eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Índices Locales de Matrices Racionales y Sistemas

Agurtzane Amparan Larrabaster

Bilbao, 2009

Memoria realizada por Dña. Agurtzane Amparan Larrabaster bajo la dirección del catedrático de Matemática Aplicada Dr. D. Ion Zaballa Tejada, para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas.

Bilbao, 2009

A Joseba y a Iker

A Nerea

Índice

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar al Profesor Ion Zaballa, director de esta tesis, porque ha sabido transmitirme parte de su profundo conocimiento sobre las Matemáticas. Su constancia e interés por las Matemáticas y las cosas bien hechas han dado lugar a la realización de esta tesis que sin su ayuda no hubiera sido posible.

Agradezco también a todos los que durante estos últimos años han formado parte del Grupo de Álgebra Lineal de la Universidad del País Vasco. Sus aportaciones y consejos en los seminarios han sido, sin duda, muy importantes. Su amistad y apoyo constante me han servido para seguir adelante.

Quiero agradecer a todos mis compañeros de la Sección de Matemáticas de la Universidad del País Vasco que en algún momento han mostrado su interés por mí y por este trabajo. En especial a mis dos compañeras de Departamento Ana María Valle y Silvia Marcaida. A Ana porque gracias a ella empecé a trabajar por primera vez en esta Universidad y a Silvia por los momentos buenos, y a veces no tan buenos, que hemos compartido.

No puedo dejar sin mencionar a mi familia que me ha animado mucho y que sé que me perdonará por algunos momentos que he estado ausente bien física o mentalmente.

Gracias a todos. Gracias, Ion.

Introducción

Este trabajo se comenzó con el objetivo general de profundizar en el conocimiento del Teorema de estructura de Rosenbrock y sus diversas interpretaciones. Una lista no exhaustiva de éstas puede verse en [36]. A pesar de que los primeros resultados que se obtuvieron nos llevaron por derroteros que, a priori, no habíamos sospechado, el contenido de esta memoria no puede desligarse de la motivación original.

El Teorema de estructura de Rosenbrock, también conocido, por razones que se expondrán más adelante en esta memoria, como Teorema de Asignación de Polos y que de ahora en adelante llamaremos simplemente Teorema de Rosenbrock ([50]), caracteriza los posibles invariantes de semejanza (factores invariantes o divisores elementales) que pueden asignarse a la matriz de estados de un sistema controlable mediante un feedback de estados. Concretamente, dado un sistema lineal de control invariante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

el problema consiste en caracterizar los posibles factores invariantes (o, si se quiere, las posibles formas de Jordan) del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Bv(t) \tag{2}$$

que se obtiene al realizar sobre el sistema original una realimentación (o *feedback*) del siguiente tipo:

$$u(t) = Fx(t) + v(t). \tag{3}$$

Para sistemas discretos (i.e., en diferencias) se puede formular un problema similar. En este caso las matrices del sistema pueden estar definidas en un cuerpo arbitrario y es preferible omitir cualquier referencia a formas de Jordan y hablar de los factores invariantes o divisores elementales como sistemas completos de invariantes.

Rosenbrock demostró su teorema de estructura para sistemas controlables definidos en $\mathbb{R}$, pero su demostración tiene validez para matrices sobre cualquier cuerpo. De hecho, de su demostración se deduce que el problema de asignación de invariantes por realimentación de estados es equivalente al problema de la existencia de una matriz polinomial no singular que sea propia por columnas con los grados de éstas y los factores invariantes prescritos. Los factores invariantes forman un sistema completo de invariantes para la equivalencia de matrices polinomiales: Dos matrices polinomiales $P_1(s)$ y $P_2(s)$ son equivalentes si existen matrices invertibles en el anillo de las matrices polinomiales cuadradas del tamaño apropiado, $U(s)$ y $V(s)$, tales que

$$P_2(s) = V(s)P_1(s)U(s).$$

A las matrices polinomiales invertibles se les llama *matrices unimodulares* (ver Capítulo 1).

La equivalencia de estos dos problemas no es mera coincidencia. En el fondo se encuentra el hecho de que a todo sistema controlable como (1) se le puede asociar una matriz polinomial de la siguiente forma. Si

$$G(s) = (sI - A)^{-1}B$$

es la matriz de transferencia del sistema (1), ésta es una matriz de funciones racionales, y toda matriz racional se puede escribir como una fracción irreducible por la derecha de matrices:

$$G(s) = N(s)P(s)^{-1}.$$

Que esta fracción de matrices sea irreducible significa que sus únicos factores comunes por la derecha son unidades (en el anillo de las matrices polinomiales cuadradas correspondiente). La matriz polinomial que se le asocia al sistema (1) es la matriz $P(s)$ y en [58] a estas matrices se les dio el nombre de *representaciones polinomiales matriciales* de (1).

La representación de $G(s)$ como fracción irreducible por la derecha de matrices no es única, puede haber muchas representaciones polinomiales matriciales del mismo sistema. Sin embargo, se demostró en [58] que todas ellas son equivalentes por la derecha. Esto significa que si $P_1(s)$ y $P_2(s)$ son representaciones polinomiales matriciales del mismo sistema entonces

$$P_2(s) = P_1(s)U(s)$$

para alguna matriz unimodular $U(s)$.

Así pues, todas las representaciones polinomiales matriciales de un sistema tienen los mismos factores invariantes; y éstos son los de $sI - A$ salvo el número de factores invariantes iguales a 1 (véase [58]).

Por otra parte, de acuerdo con un resultado de [56], toda matriz polinomial no singular es equivalente por la derecha a una que es propia por columnas. Es decir, siempre existe una representación polinomial matricial de (1) con la siguiente forma:

$$P(s) = P_c \operatorname{Diag}(s^{k_1}, \dots, s^{k_m}) + L(s), \tag{4}$$

donde $k_1, \dots, , k_m$ son los grados de sus columnas, $\det P_c \neq 0$ y $L(s)$ es una matriz polinomial cuya i-ésima columna tiene grado menor que k_i. A los pares $(N(s), P(s))$ tales que $P(s)$ es propia por columnas y $N(s)P(s)^{-1}$ es una fracción irreducible de matrices de la matriz de transferencia de (1) se les llama *descripciones normales externas* del sistema (ver [36] y sus referencias). Un mismo sistema controlable puede admitir más de una descripción normal externa, pero el hecho de que todos sus denominadores sean representaciones polinomiales del mismo sistema implica que éstos son todos equivalentes por la derecha. Ahora bien, la acción del grupo de matrices polinomiales invertibles por la derecha no cambia los grados de las columnas ([56]). En consecuencia, todas las descripciones normales externas de un sistema tienen los mismos factores invariantes y los mismos grados de columnas.

Finalmente, se prueba en [31, sec. 7.2] que la realización de un feedback de estados sobre el sistema (1) tiene la siguiente repercusión sobre cualquier descripción normal externa:

- No altera el numerador.
- No altera la matriz P_c de los coeficientes de mayor grado en cada columna.
- No cambia los grados de las columnas.
- Puede alterar completamente la matriz polinomial $L(s)$.

Y recíprocamente, toda modificación de $L(s)$ produce una matriz propia por columnas que es representación polinomial matricial de un sistema que se obtiene de (1) mediante un feedback de estados. Así pues, dado el sistema (1) y dada una representación polinomial matricial propia por columnas, $P(s)$, del mismo, encontrar un feedback de estados (3) para que la matriz de estados, $A+BF$, de (2) tenga unos factores invariantes prescritos equivale a encontrar una matriz polinomial no singular propia por columnas $P_F(s)$; es decir, una representación polinomial matricial del sistema (2) con dichos factores invariantes prescritos y con los mismos grados de columnas que $P(s)$.

Que los grados de las columnas de los denominadores en todas las descripciones normales externas sean los mismos hace pensar en dos cosas: debe haber alguna propiedad estructural de las matrices polinomiales que la explique y dicha invariancia debe reflejarse de alguna manera en alguna propiedad de los sistemas. Y éste es, en efecto, el caso. En primer lugar, si $P(s)$ es propia por columnas entonces la podemos escribir como en (4), y también

$$P(s) = (P_c + L(s)\,\mathrm{Diag}(s^{k_1}, \ldots, s^{k_m})^{-1})\,\mathrm{Diag}(s^{k_1}, \ldots, s^{k_m}).$$

Si escribimos

$$B(s) = P_c + L(s)\,\mathrm{Diag}(s^{k_1}, \ldots, s^{k_m})^{-1}$$

y recordamos que el grado de la i-ésima columna de $L(s)$ es menor que k_i tenemos que los elementos de $B(s)$ son fracciones racionales en las que los numeradores tienen grado menor o igual que los denominadores. Tales fracciones racionales se llaman *propias*. El conjunto de las fracciones racionales propias con coeficientes en cualquier cuerpo es un anillo con la suma y el producto habituales. Las unidades son las fracciones racionales cuyos numeradores y denominadores tienen el mismo grado. Así pues, $B(s)$ es una matriz con elementos en el anillo de funciones racionales propias. Un simple cálculo nos permite ver, además, que $\det B(s)$ es una unidad en este anillo. En otras palabras, $B(s)$ es invertible en el anillo de la matrices de funciones racionales propias. A las matrices invertibles en este anillo se les llama *matrices bipropias* por ser "propias" con inversa "propia". Finalmente, es fácil ver que la relación entre dos matrices polinomiales no singulares $P_1(s)$ y $P_2(s)$ dada por

$$P_2(s) = B(s)P_1(s)U(s)$$

con $B(s)$ bipropia y $U(s)$ unimodular es una relación de equivalencia que, siguiendo [17], llamaremos *equivalencia Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda* y que se justificará y generalizará más adelante y se estudiará con detalle en el Capítulo 3 de esta memoria.

En conclusión, toda matriz polinomial no singular $P(s)$ es equivalente por la derecha a una matriz polinomial propia por columnas. Esta matriz puede no ser única pero cualesquiera dos matrices propias por columnas que sean equivalentes por la derecha tienen los mismos grados de columnas. Si k_1,..., k_m son dichos grados, entonces $P(s)$ es equivalente Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda a la matriz diagonal $\mathrm{Diag}(s^{k_1}, \dots, s^{k_m})$. Es decir, existen matrices $B(s)$, bipropia, y $U(s)$, unimodular, tales que

$$P(s) = B(s)\,\mathrm{Diag}(s^{k_1}, \dots, s^{k_m})U(s).$$

Los grados de las columnas $k_1, \dots, k_m$ (los cuales podemos suponer que están ordenados en orden no creciente) forman un sistema completo de invariantes para la equivalencia Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de matrices polinomiales no singulares. Se les llama *índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda*.

Todos estos conceptos se pueden extender a matrices rectangulares de una manera bastante directa (ver [41]), pero éstas no están directamente relacionadas con sistemas como (1) y los detalles a los que hay que prestar atención como el rango, número de filas y/o columnas cero, etc. desvían más que centran la atención en los conceptos fundamentales que se quieren investigar. Por ello, nuestro contexto será (salvo que se exprese explícitamente) el de matrices polinomiales y/o racionales cuadradas y no singulares.

En cuanto a la relación que existe entre los grados de los denominadores de las descripciones normales externas y los sistemas que representan, ésta se desprende de algunos resultados que están en [17] y [22]. Concretamente, dichos grados son los índices de controlabilidad del sistema (ver Capítulo 1); y éstos, por la teoría de Kronecker-Brunovsky ([10, 50]), forman un sistema completo de invariantes para la *equivalencia por feedback* (ver Capítulo 1). En definitiva, dos sistemas son equivalentes por feedback si y sólo si sus representaciones polinomiales matriciales son equivalentes Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda (ver [58]).

Con esta perspectiva global en mente, el Teorema de Rosenbrock admite una interpretación más estructural. En efecto, ya sabemos que éste da una condición necesaria y suficiente para la existencia de una matriz polinomial propia por columnas con los grados de éstas y los factores invariantes prescritos. Sabemos también que los factores invariantes forman un sistema completo de invariantes para la equivalencia de matrices polinomiales y que los grados de las columnas de las matrices propias por columnas son sus índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda, que forman un sistema completo de invariantes para la equivalencia Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda. Por lo tanto, el Teorema de Rosenbrock proporciona una condición necesaria y suficiente para que exista una matriz polinomial no singular con factores invariantes e índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda prescritos. De hecho, esta relación es terriblemente simple: Si $k_1 \geq \cdots \geq k_m \geq 0$ son enteros no negativos y $\gamma_1(s)|\cdots|\gamma_m(s)$ son polinomios mónicos ("|" significa "divide a") entonces existe una matriz polinomial no singular con $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y $\gamma_1(s), \ldots, \gamma_m(s)$ como factores invariante si y sólo si

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (d(\gamma_m(s)), \ldots, d(\gamma_1(s))) \tag{5}$$

donde $d(\cdot)$ significa "grado de" y $\prec$ es el símbolo de mayorización de particiones en el sentido de Hardy, Littlewood y Pólya, [25], (ver Capítulo 1).

La relación (5) también es una condición que deben cumplir los representantes de las correspondientes órbitas para que éstas tengan intersección no vacía. Más aún, para una matriz polinomial $P(s)$, (5) caracteriza los posibles factores invariantes de todas la matrices en el conjunto

$$\{B(s)P(s)|B(s) \text{ bipropia y } B(s)P(s) \text{ polinomial}\}. \tag{6}$$

En el Capítulo 2 se extenderá este resultado a matrices de funciones racionales.

Gohberg, Kaashoeck y van Schagen en [20] plantean y resuelven parcialmente un problema similar pero considerando la estructura en el infinito.

Los polos y ceros en el infinito de un sistema están relacionados con el número de diferenciaciones e integraciones, respectivamente, entre la entrada y la salida del sistema (ver [31, 9]). Las matrices unimodulares pueden tener polos y ceros en el infinito de modo que al multiplicar una matriz, polinomial o racional, por una matriz unimodular la estructura en el infinito de aquélla puede cambiar. Las matrices que no tienen ni polos ni ceros en el infinito son las matrices bipropias que se pueden usar para definir una relación de equivalencia que clasifica las matrices racionales en clases con la misma estructura en el infinito: Dos matrices racionales $G_1(s)$ y $G_2(s)$ son equivalentes en el infinito si existen matrices bipropias $B_1(s)$ y $B_2(s)$ tales que

$$G_2(s) = B_1(s)G_1(s)B_2(s).$$

Todas la matrices en el conjunto de (6) tienen la misma estructura en el infinito. El problema que plantean Gohberg, Kaashoeck y van Schagen en [20] es, en cierta forma, simétrico al de (6). Dado que la multiplicación por matrices unimodulares puede cambiar la estructura en el infinito de una matriz polinomial o racional dada $G(s)$, ¿cuáles son los posibles polos y ceros en el infinito de las matrices en el conjunto

$$\{G(s)U(s)|U(s) \text{ unimodular}\}?$$

Éste fue el punto de partida de la investigación que condujo a los resultados expuestos en esta memoria. El Capítulo 2 se dedica a la solución completa de este problema. Dado que para cada $U(s)$, las matrices $G(s)U(s)$ y $B(s)G(s)U(s)$ tienen la misma estructura en el infinito, el problema es equivalente a caracterizar las órbitas de la equivalencia en el infinito que tienen intersección no vacía con la órbita de la equivalencia Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de $G(s)$.

La técnica para tratar con el punto del infinito es la estándar: Si $G(s)$ es una matriz de funciones racionales, los polos y ceros de $G(s)$ en el infinito son los polos y ceros de $G(1/s)$ en cero. Esto permite trasladar el estudio de la estructura en el infinito al estudio de la estructura finita pero **localmente**. La estructura finita local de una matriz polinomial viene dada por los divisores elementales, pero necesitamos un concepto similar para los índices de Wiener–Hopf. Estos índices, tal y como están definidos en, por ejemplo, [13, 20], tienen una cierta “naturaleza local” al estar definidos respecto a un contorno cerrado γ del plano complejo. Ahora bien, nuestra pretensión es alcanzar la máxima generalidad posible e incluir sistemas y matrices que estén definidos en cualquier cuerpo arbitrario. Por lo tanto, necesitamos extender la definición de índices de Wiener–Hopf locales a cuerpos arbitrarios. La idea es muy sencilla; consiste en factorizar la matriz polinomial como producto de matrices cuyos determinantes sean relativamente primos y tal que en el factor de la izquierda esté la información local (divisores elementales) respecto a algún polinomio mónico irreducible. Hay muchas formas diferentes de conseguir tal factorización. El descubrimiento fue que en todas ellas los factores de la izquierda son equivalentes por la derecha y tienen, consecuentemente, los mismos índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda. Se puede, de esta forma, asignar de forma única a cada matriz polinomial y a cada polinomio irreducible unos índices de Wiener–Hopf, que llamamos *índices de Wiener-Hopf locales por la izquierda* respecto a dicho polinomio irreducible. El estudio de este nuevo concepto local, algunas de sus implicaciones, su relación con los índices clásicos de Wiener–Hopf definidos en el plano complejo y su extensión a sistemas controlables es el objeto de la investigación cuyos resultados recoge esta memoria.

Para completar este objetivo, al igual que necesitamos extender la definición de índices de Wiener–Hopf locales a cuerpos arbitrarios, necesitamos extender la relación de equivalencia Wiener–Hopf, conocida en $\mathbb{C}$, a cuerpos arbitrarios. En el Capítulo 3 definimos esta nueva relación de equivalencia entre matrices racionales definidas sobre un cuerpo arbitrario que será una generalización de la equivalencia Wiener–Hopf por la izquierda definida en $\mathbb{C}$ respecto a un contorno cerrado γ. La idea básica para la generalización es la siguiente: Cuando el cuerpo es el de los complejos a cada punto del plano complejo z_0 le podemos asociar el polinomio irreducible $s - z_0$, o el ideal generado por dicho polinomio irreducible. Por lo tanto, es claro que existe una biyección según la cual a cualquier subconjunto Ω no vacío del plano complejo le podemos asociar un subconjunto M de ideales generados por polinomios irreducibles asociados a cada uno de los puntos de Ω, donde el ideal cero, que es primo pero no maximal, no pertenece a M (pues el ideal cero no se corresponde con ningún punto del plano complejo). Este es el motivo por el cual nosotros trabajaremos con el conjunto de ideales maximales del anillo de polinomios y no con el conjunto de ideales primos. Toda curva cerrada γ en $\mathbb{C}$ divide el plano complejo en dos regiones: el interior junto con la curva y el exterior junto con la curva. Identificaremos ambas regiones con dos subconjuntos del conjunto de ideales maximales.

Teniendo esto en cuenta nuestra relación de equivalencia Wiener–Hopf por la izquierda entre matrices racionales sobre cualquier cuerpo estará definida respecto a cualesquiera dos subconjuntos M y M' de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ tales que $M \cup M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$, siendo $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ el conjunto de todos los ideales maximales del anillo de polinomios con coeficientes en el cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$. A dicha relación de equivalencia le llamamos *equivalencia Wiener–Hopf respecto a* (M, M') *por la izquierda*.

