ . Esta foliación cumple las siguientes propiedades:

**Proposición 4.8.** *En las condiciones anteriores, tenemos:*

- i)  $\widehat{F}$  es un flujo riemanniano con  $[\widehat{\kappa}] = 0$ ;
- ii) Los entornos de Carrière de  $M$  son distinguidos para el revestimiento;
- iii) Todo estrato de puntos fijos  $S$  posee un entorno en  $M$  que es distinguido para el revestimiento;

*Demostración.* La primera parte de i) se sigue del hecho de que la aplicación de revestimiento es una isometría local. La segunda se sigue de la construcción del revestimiento y del hecho de que  $H^1(\widehat{M}/\widehat{\mathcal{F}}) \longrightarrow H^1(\widehat{M})$  sea inyectiva.

Para probar ii), sea  $m \in M$  y sea  $U$  un entorno de Carrière de  $m$ . Por el lema 2.14, la restricción de  $\kappa$  a  $U$  es exacta, es decir,  $\kappa_U = df$ , donde  $f \in C^\infty(U)$ . Sea  $\widehat{m} \in p^{-1}(m)$  y sea  $\widehat{U}$  la componente conexa de  $p^{-1}(U)$  que contiene a  $\widehat{m}$ . Entonces, la proyección

$$p_U = p|_{\widehat{U}}: \widehat{U} \longrightarrow U$$

es un revestimiento, con lo cual tan sólo nos queda probar que es de una hoja. Para ello, notamos que si  $[\alpha] \in \pi_1(U, m)$ , entonces por Stokes,

$$per_\kappa([\alpha]) = \int_\alpha \kappa = \int_\alpha df = 0,$$

de modo que los levantamientos de lazos de  $U$  son lazos en  $\widehat{U}$ . Esto implica que el revestimiento  $p: \widehat{U} \longrightarrow U$  es de una hoja, y por lo tanto,  $\widehat{U} \cong U$ .

Para ver *iii*) basta notar que se puede tomar un representante de  $\kappa$  que se anule en un entorno de un estrato de puntos fijos (por ejemplo, tomando la métrica de la observación 3.12), y proceder como en *ii*).  $\clubsuit$

**Observación 4.4.** Notamos que  $[\kappa] = 0$  si y sólo si su revestimiento de trivialización asociado es de una hoja, en cuyo caso, se tiene  $\widehat{M} = M$  y  $p = Id_M$ .

### 4.2.2. Teorema de Localización

En este apartado obtenemos el teorema de localización para flujos riemannianos singulares. La estrategia será como sigue: como el flujo  $\widehat{\mathcal{F}}$  cumple  $[\widehat{\kappa}] = 0$ , podemos considerar su cohomología equivariante  $H_{\widehat{\mathcal{F}}}^*(\widehat{M})$  y aplicar ahí el teorema de localización 4.7. Al introducir el revestimiento de trivialización, intuitivamente perdemos información sobre la cohomología básica de  $\mathcal{F}$  (la relacionada con la clase  $[\kappa]$ ). No obstante, tenemos que el  $\mathbb{R}(e)$ -espacio vectorial  $H_{\widehat{\mathcal{F}}}^*(\widehat{M}) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e)$  conserva información sobre los puntos fijos de  $\mathcal{F}$  en el siguiente sentido: veremos que existe una acción del grupo de los periodos  $G$  sobre el localizado  $H_{\widehat{\mathcal{F}}}^*(\widehat{M}) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e)$ , y consideraremos los elementos invariantes por esa acción. El teorema de localización establece entonces que

$$(H_{\widehat{\mathcal{F}}}^*(\widehat{M}) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e))^G \cong H^*(F) \otimes \mathbb{R}(e).$$

Consideramos en  $\widehat{M}$  la métrica adaptada  $\widehat{\mu} = p^*\mu$ . Tenemos, también,  $\widehat{\chi}, \widehat{e} = p^*e$  y  $\widehat{\kappa} = p^*\kappa$ . Como  $\widehat{\mu}$  es invariante por  $G$ , tenemos que  $\widehat{\chi}, \widehat{e}$  y  $\widehat{\kappa}$  también lo son.

Tenemos el siguiente resultado:

**Lema 4.9.** *Sea  $f$  tal que  $\widehat{\kappa} = df$ . Entonces, existe un homomorfismo de grupos*

$$\phi: (G, \circ) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

*tal que  $g^*(e^f) = \phi(g)e^f$ .*

*Demostración.* Si fijamos un punto  $a \in \widehat{M}$ , podemos imponer  $f(a) = 0$  sin pérdida de generalidad. Tenemos, para cada  $g \in G$ ,

$$df = \widehat{\kappa} = g^*\widehat{\kappa} = g^*df = d(g^*f),$$

de modo que

$$d(g^*f - f) = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que  $g^*f - f$  es una función que toma el valor constante  $C_g$  en todo  $\widehat{M}$ . Es más, se cumple

$$C_g = g^*f(a) - f(a) = g^*f(a).$$

Por lo tanto, definimos  $\phi(g) = e^{C_g}$ . Veamos que es un homomorfismo de grupos: por un lado, es claro que si  $e = 1_{\widehat{M}}$  es el elemento identidad de  $G$ , se tiene  $\phi(e) = 1$ . Por otro lado, sean  $g_1, g_2 \in G$ . Tenemos

$$f + C_{g_1 \circ g_2} = (g_1 \circ g_2)^*f = g_2^*(g_1^*f) = g_2^*(f + C_{g_1}) = f + C_{g_2} + C_{g_1}.$$