Los índices de Wiener–Hopf locales que introducimos en el Capítulo 2 se definen respecto a un polinomio irreducible. En realidad, a cada polinomio irreducible, $\pi(s)$, se le puede asociar el ideal maximal generado por dicho polinomio irreducible, $(\pi(s))$. Por tanto, generalizaremos aún más y definiremos, utilizando las mismas técnicas, los índices de Wiener–Hopf por la izquierda respecto a un subconjunto cualquiera M de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$.

Cuando M se reduzca a un único ideal generado por un polinomio mónico irreducible, $M = (\pi(s))$, los índices de Wiener–Hopf respecto a $M = (\pi(s))$ serán los definidos en el Capítulo 2, es decir, los índices de Wiener–Hopf locales respecto a $\pi(s)$. Definidos la equivalencia y los índices de Wiener–Hopf en este contexto más general y para cuerpos arbitrarios probaremos que estos últimos constituyen un sistema completo de invariantes y estudiaremos la existencia o no de una forma canónica para dicha relación de equivalencia. En cierta forma, en este capítulo se pone de manifiesto un principio general: la teoría de factorización de matrices de funciones racionales respecto de la equivalencia Wiener–Hopf desarrollada hasta ahora sobre el plano complejo mediante técnicas esencialmente analíticas, tiene una base algebraica en la que los anillos locales de polinomios juegan un papel fundamental. Este mismo principio se manifiesta en capítulos posteriores y ponerlo de manifiesto se ha convertido, a la larga, en un objetivo de este trabajo de investigación.

Para finalizar el Capítulo 3, veremos que podemos dar un mayor aprovechamiento a las técnicas que utilizamos para definir los índices de Wiener–Hopf locales, en el sentido de que nos servirán para obtener los índices de Hermite locales (forma de Hermite local), introducidos en el Capitulo 1, en el caso de matrices polinomiales.

Volviendo a los sistemas, que es nuestro punto de partida, tenemos que cuando M sea el conjunto de todos los ideales maximales, $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$, los índices de Wiener–Hopf respecto a $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ por la izquierda son los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda. En el caso de matrices polinomiales sabemos que son los índices de controlabilidad de todo sistema definido por una ecuación tipo (1) para el cual dicha matriz polinomial sea una representación polinomial matricial (ver, también [22]). En general, definido el concepto de índices de Wiener–Hopf de una matriz polinomial respecto a un subconjunto cualquiera M tratamos de dar una interpretación a control de este concepto en los sistemas representados por dicha matriz polinomial. Este es el primero de los objetivos del Capítulo 4: Definir los índices locales de sistemas y estudiar la relación de éstos con los índices locales de sus representaciones polinomiales matriciales.

Recordamos que en el caso polinomial la información local respecto a M se obtiene de una parte de la matriz polinomial cuya estructura finita está relacionada con el subconjunto M. En el caso de sistemas representados por un par de matrices (A, B), la información local respecto a M se obtendrá igualmente de un subpar, realmente de la restricción del par a un subespacio invariante. Formalizaremos la idea basándonos en dos hechos conocidos. Por una parte, el conocimiento local (global) de la estructura finita de una matriz polinomial supone el conocimiento local (global) de la estructura finita de la matriz de estados A, es decir de la matriz $sI - A$, de cualquier par representado por dicha matriz polinomial. Por otra parte, como la semejanza de pares implica la semejanza de las correspondientes matrices de estado, los factores invariantes de la matriz de estados son invariantes para la semejanza. Más concretamente, mediante transformaciones de semejanza llevaremos el par (A, B) a un par de la forma $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$ donde A_1 y A_2 tengan espectros disjuntos. El hecho de que A_1 y A_2 tengan espectros disjuntos es muy importante.

Definimos en este sentido los *índices de controlabilidad locales* y los *índices de Hermite locales* respecto a cualquier subconjunto no vacío de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ como los índices de controlabilidad y los índices de Hermite, respectivamente, del par (A_i, B_i) que contiene la información local (estructura finita local, índices de controlabilidad locales) respecto al subconjunto que hayamos fijado. Estudiamos la relación entre los índices de Wiener–Hopf locales (índices de Hermite locales) asociados a matrices polinomiales definidos en el Capítulo 3 y los índices de controlabilidad locales (índices de Hermite locales) asociados a los sistemas representados por dichas matrices polinomiales.

Es bien conocido, en el caso de matrices polinomiales no singulares, que la estructura finita local, es decir los factores invariantes locales pueden ser obtenidos de su estructura finita global y viceversa. En realidad, los factores invariantes locales respecto a un polinomio mónico irreducible $\pi(s)$, o bien los divisores elementales potencias de $\pi(s)$, de una matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ con elementos en un cuerpo arbitrario, se pueden obtener de los factores invariantes globales y viceversa. En efecto, si $\pi(s)$ es un polinomio mónico factor de $\det(sI_n - A)$ y $\alpha_1(s) \mid \cdots \mid \alpha_n(s)$ son los factores invariantes globales de A entonces

$$\alpha_i(s) = \pi(s)^{d_i}\beta_i(s),$$

con m.c.d.$(\pi(s), \beta_i(s)) = 1$, $1 \leq i \leq n$. Los polinomios $\pi(s)^{d_i}$, con $d_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, son los divisores elementales de A respecto a $\pi(s)$ cuando $d_i \neq 0$ o bien los factores invariantes locales no triviales respecto a $\pi(s)$ de A. Y recíprocamente, si $\pi_j(s)^{d_{s_j j}}, \ldots, \pi_j(s)^{d_{nj}}$, con $0 < d_{s_j j} \leq \cdots \leq d_{nj}$, $j = 1, \ldots, t$, son los divisores elementales de A o los factores invariantes no triviales de A respecto a $\pi_j(s)$ y suponemos que $d_{ij} = 0$ para $i = 1, \ldots, s_j - 1$, entonces

$$\alpha_i(s) = \pi_1(s)^{d_{i1}} \cdot \ldots \cdot \pi_t(s)^{d_{it}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

son los factores invariantes globales de A. En otras palabras, el conocimiento de la estructura finita local nos permite obtener la estructura finita global y viceversa. Además, A es semejante a una matriz diagonal en forma canónica $\mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_t)$ donde los factores invariantes de A_j son $\pi_j(s)^{d_{s_j j}}, \ldots, \pi_j(s)^{d_{nj}}$, $j = 1, \ldots, t$.

Esta misma cuestión, en relación a la forma de Hermite y a la estructura Wiener–Hopf por la izquierda, es la que nos planteamos como segundo objetivo en el Capítulo 4 de esta memoria. Estudiamos la relación entre los índices globales y locales tanto para matrices polinomiales como para sistemas. En el caso de los índices de Hermite la relación es clara. Para sistemas como (1), dado un par controlable (A, B) semejante a

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_t \end{bmatrix} \right) \text{con } \det(sI_{n_i} - A_i) = \pi_i(s)^{d_i},\ i = 1, \dots, t,$$

se tiene que si $h_{i1} \geq \cdots \geq h_{im}$ son los índices de Hermite locales respecto a $\pi_i(s)$, entonces $h_j = h_{1j} + \cdots + h_{tj}$ son los índices de Hermite globales de (A, B). En el caso de los índices de controlabilidad esta relación de suma no se verifica en general. En este sentido lo que hemos obtenido es una forma reducida (la matriz de estados es una matriz diagonal por bloques donde los bloques diagonales A_i son matrices compañeras y en B_i una de sus columnas es un vector unitario y el resto de columnas son cero) de un par controlable bajo la equivalencia por feedback en el cual los índices de controlabilidad, invariantes por feedback, se pueden obtener como suma de los índices de controlabilidad locales de su forma reducida.

En la literatura hay muchos ejemplos en los que se estudian las propiedades de los sistemas a través del denominador de una representación en fracción de matrices coprimas de la matriz de transferencia (véase [56, 11, 31, 32, 54, 58],...) Por otra parte, también se pueden estudiar propiedades de las matrices polinomiales a partir de los sistemas que representan. Concretamente, en [20] se asocia a cada matriz polinomial no singular un par al cual llaman par nulo. Este concepto es en cierta forma, de "naturaleza local" al estar definido respecto a un contorno cerrado γ del plano complejo. De hecho hablan de *par nulo por la izquierda respecto a* Ω, siendo Ω el dominio interior de la curva γ. Se dice simplemente *par nulo por la izquierda* de la matriz polinomial cuando se trata de un par nulo por la izquierda respecto a todo el plano complejo.

Recientemente en [40, Capítulo 2] y para cuerpos arbitrarios se ha demostrado que un par controlable (A, B) es un par nulo por la izquierda (respecto a $\mathbb{C}$) de una matriz polinomial $P(s)$ si y sólo si $P(s)$ es una representación polinomial del par (A, B).

En [58] a un par para el cual una matriz polinomial es una representación polinomial matricial se le llamó *realización* de dicha matriz polinomial. Por tanto, el concepto de par nulo por la izquierda y realización coinciden. Nuestra pretensión en el Capítulo 5 es extender el concepto de par nulo por la izquierda respecto a Ω, definido en $\mathbb{C}$, a cuerpos arbitrarios. Seguiremos utilizando la misma técnica y por tanto a una realización del factor de la izquierda de la matriz polinomial donde está la información local respecto a M le llamaremos *realización respecto a* M. Obtendremos diferentes caracterizaciones de este concepto, similares a las del caso global (véase [40]). Sin embargo, a diferencia del caso global, tendremos una nueva caracterización basada en uno de los resultados principales del Capítulo 4.

Aunque hay una dualidad entre los conceptos (globales) de realización y representación polinomial matricial (si un par controlable es una realización de una matriz polinomial, dicha matriz polinomial es un representación polinomial matricial de dicho par), en el caso local, aunque relacionados, dichos conceptos deben ser estudiados separadamente. Así, la última parte del Capítulo 5 está dedicada a definir el concepto de *representación polinomial matricial respecto a* M.

A lo largo de esta memoria citamos los siguientes tipos de invariantes globales y locales para la semejanza de sistemas controlables: índices de controlabilidad, índices de Hermite, factores invariantes de la matriz de estados. Y, sus correspondientes invariantes globales y locales para la equivalencia por la derecha de las matrices polinomiales que representan dichos sistemas: índices de Wiener–Hopf por la izquierda, índices de Hermite y factores invariantes.

En el Capítulo 6 nos plantemos un problema inverso: se suponen fijados algunos invariantes y se trata de determinar bajo qué condiciones existe un sistema lineal con dichos invariantes prescritos.

Teniendo en cuenta que dado un par controlable existe una matriz polinomial no singular que es una representación polinomial matricial del mismo y que los invariantes de sistemas con los que nosotros vamos a trabajar están definidos también para matrices polinomiales no singulares, estos problemas se pueden plantear en el contexto de matrices polinomiales y también de sistemas. De hecho, primero los resolvemos para matrices polinomiales no singulares y después como consecuencia obtenemos los resultados para sistemas. Algunos problemas de este tipo ya han sido estudiados en el caso global. Esto nos va a permitir obtener como consecuencia algunos resultados locales en relación a este tipo de problemas. Por ejemplo, si prescribimos los índices de controlabilidad locales y los factores invariantes locales de la matriz de estados del sistema la solución al problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un par controlable con índices de controlabilidad locales y factores invariantes locales prescritos se deduce del Teorema de Rosenbrock. Si prescribimos los índices de controlabilidad locales, los índices de Hermite locales y los factores invariantes locales la solución se deduce de este mismo resultado global estudiado en [7]. Si sólo prescribimos los índices de controlabilidad locales e índices de Hermite locales el resultado se sigue del trabajo de [58].

Los problemas inversos que nos plantemos en el Capítulo 6 son los dos siguientes: Por un lado caracterizar los sistemas controlables con índices de controlabilidad globales y locales prescritos, además de la estructura finita de la matriz de estados, y por otro, el mismo problema cuando prescribimos los índices de Hermite globales y locales.

A fin de hacer esta memoria lo más autocontenida posible, en el Capítulo 1 introducimos las nociones básicas y notaciones que usaremos en el resto de ella.

Por lo que sabemos los resultados de esta memoria son originales excepto aquéllos en los que se cita expresamente a los autores.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sistemas Dinámicos

La referencia básica para el contenido de esta sección es el libro de Rosenbrock [50]. Puede consultarse también el libro de Kailath [31]. Un *sistema dinámico* es un sistema físico al que cuando se le aplica una entrada, u, responde produciendo una salida, y. La forma en que el sistema produce las salidas a partir de las entradas puede ser, en general, muy complicado. Vamos a considerar sistemas gobernados por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Los sistemas con los que vamos a tratar son sistemas invariantes en el tiempo en los que f y g son funciones lineales de $x(t)$ y $u(t)$. Nuestro sistema lineal invariante en el tiempo obedece a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{F}^{p\times n}$ y $D \in \mathbb{F}^{p\times m}$ son matrices constantes con elementos en un cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$. Las ecuaciones del sistema (1.2) se dice que están en *forma de espacio-estado*. Bajo la condición inicial $x(0) = 0$

y tras realizar las transformada de Laplace dicho sistema tiene la siguiente forma

$$(sI_n - A)\bar{x}(s) = B\bar{u}(s)$$
$$\bar{y}(s) = C\bar{x}(s) + D\bar{u}(s)$$

donde $\bar{x}(s), \bar{u}(s)$ e $\bar{y}(s)$ son las transformadas de Laplace del *vector de estados* $x(t)$, *vector de entradas* $u(t)$ y *vector de salidas* $y(t)$, respectivamente.

En general las ecuaciones lineales que definen el sistema pueden no ser de la forma (1.2). Por ejemplo, pueden ser de la forma $E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ con E singular, o el orden de alguna de las ecuaciones puede ser mayor que 1. Por tanto, necesitamos tener una descripción más general de los sistemas.

Con $\mathbb{F}[s]$ denotaremos el anillo de polinomios en la indeterminada s con coeficientes en $\mathbb{F}$ y con $\mathbb{F}(s)$ el cuerpo de las funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{F}$. Pensemos en sistemas lineales invariantes en el tiempo que bajo ciertas condiciones iniciales y tras realizar la transformada de Laplace son de la forma

$$T(s)\bar{x}(s) = U(s)\bar{u}(s) \tag{1.3}$$
$$\bar{y}(s) = V(s)\bar{x}(s) + W(s)\bar{u}(s), \tag{1.4}$$

donde $T(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$ es no singular, $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times m}$, $V(s) \in \mathbb{F}[s]^{p\times n}$, $W(s) \in \mathbb{F}[s]^{p\times m}$, $\bar{x}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times 1}$, $\bar{y}(s) \in \mathbb{F}[s]^{p\times 1}$ y $\bar{u}(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times 1}$.

Se llama *orden del sistema* al grado de $\det T(s)$. De las ecuaciones (1.3) y (1.4)

$$\bar{x}(s) = T(s)^{-1}U(s)\bar{u}(s)$$
$$\bar{y}(s) = (V(s)T(s)^{-1}U(s) + W(s))\bar{u}(s).$$

La matriz $G(s) = V(s)T(s)^{-1}U(s) + W(s)$ es la *matriz de transferencia del sistema* y en ella queda resumida toda la información entrada-salida del sistema al poner en relación directa la entradas, $\bar{u}(s)$, con las salidas, $\bar{y}(s)$, mediante

$$\bar{y}(s) = G(s)\bar{u}(s).$$

Muchos sistemas diferentes pueden dar lugar a la misma matriz de transferencia. Sería interesante poder clasificarlos de acuerdo con esta propiedad. Para ello se forma la *matriz polinomial de sistema* $P(s) = \begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ -V(s) & W(s) \end{bmatrix}$ y se supone que $n \geq d(\det T(s))$, donde $d(\cdot)$ representa el grado del polinomio $\det T(s)$. Si éste no fuera el caso ampliaríamos el sistema $\widetilde{P}(s) = \begin{bmatrix} I_{d-n} & 0 & 0 \\ 0 & T(s) & U(s) \\ 0 & -V(s) & W(s) \end{bmatrix}$ de forma que $d \geq d(\det T(s))$. Debe observarse que las matrices de transferencia asociadas a $P(s)$ y $\widetilde{P}(s)$ coinciden.

Dadas dos matrices polinomiales de sistemas $P_1(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) & U_1(s) \\ -V_1(s) & W_1(s) \end{bmatrix}$, $P_2(s) = \begin{bmatrix} T_2(s) & U_2(s) \\ -V_2(s) & W_2(s) \end{bmatrix}$, se dice que los sistemas $P_1(s), P_2(s)$ son *equivalentes estrictamente* o *equivalentes según Rosenbrock* si existen matrices unimodulares $M(s), N(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$ y matrices $X(s) \in \mathbb{F}[s]^{p\times n}$, $Y(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times m}$ tales que

$$\begin{bmatrix} T_2(s) & U_2(s) \\ -V_2(s) & W_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(s) & U_1(s) \\ -V_1(s) & W_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que si dos sistemas son estrictamente equivalentes entonces tienen la misma matriz de transferencia. El recíproco, en general, no es cierto. Lo es cuando los sistemas tienen orden mínimo. Un sistema con matriz de transferencia $G(s)$ tiene *orden mínimo* si no hay ningún sistema de menor orden con $G(s)$ como matriz de transferencia. La condición de orden mínimo está muy relacionada con la existencia de factores invariantes no triviales. Introducimos a continuación este concepto en un contexto más general.

Las matrices de transferencia de nuestros sistemas son matrices de funciones racionales que para un estudio algebraico podemos suponer que tienen los coeficientes en un cuerpo arbitrario, $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{p\times m}$. Recordamos rápidamente la forma de Smith–McMillan de una matriz racional [50, 54], aunque este concepto será introducido con más detalle y generalidad en la Sección 1.2.7. Dos matrices racionales $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times n}$ diremos que son *equivalentes* si existen matrices unimodulares $U_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$, $U_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$ tales que

$$G_2(s) = U_1(s)G_1(s)U_2(s).$$

Escribiremos $G_1(s)\overset{eq}{\sim}G_2(s)$. Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times n}$ con $\operatorname{rang} G(s) = r$, $r \leq \min\{m, n\}$. $G(s)$ es equivalente a una matriz de la forma

$$S(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{Diag}\left(\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\epsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_r(s)}{\psi_r(s)}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\epsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{F}[s]$ son polinomios mónicos y coprimos tales que $\epsilon_1(s) \mid \epsilon_2(s) \mid \cdots \mid \epsilon_r(s)$ mientras que $\psi_r(s) \mid \psi_{r-1}(s) \mid \cdots \mid \psi_1(s)$. $S(s)$ es una forma canónica para la equivalencia de matrices en $\mathbb{F}(s)^{m\times n}$ y se llama *forma de Smith–McMillan (finita) de $G(s)$* (véase también [50], [54, p. 9]). Las funciones racionales $\frac{\epsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$ se llaman *funciones racionales invariantes finitas de $G(s)$* o simplemente *funciones racionales invariantes de $G(s)$*. Se dice que forman la *estructura finita de $G(s)$*.