De donde se sigue  $C_{g_1 \circ g_2} = C_{g_1} + C_{g_2}$ , y por lo tanto,  $\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$ . ♣

Consideramos la cohomología equivariante de  $(\widehat{M}, \widehat{\mathcal{F}})$ , calculada a partir del modelo de Gysin para  $\widehat{e}, \widehat{\kappa}$  y  $f$ . Tenemos la siguiente acción de  $G$ :

**Lema 4.10.** *La aplicación*

$$\Psi: G \times H_{\widehat{\mathcal{F}}}^*(\widehat{M}) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e) \longrightarrow H_{\widehat{\mathcal{F}}}^*(\widehat{M}) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e)$$

dada por

$$\begin{aligned} \Psi \left( g, \left[ \sum_{r \geq 0} (\alpha_r, \beta_r) \otimes e^r \right] \otimes Q(e) \right) \\ = \left[ \sum_{i \geq 0} \left( g^* \alpha_{i-n}, \sum_{k=1}^n e^{kf} dg^* \alpha_{i-n+k} \wedge \widehat{e}^{k-1} \right) \otimes e^i \right] \otimes \frac{Q(e)}{e^n} \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $n = \dim M$ , es una acción.

*Demostración.* Se comprueba directamente que  $\Psi$  está bien definida (los cálculos son similares a los del teorema 4.7). Utilizando el hecho de que  $\sum_{r \geq 0} (\alpha_r, \beta_r) \otimes e^r$  es un ciclo, se obtiene la siguiente expresión equivalente:

$$\begin{aligned} \Psi \left( g, \left[ \sum_{r \geq 0} (\alpha_r, \beta_r) \otimes e^r \right] \otimes Q(e) \right) \\ = \left[ \sum_{i \geq 0} \left( g^* \alpha_{i-n}, \phi(g)^{-1} g^* \beta_{i-n} + (\phi(g)^{-1} - 1) \sum_{k=1}^n g^* \beta_{i-n+k} \wedge (e^f \widehat{e})^k \right) \otimes e^i \right] \otimes \frac{Q(e)}{e^n}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si  $e$  es el elemento neutro de  $G$ , tenemos  $\phi(e) = 1$ , y se sigue inmediatamente de (4.7) que  $\Psi(e, \omega) = \omega$ . La comprobación  $\Psi(g_1 g_2, \omega) = \Psi(g_1, \Psi(g_2, \omega))$  se sigue directamente de (4.6). ♣

**Observación 4.5.** Notamos que si  $[\kappa] = 0$ , tenemos que tanto  $\phi$  como  $\Psi$  son triviales.

Llegamos al resultado final de este capítulo:

**Teorema 4.11 (de localización para flujos riemannianos singulares).** *Sea  $\mathcal{F}$  un f.R.S. sobre la variedad cerrada  $M$ , y sea  $F$  la subvariedad de los puntos fijos. Denotamos por  $G$  el grupo de los períodos del revestimiento  $p: \widehat{M} \rightarrow M$  de trivialización de  $[\kappa]$ , y consideramos la acción de  $G$  dada por (4.6). Entonces, la inclusión  $F \hookrightarrow M$  y  $p$  inducen un isomorfismo*

$$(H_{\mathcal{F}}^*(\widehat{M}) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e))^G \cong H^*(F) \otimes \mathbb{R}(e).$$

*Demostración.* Sea  $\widehat{F}$  la variedad de los puntos fijos de  $\widehat{\mathcal{F}}$ . Por la proposición 4.8, tenemos que  $\widehat{F} = p^{-1}(F)$ , y además  $p: \widehat{F} \rightarrow F$  es un revestimiento de grupo  $G$ . En consecuencia, se tiene  $\Omega^*(\widehat{F})^{\Psi_F} = p^*\Omega^*(F)$  para la acción  $\Psi_F(g, \omega) = g^*\omega$ . Por lo tanto, tenemos

$$H^*(\widehat{F})^{\Psi_F} \cong H^*(F) \quad \text{y} \quad (H^*(\widehat{F}) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e))^{\Psi_F \otimes Id} \cong H^*(F) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e).$$

Consideramos ahora el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (H_{\mathcal{F}}^*(\widehat{M}) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e)) & \xrightarrow{\widehat{\nabla}} & H^*(\widehat{F}) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e), \\ & & \downarrow p^* \\ & & H^*(F) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e) \end{array}$$

donde  $\widehat{\nabla}$  es el isomorfismo dado por (4.2). Se comprueba inmediatamente que el diagrama anterior es equivariante si consideramos las acciones  $\Psi, (\Psi_F \otimes Id)$  y la acción trivial sobre  $H^*(F) \otimes_{\Lambda e} \mathbb{R}(e)$ . Pasando al cociente por las respectivas acciones, obtenemos el resultado. ♣

**Observación 4.6.** En el caso que  $[\kappa] = 0$ , tanto el revestimiento como la acción  $\Psi$  son triviales, y por lo tanto, el teorema 4.11 generaliza 4.7.



# Apéndice

Sea  $\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \longrightarrow M$  una acción diferenciable sobre la variedad cerrada  $M$ . El espacio cociente  $M/\mathbb{S}^1$  tiene estructura de pseudovariedad estratificada. Para este tipo de espacios, M. Goresky y R. MacPherson definen la *homología de intersección* (ver [25]), que se calcula con ciertas cadenas de símlices singulares  $SC_*^{\bar{q}}(M/\mathbb{S}^1)$ . Denotaremos la homología y *cohomología de intersección* mediante

$$IH_*^{\bar{q}}(M/\mathbb{S}^1) = H_*(SC_*^{\bar{q}}(M/\mathbb{S}^1), \partial) \quad \text{y} \quad IH_*^{\bar{q}}(M/\mathbb{S}^1) = H^*(\text{Hom}(SC_*^{\bar{q}}(M/\mathbb{S}^1), \mathbb{R}), \delta),$$

siendo  $\partial$  y  $\delta$  los operadores borde y coborde usuales.

En el capítulo 3 hemos definido la cohomología básica de intersección de un flujo riemanniano singular  $\mathcal{F}$ , usando formas diferenciales en la parte regular de  $M$ . El objetivo de este apéndice es justificar la definición que hacemos de cohomología de intersección, probando que si  $\mathcal{F}$  está dado por una acción de  $\mathbb{S}^1$ , entonces tenemos un isomorfismo

$$H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}) \cong IH_{\bar{q}}^*(M/\mathbb{S}^1), \tag{A.8}$$

donde  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$  son perversidades duales.

La estrategia para probar el isomorfismo (A.8) es como sigue: usaremos la integración de formas sobre símlices, como en el Teorema de de Rham, lo cual no podemos realizar directamente sobre  $SC_*^{\bar{q}}(M/\mathbb{S}^1)$  por dos motivos: primero, que los símlices de ese complejo no son diferenciables, y segundo, una cuestión de finitud, debido a que las formas perversas están definidas en  $M - F$  y no en todo  $M$ . Para superar estas dos particularidades, introduciremos un subcomplejo  $SC_*^{\bar{q}, M}(M/\mathbb{S}^1)$  de  $SC_*^{\bar{q}}(M/\mathbb{S}^1)$  formado por cadenas de símlices levantables a símlices diferenciables en  $M$ , sobre los cuales sí que podremos integrar formas perversas. Este nuevo complejo sirve para calcular la cohomología de intersección, y a su vez la integración define un cuasi-isomorfismo con  $H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F})$ . En otras palabras, construimos un diagrama de cuasi-isomorfismos

$$\begin{array}{ccc}
(\Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}), d) & \xrightarrow{\Psi} & (\text{Hom}(SC_*^{\bar{q},M}(M/\mathbb{S}^1), \mathbb{R}), \delta) \\
& & \uparrow \iota^* \\
& & (\text{Hom}(SC_*^{\bar{q}}(M/\mathbb{S}^1), \mathbb{R}), \delta),
\end{array}$$

donde  $\Psi$  es la aplicación de de Rham,  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$  son perversidades duales e  $\iota^*$  está inducido por la inclusión  $\iota: SC_*^{\bar{q},M}(M/\mathbb{S}^1) \hookrightarrow SC_*^{\bar{q}}(M/\mathbb{S}^1)$ .

Tanto el procedimiento como las demostraciones son análogas a las que se encuentran en [50] y [7] para el contexto de variedades estratificadas, por lo que tan sólo presentaremos el esquema de la prueba de (A.8).

### A.3. Homología de Intersección

Trabajaremos con un espacio estratificado  $A$  (ver [7] para las definiciones).

**Definición A.4.** Una perversidad  $\bar{q}$  sobre el espacio estratificado  $A$  es una aplicación que asigna a cada estrato singular  $S$  un número entero  $\bar{q}(S) \in \mathbb{Z}$ .

Notamos que esta definición es coherente con la definición 3.8, donde los únicos estratos singulares son los estratos de puntos fijos. Usaremos las mismas convenciones de notación que para las perversidades del capítulo 3, con la salvedad de  $\bar{t}_A(S) = \text{cod}_A S - 2$ . Dado que para la cohomología básica de intersección consideraremos perversidades  $\bar{0} \leq \bar{p} \leq \bar{t} + \bar{1}$ , para la homología de intersección tomaremos perversidades  $-\bar{1} \leq \bar{q} \leq \bar{t}$ .