Sea $p(s) \in \mathbb{F}[s]$. Sea $\mathbb{F}$ un subcuerpo de $\mathbb{L}$. Un elemento $l \in \mathbb{L}$ es una *raiz* de $p(s)$ en $\mathbb{L}$ si $p(l) = 0$. Sea $\mathbb{L}$ la clausura algebraica del cuerpo $\mathbb{F}$. Se llaman *ceros finitos de $G(s)$* a las raíces de $\epsilon_r(s)$ en $\mathbb{L}$ y se llaman *polos finitos de $G(s)$* a las raíces de $\psi_1(s)$ en $\mathbb{L}$. Las matrices unimodulares (i.e., invertibles en $\mathbb{F}[s]^{m\times m}$) se caracterizan por el hecho de que no tienen ceros ni polos finitos.

Los *ceros finitos* de una función racional $\frac{p(s)}{q(s)}$ son las raíces (en $\mathbb{L}$) de su numerador $p(s)$ y sus *polos finitos* son las raíces (en $\mathbb{L}$) de su denominador $q(s)$.

Observación 1.1.1 $\psi_1(s)$ es el polinomio mónico mínimo común múltiplo de los denominadores de los elementos de la matriz (ver Sección1.2.7). Por tanto, si $G(s)$ no tiene a z_0 como polo entonces $\psi_1(s)$ no tiene a z_0 como cero en $\mathbb{L}$. En consecuencia, los elementos de la matriz son tales que no tienen a z_0 como polo.

Si $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$ es polinomial entonces $\psi_i(s) = 1$, para $i = 1, \ldots, r$; esto es, $P(s)$ no tiene polos y $S(s)$ es polinomial. A $S(s)$ se llama la *forma de Smith (finita) de* $P(s)$ ([18, p. 133]). Las funciones racionales invariantes finitas se llaman *factores invariantes finitos de* $P(s)$ o simplemente *factores invariantes de* $P(s)$.

Sean $N(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times p}$ y $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times q}$ dos matrices polinomiales con el mismo número de filas. Se dice que $R(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$ es un *divisor común por la izquierda de* $N(s)$ *y* $P(s)$ si existen $\overline{N}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times p}$ y $\overline{P}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times q}$ tales que

$$N(s) = R(s)\overline{N}(s),$$
$$P(s) = R(s)\overline{P}(s).$$

Sean $N(s) \in \mathbb{F}[s]^{q\times m}$ y $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{p\times m}$ dos matrices polinomiales con el mismo número de columnas. Se dice que $R(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ es un *divisor común por la derecha de* $N(s)$ *y* $P(s)$ si existen $\overline{N}(s) \in \mathbb{F}[s]^{q\times m}$ y $\overline{P}(s) \in \mathbb{F}[s]^{p\times m}$ tales que

$$N(s) = \overline{N}(s)R(s),$$
$$P(s) = \overline{P}(s)R(s).$$

Se dice que $N(s)$ y $P(s)$ son *coprimas por la izquierda (derecha)* si sus únicos divisores comunes por la izquierda (derecha) son matrices unimodulares.

El siguiente lema se encuentra en [50, pp. 71–76] y [54, pp. 18–19]:

Lema 1.1.2 *Sean* $N(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times p}$ *y* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times q}$, $(q + p \geq n)$. *Son equivalentes:*

(i) $N(s)$ *y* $P(s)$ *son coprimas por la izquierda,*

(ii) *La forma de Smith de la matriz* $\begin{bmatrix} N(s) & P(s) \end{bmatrix}$ *es* $\begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix}$,

(iii) *Existen matrices polinomiales* $X(s) \in \mathbb{F}[s]^{(p+q-n)\times p}$, $Y(s) \in \mathbb{F}[s]^{(p+q-n)\times q}$, *tales que*

$$\begin{bmatrix} N(s) & P(s) \\ X(s) & Y(s) \end{bmatrix} \text{ es unimodular,}$$

(iv) *Existen matrices polinomiales* $\overline{X}(s) \in \mathbb{F}[s]^{p\times n}$, $\overline{Y}(s) \in \mathbb{F}[s]^{q\times n}$ *tales que*

$$N(s)\overline{X}(s) + P(s)\overline{Y}(s) = I_n.$$

Se puede enunciar un lema análogo para las matrices coprimas por la derecha.

Volviendo a los sistemas, una caracterización de que el sistema $P(s) = \begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ -V(s) & W(s) \end{bmatrix}$ tiene *orden mínimo* es que $[T(s)\ U(s)]$ tenga forma de Smith $[I_n\ 0]$ (i.e., $T(s)$ y $U(s)$ coprimas por la izquierda) y $\begin{bmatrix} T(s) \\ V(s) \end{bmatrix}$ tenga forma de Smith $\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ (i.e., $T(s)$ y $V(s)$ coprimas por la derecha).

El siguiente es un resultado fundamental ([50], [54, p. 83]).

Teorema 1.1.3 *Dos matrices de sistema* $P_1(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) & U_1(s) \\ -V_1(s) & W_1(s) \end{bmatrix}$, $P_2(s) = \begin{bmatrix} T_2(s) & U_2(s) \\ -V_2(s) & W_2(s) \end{bmatrix}$ *de orden mínimo tienen la misma matriz de transferencia si y sólo si son estrictamente equivalentes.*

El siguiente lema relaciona la forma de Smith–McMillan de la matriz de transferencia de un sistema minimal con las formas de Smith de la matriz polinomial de sistema y de la matriz $T(s)$ ([50, p. 111]). De hecho, nos dice que los numeradores de las funciones racionales invariantes de la matriz de transferencia de un sistema, cuando es minimal, son los factores invariantes no triviales de su matriz polinomial y los denominadores son los factores invariantes no triviales de $T(s)$.

Lema 1.1.4 *Sea*

$$P(s) = \begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ -V(s) & W(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[s]^{(n+p)\times(n+m)}$$

una matriz polinomial de sistema minimal cuya matriz de transferencia es $G(s)$*. Sean* $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\epsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_r(s)}{\psi_r(s)}$ *las funciones racionales invariantes de* $G(s)$*. Entonces, aparte de los factores invariantes triviales (i.e., factores invariantes iguales a 1),* $\psi_r(s) \mid \psi_{r-1}(s) \mid \cdots \mid \psi_1(s)$ *son los factores invariantes de* $T(s)$ *y* $\epsilon_1(s) \mid \epsilon_2(s) \mid \cdots \mid \epsilon_r(s)$ *son los factores invariantes de* $P(s)$*.*

Se deduce, por tanto, que los ceros de la matriz de transferencia del sistema $G(s)$ son los ceros de la matriz polinomial de sistema $P(s)$ y los polos de $G(s)$ son los ceros de la matriz $T(s)$ asociada a los estados del sistema.

Cuando el sistema esté representado por ecuaciones en forma espacio-estado (1.2) tenemos que $T(s) = sI_n - A$, $U(s) = B$, $V(s) = C$ y $W(s) = D$. Por tanto el orden del sistema, n, será el orden de A. La matriz de transferencia del sistema tiene la forma $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$. Se trata de una matriz con elementos en el anillo de las funciones racionales propias $\mathbb{F}_{pr}(s)$, es decir, una matriz cuyos elementos son funciones racionales tales que el grado del denominador es mayor o igual al grado del numerador (Sección 1.2.5).

En consecuencia, el estudio de un sistema a partir de la matriz de transferencia consiste en el estudio de la estructura y propiedades de este tipo de matrices.

La matriz polinomial de un sistema en forma espacio-estado es $P(s) = \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}$. En este caso el sistema será minimal si $[sI_n - A \ B]$ tiene forma de Smith $[I_n \ 0]$ y $\begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix}$ tiene forma de Smith $\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$. Para este tipo de sistemas, estas condiciones pueden ser expresadas en términos de rangos de las llamadas matriz de controlabilidad del par (A, B) y matriz de observabilidad del par (A, C). Recordamos a continuación algunos de estos resultados relacionados con pares de matrices que serán utilizados en esta memoria.

Se llama *matriz de controlabilidad del par* (A, B) a la matriz

$$\mathcal{C}(A, B) := [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] \in \mathbb{F}^{n\times nm}.$$

Un sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.5}$$

representado por el par de matrices (A, B) se dice *(completamente) controlable* si $\operatorname{rang}\mathcal{C}(A, B) = n$. Las matrices A y B reciben el nombre de *matriz de estados* y *matriz de controles*. Denotamos por $b_1, \dots, b_m$ las columnas de la matriz B. Si $\operatorname{rang}\mathcal{C}(A, B) = r$, podemos seleccionar r columnas linealmente independientes de la matriz de controlabilidad. Ahora bien dicha selección se puede hacer de diferentes formas. Si seleccionamos de izquierda a derecha las r primeras columnas linealmente independientes de la matriz de controlabilidad y las reordenamos de la siguiente manera:

$$\{b_1, Ab_1, \dots, A^{r_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{r_2-1}b_2, \dots, b_m, Ab_m, \dots, A^{r_m-1}b_m\},$$

con la condición de que $r_i = 0$ si b_i no ha sido seleccionada, obtenemos una colección de enteros no negativos $r_1, r_2, \dots, r_m$ no necesariamente ordenados. Si $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m \geq 0$ es una reordenación en sentido no creciente de $r_1, r_2, \dots, r_m$ entonces $k_1, k_2, \dots, k_m$ son los *índices de controlabilidad del par* (A, B) ([47]).

Llamaremos *matriz de Hermite del par* (A, B) a la matriz obtenida de la matriz de controlabilidad después de hacer una reordenación de sus columnas como sigue:

$$H(A, B) := [b_1 \ Ab_1 \ \cdots \ A^{n-1}b_1 \ \cdots \ b_m \ Ab_m \ \cdots \ A^{n-1}b_m].$$

Como $\operatorname{rang} H(A,B) = \operatorname{rang} \mathcal{C}(A,B) = r$, si seleccionamos de izquierda a derecha las r primeras columnas linealmente independientes de la matriz de Hermite $H(A,B)$ y las escribimos

$$\{b_1, Ab_1, \ldots, A^{h_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \ldots, A^{h_2-1}b_2, \ldots, b_m, Ab_m, \ldots, A^{h_m-1}b_m\},$$

con la condición de que $h_i = 0$ si b_i no ha sido seleccionada, obtenemos otra colección de enteros no negativos (no necesariamente ordenados), $h_1, \ldots, h_m$ llamados *índices de Hermite del par* (A,B) ([29], [30] y [58]).

El par de matrices $(A,C) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{p\times n}$ se dice que es *(completamente) observable* si el par transpuesto $(A^T, C^T) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times p}$ es (completamente) controlable. Los índices de controlabilidad de (A^T, C^T) se llaman *índices de observabilidad del par* (A,C).

En [50, Teorema 6.2, p. 72] se prueba que las matrices polinomiales $sI_n - A$, B son coprimas por la izquierda si y sólo si el par (A,B) es controlable. Igualmente tenemos el resultado análogo que dice que $sI_n - A$, C son coprimas por la derecha si y sólo si el par (A,C) es observable. Por tanto, un sistema en forma espacio-estado (1.2) es minimal si y sólo si (A,B) es controlable y (A,C) es observable.

Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1.6}$$

representado por la terna (A,B,C). Definimos la siguiente transformación:

(t_1) Cambio en el vector de estados de tipo $z(t) = Px(t)$ con $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ invertible. El nuevo sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= PAP^{-1}z(t) + PBu(t) \\ y(t) &= CP^{-1}z(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

está representado por la terna (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}).

En ambos sistemas la matriz de transferencia es

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B. \tag{1.8}$$

$G(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{p\times m}$ es una matriz estrictamente propia, es decir, sus elementos son funciones racionales propias tales que el grado del denominador es estrictamente mayor que el grado del numerador. Una terna de matrices $(A, B, C) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m} \times \mathbb{F}^{p\times n}$ que satisfaga (1.8) se dice que es una *realización de $G(s)$ o del sistema*.

La relación obtenida entre las matrices polinomiales de los sistemas se conoce como semejanza de sistemas ([50, p. 56])

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI_n - PAP^{-1} & PB \\ -CP^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Dicha relación induce la siguiente relación de equivalencia: Dos realizaciones $(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m} \times \mathbb{F}^{p\times n}$ son *semejantes* si existe una matriz no singular $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que

$$A_2 = PA_1P^{-1}, \quad B_2 = PB_1, \quad C_2 = C_1P^{-1}.$$

La equivalencia estricta de sistemas incluye la semejanza de sistemas como un caso particular. En este caso es claro que ambos, el orden del sistema y la matriz de trasferencia, son invariantes para la semejanza de sistemas.

Se dice que la realización es *minimal* cuando el sistema es minimal, es decir cuando la matriz polinomial del sistema $P(s) = \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$ tiene orden mínimo, i.e., n es el orden mínimo del sistema.

El siguiente resultado está, por ejemplo, en [31, Teorema 6.2-4, p. 364]:

Lema 1.1.5 *Dos realizaciones minimales de la misma matriz racional estrictamente propia son semejantes.*

Si en (1.9) nos quedamos con la parte que actúa sobre el par (A, B) tenemos

$$P \begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI_n - PAP^{-1} & PB \end{bmatrix}.$$

Así, dados dos sistemas de tipo (1.5) representados por los pares de matrices $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$, diremos que son *semejantes* si existe una matriz invertible $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que

$$A_2 = PA_1P^{-1}, \quad B_2 = PB_1.$$

Si dos pares $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ son semejantes, sus matrices de controlabilidad cumplen $\mathcal{C}(A_2, B_2) = \mathcal{C}(PA_1P^{-1}, PB_1) = P\mathcal{C}(A_1, B_1)$ y $H(A_2, B_2) = PH(A_1, B_1)$. En consecuencia, tanto los índices de Hermite como los índices de controlabilidad son invariantes bajo la acción del grupo de semejanza, pero ni unos ni otros constituyen un sistema completo de invariantes. Es decir, si dos pares son semejantes tienen los mismos índices de Hermite y también los mismos índices de controlabilidad, pero el recíproco no es cierto en general. Ahora bien, son conocidos diferentes sistemas completos de invariantes para la relación de equivalencia definida por la acción del grupo de semejanza. Estos sistemas completos de invariantes están formados por dos tipos de invariantes: los índices de Hermite y un conjunto de invariantes numéricos que son elementos del cuerpo $\mathbb{F}$ o bien los índices de controlabilidad junto con otro conjunto de invariantes numéricos ([31], [47], [58]). Por otro lado, es conocida una relación de equivalencia ([10]) para la cual los índices de controlabilidad constituyen un sistema completo de invariantes y recientemente también se ha demostrado en [6] que los índices de Hermite son un sistema completo de invariantes para una cierta relación de equivalencia.

Dado un par de matrices $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ representando a un sistema de tipo (1.5), además de la trasformación (t_1), podemos definir las dos siguientes transformaciones:

(t_2) Cambio en el vector de entradas de tipo $v(t) = Q^{-1}u(t)$ con $Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$ invertible. El nuevo sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BQv(t) \tag{1.10}$$

está representado por el par de matrices (A, BQ).

(t_3) Sustituimos el vector de entradas por otro dependiente del vector de estados $v(t) = u(t) - Fx(t)$ con $F \in \mathbb{F}^{m\times n}$. El nuevo sistema

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Bv(t) \tag{1.11}$$

está representado por el par de matrices $(A + BF, B)$. Esta transformación es conocida como feedback de estados.

El conjunto de transformaciones $(t_1), (t_2)$ y (t_3) nos define la siguiente relación de equivalencia. Dados dos sistemas representados por los pares de matrices $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$, diremos que son *equivalentes por feedback* si existen matrices invertibles $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$ y otra matriz $F \in \mathbb{F}^{m\times n}$ tales que

$$A_2 = PA_1P^{-1} + PB_1F, \quad B_2 = PB_1Q.$$

Es conocido que para pares controlables los índices de controlabilidad forman un sistema completo de invariantes para la acción del grupo feedback ([10]), es decir, dos pares controlables son equivalentes por feedback si y sólo si tienen los mismos índices de controlabilidad.

Una forma canónica asociada a esta relación de equivalencia es la *forma canónica de Brunovsky* para pares controlables ([10], [24], [57]):

Lema 1.1.6 *Sea* $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *un par controlable con* $\operatorname{rang} B = r$. *Sean* $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_r > k_{r+1} = k_{r+2} = \cdots = k_m = 0$ *sus índices de controlabilidad. Entonces* (A, B) *es equivalente por feedback a un par* (A_c, B_c) *de la siguiente forma:*

$$(A_c, B_c) = \left(\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{rr} & 0 \end{bmatrix} \right),$$

donde

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & I_{k_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{k_i \times k_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

$$B_{ii} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{F}^{k_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

1.2. Localización

En esta sección recordamos resultados sobre Teoría de Localización que, como hemos dicho en la introducción de esta memoria, nos surgieron por primera vez y de manera natural ante la necesidad de definir los índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda de matrices polinomiales sobre un cuerpo arbitrario. Dicho concepto será definido en general para matrices racionales no singulares en el Capítulo 3. El conocimiento y estudio de los índices de Wiener–Hopf definidos en el plano complejo y parte de la teoría en torno a este concepto que aparece, por ejemplo, en [13, 20] nos ha llevado a obtener algunos de los resultados que presentamos en esta memoria para cuyo desarrollo necesitamos la información que mostramos en esta sección. Algunas de las referencias básicas para el contenido de esta sección son, por ejemplo, [5, 46].

1.2.1. Ideales

Sea $\mathcal{A}$ un anillo conmutativo con elemento identidad.

Un *ideal* I de un anillo $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$ que es un subgrupo aditivo y tal que para todo $a \in \mathcal{A}$ y para todo $y \in I$ se tiene $ay \in I$.

Un *divisor de cero* en $\mathcal{A}$ es un elemento a para el cual existe un $b \neq 0$ en $\mathcal{A}$ tal que el producto $ab = 0$. Un anillo distinto de $\{0\}$ se dice que es un *dominio de integridad* si no tienen divisores de cero.

Una *unidad* en $\mathcal{A}$ es un elemento a tal que $ab = 1$ para algún $b \in \mathcal{A}$.

Los elementos de la forma ab, múltiplos de $a \in \mathcal{A}$, forman un ideal llamado *ideal principal*, que se denota por (a).

Un ideal I en $\mathcal{A}$ es *primo* si $I \neq \mathcal{A}$ y si para todo $ab \in I$ se tiene que $a \in I$ o $b \in I$. Esto es equivalente a decir que el anillo cociente $\dfrac{\mathcal{A}}{I}$ es un dominio de integridad. El ideal cero es primo si y sólo si $\mathcal{A}$ es un dominio de integridad. Denotamos por $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ el conjunto de ideales primos de $\mathcal{A}$.

Un *cuerpo* es un anillo en el que todo elemento no nulo es unidad. Todo cuerpo es un dominio de integridad.

Un ideal I en $\mathcal{A}$ es *maximal* si $I \neq \mathcal{A}$ y no existe ningún ideal J tal que $I \subsetneqq J \subsetneqq \mathcal{A}$. Esto es equivalente a decir que el anillo cociente $\dfrac{\mathcal{A}}{I}$ es un cuerpo. Por tanto, todo ideal maximal es primo. El recíproco no es cierto en general, pero lo es en los *dominios de ideales principales*; i.e. dominios de integridad en los que todos los ideales son principales. Denotamos por $\mathrm{Specm}(\mathcal{A})$ el conjunto de ideales maximales de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ es un dominio de ideales principales, un elemento de $a \in \mathcal{A}$ se dice que es *irreducible* si a no es unidad y satisface la condición: si $a = bc$ entonces b es unidad o c es unidad.

Se dice que un elemento a *divide* a otro elemento b, se denota $a \mid b$, si existe un elemento c tal que $b = ac$. En este caso también se dice que *a es un factor de b*. Sean a, b dos elementos de $\mathcal{A}$ los cuales no son ambos 0. Un *máximo común divisor de a y b* es un elemento d de $\mathcal{A}$ tal que d divide a a, d divide a b y si c es un elemento de $\mathcal{A}$ el cual divide a a y b, entonces c divide a d. Un *mínimo común múltiplo de a y b* es un elemento m de $\mathcal{A}$ tal que a divide a m, b divide a m y si c es un elemento de $\mathcal{A}$ al cual le dividen a a y b, entonces m divide a c. Dos elementos a, b de $\mathcal{A}$ se dice que son *relativamente primos* si no tienen factores comunes salvo unidades, es decir, si los máximos comunes divisores de a y b son unidades en $\mathcal{A}$. Elementos relativamente primos son también llamados *elementos coprimos*. Los máximos comunes divisores y los mínimos comunes múltiplos están determinados de forma única salvo unidades.

1.2.2. Anillos de fracciones

Sea $\mathcal{A}$ un anillo conmutativo con elemento identidad. Un *subconjunto multiplicativamente cerrado* de $\mathcal{A}$ es un subconjunto S de $\mathcal{A}$ tal que $1 \in S$ y S es cerrado respecto de la multiplicación: Si $s_1, s_2 \in S$ entonces el producto $s_1 s_2 \in S$. Por ejemplo, es fácil demostrar que I es un ideal primo de $\mathcal{A}$ si y sólo si $\mathcal{A} \setminus I = \{a \in \mathcal{A} : a \notin I\}$ es multiplicativamente cerrado.

En $\mathcal{A} \times S$ se define la siguiente relación de equivalencia:

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \text{ si y sólo si } (a_1 s_2 - s_1 a_2)h = 0 \text{ para algún } h \in S.$$

Y se denota por $\dfrac{a}{s}$ la clase de equivalencia de (a, s) y por $S^{-1}\mathcal{A}$ el conjunto $\dfrac{\mathcal{A} \times S}{\sim}$ de las clases de equivalencia. Definiendo la adición y multiplicación en $S^{-1}\mathcal{A}$ como en álgebra elemental:

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} := \frac{a_1 s_2 + s_1 a_2}{s_1 s_2},$$

$$\frac{a_1}{s_1}\frac{a_2}{s_2} := \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2},$$

$S^{-1}\mathcal{A}$ tiene estructura de anillo conmutativo con elemento identidad (la clase del elemento $(1,1)$, $\dfrac{1}{1} = \{(s,s) : s \in S\}$). A dicho anillo se denomina el *anillo de fracciones de $\mathcal{A}$ respecto a S*.

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo arbitrario y $\mathbb{L}$ su clausura algebraica. Recordemos que $\mathbb{F}[s]$ denota el anillo de polinomios en la indeterminada s con coeficientes en $\mathbb{F}$. Las unidades en $\mathbb{F}[s]$ son los polinomios constantes distintos de cero.

Por ejemplo si tomamos como conjunto multiplicativamente cerrado el conjunto de todos los polinomios no nulos, $S = \mathbb{F}[s] \setminus \{0\}$, entonces $S^{-1}\mathbb{F}[s]$ es el cuerpo de fracciones de $\mathbb{F}[s]$, esto es, el cuerpo de las funciones racionales

$$\mathbb{F}(s) = \left\{ \frac{p(s)}{q(s)} : p(s), q(s) \in \mathbb{F}[s], q(s) \not\equiv 0 \right\}.$$

1.2.3. Anillos locales

Un anillo que tiene exactamente un ideal maximal se denomina *anillo local*. Recordamos el siguiente resultado ([5, Proposición 1.6, p. 5]).

Proposición 1.2.1 *Sea $\mathcal{A}$ un anillo e $I \neq (1)$ un ideal de $\mathcal{A}$ tal que cada $a \in \mathcal{A} \setminus I$ es una unidad en $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}$ es un anillo local e I su ideal maximal.*

Un polinomio en $\mathbb{F}[s]$ se dice *mónico* cuando el coeficiente del término de mayor grado es 1. En lo sucesivo, dados dos polinomios cualesquiera $n(s)$, $d(s) \in \mathbb{F}[s]$, denotaremos por m.c.d.$(n(s), d(s))$ al polinomio mónico máximo común divisor de $n(s)$ y $d(s)$. Y, por m.c.m.$(n(s), d(s))$ al polinomio mónico mínimo común múltiplo de $n(s)$ y $d(s)$.

A continuación vamos a mostrar ejemplos de anillos locales (ver [5, p. 43], [38, p. 256]). Algunos de estos anillos tienen mucho interés para el desarrollo de esta memoria.

(1) Sea $\pi(s)$ un polinomio mónico irreducible en $\mathbb{F}[s]$ distinto del polinomio nulo. Para cada ideal primo $(\pi(s))$ de $\mathbb{F}[s]$, podemos considerar el conjunto multiplicativamente cerrado $S = \mathbb{F}[s] \setminus (\pi(s))$ y construir el anillo de fracciones de $\mathbb{F}[s]$ respecto a S. En este caso, denotaremos $\mathbb{F}_\pi(s)$ en vez de $S^{-1}\mathbb{F}[s]$ al anillo de fracciones de $\mathbb{F}[s]$ respecto a $\mathbb{F}[s] \setminus (\pi(s))$. Entonces $\mathbb{F}_\pi(s)$ es el anillo de todas las funciones racionales $\dfrac{p(s)}{q(s)}$, donde $q(s) \notin (\pi(s))$,

$$\mathbb{F}_\pi(s) = \left\{ \frac{p(s)}{q(s)} : p(s), q(s) \in \mathbb{F}[s] \text{ y } \text{m.c.d.}(q(s), \pi(s)) = 1 \right\}.$$

Las unidades en este anillo son los cocientes de elementos de S, esto es, las funciones racionales cuyo numerador y denominador son primos con el polinomio $\pi(s)$. Veamos que $\mathbb{F}_\pi(s)$ es un anillo local. Los elementos $\dfrac{p(s)}{q(s)} \in \mathbb{F}_\pi(s)$ con $p(s) \in (\pi(s))$ forman un ideal,

$$I_\pi = \left\{ \frac{p(s)}{q(s)} \in \mathbb{F}_\pi(s) : p(s) \in (\pi(s)) \right\}.$$

Sea $\dfrac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{F}_\pi(s) \setminus I_\pi$. Entonces $n(s) \notin (\pi(s))$, o bien $n(s) \in \mathbb{F}[s] \setminus (\pi(s)) = S$. Por consiguiente la fracción $\dfrac{n(s)}{d(s)}$ es cociente de elementos de S, por tanto es una unidad en $\mathbb{F}_\pi(s)$. Se sigue que si $J_\pi \neq \mathbb{F}_\pi(s)$ es un ideal de $\mathbb{F}_\pi(s)$, necesariamente $J_\pi \subseteq I_\pi$. Si por el contrario suponemos que $J_\pi \nsubseteq I_\pi$ entonces J_π contiene una unidad y por lo tanto es todo el anillo, llegando así a una contradicción. Por tanto I_π es el único ideal maximal de $\mathbb{F}_\pi(s)$; en otras palabras $\mathbb{F}_\pi(s)$ es un anillo local llamado *el anillo local de* $\mathbb{F}[s]$ *en* $(\pi(s))$ (ver también [35]).

El proceso de pasar de $\mathbb{F}[s]$ a $\mathbb{F}_\pi(s)$ se llama *localización* en $(\pi(s))$, [5, p. 43].

(2) Para cada elemento $\pi(s) \in \mathbb{F}[s]$ distinto del polinomio nulo (no necesariamente un polinomio mónico irreducible), consideramos el conjunto multiplicativamente cerrado $S = \{\pi(s)^n : n \text{ entero no negativo}\}$. En este caso el anillo de fracciones de $\mathbb{F}[s]$ respecto a S, el cual denotaremos por $\mathbb{F}_{\pi^-}(s)$, es el anillo de todas las funciones racionales cuyo denominador es una potencia del polinomio $\pi(s)$,

$$\mathbb{F}_{\pi^-}(s) = \left\{ \frac{p(s)}{\pi(s)^n} : p(s) \in \mathbb{F}[s], n \geq 0 \right\}.$$

Las unidades son las potencias positivas o negativas de $\pi(s)$; en otras palabras $u(s)$ es unidad si y sólo si $u(s) = \pi(s)^d$, con $d \in \mathbb{Z}$. En este caso tomamos el ideal I_{π^-} formado por los elementos del anillo $\mathbb{F}_{\pi^-}(s)$ tal que el polinomio del numerador no está en S,

$$I_{\pi^-} = \left\{ \frac{p(s)}{\pi(s)^n} \in \mathbb{F}_{\pi^-}(s) : p(s) \in \mathbb{F}[s] \setminus S \right\}.$$

Veamos que cada elemento de $\mathbb{F}_{\pi^-}(s) \setminus I_{\pi^-}$ es una unidad y de este modo tendremos que $\mathbb{F}_{\pi^-}(s)$ es un anillo local con ideal maximal I_{π^-}. En efecto, si tomamos un elemento $\dfrac{p(s)}{\pi(s)^n} \in \mathbb{F}_{\pi^-}(s) \setminus I_{\pi^-}$, entonces $\dfrac{p(s)}{\pi(s)^n} \notin I_{\pi^-}$, o bien $p(s) \in S$. Por consiguiente la fracción $\dfrac{p(s)}{\pi(s)^n}$ es un potencia de $\pi(s)$ y por lo tanto es una unidad.

En este caso, al proceso de pasar de $\mathbb{F}[s]$ a $\mathbb{F}_{\pi^-}(s)$ se llama *localización* en $\pi(s)$, [38, p. 259].

(3) Sea M un subconjunto no vacío de $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sea el anillo

$$\mathbb{F}_M(s) = \bigcap_{(\pi(s)) \in M} \mathbb{F}_\pi(s),$$

o bien

$$\mathbb{F}_M(s) = \left\{ \frac{p(s)}{q(s)} : p(s), q(s) \in \mathbb{F}[s] \text{ y } \text{m.c.d.}(q(s), \pi(s)) = 1 \ \forall \ (\pi(s)) \in M \right\}.$$

Las unidades en este anillo son las funciones racionales $u(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$ tales que $\text{m.c.d.}(p(s), \pi(s)) = 1$ y $\text{m.c.d.}(q(s), \pi(s)) = 1$ para todo ideal $(\pi(s)) \in M$. Veamos que $\mathbb{F}_M(s)$ es un anillo local cuando $M \neq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Los elementos de este anillo cuyo numerador pertenece a algún ideal que está en M forman un ideal,

$$I_M = \left\{ \frac{p(s)}{q(s)} \in \mathbb{F}_M(s) : p(s) \in \bigcup_{(\pi(s)) \in M} (\pi(s)) \right\}.$$

Además, $I_M \neq \mathbb{F}_M(s)$. En efecto, como $M \neq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ existe un ideal maximal $(\pi_1(s))$ tal que $(\pi_1(s)) \notin M$. Sea $q(s)$ un polinomio tal que $\text{m.c.d.}(q(s), \pi(s)) = 1$ para todo ideal $(\pi(s)) \in M$. Entonces $\dfrac{\pi_1(s)}{q(s)} \in \mathbb{F}_M(s)$ y $\dfrac{\pi_1(s)}{q(s)} \notin I_M(s)$. Veamos que todo elemento de

$\mathbb{F}_M(s) \setminus I_M$ es una unidad en $\mathbb{F}_M(s)$. Sea $\dfrac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{F}_M(s) \setminus I_M$. Entonces $n(s) \notin \bigcup_{(\pi(s))\in M}(\pi(s))$. Por tanto m.c.d.$(n(s), \pi(s)) = 1$ para todo ideal $(\pi(s)) \in M$ y $\dfrac{n(s)}{d(s)}$ es una unidad de $\mathbb{F}_M(s)$. En definitiva, $\mathbb{F}_M(s)$ es un anillo local.

1.2.4. Anillos euclídeos

Un *anillo euclídeo* $\mathcal{A}$ es un anillo conmutativo con identidad y sin divisores de cero para el cual existe una aplicación $g : \mathcal{A} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$, con $\mathbb{N}$ los enteros no negativos, satisfaciendo:

(a) Si $a, b \in \mathcal{A}$ y $ab \neq 0$ entonces $g(ab) \geq g(a)$.

(b) Para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $b \neq 0$ existen $q, r \in \mathcal{A}$ tales que $a = bq + r$, siendo $r = 0$ o bien $g(r) < g(b)$.

Como todo anillo euclídeo es un dominio de ideales principales (ver [46, p. 7]) se tiene que si $\mathcal{A}$ es un anillo euclídeo $\operatorname{Spec}(\mathcal{A}) = \operatorname{Specm}(\mathcal{A}) \cup \{(0)\}$, donde el ideal (0) es primo pero no es maximal. Veamos algunos ejemplos de anillos euclídeos:

(1) $\mathbb{F}[s]$ es un anillo euclídeo, la aplicación g definida sobre $\mathbb{F}[s] \setminus \{0\}$ y que toma valores en $\mathbb{N}$, la cual denotaremos por d, está definida por:

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{F}[s] \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & p(s) & \longmapsto & d(p(s)), \end{array}$$

donde recordamos que $d(\cdot)$ representa el grado del polinomio $p(s)$ (el grado del polinomio cero se define como $d(0) = -\infty$). Por tanto $\mathbb{F}[s]$ es un dominio de ideales principales. En consecuencia todo ideal primo (excepto el ideal cero) es maximal y viceversa. Además, por ser $\mathbb{F}[s]$ un dominio de factorización única los ideales primos son los generados por polinomios irreducibles que podemos suponer que son mónicos. Así,

$$\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) = \{(\pi(s)) : \pi(s) \neq 0, \pi(s) \in \mathbb{F}[s] \text{ mónico e irreducible}\},$$

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[s]) = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \cup \{(0)\}.$$

(2) El anillo local $\mathbb{F}_\pi(s)$, con $\pi(s) \in \mathbb{F}[s]$ polinomio mónico irreducible distinto de cero, es un anillo euclídeo. Recordamos que sus unidades son las funciones racionales $u(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$ tales que $\text{m.c.d.}(p(s), \pi(s)) = 1$ y $\text{m.c.d.}(q(s), \pi(s)) = 1$. En consecuencia,

$$\mathbb{F}_\pi(s) = \left\{u(s)\pi(s)^h : u(s) \text{ unidad y } h \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}.$$

Efectivamente $\mathbb{F}_\pi(s)$ es un anillo conmutativo con identidad que no tienen divisores de cero. Veamos que en $\mathbb{F}_\pi(s)$ se puede definir una división euclídea. Definimos la aplicación g, *grado respecto a* π, la cual denotaremos por d_π como sigue:

$$\begin{array}{rccc} d_\pi : & \mathbb{F}_\pi(s) \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & u(s)\pi(s)^h & \longmapsto & d_\pi(u(s)\pi(s)^h) = hd(\pi(s)), \end{array}$$

siendo $d(\pi(s))$ el grado del polinomio $\pi(s) \in \mathbb{F}[s]$. Sean $a(s), b(s) \in \mathbb{F}_\pi(s)$ con $b(s) \not\equiv 0$. Entonces $a(s) = u_a(s)\pi(s)^{d_a}$ y $b(s) = u_b(s)\pi(s)^{d_b}$, donde $u_a(s), u_b(s)$ son unidades y d_a, d_b enteros no negativos. Queremos demostrar que existen $q(s), r(s) \in \mathbb{F}_\pi(s)$ tales que $a(s) = b(s)q(s) + r(s)$, siendo $r(s) = 0$ o bien $d_\pi(r(s)) < d_\pi(b(s))$. Si $d_a \geq d_b$, llamamos $q(s) = u_a(s)u_b(s)^{-1}\pi(s)^{d_a - d_b}$ y $r(s) = 0$. Si por el contrario $d_a < d_b$ entonces tomamos $q(s) = 0$ y $r(s) = a(s)$. En cualquier caso $a(s) = b(s)q(s) + r(s)$. Además, $\mathbb{F}_\pi(s)$ es un dominio de ideales principales.

(3) Sea M un subconjunto no vacío de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. El anillo $\mathbb{F}_M(s) = \bigcap_{(\pi(s)) \in M} \mathbb{F}_\pi(s)$, es un anillo conmutativo con identidad sin divisores

de cero cuyas unidades son las funciones racionales $u(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$ tales que m.c.d.$(p(s), \pi(s)) = 1$ y m.c.d.$(q(s), \pi(s)) = 1$ para todo ideal $(\pi(s)) \in M$. Observemos que todo elemento $\dfrac{p(s)}{q(s)}$ de este anillo $\mathbb{F}_M(s)$ se puede expresar como producto de una unidad $u(s)$ por un polinomio $\alpha(s) \in \mathbb{F}[s]$ mónico, $\dfrac{p(s)}{q(s)} = u(s)\alpha(s)$. Además, si $\alpha(s) = \pi_1(s)^{d_1} \cdots \pi_t(s)^{d_t}$ es una factorización como producto de irreducibles (factorización coprima), entonces $(\pi_i(s)) \in M$, $1 \le i \le t$.