**Definición A.5.** Diremos que un  $k$ -símplice singular  $\sigma: \Delta_k \rightarrow A$  es  $\bar{q}$ -admisibile si se verifican las siguientes condiciones:

- i)  $\sigma$  envía el interior de  $\Delta_k$  en el estrato regular de  $A$ ;
- ii)  $\sigma^{-1}(S) \subseteq (k - \text{cod}_A(S) + \bar{q}(S))$ -esqueleto de  $\Delta_k$  para todo estrato  $S$ .

**Definición A.6.** Diremos que una cadena singular  $c = \sum_{j=1}^m r_j \sigma_j$  es  $\bar{q}$ -admisibile si cada símplice  $\sigma_j$  es  $\bar{q}$ -admisibile y además  $\partial c$  está formada por símplices  $\bar{q}$ -admisibles (notamos que esto no implica necesariamente que cada  $\partial \sigma_j$  sea  $\bar{q}$ -admisibile).

Denotaremos por  $SC_*^{\bar{q}}(A)$  el complejo de las cadenas singulares  $\bar{q}$ -admisibles. La homología de este complejo diferencial es la *homología de intersección*:

$$IH_*^{\bar{q}}(A) = H_*(SC_*^{\bar{q}}(A), \partial).$$

Los siguientes cálculos se pueden encontrar en [35]:

**Proposición A.12.** Si  $E$  es una variedad contráctil, la aplicación  $a \rightarrow (t_0, a)$ , donde  $t_0$  es un punto fijado de  $E$ , induce un isomorfismo  $IH_*^{\bar{q}}(A) \cong IH_*^{\bar{q}}(E \times A)$ .

**Proposición A.13.** Si  $A$  es compacta, entonces la aplicación  $a \rightarrow [t_0, a]$ , donde  $t_0$  es un punto prefijado de  $(0, 1)$ , induce un isomorfismo

$$IH_j^{\bar{q}}(CA) \cong \begin{cases} IH_j^{\bar{q}}(A) & \text{si } j \leq n - \bar{q}(v); \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

siendo  $v$  el vértice del cono  $CA$  y  $n$  la dimensión del estrato maximal de  $A$ .

También tenemos la siguiente propiedad, probada en [50]:

**Proposición A.14.** Si  $A$  es una variedad, entonces  $IH_*^{\bar{q}}(A) \cong H_*(A)$  para toda perversidad  $\bar{0} \leq \bar{q} \leq \bar{t}_A$ .

Volvemos ahora a la acción diferenciable  $\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$ . Denotaremos por

$$\pi: M \rightarrow M/\mathbb{S}^1$$

la proyección sobre el espacio de órbitas. Recordamos brevemente la estructura de variedad estratificada de  $M/\mathbb{S}^1$ , descrita en [28]. Denotamos por  $\mathbb{S}_x^1$  al subgrupo de isotropía de  $x \in M$ . Tenemos definida en  $M$  una estratificación  $\mathcal{S}$  determinada por la relación de equivalencia  $(x \sim y) \equiv (\mathbb{S}_x^1 = \mathbb{S}_y^1)$ . Los estratos de  $\mathcal{S}$  son las componentes conexas de las clases de equivalencia de  $\sim$ . Tenemos tres clases de estratos: el estrato regular o maximal (formado por puntos cuyo subgrupo de isotropía  $\mathbb{S}_x^1$  es trivial), estratos de puntos fijos ( $\mathbb{S}_x^1 = \mathbb{S}^1$ ) y estratos excepcionales (los restantes). Diremos que los estratos no regulares son *singulares*. Consideramos en  $M/\mathbb{S}^1$  la estratificación

$$\pi(\mathcal{S}) = \{\pi(S) : S \in \mathcal{S}\}.$$

Diremos que  $\pi(S)$  es un estrato regular o singular de  $M/\mathbb{S}^1$  si  $S$  lo es de  $M$ . El estrato regular de  $M/\mathbb{S}^1$  es denso en  $M/\mathbb{S}^1$ . Notamos que en el caso de un estrato de puntos fijos  $S$ , podemos identificar  $\pi(S)$  con  $S$ . Llamaremos  $F$  al conjunto de los puntos fijos por la acción. Identificaremos también  $\pi(F)$  con  $F$ .

Definiremos a continuación un subcomplejo de  $SC_*^{\bar{q}}(M/\mathbb{S}^1)$  que nos permitirá integrar formas perversas.

**Definición A.7.** Un símplice  $\bar{q}$ -admisibles  $\sigma: \Delta_k \rightarrow M/\mathbb{S}^1$  se dice que es *levantable a  $M$*  si se cumple:

- i)  $\sigma^{-1}(F)$  es una cara  $\Delta_F$  de  $\Delta_k$ ;
- ii) existe un símplice  $\sigma_M: \Delta_k \longrightarrow M$  diferenciable tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow \sigma_M & \downarrow \pi \\ \Delta_k & \xrightarrow{\sigma} & M/\mathbb{S}^1 \end{array}$$

Una cadena  $\bar{q}$ -admisibles  $c = \sum_j r_j \sigma_j$  se dirá que es *levantable a  $M$*  si cada  $\sigma_j$  y cada símplice de  $\partial c$  son levantables a  $M$ .

Denotaremos por  $SC_*^{\bar{q},M}(M/\mathbb{S}^1)$  al complejo de cadenas  $\bar{q}$ -admisibles y levantables a  $M$ . Notamos que es un complejo diferencial, debido a  $\partial \circ \pi = \pi_* \partial$ . Definimos la *homología de intersección levantable*

$$IH_*^{\bar{q},M} = H_*(SC_*^{\bar{q},M}(M/\mathbb{S}^1), \partial)$$

Se comprueba que las pruebas de las proposiciones A.12 y A.13 son válidas para la homología  $IH_*^{\bar{q},M}(M/\mathbb{S}^1)$ .

La condición ii) de la definición A.7 nos solucionar  el problema de diferenciable a la hora de integrar formas sobre el símplice. La condición i) combinada con la ii) nos permitirá definir la explosión de un símplice levantable, lo cual como veremos, nos dará la finitud de la integral. Recordamos la siguiente definición (ver, por ejemplo, [50]):

**Definición A.8.** Sea  $\Delta_k$  una cara del símplice estándar  $\Delta = \Delta_{k+i+1}$ , y sea  $\Delta_i$  la cara opuesta de  $\Delta_k$  en  $\Delta$ . Entonces, la explosión de  $\Delta$  con respecto a  $\Delta_F$  es la aplicación

$$\mathcal{L}_\Delta: C\Delta_F \times \Delta_i \longrightarrow \Delta$$

dada por  $\mathcal{L}_\Delta([t, x], y) = (tx + (1-t)y)$ .

La explosión  $\mathcal{L}_\Delta: C\Delta_F \times \Delta_i \longrightarrow \Delta$  lleva difeomórficamente el interior del prisma  $C\Delta_F \times \Delta_i$  sobre el interior de  $\Delta$ . Tenemos el siguiente lema, que se demuestra de forma similar a la proposición 3.5.

**Lema A.15.** Sea  $\sigma: \Delta \longrightarrow M/\mathbb{S}^1$  un símplice  $\bar{q}$ -admisibles y levantable a  $M$ , y sea  $\Delta_i$  la cara opuesta de  $\Delta_F = \sigma^{-1}(F)$ . Entonces, existe una aplicación diferenciable  $\tilde{\sigma}_M: C\Delta_F \times \Delta_i \longrightarrow \tilde{M}$  de manera que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C\Delta_F \times \Delta_i & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_M} & \tilde{M} \\ \mathcal{L}_\Delta \downarrow & & \downarrow \mathcal{L} \\ \Delta & \xrightarrow{\sigma_M} & M \end{array}$$

En las condiciones del lema A.15, denotaremos la explosión de  $\Delta$  mediante

$$\mathcal{L}_\Delta: \tilde{\Delta} \longrightarrow \Delta.$$

## A.4. Integración de formas perversas

Sea  $\mathcal{F}$  el flujo riemanniano singular determinado por la acción  $\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \longrightarrow M$ . Consideramos una perversidad  $\bar{0} \leq \bar{p} \leq \bar{t} + \bar{1}$  definida sobre los estratos de puntos fijos de  $M$ , y consideramos la perversidad dual  $\bar{q}$  (recordamos que  $\bar{q}(S) + \bar{p}(S) = \text{cod}_M S - 3$ ). Notamos que podemos considerar  $\bar{q}$  como una perversidad sobre el espacio estratificado  $M/\mathbb{S}^1$  sin más que definir  $\bar{q}(S) = 0$  para cada estrato excepcional  $S$ . Diremos que las perversidades  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$  así definidas son perversidades *duales* (notamos que esta nomenclatura es coherente con la definición de perversidades duales del capítulo 3).

Definimos a continuación la *aplicación de de Rham perversa*, que relacionará las cohomologías  $H_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F})$  y  $H_{\bar{q},M}^*(M/\mathbb{S}^1)$ :

$$\Psi: \Omega_{\bar{p}}^k(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \text{Hom}(SC_{\bar{q},M}^{\bar{q},M}(M/\mathbb{S}^1), \mathbb{R}) \quad (\text{A.9})$$

dada por

$$\Psi(\omega) \left( \sum_j r_j \sigma_j \right) = \sum_j r_j \int_{\sigma_j} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j r_j \int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} (\sigma_{jM})^* \omega,$$

donde  $\overset{\circ}{\Delta}_k$  denota el interior de  $\Delta_k$ .