Además, es un anillo euclídeo. Definimos la aplicación g, *grado respecto a* M, la cual denotaremos por d_M, como sigue:

$$\begin{array}{rccc} d_M: & \mathbb{F}_M(s) \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & u(s)\alpha(s) & \longmapsto & d_M(u(s)\alpha(s)) = d(\alpha(s)) \end{array}$$

siendo $d(\alpha(s))$ el grado del polinomio $\alpha(s) \in \mathbb{F}[s]$. Sean los elementos $a(s) = u_a(s)\alpha(s)$, $b(s) = u_b(s)\beta(s) \in \mathbb{F}_M(s)$, $b(s) \not\equiv 0$. Por la división euclídea en $\mathbb{F}[s]$, existen $q_1(s), r_1(s) \in \mathbb{F}[s]$, únicos, tales que

$$\alpha(s) = q_1(s)\beta(s) + r_1(s), \quad r_1(s) = 0 \text{ o bien } d(r_1(s)) < d(\beta(s)).$$

Por tanto,

$$a(s) = u_a(s)\alpha(s) = u_a(s)q_1(s)\beta(s) + u_a(s)r_1(s) = q(s)b(s) + r(s),$$

donde $q(s) = u_a(s)q_1(s)u_b(s)^{-1} \in \mathbb{F}_M(s)$, $r(s) = u_a(s)r_1(s) \in \mathbb{F}_M(s)$ y $r(s) = 0$ o bien $d_M(r(s)) \le d(r_1(s)) < d(\beta(s)) = d_M(b(s))$. Así, $\mathbb{F}_M(s)$ es un dominio de ideales principales. Se tiene que $\mathbb{F}_{\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])}(s) = \mathbb{F}[s]$. Cuando M se reduce a un único ideal maximal estamos en el ejemplo anterior. Y, cuando el conjunto M es todo el $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ salvo un único ideal maximal $(\pi(s))$, se tiene que $\mathbb{F}_M(s) = \mathbb{F}_{\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus (\pi(s))}(s)$ es el anillo local $\mathbb{F}_{\pi^-}(s) = \left\{ \dfrac{p(s)}{\pi(s)^n} : p(s) \in \mathbb{F}[s], n \ge 0 \right\}$.

Es claro que para M_1, M_2 subconjuntos de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ se cumple la siguiente propiedad:

$$\mathbb{F}_{M_1}(s) \cap \mathbb{F}_{M_2}(s) = \mathbb{F}_{M_1 \cup M_2}(s). \tag{1.12}$$

1.2.5. El anillo local de las funciones racionales propias

Una función racional $g(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)} \in \mathbb{F}(s)$ se llama *función racional propia* si $d(q(s)) \geq d(p(s))$. Si $d(q(s)) > d(p(s))$ entonces $g(s)$ se dice que es una *función racional estrictamente propia*.

Extenderemos la idea de anillo local al punto del infinito. Para ello observemos que cuando el cuerpo es el de los números complejos a cada punto finito del plano $z_0 \in \mathbb{C}$, o lo que es lo mismo a cada polinomio irreducible $s - z_0$, le asociamos el anillo local $\mathbb{C}_{s-z_0}(s)$ de las funciones racionales que no tienen a z_0 como polo. Recordamos que una función racional $g(s)$ tiene un *polo (cero) en el* ∞ si $g\left(\dfrac{1}{s}\right)$ tiene un polo (cero) en 0. Siguiendo esta idea, podemos definir el anillo local en el ∞ como el conjunto de funciones racionales, $g(s)$, tal que $g\left(\dfrac{1}{s}\right)$ no tiene a 0 como polo, es decir, $\mathbb{C}_\infty(s) = \left\{ g(s) \in \mathbb{C}(s) : g\left(\dfrac{1}{s}\right) \in \mathbb{C}_s(s) \right\}$. Si $g(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$ con $p(s) = a_t s^t + a_{t+1} s^{t+1} + \cdots + a_p s^p,\ a_p \neq 0$, $q(s) = b_r s^r + b_{r+1} s^{r+1} + \cdots + b_q s^q,\ b_q \neq 0$, $p = d(p(s)),\ q = d(q(s))$, entonces

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{s}\right) &= \frac{\dfrac{a_t}{s^t} + \dfrac{a_{t+1}}{s^{t+1}} + \cdots + \dfrac{a_p}{s^p}}{\dfrac{b_r}{s^r} + \dfrac{b_{r+1}}{s^{r+1}} + \cdots + \dfrac{b_q}{s^q}} = \\ &= \frac{a_t s^{p-t} + a_{t+1} s^{p-t-1} + \cdots + a_p}{b_r s^{q-r} + b_{r+1} s^{q-r-1} + \cdots + b_q} s^{q-p} \\ &= \frac{\tilde{p}(s)}{\tilde{q}(s)} s^{q-p}, \end{aligned}$$

con $\mathrm{m.c.d.}(\tilde{p}(s), s) = 1$ y $\mathrm{m.c.d.}(\tilde{q}(s), s) = 1$. Como

$$\mathbb{C}_s(s) = \left\{ \frac{\tilde{p}(s)}{\tilde{q}(s)} s^d : \tilde{p}(0) \neq 0, \tilde{q}(0) \neq 0 \text{ y } d \text{ entero no negativo} \right\} \cup \{0\},$$

entonces

$$\mathbb{C}_\infty(s) = \left\{ \frac{p(s)}{q(s)} \in \mathbb{C}(s) : d(q(s)) \geq d(p(s)) \right\}.$$

Por tanto, este conjunto es el anillo de las funciones racionales propias, $\mathbb{C}_{pr}(s)$. Observemos que al igual que para un punto finito, $z_0 \in \mathbb{C}$, las unidades del anillo local que le asociamos son las funciones racionales $u(s)$ tales que z_0 no es cero ni polo, en el caso del punto del infinito le asociamos el anillo $\mathbb{C}_{pr}(s)$ cuyas unidades son las funciones racionales $u(s)$ tales que el infinito no es cero ni polo de $u(s)$, o bien el punto $z_0 = 0$ no es cero ni polo de $u\left(\frac{1}{s}\right)$, es decir, son las funciones racionales bipropias (ver definición más abajo).

En definitiva, al igual que asociamos con cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$ el anillo local $\mathbb{C}_\pi(s)$ donde $\pi(s) = s - z_0$, asociaremos con el ∞ el anillo local $\mathbb{C}_{pr}(s)$.

Veamos a continuación que en general el anillo de las funciones racionales propias sobre un cuerpo arbitrario es un anillo euclídeo y por tanto un dominio de ideales principales.

En el cuerpo de las funciones racionales $\mathbb{F}(s)$, se define la aplicación δ_∞, llamada *valoración en el infinito*, como sigue [54, p. 92]:

$$\begin{array}{rccl} \delta_\infty : & \mathbb{F}(s) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \\ & r(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)} & \longmapsto & \delta_\infty(r(s)) = \left\{ \begin{array}{ll} d(q(s)) - d(p(s)) & \text{si } \; r(s) \not\equiv 0 \\ +\infty & \text{si } \; r(s) \equiv 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Si $\delta_\infty(r(s)) \geq 0$ entonces la función racional $r(s)$ es propia, y si $\delta_\infty(r(s)) > 0$ entonces es estrictamente propia. El conjunto de las funciones racionales propias, denotado por $\mathbb{F}_{pr}(s)$, con las operaciones de suma y multiplicación usuales en $\mathbb{F}(s)$, es un anillo conmutativo con identidad y sin divisores de cero. La unidades $u(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)} \in \mathbb{F}_{pr}(s)$ son las funciones racionales propias tales que $d(p(s)) = d(q(s))$, es decir, las funciones racionales tales que $\delta_\infty(u(s)) = 0$ las cuales se llaman *funciones racionales bipropias*. El conjunto de las funciones racionales estrictamente propias se denota por $\mathbb{F}_{ep}(s)$.

La aplicación valoración en el infinito restringida a las funciones racionales propias sin el cero está definida sobre el conjunto de los enteros no negativos,

$$\delta_\infty : \mathbb{F}_{pr}(s) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N},$$

satisfaciendo:

(a) Para $g_1(s), g_2(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)$ tales que $g_1(s)g_2(s) \neq 0$, $\delta_\infty(g_1(s)g_2(s)) = \delta_\infty(g_1(s)) + \delta_\infty(g_2(s)) \geq \delta_\infty(g_1(s))$,

(b) Para $g_1(s), g_2(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)$, $g_2(s) \not\equiv 0$, existen $q(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)$ y $r(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)$ tales que $g_1(s) = g_2(s)q(s) + r(s)$ donde, $r(s) = 0$, o bien $\delta_\infty(r(s)) < \delta_\infty(g_2(s))$. En efecto, si $\delta_\infty(g_1(s)) \geq \delta_\infty(g_2(s))$ entonces $r(s) = 0$ y $q(s) = \dfrac{g_1(s)}{g_2(s)} \in \mathbb{F}_{pr}(s)$, y si $\delta_\infty(g_1(s)) < \delta_\infty(g_2(s))$ entonces $q(s) = 0$ y $r(s) = g_1(s)$.

Por tanto, tenemos definida una aplicación δ_∞ sobre $\mathbb{F}_{pr}(s)$ que sirve de grado a la que por similitud llamaremos *grado en el infinito*, que da estructura de anillo euclídeo al anillo de las funciones racionales propias. Dadas $g_1(s), g_2(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)$ se tiene que $g_2(s) \mid g_1(s)$ si y sólo si $\delta_\infty(g_1(s)) \geq \delta_\infty(g_2(s))$. Por ejemplo, dados $g_1(s) = s^{q_1}$ y $g_2(s) = s^{q_2}$, $q_1, q_2 \leq 0$, se tiene que $s^{q_2} \mid s^{q_1}$ si y sólo si $q_2 \geq q_1$. En efecto, como $\delta_\infty(g_2(s)) = -q_2 \leq -q_1 = \delta_\infty(g_1(s))$, entonces existe $r(s) = 0$ y $q(s) = \dfrac{g_1(s)}{g_2(s)} = \dfrac{1}{s^{q_2 - q_1}} \in \mathbb{F}_{pr}(s)$ tal que $g_1(s) = g_2(s)q(s) + r(s)$.

Por tanto, $\mathbb{F}_{pr}(s)$ es un dominio de ideales principales. Además, el anillo $\mathbb{F}_{pr}(s)$ es un anillo local. Definimos el ideal

$$I_\infty = \left\{ \frac{p(s)}{q(s)} \in \mathbb{F}_{pr}(s) : d(q(s)) > d(p(s)) \right\} \cup \{0\} = \mathbb{F}_{ep}(s) \cup \{0\}.$$

Se tiene que $\mathbb{F}_{pr}(s) \setminus I_\infty = \left\{ \dfrac{p(s)}{q(s)} \in \mathbb{F}_{pr}(s) : d(q(s)) = d(p(s)) \right\}$ es el conjunto de las unidades en $\mathbb{F}_{pr}(s)$. Por tanto $\mathbb{F}_{pr}(s)$ es un anillo local e I_∞ su ideal maximal.

1.2.6. Equivalencia por la derecha de matrices con elementos en un anillo euclídeo

Sea $\mathcal{A}^{m\times n}$ el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con elementos en $\mathcal{A}$. Una matriz $U \in \mathcal{A}^{m\times m}$ se llama *$\mathcal{A}$–unimodular* si tiene inversa en $\mathcal{A}^{m\times m}$, es decir si existe $V \in \mathcal{A}^{m\times m}$ tal que $UV = VU = I_m$. Se tiene que $U \in \mathcal{A}^{m\times m}$ es $\mathcal{A}$–unimodular si y sólo si su determinante es una unidad en $\mathcal{A}$.

Sea $\mathcal{A}$ un anillo euclídeo. Dos matrices A_1, A_2 de $\mathcal{A}^{m\times n}$ son *equivalentes por la derecha* si existe una matriz $\mathcal{A}$–unimodular U de $\mathcal{A}^{n\times n}$ tal que

$$A_2 = A_1 U.$$

Del mismo modo, A_1, A_2 de $\mathcal{A}^{m\times n}$ son *equivalentes por la izquierda* si existe una matriz $\mathcal{A}$–unimodular U de $\mathcal{A}^{m\times m}$ tal que

$$A_2 = UA_1.$$

El siguiente resultado se puede encontrar en [46, p. 23]. Toda matriz con elementos en un anillo euclídeo se puede transformar mediante operaciones elementales por columnas (filas) a su forma normal de Hermite. Y, por lo tanto es equivalente por la derecha (izquierda) a su forma normal de Hermite.

Forma de Hermite de matrices polinomiales

Pensemos en el anillo euclídeo $\mathcal{A} = \mathbb{F}[s]$. A las matrices polinomiales cuya inversa es también polinomial, es decir, a las matrices $\mathbb{F}[s]$–unimodulares, las llamaremos simplemente *matrices unimodulares* o *matrices invertibles en* $\mathbb{F}[s]$.

El siguiente resultado particular nos da la forma de Hermite para matrices polinomiales no singulares. Dicho resultado se puede encontrar en [12, p. 589], [18, p. 135] o [31, pp. 375, 476].

Lema 1.2.2 *Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ no singular. Entonces existe una matriz unimodular $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tal que $P(s)U(s) = H(s)$ tiene la siguiente forma*

$$H(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(s) & h_{m2}(s) & \cdots & h_{mm}(s) \end{bmatrix},$$

donde los elementos de la diagonal son polinomios mónicos y tales que $d(h_{ij}(s)) < d(h_{ii}(s))$ para todo $j = 1, \ldots, i-1$, con $i = 1, 2, \ldots, m$.

Todas las matrices polinomiales no singulares equivalentes por la derecha tienen la misma forma normal de Hermite, por tanto $H(s)$ es un representante canónico para la equivalencia por la derecha de las matrices polinomiales no singulares y se llama *forma de Hermite* de $P(s)$. A los grados de los polinomios de la diagonal de la forma de Hermite de una matriz $P(s)$ les llamaremos los *índices de Hermite* de $P(s)$. Por tanto, si dos matrices son equivalentes por la derecha tienen los mismos índices de Hermite pero el recíproco no es cierto en general. Ahora bien, en [6] los autores definen una relación de equivalencia, llamada la $\mathcal{T}$ equivalencia, para la cual los índices de Hermite constituyen un sistema completo de invariantes.

Forma de Hermite de matrices con elementos en $\mathbb{F}_M(s)$

Sea el anillo euclídeo $\mathcal{A} = \mathbb{F}_M(s)$, donde $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. A las matrices con elementos en $\mathbb{F}_M(s)$ que tienen inversa en $\mathbb{F}_M(s)$, es decir a las matrices $\mathbb{F}_M(s)$–unimodulares, las llamaremos simplemente *matrices invertibles en $\mathbb{F}_M(s)$*.

Dos matrices $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times n}$ son *equivalentes por la derecha respecto a M* si existe una matriz $U_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times n}$ invertible en $\mathbb{F}_M(s)$ tal que

$$A_2(s) = A_1(s)U_M(s).$$

Necesitamos la siguiente definición:

Definición 1.2.3 Si $\alpha(s) \in \mathbb{F}[s]$ es un polinomio no constante cuya factorización coprima, $\alpha(s) = \alpha_1(s)^{d_1} \cdots \alpha_m(s)^{d_m}$, satisface la condición de que $(\alpha_i(s)) \in M$ para todo $i = 1, \ldots, m$, diremos que $\alpha(s)$ *factoriza en* M.

Consideraremos que los únicos polinomios que factorizan en $M = \emptyset$ son los polinomios constantes.

Definición 1.2.4 Sea $M \subseteq \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Si $g(s) = \dfrac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{F}(s)$ es una función racional no constante tal que su numerador y su denominador factorizan en M diremos que $g(s)$ *factoriza en* M.

Las unidades en $\mathbb{F}_M(s)$ son las funciones racionales $u(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$ tales que para todo ideal $(\pi(s)) \in M$ se tiene que $\text{m.c.d.}(p(s), \pi(s)) = 1$ y $\text{m.c.d.}(q(s), \pi(s)) = 1$. Por tanto,

$$\mathbb{F}_M(s) = \{u(s)\alpha(s) : u(s) \text{ unidad y } \alpha(s) \in \mathbb{F}[s] \text{ mónico y}$$
$$\text{factoriza en } M\} \cup \{0\}.$$

Recordamos que el grado respecto a M de un elemento $u(s)$ de $\mathbb{F}_M(s)$ es cero, esto es $d_M(u(s)) = 0$, si y sólo si dicho elemento es una unidad en $\mathbb{F}_M(s)$.

Toda matriz racional con elementos en $\mathbb{F}_M(s)$ se puede llevar mediante operaciones elementales por columnas a su forma de Hermite respecto a M.

Lema 1.2.5 *Sea $A(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ no singular. Entonces existe una matriz $U_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ invertible en $\mathbb{F}_M(s)$ tal que $A(s)U_M(s) = H_M(s)$ tiene la siguiente forma*

$$H_M(s) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}(s) & \alpha_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(s) & a_{m2}(s) & \cdots & \alpha_{mm}(s) \end{bmatrix},$$

donde los elementos de la diagonal $\alpha_{ii}(s)$ son polinomios mónicos y factorizan en M. Además, $d_M(a_{ij}(s)) < d_M(\alpha_{ii}(s))$ para todo $j = 1\ldots, i-1$, con $i = 1, 2, \ldots, m$.

Diremos que $H_M(s)$ es la *forma de Hermite respecto a M* de $A(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$. Por similitud, a los grados respecto a M de los polinomios de la diagonal de la forma de Hermite respecto a M de una matriz $A(s)$ les llamaremos los *índices de Hermite respecto a M de $A(s)$*.

En particular, si M es un subconjunto del $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ con un único ideal maximal $M = (\pi(s))$, siendo $\pi(s)$ un polinomio mónico irreducible de $\mathbb{F}[s]$, entonces tenemos el siguiente resultado:

Lema 1.2.6 *Sea $A(s) \in \mathbb{F}_\pi(s)^{m\times m}$ no singular. Entonces existe una matriz $U_\pi(s) \in \mathbb{F}_\pi(s)^{m\times m}$ invertible en $\mathbb{F}_\pi(s)$ tal que $A(s)U_\pi(s) = H_\pi(s)$ tiene la siguiente forma*

$$H_\pi(s) = \begin{bmatrix} \pi(s)^{h_1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}(s) & \pi(s)^{h_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(s) & a_{m2}(s) & \cdots & \pi(s)^{h_m} \end{bmatrix},$$

donde los elementos de la diagonal son polinomios mónicos potencias de $\pi(s)$. Además, $d_\pi(a_{ij}(s)) < h_i d(\pi(s))$ para todo $j = 1, \ldots, i-1$, con $i = 1, 2, \ldots, m$.

A $H_\pi(s)$ la llamaremos la *forma de Hermite local respecto a $\pi(s)$* y a los enteros $h_1 d(\pi(s)), h_2 d(\pi(s)), \ldots, h_m d(\pi(s))$ los *índices de Hermite locales respecto a $\pi(s)$*.

Otro caso particular de interés es cuando el subconjunto de ideales maximales es todo el conjunto $M = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Las matrices con elementos en $\mathbb{F}_{\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])}(s)$ son las matrices polinomiales. Además, invertible en $\mathbb{F}_{\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])}(s)^{n\times n}$ significa unimodular. Por lo tanto, en este caso, la forma de Hermite respecto a $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ de una matriz polinomial no singular es la forma de Hermite de dicha matriz dada en el Lema 1.2.2. Por este motivo a la forma de Hermite de una matriz polinomial $P(s)$ le llamaremos *forma de Hermite global de* $P(s)$ y a sus índices de Hermite *índices de Hermite globales de* $P(s)$.