Hemos de probar en primer lugar que  $\int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} \sigma_M^* \omega < \infty$  para toda  $k$ -forma perversa  $\omega$ . Como consecuencia del lema A.15, tenemos que para todo símplice  $\bar{q}$ -admisibles levantable a  $\sigma_M$  y para toda forma perversa  $\omega$ ,

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} \sigma_M^* \omega = \int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} \widetilde{\sigma}_M^* \widetilde{\omega} = \int_{\widetilde{\Delta}_k} \widetilde{\sigma}_M^* \widetilde{\omega} < \infty.$$

A continuación comprobamos que la definición de  $\Psi(\omega)(\sigma)$  no depende del levantamiento  $\sigma_M$  escogido, como nos asegura el siguiente

**Lema A.16.** *En las condiciones anteriores, sean  $\sigma_M$  y  $\sigma'_M$  son dos levantamientos de  $\sigma: \Delta_k \longrightarrow M/\mathbb{S}^1$ . Entonces, se tiene  $\int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} \sigma_M^* \omega = \int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} \sigma'^*_M \omega$ .*

*Demostración.* Sean  $\sigma_M$  y  $\sigma'_M$  como en enunciado. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \overset{\circ}{\Delta}_k & \xrightarrow{\sigma_M} & \text{reg}(M) \\ & \searrow \sigma & \downarrow \pi \\ & & \text{reg}(M/\mathbb{S}^1), \end{array}$$

donde  $\text{reg}(M)$  y  $\text{reg}(M/\mathbb{S}^1)$  denotan los estratos maximales de  $M$  y  $M/\mathbb{S}^1$ , respectivamente. Como  $\pi: \text{reg}(M) \rightarrow \text{reg}(M/\mathbb{S}^1)$  es un fibrado localmente trivial (con grupo estructural difeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ ), tenemos

$$\pi^*(\Omega^*(\text{reg}(M/\mathbb{S}^1))) = \Omega^*(\text{reg}(M)/\mathcal{F}),$$

y por lo tanto, existe una forma  $\eta \in \Omega^*(\text{reg}(M/\mathbb{S}^1))$  tal que

$$\omega|_{\text{reg}(M)} = \pi^*\eta.$$

Tenemos, por lo tanto,

$$\int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} \sigma_M^*(\omega) = \int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} \sigma_M^*(\omega|_{\text{reg}(M)}) = \int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} \sigma_M^*\pi^*\eta = \int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} \sigma^*\eta,$$

y de la misma manera obtenemos

$$\int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} \sigma'^*_M(\omega) = \int_{\overset{\circ}{\Delta}_k} \sigma^*\eta.$$



Nuestro siguiente paso es comprobar que la aplicación de de Rham es una aplicación diferencial. Para ello, tenemos que probar una fórmula de tipo Stokes, en la cual el hecho de que las perversidades  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$  sean duales jugará un papel crucial.

**Proposición A.17 (fórmula de Stokes).** *La aplicación de de Rham perversa*

$$\Psi: (\Omega_{\bar{p}}^k(M/\mathcal{F}), d) \longrightarrow (\text{Hom}(SC_{\bar{q}, M}^{\bar{q}, M}(M/\mathbb{S}^1), \mathbb{R}), \delta)$$

*es una aplicación diferencial.*

*Demostración.* Sea  $\omega \in \Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F})$  y sea  $\sigma: \Delta \rightarrow M/\mathbb{S}^1$  un símplice  $\bar{q}$ -admisibles levantable. Denotaremos, como antes,  $\Delta_i$  a la cara opuesta de  $\Delta_F = \sigma^{-1}(F)$  en  $\Delta$ . Hemos de probar

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega.$$

Directamente se obtiene

$$\partial(\tilde{\Delta}) = \partial(\tilde{\Delta}) \cup (\Delta_F \times \{1\}) \times \Delta_i,$$

Identificando  $(\Delta_F \times \{1\}) \times \Delta_i$  con  $\Delta_F \times \Delta_i$ , tenemos

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\tilde{\Delta}} d\tilde{\sigma}_M^* \tilde{\omega} = \int_{\partial\tilde{\Delta}} \tilde{\sigma}_M^* \tilde{\omega} = \int_{\partial\tilde{\Delta}} \tilde{\sigma}_M^* \tilde{\omega} + \int_{\Delta_F \times \Delta_i} \tilde{\sigma}_M^* \tilde{\omega} = \int_{\partial\sigma} \omega + \int_{\Delta_F \times \Delta_i} \tilde{\sigma}_M^* \tilde{\omega},$$

de donde la proposición se reduce a probar

$$\int_{\Delta_F \times \Delta_i} \tilde{\omega} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Denotamos por  $S$  el estrato de puntos fijos tal que  $\sigma(\Delta_F) \subseteq S$ . Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\Delta} & \longleftarrow & \Delta_F \times \Delta_i & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_M} & \partial\tilde{S} \\ \mathcal{L}_{\Delta} \downarrow & & \downarrow p_1 & & \downarrow \mathcal{L}_S \\ \Delta & \longleftarrow & \Delta_F & \xrightarrow{\sigma} & S \end{array},$$

siendo  $p_1$  la proyección sobre el primer factor. Del diagrama deducimos que  $\tilde{\sigma}_M^*$  envía vectores  $p_1$ -verticales en vectores  $\mathcal{L}_S$ -verticales. En consecuencia, tenemos

$$\bar{p}(S) \geq \|\omega\|_S \geq \|\sigma_M^* \omega\|_{\Delta_F}.$$

Como  $\Delta$  es  $\bar{q}$ -admissible, tenemos que

$$\sigma^{-1}(S) = \Delta_F \subseteq (\dim(\Delta) - \bar{p}(S) - 2)\text{-esqueleto de } \Delta,$$

de donde se sigue

$$\dim(\Delta_i) \geq \bar{p}(S) + 1,$$

y por lo tanto, el grado vertical de  $\tilde{\sigma}_M^*(\tilde{\omega})$  en  $\Delta_F \times \Delta_i$  ha de ser estrictamente menor que  $\dim \Delta_i$ . Esto imposibilita que  $\tilde{\sigma}_M^*(\tilde{\omega})$  sea una forma de volumen de  $\Delta_F \times \Delta_i$ , de donde se sigue (A.10) y por lo tanto, la proposición. ♣