1.2.7. Equivalencia de matrices con elementos en un dominio de ideales principales

Sea $\mathcal{A}$ un dominio de ideales principales. Dos matrices A_1, A_2 de $\mathcal{A}^{m\times n}$ son *equivalentes* si existen matrices $\mathcal{A}$–unimodulares $U_1 \in \mathcal{A}^{m\times m}$ y $U_2 \in \mathcal{A}^{n\times n}$ tales que

$$A_2 = U_1 A_1 U_2.$$

El siguiente resultado se puede encontrar en [46, p. 26]. En él se define una forma canónica para esta relación de equivalencia. Toda matriz A con elementos en un dominio de ideales principales se puede reducir mediante equivalencia a una matriz diagonal:

Sea $A \in \mathcal{A}^{m\times n}$ con $\operatorname{rang} A = r$, $r \leq \min\{m, n\}$. A es equivalente a una matriz de la forma

$$S = \begin{bmatrix} \operatorname{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha_i \in \mathcal{A}$ (únicos, salvo multiplicación por unidades) son tales que $\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \mid \alpha_r$. La matriz S se llama *forma de Smith (finita) de* A. Los elementos $\alpha_i \in \mathcal{A}$ se llaman *factores invariantes de* A y constituyen un sistema completo de invariantes para la equivalencia de matrices con elementos en $\mathcal{A}$. A los factores invariante iguales a 1 se les llama *factores invariantes triviales de* A. Se llama *divisor determinantal de orden* i *de* A, D_i, al máximo común divisor (único salvo multiplicación por unidades) de todos los menores de orden i no nulos de la matriz A, $i = 1, \ldots, r$ (ver [18, p. 139]). En [18] y [51, pp. 91-93] se demuestra que $\alpha_i = \dfrac{D_i}{D_{i-1}}$, $i = 1, \ldots, r$, donde $D_0 = 1$. Se cumple que

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i = \frac{D_1}{D_0}\frac{D_2}{D_1}\cdots\frac{D_i}{D_{i-1}} = D_i,\ i = 1, 2, \ldots, r.$$

Por tanto, si el divisor determinantal de orden máximo D_r es igual a 1, los factores invariantes de A son todos iguales a 1.

Sean $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t\}$ un conjunto completo de factores irreducibles que aparecen en la descomposición de los factores invariantes de la matriz A

$$\alpha_i = \epsilon_i \pi_1^{d_{i1}} \pi_2^{d_{i2}} \cdots \pi_t^{d_{it}}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

donde ϵ_i son unidades de $\mathcal{A}$ y d_{ij} son enteros no negativos que, teniendo en cuenta las relaciones de divisibilidad entre los factores invariantes, cumplen

$$0 \leq d_{1j} \leq d_{2j} \leq \cdots \leq d_{rj}, \quad 1 \leq j \leq t.$$

A cada una de las potencias $\pi_j^{d_{ij}}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq t$ incluyendo repeticiones y excluyendo las potencias con exponente cero, se le llama *divisor elemental de* A. Dados los divisores elementales podemos reconstruir los factores invariantes, de ahí que los divisores elementales formen un sistema completo de invariantes para la equivalencia de matrices con elementos en $\mathcal{A}$. En efecto, sea

$$d_j = \max_{1\leq i\leq r} d_{ij}, \quad 1 \leq j \leq t,$$

entonces $\alpha_r = \pi_1^{d_1}\pi_2^{d_2}\cdots\pi_t^{d_t}$. Retirando los divisores elementales empleados en α_r y repitiendo el proceso obtenemos α_{r-1} y así sucesivamente.

El siguiente resultado está demostrado en [46, p. 33]:

Lema 1.2.7 *Sean $A, B \in \mathcal{A}^{m\times m}$ matrices no singulares con determinantes relativamente primos. Sean $\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \mid \alpha_m$ y $\beta_1 \mid \beta_2 \mid \cdots \mid \beta_m$ los factores invariantes de A, B respectivamente. Entonces los factores invariantes del producto AB son $\gamma_i = \alpha_i\beta_i$, $i = 1, \ldots, m$.*

Denotamos por $\mathcal{K}$ el cuerpo de fracciones de $\mathcal{A}$, es decir,

$$\mathcal{K} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} : \alpha, \beta \in \mathcal{A}, \beta \neq 0 \right\}.$$

Sea $\mathcal{K}^{m\times n}$ el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con elementos en $\mathcal{K}$.

Se puede extender la relación de equivalencia definida anteriormente al conjunto $\mathcal{K}^{m\times n}$: Dos matrices $A_1, A_2 \in \mathcal{K}^{m\times n}$ son equivalentes si existen matrices $\mathcal{A}$–unimodulares, $U_1 \in \mathcal{A}^{m\times m}$, $U_2 \in \mathcal{A}^{n\times n}$ tales que $A_2 = U_1 A_1 U_2$.

Veamos que existe una forma canónica para la equivalencia de matrices con elementos en el cuerpo de fracciones. Sea $A \in \mathcal{K}^{m\times n}$, $\operatorname{rang} A = r$, $r \leq \text{mín}\{m, n\}$. Sea δ el mínimo común múltiplo (único salvo multiplicación por unidades) de todos los denominadores de los elementos de A. Se puede escribir

$$A = \frac{1}{\delta} N,$$

donde $N \in \mathcal{A}^{m\times n}$. Sea $S_N = \begin{bmatrix} \operatorname{Diag}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ la forma de Smith de N. Supongamos que al dividir η_i por δ y cancelar todos sus factores comunes quede

$$\frac{\eta_i}{\delta} = \frac{\epsilon_i}{\psi_i}, i = 1, 2, \dots, r.$$

Obsérvese que $\psi_1 = \delta$ ([50, p. 109]) puesto que si no fuera así, significaría que η_1 y δ tendrían factores comunes, es decir, como η_1 es el divisor determinantal de orden 1 de N, todos los elementos de N tendrían factores comunes con δ y, por lo tanto, habría un mínimo común denominador de A que divide a δ; pero esto no puede ocurrir. Por lo tanto, hemos demostrado que dada $A \in \mathcal{K}^{m\times n}$ con $\operatorname{rang} A = r$, $r \leq \text{mín}\{m, n\}$, A es equivalente a una matriz de la forma

$$S = \begin{bmatrix} \operatorname{Diag}\left(\frac{\epsilon_1}{\psi_1}, \frac{\epsilon_2}{\psi_2}, \dots, \frac{\epsilon_r}{\psi_r}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\epsilon_i, \psi_i \in \mathcal{A}$ son únicos salvo multiplicación por unidades y coprimos tales que $\epsilon_1 \mid \epsilon_2 \mid \cdots \mid \epsilon_r$ mientras que $\psi_r \mid \psi_{r-1} \mid \cdots \mid \psi_1$. S es una forma canónica para la equivalencia de matrices en $\mathcal{K}^{m\times n}$ de A y se llama *forma de Smith–McMillan de* A.

Las funciones racionales $\dfrac{\epsilon_i}{\psi_i}$ constituyen un sistema completo de invariantes para la equivalencia de matrices con elementos en el cuerpo de fracciones y se llaman *funciones racionales invariantes de* A.

Por ejemplo, si pensamos en matrices con elementos en $\mathcal{K} = \mathbb{F}(s)$, el cuerpo de fracciones de $\mathcal{A} = \mathbb{F}[s]$, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo arbitrario, obtenemos la relación de equivalencia definida previamente en la Sección 1.1 para matrices racionales donde una forma canónica es la forma de Smith–McMillan (finita). Veamos otros ejemplos.

Forma de Smith–McMillan respecto a M

Sea el dominio de ideales principales $\mathcal{A} = \mathbb{F}_M(s)$, con $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ cuyo cuerpo de fracciones es el cuerpo de las funciones racionales $\mathbb{F}(s)$. Por lo tanto, dos matrices racionales $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times n}$ son *equivalentes respecto a* M si existen matrices $U_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$, $V_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times n}$ invertibles en $\mathbb{F}_M(s)$ tales que

$$G_2(s) = U_M(s)G_1(s)V_M(s).$$

Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times n}$ con $\operatorname{rang} G(s) = r$, $r \leq \text{mín}\{m, n\}$. $G(s)$ es equivalente respecto a M a una matriz de la forma

$$S_M(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{Diag}\left(\dfrac{\alpha_1(s)}{\beta_1(s)}, \dfrac{\alpha_2(s)}{\beta_2(s)}, \ldots, \dfrac{\alpha_r(s)}{\beta_r(s)}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha_i(s), \beta_i(s) \in \mathbb{F}[s]$ son polinomios mónicos coprimos (únicos salvo multiplicación por unidades de $\mathbb{F}_M(s)$) que factorizan en M tales que $\alpha_1(s) \mid \alpha_2(s) \mid \cdots \mid \alpha_r(s)$ mientras que $\beta_r(s) \mid \beta_{r-1}(s) \mid \cdots \mid \beta_1(s)$. $S_M(s)$ es una forma canónica para la equivalencia respecto a M de matrices en $\mathbb{F}(s)^{m\times n}$ y se llama *forma de Smith–McMillan respecto a* M *de* $G(s)$. Las funciones racionales $\dfrac{\alpha_i(s)}{\beta_i(s)} \in \mathbb{F}(s)$ se llaman *funciones racionales invariantes respecto a M de $G(s)$* y constituyen un sistema completo de invariantes para esta relación de equivalencia. Se dice que forman la *estructura respecto a M de $G(s)$*. Se puede obtener una factorización diagonal de este tipo teniendo en cuenta que los elementos de la diagonal son únicos salvo unidades y que todo elemento de $\mathbb{F}(s)$ se puede escribir como $u(s)\dfrac{\alpha(s)}{\beta(s)}$ con $u(s)$ unidad en $\mathbb{F}_M(s)$ y $\alpha(s), \beta(s) \in \mathbb{F}[s]$ mónicos coprimos y tal que factorizan en M.

Llamamos *ceros respecto a M de $G(s)$* a las raices de $\alpha_r(s)$ en $\mathbb{L}$ (la clausura algebraica del cuerpo $\mathbb{F}$). Llamamos *polos respecto a M de $G(s)$* a las raices de $\beta_1(s)$ en $\mathbb{L}$.

Las matrices $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ invertibles en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ se caracterizan por el hecho de que no tienen ceros ni polos respecto a M.

Si $G(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times n}$ entonces $\beta_i(s) = 1$, $i = 1, 2, \dots, r$, con lo cual $S_M(s)$ es polinomial. Es decir $G(s)$ es equivalente respecto a M a una matriz de la forma

$$S_M(s) = \begin{bmatrix} \mathrm{Diag}(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_r(s)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha_i(s) \in \mathbb{F}[s]$ son polinomios mónicos que factorizan en M tales que $\alpha_1(s) \mid \alpha_2(s) \mid \cdots \mid \alpha_r(s)$. $S_M(s)$ es una forma canónica para la equivalencia respecto a M de matrices en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times n}$ y se llama *forma de Smith respecto a M de $G(s)$*. Los polinomios $\alpha_i(s)$ se llaman *factores invariantes respecto a M de $G(s)$*.

En particular, si tomamos $M = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$, la forma de Smith–McMillan respecto a $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ de un matriz racional $G(s)$ es la forma de Smith–McMillan (finita) dada en la Sección 1.1 a la que llamaremos la *forma de Smith–McMillan (finita) global de $G(s)$* y a sus funciones racionales invariantes las *funciones racionales invariantes globales de $G(s)$*. En el otro caso, la forma de Smith–McMillan respecto a $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ de un matriz $G(s) \in \mathbb{F}_{\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])}(s)^{m\times n}$ es la forma de Smith (finita) de una matriz polinomial a la que llamaremos la *forma de Smith (finita) global* y a sus factores invariantes los *factores invariantes globales*.

A continuación veamos que dada un matriz racional y cualquier subconjunto M de $\text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ se puede obtener su estructura respecto a M a partir de su estructura finita global. Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ una matriz racional no singular y sea $S(s) = \text{Diag}\left(\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\right)$ su forma de Smith–McMillan (finita). Por lo tanto, existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que

$$G(s) = U(s)\,\text{Diag}\left(\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\right) V(s). \tag{1.13}$$

Escribimos $\frac{\epsilon_i(s)}{\psi_i(s)} = u_i(s)\frac{\alpha_i(s)}{\beta_i(s)}$ con $u_i(s)$ unidad en $\mathbb{F}_M(s)$ y $\alpha_i(s), \beta_i(s)$ polinomios que factorizan en M. Así,

$$G(s) = U(s)\,\text{Diag}\left(\frac{\alpha_1(s)}{\beta_1(s)}, \dots, \frac{\alpha_m(s)}{\beta_m(s)}\right) \text{Diag}(u_1(s), \dots, u_m(s))V(s). \tag{1.14}$$

Tomamos $U_M(s) = U(s)^{-1}$ y $V_M(s) = V(s)^{-1}\,\text{Diag}\left(\frac{1}{u_1(s)}, \dots, \frac{1}{u_m(s)}\right)$. Por tanto existen $U_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$, $V_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times n}$ invertibles en $\mathbb{F}_M(s)$ tales que

$$U_M(s)G(s)V_M(s) = \text{Diag}\left(\frac{\alpha_1(s)}{\beta_1(s)}, \dots, \frac{\alpha_m(s)}{\beta_m(s)}\right),$$

con $\alpha_i(s), \beta_i(s) \in \mathbb{F}[s]$ polinomios mónicos coprimos que factorizan en M tales que $\alpha_1(s) \mid \alpha_2(s) \mid \cdots \mid \alpha_r(s)$ mientras que $\beta_r(s) \mid \beta_{r-1}(s) \mid \cdots \mid \beta_1(s)$. Y, por tanto $\frac{\alpha_i(s)}{\beta_i(s)}$ son las funciones racionales invariantes respecto a M de $G(s)$. Llamando $G_1(s) = U(s)\,\text{Diag}\left(\frac{\alpha_1(s)}{\beta_1(s)}, \dots, \frac{\alpha_m(s)}{\beta_m(s)}\right)$ y $G_2(s) = \text{Diag}(u_1(s), \dots, u_m(s))V(s)$, hemos demostrado el siguiente lema:

Lema 1.2.8 *Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ una matriz racional no singular y $M \subseteq \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Entonces, existen matrices $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ tales que* *i)* $G(s) = G_1(s)G_2(s)$,

ii) *las funciones racionales invariantes de* $G_1(s)$ *factorizan en* M,

iii) *las funciones racionales invariantes de* $G_2(s)$ *factorizan en* $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$, *y*

iv) *los funciones racionales invariantes de* $G_1(s)$ *son las funciones racionales invariantes respecto a* M *de* $G(s)$.

Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular y sean

$$\alpha_i(s) = \pi_1(s)^{d_{i1}}\pi_2(s)^{d_{i2}} \cdots \pi_t(s)^{d_{it}}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

sus factores invariantes globales. Sabemos que los divisores elementales, es decir, las potencias $\pi_j(s)^{d_{ij}}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t$ diferentes de 1 (incluyendo repeticiones) constituyen un sistema completo de invariantes para la equivalencia de matrices polinomiales. Por el lema anterior se deduce que aquellos divisores elementales de $P(s)$ potencias de polinomios irreducibles $\pi_j(s)$ que generan ideales que están en M, constituyen un sistema completo de invariantes para la equivalencia respecto a M de $P(s)$.

Forma de Smith–McMillan en el infinito

Sea el dominio de ideales principales $\mathcal{A} = \mathbb{F}_{pr}(s)$, cuyo cuerpo de fracciones, $\mathcal{K} = \mathbb{F}(s)$, es el cuerpo de fracciones de $\mathbb{F}[s]$. Nótese que podemos escribir

$$\mathbb{F}(s) = \{u(s)s^q : u(s) \text{ unidad en } \mathbb{F}_{pr}(s) \text{ y } q \in \mathbb{Z}\}.$$

Una función racional $g(s) \in \mathbb{F}(s)$ se dice que tiene un *cero (polo) en el infinito* si y sólo si la función racional $g\left(\frac{1}{s}\right) \in \mathbb{F}(s)$ tiene un cero (polo) en $s = 0$. Igualmente, una matriz de funciones racionales $G(s)$ se dice que tiene un *cero (polo) en el infinito* si y sólo si $G\left(\frac{1}{s}\right)$ tiene un cero (polo) en $s = 0$.

Las matrices con elementos en $\mathbb{F}_{pr}(s)$ se llaman *matrices racionales propias*. Las matrices $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ que son $\mathbb{F}_{pr}(s)$–unimodulares, es decir aquéllas cuyo determinante es una función racional bipropia, se llaman *matrices racionales bipropias* o simplemente *matrices bipropias*. Las matrices bipropias se caracterizan por el hecho de que no tienen ceros ni polos en el infinito. Otra caracterización de las matrices bipropias es la siguiente: $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ es bipropia si y sólo si $B(s) = P + E(s)$ con $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$ no singular y $E(s) \in \mathbb{F}_{ep}(s)^{m\times m}$ estrictamente propia.

En este caso la equivalencia de matrices racionales se llama equivalencia en el infinito. Dos matrices racionales $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times n}$ diremos que son *equivalentes en el infinito* si existen matrices bipropias $B_1(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$, $B_2(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{n\times n}$ tales que

$$G_2(s) = B_1(s)G_1(s)B_2(s).$$

Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times n}$ con $\operatorname{rang} G(s) = r$, $r \leq \min\{m, n\}$. $G(s)$ es equivalente en el infinito a una matriz diagonal (véase [15], [54]) de la forma

$$D(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{Diag}(s^{q_1}, s^{q_2}, \ldots, s^{q_r}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_r$, $q_i \in \mathbb{Z}$. La matriz diagonal $D(s)$ es una forma canónica para esta relación de equivalencia de matrices en $\mathbb{F}(s)$ de $G(s)$ y se llama *forma de Smith–McMillan en el infinito de* $G(s)$. Las funciones racionales $s^{q_1}, s^{q_2}, \ldots, s^{q_r}$ se llaman *funciones racionales invariantes en el infinito de* $G(s)$. Dados los enteros $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_r$, $q_i \in \mathbb{Z}$, queda determinada la estructura en el infinito de $G(s)$ de ahí que dichos enteros, llamados los *órdenes invariantes en el infinito* constituyen un sistema completo de invariantes para la equivalencia en el infinito. Se dice que forman la *estructura en el infinito* o la *estructura infinita de* $G(s)$.

Podemos escribir

$$D(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{Diag}(s^{q_1}, s^{q_2} \ldots, s^{q_k}, \frac{1}{s^{\tilde{q}_{k+1}}}, \frac{1}{s^{\tilde{q}_{k+2}}}, \ldots, \frac{1}{s^{\tilde{q}_r}}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $0 \leq k \leq r$ y $\tilde{q}_i = -q_i$ si $q_i < 0$, de tal forma que

$$q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_k \geq 0,$$

$$\tilde{q}_r \geq \tilde{q}_{r-1} \geq \cdots \geq \tilde{q}_{k+1} \geq 0.$$

Si $p_\infty \in \mathbb{Z}^+$ es el número de q_i tales que $q_i > 0$, entonces $G(s)$ tiene p_∞ *polos en el infinito* cada uno de orden q_i y si $c_\infty \in \mathbb{Z}^+$ es el número de $\tilde{q}_i$ tales que $\tilde{q}_i > 0$, entonces $G(s)$ tiene c_∞ *ceros en el infinito* cada uno de orden $\tilde{q}_i$.

Se tiene que $\sum_{i=1}^{j} q_i$ es el mínimo de las valoraciones en el infinito de los menores de orden j de la matriz racional $G(s)$ cambiado de signo ([54, p. 102]). En particular para matrices polinomiales $\sum_{i=1}^{j} q_i$ es el máximo grado entre los grados de todos los menores de orden j de $P(s)$, para $j = 1, \ldots, r$, con $r = \operatorname{rang} P(s)$. Así, q_1 es el *grado de la matriz polinomial* $P(s)$, es decir, es el grado del elemento de la matriz polinomial $P(s)$ de mayor grado. Se denota $q_1 = d(P(s))$. A las funciones racionales invariantes en el infinito de una matriz polinomial les llamaremos *factores invariantes en el infinito*.

1.3. Semejanza

La semejanza de sistemas implica la semejanza de las correspondientes matrices de estado. Dos matrices cuadradas $A_1, A_2 \in \mathbb{F}^{n\times n}$ diremos que son *semejantes* si existe una matriz $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ invertible, es decir no singular, tal que

$$A_2 = PA_1P^{-1}.$$

Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Se llama *matriz característica de A* a la matriz cuadrada de rango n, $sI_n - A \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$. Se llaman *factores invariantes y divisores elementales de A* a los factores invariantes y divisores elementales de $sI_n - A$. Al determinante de la matriz característica se le llama *polinomio característico de A* y sus raíces son los *valores propios de A*.

En [18, Teorema 7, p. 147]) se demuestra que dos matrices cuadradas son semejantes si y sólo si tienen los mismos factores invariantes, o lo que es lo mismo, los mismos divisores elementales.

Dado un polinomio mónico tenemos diferentes formas de escribir su matriz compañera (ver por ejemplo [12, p. 26] y [18, p. 149]). Nosotros llamaremos *matriz compañera del polinomio* $p(s) = s^n - a_1 s^{n-1} - \cdots - a_{n-1}s - a_n$ a la matriz cuadrada $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico es $p(s)$ y cuyo único factor invariante no trivial es $p(s)$.

Sean $\chi_1(s), \chi_2(s), \ldots, \chi_u(s)$ los divisores elementales de la matriz A en $\mathbb{F}$. Sean $L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(u)}$ las correspondientes matrices compañeras. $L^{(j)}$ tiene un único factor invariante no trivial, $\chi_j(s)$, por tanto, por [18, Teorema 5, p. 142]), la matriz diagonal

$$L = \mathrm{Diag}\{L^{(1)}, \ldots, L^{(u)}\}$$

tiene los mismos divisores elementales que A. A la matriz diagonal L, semejante a A, se le llama *segunda forma normal natural de* A [18, p. 150]. Esta forma normal tiene la característica de que el polinomio característico de cada bloque diagonal es potencia de un polinomio irreducible en $\mathbb{F}[s]$.

1.4. Matrices polinomiales y sistemas controlables

Dada una matriz de funciones racionales se puede siempre escribir como una fracción de matrices por la derecha o por la izquierda:

$$G(s) = N_D(s)P_D(s)^{-1} \ \text{ o } \ G(s) = P_I(s)^{-1}N_I(s).$$

A estas representaciones de $G(s)$ como fracción de matrices se les llama *descripción en fracción de matrices por la derecha y por la izquierda* de $G(s)$, donde $P_D(s), P_I(s)$ son los denominadores por la derecha y por la izquierda y $N_D(s)$ y $N_I(s)$ son los numeradores por la derecha y por la izquierda, respectivamente ([31]). Ahora bien, al igual que con las funciones racionales, las descripciones de $G(s)$ como fracción de matrices no son únicas. Sin embargo, como se ha dicho en la introducción, toda matriz racional admite una descripción en fracción de matrices coprima por la derecha; es decir, existen $N_D(s)$ y $P_D(s)$ coprimas por la derecha (Sección 1.1) tales que $G(s) = N_D(s)P_D(s)^{-1}$. A la descripción en fracción de matrices coprima se le llama también *irreducible.* En [31, Teorema 6.5-4, p. 441] se demuestra que las descripciones coprimas por la derecha de una misma matriz racional son equivalentes por la derecha.

Teorema 1.4.1 *$N_1(s)P_1(s)^{-1}$ y $N_2(s)P_2(s)^{-1}$ son dos descripciones en fracción de matrices coprimas por la derecha de $G(s)$ si y sólo si existe una matriz unimodular $U(s)$ tal que $N_1(s) = N_2(s)U(s)$ y $P_1(s) = P_2(s)U(s)$.*

Todos estos resultados son válidos también por la izquierda.

Pensemos ahora que $G(s)$ es la matriz de transferencia de un sistema controlable (1.5), por tanto, admite siempre una representación como fracción de matrices coprimas por la derecha

$$G(s) = (sI_n - A)^{-1}B = N(s)P(s)^{-1}.$$

A los denominadores, todos ellos equivalentes por la derecha, se les llama *representaciones polinomiales matriciales* del sistema controlable.

Definición 1.4.2 Sea $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ un par controlable y sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular. Se dice que $P(s)$ es una *representación polinomial matricial de* (A, B) si existe una matriz polinomial $N(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times m}$ coprima por la derecha con $P(s)$ tal que

$$(sI_n - A)^{-1}B = N(s)P(s)^{-1}.$$

Como $P_1(s) = \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ y $P_2(s) = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \\ 0 & -N(s) & 0 \end{bmatrix}$ son sistemas de orden mínimo que tienen la misma matriz de transferencia, por el Teorema 1.1.3 existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$ y matrices $X(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$, $Y(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times m}$ tales que

$$\begin{bmatrix} U(s) & 0 \\ X(s) & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \\ 0 & -N(s) & 0 \end{bmatrix}.$$

En particular,

$$U(s)[sI_n - A\ B] \begin{bmatrix} V(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

El recíproco también es cierto [58]. Si se verifica (1.15) entonces existe $N(s)$, tal que $P(s)$ y $N(s)$ son coprimas por la derecha y $P_1(s)$ y $P_2(s)$ son estrictamente equivalentes. Así,

$$(sI_n - A)^{-1}B = N(s)P(s)^{-1}.$$

Abusando de la notación, cuando se satisfaga (1.15) diremos que los sistemas $\begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \end{bmatrix}$ son equivalentes en el sentido de Rosenbrock.

Más concretamente, en este trabajo, [58], se dice que $P(s)$ es representación polinomial matricial de (A, B) si y sólo si los sistemas $[sI_n - A\ B]$ y $\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \end{bmatrix}$ son equivalentes en el sentido de Rosenbrock:

Proposición 1.4.3 *Sea* $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *un par controlable y sea* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *una matriz polinomial no singular.* $P(s)$ *es una representación polinomial matricial de* (A, B) *si y sólo si existen matrices unimodulares* $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$*, y una matriz* $Y(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times m}$ *tales que*

$$U(s)[sI_n - A \; B] \begin{bmatrix} V(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \end{bmatrix}.$$

Mucha información del sistema está en la matriz polinomial que lo representa y se puede esperar que la semejanza y equivalencia por feedback de sistemas tenga su reflejo en las correspondientes representaciones polinomiales matriciales. En este sentido los tres siguientes resultados son relevantes [58]:

Proposición 1.4.4 *Sea* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *una matriz polinomial no singular y supongamos que* $d(\det P(s)) = n > 0$*. Entonces existe un par controlable* $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *para el cual* $P(s)$ *es una representación polinomial matricial.*

Proposición 1.4.5 *Sean* $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *pares controlables,* $n \geq m$*, y* $P_1(s), P_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *representaciones polinomiales matriciales de* (A_1, B_1) *y* (A_2, B_2)*, respectivamente. Entonces los pares* (A_1, B_1) *y* (A_2, B_2) *son semejantes si y sólo si existe una matriz unimodular* $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *tal que* $P_2(s) = P_1(s)U(s)$*.*

Proposición 1.4.6 *Sean* $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *pares controlables,* $n \geq m$*, y* $P_1(s), P_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *representaciones polinomiales matriciales de* (A_1, B_1) *y* (A_2, B_2)*, respectivamente. Entonces los pares* (A_1, B_1) *y* (A_2, B_2) *son equivalentes por feedback si y sólo si existen una matriz unimodular* $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *y una matriz bipropia* $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ *tales que* $P_2(s) = B(s)P_1(s)U(s)$*.*

A esta relación de equivalencia definida entre las representaciones polinomiales matriciales de sistemas equivalentes por feedback se le llama equivalencia Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda.

Dos matrices racionales $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times n}$ son *equivalentes Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda* si existen una matriz unimodular $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$ y una matriz bipropia $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ tales que

$$G_2(s) = B(s)G_1(s)U(s).$$

Análogamente, dos matrices $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times n}$ son *equivalentes Wiener–Hopf en el infinito por la derecha* si existen una matriz unimodular $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ y una matriz bipropia $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{n\times n}$ tales que

$$G_2(s) = U(s)G_1(s)B(s).$$

Estas ecuaciones definen sendas relaciones de equivalencia en $\mathbb{F}(s)^{m\times n}$. Existe una forma canónica para cada una de estas relaciones de equivalencia ([13, Capítulo 1], [17], [20, p. 210]):

Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times n}$ con $\operatorname{rang} G(s) = r$, $r \leq \text{mín}\{m, n\}$. $G(s)$ es equivalente Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda (derecha) a una matriz de la forma

$$D(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{Diag}(s^{k_1}, s^{k_2}, \ldots, s^{k_r}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $k_1 \geq \cdots \geq k_r$, $k_i \in \mathbb{Z}$. $D(s)$ es una forma canónica para la equivalencia Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda (derecha) de $G(s)$.

Como consecuencia, los índices k_i constituyen un sistema completo de invariantes para la equivalencia Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda (derecha) de matrices racionales y se llaman *índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda (derecha) de* $G(s)$. Estos índices determinan la *estructura Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda (derecha)* de la matriz.

En consecuencia, los índices de controlabilidad del sistema representado por un par de matrices (A, B) son los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de cualquiera de sus representaciones polinomiales matriciales ([22, 58]).

En el caso de matrices polinomiales, los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda son números enteros no negativos que representan los grados de las columnas de cualquier matriz propia por columnas equivalente por la derecha a dicha matriz polinomial. Repasamos el concepto de matriz propia por columnas y veamos algunos resultados de interés.

Dada una matriz polinomial $P(s) = [p_{ij}(s)] \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$ para cada $j = 1, \ldots, n$ se define el *grado de la columna* j como el grado del elemento $p_{ij}(s)$ de mayor grado con $i = 1, \ldots, m$.

Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$ y d_j el grado de su columna j. La matriz $P(s)$ se puede escribir como ([31, p. 384]):

$$P(s) = P_c D(s) + L(s),$$

donde $D(s) = \mathrm{Diag}(s^{d_1}, s^{d_2}, \ldots, s^{d_n})$, $P_c \in \mathbb{F}^{m\times n}$ es la matriz de coeficientes de los términos de mayor grado en las columnas y $L(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$ es una matriz polinomial que recoge el resto de los términos, de tal forma que el grado de su columna j es estrictamente menor que d_j.

Se dice que $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$ es *propia por columnas* si $\mathrm{rang}\, P_c = \mathrm{rang}\, P(s)$.

Se dice que $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$, $m \geq n$, es *dominante en grado por columnas* si $P_c = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$.

En particular si $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ es un matriz cuadrada no singular diremos que es propia por columnas si $P_c \in \mathbb{F}^{m\times m}$ es no singular, es decir, $\det P_c \neq 0$. Y, $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$, no singular, diremos que es dominante en grado por columnas si $P_c = I_m$, es decir, si para $i \neq j$, $d(p_{ij}(s)) < d(p_{jj}(s))$ con $i, j = 1, \ldots, m$ y $p_{jj}(s)$ mónicos.

El siguiente es un resultado básico sobre matrices propias por columnas (véase, por ejemplo, [17] o [56] en el caso de matrices no singulares):

Lema 1.4.7 *Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$, $\operatorname{rang} P(s) = r$, $r \leq \text{mín}\{m, n\}$. Entonces existe una matriz unimodular $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$ tal que $P(s)U(s) = [P_1(s)\ 0]$ con $P_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times r}$ una matriz de rango completo por columnas, propia por columnas con grados de las columnas ordenados en forma no creciente. Los grados de las columnas están unívocamente determinados, aunque la matriz $U(s)$ en general no lo está.*

Sea $P(s)$ una matriz polinomial y $q = d(P(s))$. Del proceso de reducción [56, p. 27] de una matriz $P(s) = [p_1(s)\cdots p_m(s)]$, con $p_i(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times 1}$ su i-ésima columna, a una matriz propia por columnas $Q(s) = P(s)U(s) = [q_1(s)\cdots q_m(s)]$ se deduce que $d(p_i(s)) \geq d(q_i(s))$, $i = 1,\ldots,m$. Por lo tanto

$$q \geq d(p_i(s)) \geq d(q_i(s)),\ \ i = 1,\ldots,m.$$

Teniendo en cuenta que los índices de Wiener–Hopf en el infinito de la matriz $P(s)$ son una reordenación en forma no creciente de los grados de las columnas de la matriz $Q(s)$ propia por columnas se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.4.8 *Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular con $q = d(P(s))$ y sean $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m$ sus índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda. Entonces $q - k_i \geq 0$ para todo $i = 1,\ldots,m$.*

Análogamente, se definen las matrices polinomiales propias por filas y dominantes en grado por filas.

Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$ y sea d_i el *grado de su fila i*, es decir el grado del elemento de mayor grado en dicha fila. La matriz $P(s)$ se puede escribir como $P(s) = D(s)P_f + L(s)$, donde $D(s) = \operatorname{Diag}(s^{d_1}, s^{d_2},\ldots,s^{d_m})$, $P_f \in \mathbb{F}^{m\times n}$ la matriz de los coeficientes de los términos de mayor grado es las filas y $L(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$ es una matriz polinomial que recoge el resto de los términos, de tal forma que el grado de su fila i es estrictamente menor que d_i.

La matriz $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$ es *propia por filas* si $\operatorname{rang} P_f = \operatorname{rang} P(s)$. $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$, $m \leq n$, es dominante en grado por filas si $P_c = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}$.

En particular si $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ es un matriz cuadrada no singular diremos que es propia por filas si $P_f \in \mathbb{F}^{m\times m}$ es no singular, es decir, $\det P_f \neq 0$. Y, $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ no singular diremos que es dominante en grado por filas si $P_f = I_m$, es decir, si para $i \neq j$, $d(p_{ij}(s)) < d(p_{ii}(s))$ con $i, j = 1, \ldots, m$ y $p_{ii}(s)$ mónicos. Nótese que la forma de Hermite de una matriz polinomial no singular (Sección 1.2.6) es dominante en grado por filas.

Es claro que toda matriz dominante en grado por columnas (filas) es propia por columnas (filas). El recíproco no es cierto en general.

1.5. Mayorización de particiones y m-tuplas de números enteros

Una *partición* es una sucesión (finita o infinita) de números enteros no negativos

$$a = (a_1, a_2, \ldots)$$

ordenados de forma no creciente

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots$$

y tales que sólo hay un número finito distintos de cero.

La *longitud* de una partición a es el número de componentes de a distintas de cero. Se denotará por $l(a)$.

En el conjunto de las particiones se define la siguiente relación de orden (parcial) [25, p. 45], [39, p. 6],[44, p. 7]:

Si a y b son particiones y $m = \max\{l(a), l(b)\}$ se dice que a está *mayo-*

rizada por b o que b *mayoriza* a a, y se denota por $a \prec b$, si

$$\sum_{i=1}^{j} a_i \leq \sum_{i=1}^{j} b_i, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{1.16}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} b_i. \tag{1.17}$$

Esta definición es equivalente a ([44, p. 9]):

$$\sum_{i=1}^{j} b_{m-i+1} \leq \sum_{i=1}^{j} a_{m-i+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{1.18}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} b_i. \tag{1.19}$$

Sean ahora dos m-tuplas $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ de números enteros cualesquiera ordenados de forma no creciente $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_m$. Se dice que a está *mayorizada* por b o que b *mayoriza* a a, y se denota por

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m) \prec (b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

si se cumplen (1.16) y (1.17), o se cumplen (1.18) y (1.19).

Si en lugar de tener particiones tenemos secuencias de números enteros cuyos elementos no están necesariamente ordenados en sentido no creciente, diremos que dos secuencias de números enteros no negativos a y b son tales que a está mayorizada por b, $a \prec b$, si la particiones obtenidas de a y b ordenando sus componentes en sentido no creciente cumplen (1.16) y (1.17), o cumplen (1.18) y (1.19).

Capítulo 2

Índices de Wiener–Hopf y estructura finita e infinita de matrices racionales

2.1. Introducción

En este capítulo extendemos el resultado del Teorema de estructura de Rosenbrock a matrices racionales no singulares. Como ya hemos comentado en la introducción, el Teorema original de Rosenbrock ([50]), caracteriza los posibles invariantes de semejanza (factores invariantes) que pueden asignarse a la matriz de estados de un sistema controlable mediante feedback de estados. También justificamos que en términos de matrices polinomiales, da una caracterización de los posibles índices de Wiener–Hopf en el infinito de todas las matrices polinomiales que tienen los mismos factores invariantes. Equivalentemente caracteriza los posibles factores invariantes de las matrices polinomiales con los mismos índices de Wiener–Hopf en el infinito. En otras palabras, establece una relación que deben satisfacer los factores invariantes y los índices de Wiener–Hopf en el infinito para que las órbitas que éstas representan tengan intersección no vacía. El resultado en términos de matrices polinomiales es el siguiente:

Teorema 2.1.1 *Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ enteros no negativos y polinomios mónicos, respectivamente. Entonces existe una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ como factores invariantes y $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito si y sólo si*

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (d(\alpha_m(s)), \ldots, d(\alpha_1(s))).$$

En este capítulo generalizamos el resultado del Teorema de Rosenbrock estudiando la relación entre la estructura finita (forma de Smith–McMillan), la estructura infinita (forma de Smith–McMillan en el infinito) e índices de Wiener–Hopf en el infinito para matrices racionales no singulares. En lo sucesivo nos referiremos exclusivamente a los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda pero, dado que las matrices racionales y sus transpuestas tienen las mismas estructuras finitas e infinitas, todos los resultados son válidos para los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la derecha (ver la Observación 2.5.2).