Llegamos al teorema final de este apéndice:

**Teorema A.18.** *Sea  $\mathcal{F}$  el f.R.S. dado por una acción  $\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$ , sea  $\bar{0} \leq \bar{p} \leq \bar{t} + \bar{1}$  y sea  $\bar{q}$  su perversidad dual. Entonces, tenemos el siguiente diagrama de cuasiisomorfismos:*

$$\begin{array}{ccc} (\Omega_{\bar{p}}^*(M/\mathcal{F}), d) & \xrightarrow{\Psi} & (\text{Hom}(SC_*^{\bar{q}, M}(M/\mathbb{S}^1), \mathbb{R}), \delta) \\ & & \uparrow \iota^* \\ & & (\text{Hom}(SC_*^{\bar{q}}(M/\mathbb{S}^1), \mathbb{R}), \delta), \end{array}$$

donde  $\iota^*$  está inducida por la inclusión natural y  $\Psi$  es la aplicación de de Rham perversa.

*Esquema de la demostración.* La cohomología básica de intersección satisface la propiedad de Mayer-Vietoris (lema 3.15). Las otras dos cohomologías también la satisfacen, aplicando subdivisión baricéntrica (ver [7]). Usando el truco de Bredon podemos reducirnos a probar el enunciado sobre dos tipos de abiertos:

1. Por un lado, tenemos entornos conjugados a  $U \times C\mathbb{S}^{2k+1}$ , siendo  $U$  contráctil; los cuasiisomorfismos en este caso se reducen a  $C\mathbb{S}^{2k+1}$ , y se siguen de los cálculos locales (lema 3.12 y proposición A.13, válido para las dos homologías de intersección).
2. Por otro lado, tenemos entornos tubulares  $E$  de estratos excepcionales  $S$  donde  $\mathbb{S}^1$  actúa de forma casi-libre. En este caso, como  $E$  se retrae de forma diferenciable y foliada sobre  $S$  nos restringimos a probar el cuasiisomorfismo sobre  $S$ . La cohomología básica de intersección es la de  $\Omega^*(S/\mathbb{S}^1)$ . Las otras dos cohomologías también son isomorfas a  $\Omega^*(S/\mathbb{S}^1)$ , debido a que la perversidad que hemos tomado en esos estratos es  $\bar{0}$ , y podemos aplicar la proposición A.14.



# Bibliografía

- [1] J.A. Álvarez, *Duality in the spectral sequence of Riemannian foliations*, Amer. J. Math. **111** (1989), 905–925.
- [2] J.A. Álvarez, *The basic component of the mean curvature form for a riemannian foliation*, Ann. Global Anal. and Geom. **10** (1992), 179–194.
- [3] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, 1978.
- [4] J. Bolton, *Transnormal systems*, Quart. Jour. Math. Oxford 2, **24** (1973), 385–395.
- [5] R. Bott, L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1982.
- [6] H. Boualem, P. Molino, *Modèles locaux saturés de feuilletages riemanniens singuliers*, C. R. Acad. Sci. Paris **316**, Série I (1993), 913–916.
- [7] J. P. Brasselet, G. Hector, M. Saralegi, *Théorème de de Rham pour les Variétés Stratifiées*, Ann. Global Anal. Geom. Vol.9, **3** (1991), 211–243.
- [8] F. Brickell, R.S. Clark, *Differentiable Manifolds: an introduction*, Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
- [9] G.E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, 1972.
- [10] G.E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer Verlag, 1993.
- [11] J.L. Brylinsky, *Equivariant intersection cohomology*, Contemporary Math. **139** (1992), 5–32.
- [12] G. Cairns, R. Escobales, *Further geometry of the mean curvature one-form and the normal plane field one-form on a foliated Riemannian manifold*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **62** (1997), 46–63.

- [13] A. Candel, L. Conlon, *Foliations I*, Graduate Studies in Mathematics 23, AMS, 2000.
- [14] A. Camacho, B. Neto, *Geometric Theory of Foliations*, Birkhäuser, 1985.
- [15] Y. Carrière, *Flots Riemanniens*, Astérisque **116** (1984), 31–52.
- [16] M. Davis, *Smooth  $G$ -Manifolds as Collections of Fiber Bundles*, Pacific Journal of Math. **77** (1978), 315–363.
- [17] D. Domínguez, *Finiteness and tensesness theorems for Riemannian foliations*, Amer. J. Math. **120** (1998) 1237–1276.
- [18] A. El Kacimi, M. Nicolau, *On the topological invariance of the basic cohomology*, Math. Ann. **293** (1993), 627–634.
- [19] A. El Kacimi, G. Hector, *Decomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien*, Ann. Inst. Fourier **36** (1986), 207–227.
- [20] A. El Kacimi, G. Hector, V. Sergiescu, *La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie*, Math. Z. **188** (1985), 593–599.
- [21] M. Fernández, M. de León, M. Saralegi, *A six dimensional compact symplectic solvmanifold without Kähler structures*, Osaka J. Math. **33** (1996), 19–35.
- [22] P.M.D. Furness, E. Fédida, *Transversally affine foliations*, Glasgow Math. J. **17** (1976), 106–111.
- [23] E. Ghys, *Un feuilletage analytique dont la cohomologie basique est de dimension infinie*, Publ. IRMA- Lille VII,1 (1985).
- [24] E. Ghys, *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **34** (1984), 203–223.
- [25] M. Goresky, R. MacPherson, *Intersection homology theory*, Topology **19** (1980), 135–162.
- [26] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology*, Academic Press, 1972.
- [27] V. W. Guillemin, S. Sternberg, *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory*, Springer 1999.

- [28] G. Hector, M. Saralegi, *Intersection cohomology of  $\mathbb{S}^1$ -actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 263–288.
- [29] G. Hector, U. Hirsch, *Geometry of Foliations*, Fiedr. Vieweg & Son, 1981.
- [30] M. Hirsch, *Differential Topology*, Springer Verlag, 1976.
- [31] K. Jänich, *On the Classification of  $O(n)$ -Manifolds*, Math. Annalen **176** (1968), 56–76 .
- [32] F. Kamber, Ph. Tondeur, *Foliations and metrics*, Proc. of a Year in Differential Geometry, University of Maryland, Birkhäuser Progr. Math. **32** (1983), 103–152.
- [33] F. Kamber, Ph. Tondeur, *Duality theorems for foliations*, Astérisque **16** (1984), 458–471.
- [34] F. Kamber, Ph. Tondeur, *de Rham-Hodge theory for riemannian foliations*, Math. Ann. **277** (1987), 415–431.
- [35] H. King, *Topology invariance of intersection homology without sheaves*, Topology Appl. **20** (1985), 149–160.
- [36] X. Masa, *Duality and minimality in riemannian foliations*, Comm. Math. Helv. **67** (1992), 17–27.
- [37] M. Masuda, *Cohomology of  $\mathbb{S}^1$ -orbit spaces of cohomology spheres and cohomology complex projective spaces*, Math. Z. **176** (1981) 405–427.
- [38] P. Molino, *Riemannian foliations*, Birkhäuser, 1982.
- [39] P. Molino, *Désingularisation des feuilletages riemanniens*, Amer. Jour. of Math. (1984), 1091–1106.
- [40] P. Molino, V. Sergiescu, *Deux Remarques sur les flots riemanniens*, Manuscripta Math. **51** (1985), 145–161.
- [41] J.R. Munkres, *Elementary differential topology*, Princeton University Press, 1966.
- [42] M. Nicolau, A. Reventós, *On some geometrical properties of Seifert Bundles*, Israel J. of Math. **32** (1983), 323–334.
- [43] B. Reinhart, *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. of Math. **69** (1959) 119–132.

- [44] A. Roig, M. Saralegi, *Minimal models for non-free circle actions*, Illinois J. Math. **44** (2001), 784–820.
- [45] H. Rummeler, *Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts*, Comm. Math. Helv. **54** (1979), 224–239.
- [46] J.J. Rotman, *An introduction to Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1988.
- [47] J.I. Royo Prieto, *La sucesión de Gysin*, tesina de licenciatura, UPV/EHU, 1999.
- [48] J.I. Royo Prieto, *The Euler class for riemannian flows*, C. R. Acad. Sci. Paris, **332**, Série I (2001), 45–50.
- [49] M. Saralegi, *The Euler class for isometric flows*, Pitman Research Notes in Mathematics **131** (1985), 220–227.
- [50] M. Saralegi, *Homological properties of stratified spaces*, Illinois Jour. of Math. **38** (1994), 47–70.
- [51] P. Stefan, *Accessible sets, orbits and foliations with singularities*, Proc. London Math. Soc. **29** (1974), 699–713.
- [52] H. J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. A.M.S. **180** (1973), 171–188.
- [53] D. Tischler, *On fibering certain foliated manifolds over  $S^1$* , Topology **9** (1970), 153–154.
- [54] Ph. Tondeur, *Geometry of Foliations*, Birkhäuser, 1997.
- [55] A. Verona, *Le théorème de deRham pour les préstratifications abstraites*, C. R. Acad. Sci. Paris **273** (1980), 886–889.
- [56] A. W. Wadsley, *Geodesic foliations by circles*, J. Differ. Geom. **10** (1975), 541–549.
- [57] E. Witten, *Supersymmetry and Morse Theory*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 661–692.
- [58] R.A. Wolak, *Basic cohomology for singular riemannian foliations*, Mh. Math. **128** (1999), 159–163.