Concretamente analizamos el siguiente problema:

Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $q_1 \geq \cdots \geq q_m$ enteros. Sean $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ funciones racionales irreducibles, donde $\epsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{F}[s]$ son polinomios mónicos y coprimos tales que $\epsilon_i(s) \mid \epsilon_{i+1}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, y $\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. ¿Bajo qué condiciones existe una matriz racional no singular $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ que tenga $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda, $s^{q_1}, \ldots, s^{q_m}$ como funciones racionales invariantes en el infinito y $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ como funciones racionales invariantes finitas?

Un resultado parcial de la relación entre los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y la estructura en el infinito de matrices polinomiales no singulares se encuentra en [20]. La estructura en el infinito de matrices racionales es de gran interés en teoría de control (ver, por ejemplo [55]). Se puede ver una interpretación a control de la estructura en el infinito para matrices racionales en el trabajo de Dion y Commault [15, Sección 4], donde al igual que se hace en [17] para la estructura Wiener–Hopf en el infinito, en este trabajo los autores estudian la estructura en el infinito de la matriz de transferencia y la caracterizan en términos de invariantes de sistemas.

Abordamos el estudio del problema planteado resolviendo inicialmente dos problemas más simples. En la Sección 2.2 extendemos el resultado del Teorema de Rosenbrock a matrices racionales no singulares con estructura finita prescrita, es decir damos una solución al problema cuando no prescribimos la estructura en el infinito. Para estudiar este mismo problema cuando prescribimos la estructura en el infinito necesitamos el concepto de índices de Wiener–Hopf locales. En la Sección 2.3 damos los resultados previos que necesitamos para definir este concepto. En la Sección 2.4 damos la relación entre los factores invariantes en el infinito y los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de matrices polinomiales y después extendemos este resultado a matrices racionales. Por tanto tenemos la solución del problema cuando no prescribimos la estructura finita. Por último, utilizando los resultados de las Secciones 2.2 y 2.4, resolvemos el problema planteado prescribiendo para matrices racionales los tres tipos de invariantes: índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y estructura finita e infinita. Esto se hará en la Sección 2.5.

En el artículo [1] están contenidos los resultados de este capítulo.

2.2. Índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y estructura finita de matrices racionales

Se pueden estudiar muchos problemas sobre la estructura de matrices racionales a partir de los correspondientes problemas sobre matrices polinomiales. El resultado que mostramos a continuación es un ejemplo más de este hecho, en el cual extendemos la versión polinomial del Teorema de Rosenbrock (Teorema 2.1.1) a matrices racionales. La idea es la siguiente: Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ una matriz racional y sea $d(s)$ el polinomio mónico mínimo común múltiplo de sus denominadores. Entonces $G(s)$ se puede escribir como

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} N(s), \tag{2.1}$$

donde $N(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$.

Los tres lemas siguientes estudian la relación entre la forma de Smith–McMillan finita e infinita de una matriz racional $G(s)$ y la forma de Smith–McMillan finita e infinita de su correspondiente matriz polinomial $N(s)$, así como la relación entre los índices de Wiener–Hopf en el infinito de $G(s)$ y $N(s)$.

Lema 2.2.1 *Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ una matriz racional no singular, $d(s)$ el polinomio mónico mínimo común múltiplo de sus denominadores tal que $d(s)G(s) = N(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$. Sean $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ las funciones racionales invariantes de $G(s)$, donde $\epsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{F}[s]$ son polinomios mónicos y coprimos tales que $\epsilon_i(s) \mid \epsilon_{i+1}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, mientras que $\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Sea $\sigma_i(s) = \frac{d(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1, \ldots, m$. Entonces $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ son las funciones racionales invariantes de $G(s)$ si y sólo si $\epsilon_1(s)\sigma_1(s), \ldots, \epsilon_m(s)\sigma_m(s)$ son los factores invariantes de $N(s)$.*

Demostración. Existen matrices unimodulares $U(s), V(s)$ tales que

$$G(s) = U(s)\,\mathrm{Diag}\left(\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\epsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_r(s)}{\psi_r(s)}\right) V(s)$$

si y sólo si existen matrices unimodulares $U(s), V(s)$ tales que

$$N(s) = d(s)G(s) = U(s)\,\mathrm{Diag}\left(\sigma_1(s)\epsilon_1(s), \sigma_2(s)\epsilon_2(s), \ldots, \sigma_m(s)\epsilon_m(s)\right) V(s).$$

Veamos que se satisfacen las relaciones de divisibilidad entre las funciones racionales invariantes de $G(s)$ y los factores invariantes de $N(s)$. Como $\epsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{F}[s]$ son polinomios coprimos, se tiene que $\epsilon_i(s) \mid \epsilon_{i+1}(s)$ y $\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$ si y sólo si $\epsilon_i(s)\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)\epsilon_{i+1}(s)$, para $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Esta última condición es a su vez equivalente a que $\epsilon_i(s)\sigma_i(s) \mid \epsilon_{i+1}(s)\sigma_{i+1}(s)$, para $i = 1, 2, \ldots, m-1$. □

Para la demostración de los dos lemas siguientes se utilizan las mismas ideas.

Lema 2.2.2 *Sean $G(s)$, $d(s)$, y $N(s)$ como en el Lema* 2.2.1*, sea $d = d(d(s))$ y $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_m$ enteros. Entonces $s^{q_1}, s^{q_2}, \ldots, s^{q_m}$ son las funciones racionales invariantes en el infinito de $G(s)$ si y sólo si $s^{q_1+d}, s^{q_2+d}, \ldots, s^{q_m+d}$ son los factores invariantes en el infinito de $N(s)$.*

Lema 2.2.3 *Sean $G(s)$, $d(s)$, $N(s)$, y d como en el Lema* 2.2.2*, sean $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m$ enteros. Entonces $k_1, k_2, \ldots, k_m$ son los índices de Wiener–Hopf en el infinito de $G(s)$ por la izquierda si y sólo si $k_1+d, k_2+d, \ldots, k_m+d$ son los índices de Wiener–Hopf en el infinito de $N(s)$ por la izquierda.*

Como ya hemos dicho en el Capítulo 1, los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de matrices polinomiales son enteros no negativos. En el caso de matrices racionales no es así. En particular para matrices racionales propias no singulares se tiene que:

- Si $G(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$, entonces $k_i \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ (ver [56]). En efecto, sea $G(s) = \frac{1}{d(s)}N(s)$, $q = d(N(s))$ y $p = d(d(s))$. Sean $l_1, l_2, \dots, l_m$ los índices de Wiener–Hopf en el infinito de la matriz polinomial $N(s)$. Como $G(s)$ es un matriz de funciones racionales propias, $p \geq q$. Además, por el Lema 1.4.8 $q \geq l_i$ para todo i. Por lo tanto
$$0 \geq q - p \geq l_i - p,$$
con $l_i - p = k_i$ (Lema 2.2.3) para $i = 1, \dots, m$.

  En particular, si $G(s)$ es estrictamente propia, entonces $k_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

- Si $G(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$, entonces $q_i \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ (ver [54]). En particular, si $G(s)$ es estrictamente propia, entonces $q_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Con la ayuda de los Lemas 2.2.1 y 2.2.3, podemos dar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una matriz racional no singular con índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y estructura finita prescrita.

Teorema 2.2.4 *Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ enteros y $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ funciones racionales irreducibles, donde $\epsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{F}[s]$ son mónicos y coprimos tales que $\epsilon_i(s) \mid \epsilon_{i+1}(s)$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, y $\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m-1$. Entonces existe una matriz no singular $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ con $k_1, \dots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ como funciones racionales invariantes si y sólo si*
$$(k_1, \dots, k_m) \prec (d(\epsilon_m(s)) - d(\psi_m(s)), \dots, d(\epsilon_1(s)) - d(\psi_1(s))). \tag{2.2}$$

Demostración. Sean $G(s)$, $d(s)$, $N(s)$ y d como en el Lema 2.2.2. Usando los Lemas 2.2.1 y 2.2.3 sabemos que si $\sigma_i(s) = \frac{d(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1, \dots, m$, entonces

$\epsilon_1(s)\sigma_1(s) \mid \cdots \mid \epsilon_m(s)\sigma_m(s)$ son los factores invariantes de $N(s)$ y $k_1 + d, \ldots, k_m + d$ son sus índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda. Por tanto, por el Teorema de Rosenbrock 2.1.1 tenemos que

$$(k_1 + d, \ldots, k_m + d) \prec (d(\epsilon_m(s)\sigma_m(s)), \ldots, d(\epsilon_1(s)\sigma_1(s))).$$

Pero $d(\sigma_i(s)) = d - d(\psi_i(s))$, $i = 1, \ldots, m$, por tanto

$$(k_1 + d, \ldots, k_m + d) \prec (d(\epsilon_m(s)) - d(\psi_m(s)) + d, \ldots, d(\epsilon_1(s)) - d(\psi_1(s)) + d)$$

y se satisface la condición (2.2).

Recíprocamente, por la condición de mayorización tenemos que $k_m \geq d(\epsilon_1(s)) - d(\psi_1(s))$, o bien $k_m + d(\psi_1(s)) \geq d(\epsilon_1(s)) \geq 0$. En consecuencia, $k_1 + d(\psi_1(s)) \geq \cdots \geq k_m + d(\psi_1(s)) \geq 0$. Por otro lado, como $\psi_i(s)$ divide a $\psi_1(s)$, $i = 1, \ldots, m$, tenemos que $\dfrac{\epsilon_1(s)}{\psi_i(s)}\psi_1(s)$ son polinomios que satisfacen $\dfrac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}\psi_1(s) \mid \cdots \mid \dfrac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\psi_1(s)$. De (2.2) se sigue que

$$\begin{aligned}&(k_1 + d(\psi_1(s)), \ldots, k_m + d(\psi_1(s)))\\ &\prec (d(\epsilon_m(s)) - d(\psi_m(s)) + d(\psi_1(s)), \ldots, d(\epsilon_1(s)) - d(\psi_1(s)) + d(\psi_1(s))).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Por tanto

$$(k_1 + d(\psi_1(s)), \ldots, k_m + d(\psi_1(s))) \prec \left(d\left(\frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\psi_1(s)\right), \ldots, d\left(\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}\psi_1(s)\right)\right). \tag{2.4}$$

Por el Teorema 2.1.1 existe $N(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $k_1 + d(\psi_1(s)), \ldots, k_m + d(\psi_1(s))$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y $\dfrac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}\psi_1(s) \mid \cdots \mid \dfrac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\psi_1(s)$ como factores invariantes. Por los Lemas 2.2.1 y 2.2.3, $G(s) = \dfrac{1}{\psi_1(s)}N(s)$ es la matriz deseada. $\square$

2.3. Índices de Wiener–Hopf locales de una matriz polinomial

Estamos interesados en estudiar la relación entre la estructura en el infinito (forma de Smith–McMillan en el infinito) y los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de una matriz polinomial. Mediante una transformación conforme se puede trasladar el punto del infinito a cualquier punto finito. Por tanto, haciendo uso de las propiedades conocidas (Teorema de Rosenbrock) para la estructura finita de la matriz obtenida tras la transformación, podemos obtener información sobre propiedades en el infinito de la matriz original. Recordemos que la estructura finita local se reduce a los divisores elementales pero necesitamos el concepto de índices de Wiener–Hopf locales. Este concepto no es nuevo. Como se ha dicho en la introducccíón los índices de Wiener–Hopf de matrices racionales están ya definidos respecto a un contorno cerrado del plano complejo. Ahora bien, como nosotros vamos a tratar sólo con propiedades algebraicas de los sistemas, vamos a suponer que el cuerpo subyacente es un cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$, por tanto, necesitamos extender la definición de índices de Wiener–Hopf locales a un cuerpo arbitrario.

Necesitamos algunos resultados previos.

Proposición 2.3.1 *Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular y $\pi(s) \in \mathbb{F}[s]$ un polinomio mónico irreducible. Entonces, existen matrices $P_1(s), Q(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que*

i) $P(s) = P_1(s)Q(s)$,

ii) los factores invariantes de $P_1(s)$ son potencias de $\pi(s)$, y

iii) los factores invariantes de $Q(s)$ son relativamente primos con $\pi(s)$.

Demostración. Sea $S(s) = \mathrm{Diag}(\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s))$ la forma de Smith (finita) de $P(s)$, con $\alpha_1(s) \mid \cdots \mid \alpha_m(s)$ sus factores invariantes. Por lo tanto, existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que

$$P(s) = U(s)\,\mathrm{Diag}(\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s))V(s). \tag{2.5}$$

Si $\pi(s)$ no es divisor de $\det P(s)$, entonces $P_1(s) = I_m$ y $Q(s) = P(s)$ cumplen las condiciones deseadas. Si $\pi(s) \mid \det P(s)$, entonces $\alpha_i(s) = \pi(s)^{d_i}\beta_i(s)$ con $d_m \geq \cdots \geq d_1 \geq 0$ y m.c.d.$(\beta_i(s), \pi(s)) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Por tanto,

$$P(s) = P_1(s)Q(s) \tag{2.6}$$

con

$$\begin{aligned} P_1(s) &= U(s)\,\mathrm{Diag}(\pi(s)^{d_1}, \ldots, \pi(s)^{d_m}), \\ Q(s) &= \mathrm{Diag}(\beta_1(s), \ldots, \beta_m(s))V(s), \end{aligned}$$

cumpliendo las condiciones que deseamos. □

El siguiente resultado es fundamental y está en la base de gran parte de la teoría que se construirá de ahora en adelante.

Proposición 2.3.2 *Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular y $\pi(s)$ un polinomio mónico irreducible. Si existen matrices polinomiales $P_1(s), Q(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ y $\overline{P_1}(s), \overline{Q}(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que*

i) $P(s) = P_1(s)Q(s) = \overline{P_1}(s)\overline{Q}(s)$,

ii) los factores invariantes de $P_1(s)$ y $\overline{P_1}(s)$ son potencias de $\pi(s)$, y

iii) los factores invariantes de $Q(s)$ y $\overline{Q}(s)$ son relativamente primos con $\pi(s)$,

entonces $P_1(s)$ y $\overline{P_1}(s)$ son equivalentes por la derecha.

Demostración. Usando las condiciones (i), (ii), y (iii) y teniendo en cuenta el Lema 1.2.7, se puede demostrar que $P_1(s)$ y $\overline{P_1}(s)$, al igual que $Q(s)$ y $\overline{Q}(s)$, tienen los mismos factores invariantes; los primeros potencias de $\pi(s)$ y los segundos relativamente primos con $\pi(s)$.

Por (i) tenemos que

$$P_1(s) = \overline{P_1}(s)\overline{Q}(s)Q(s)^{-1}. \tag{2.7}$$

Sea $G(s) = \overline{Q}(s)Q(s)^{-1}$. Dado que $Q(s)^{-1} = \dfrac{1}{\det Q(s)}\operatorname{Adj}(Q(s))$, se sigue que la matriz $(\det Q(s))G(s)$ es polinomial. Sea $D(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ la forma de Smith (finita) de $(\det Q(s))G(s)$. Por tanto, existen matrices unimodulares $U(s)$, $V(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que

$$D(s) = U(s)(\det Q(s))G(s)V(s),$$

o bien

$$U(s)G(s)V(s) = \frac{1}{\det Q(s)}D(s).$$

Por otro lado, si dividimos $D(s)$ por $\det Q(s)$ y hacemos todas las posibles cancelaciones, obtenemos la forma de Smith–McMillan (finita) de $G(s)$ (ver Capítulo 1):

$$S(s) = U(s)G(s)V(s) = \frac{1}{\det Q(s)}D(s) = \operatorname{Diag}\left(\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\right),$$

donde $\epsilon_i(s), \psi_i(s)$ son polinomios mónicos y coprimos tales que $\epsilon_i(s)|\epsilon_{i+1}(s)$, mientras que $\psi_{i+1}(s)|\psi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Además, como $\psi_k(s)$ es un divisor de $\det Q(s)$ para todo k, concluimos que los polinomios $\psi_k(s)$ son relativamente primos con los factores invariantes de $\overline{P_1}(s)$.

Notemos que $\det S(s) = 1$ debido a que $\det(\overline{Q}(s)Q(s)^{-1})$ es una constante. Vamos a probar que en realidad $S(s) = I_m$. Si por el contrario suponemos que esto no es verdad, necesariamente existe un k tal que $\psi_k(s) \neq 1$ (porque en caso contrario, como $\det S(s) = 1$, tendríamos que $\epsilon_i(s) = 1$ para todo i y entonces $S(s) = I_m$).

Sea $a_{ik}(s)\dfrac{\epsilon_k(s)}{\psi_k(s)}$ un elemento arbitrario de la columna k-ésima de la matriz $\overline{P_1}(s)U(s)^{-1}S(s)$, donde $a_{ik}(s)$ denota el elemento en la posición (i,k) de la matriz $\overline{P_1}(s)U(s)^{-1}$. Dado que $P_1(s)V(s) = \overline{P_1}(s)U(s)^{-1}S(s)$ es una matriz polinomial, debe suceder que $a_{ik}(s)\dfrac{\epsilon_k(s)}{\psi_k(s)}$ es un polinomio. Como por otro lado m.c.d.$(\epsilon_k(s), \psi_k(s)) = 1$ concluimos que necesariamente $\psi_k(s) \mid a_{ik}(s)$ para todo i; es decir, $\psi_k(s)$ es un divisor de todos los elementos de la columna k-ésima de la matriz $\overline{P_1}(s)U(s)^{-1}$ y en consecuencia un divisor de $\det(\overline{P_1}(s)U(s)^{-1})$.

Por otro lado habíamos visto que los polinomios $\psi_k(s)$ son relativamente primos con los factores invariantes de $\overline{P_1}(s)$. Así, hemos llegado a un absurdo. Por tanto, $S(s) = I_m$ y $P_1(s) = \overline{P_1}(s)U(s)^{-1}V(s)^{-1}$ como deseábamos.

□

Sabemos que los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de una matriz polinomial $P(s)$ son los grados de las columnas de cualquier matriz propia por columnas equivalente por la derecha a $P(s)$. En realidad, estos grados son invariantes para la equivalencia por la derecha. Así, teniendo en cuenta las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.2, tiene perfecto sentido la siguiente definición.

Definición 2.3.3 Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular, y $\pi(s) \in \mathbb{F}[s]$ un polinomio mónico irreducible. Sean $P_1(s), Q(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ matrices polinomiales tales que

i) $P(s) = P_1(s)Q(s)$,

ii) los factores invariantes de $P_1(s)$ son potencias de $\pi(s)$, y

iii) los factores invariantes de $Q(s)$ son relativamente primos con $\pi(s)$.

Entonces llamaremos **índices de Wiener–Hopf locales** *de* $P(s)$ *respecto* *a* $\pi(s)$ *por la izquierda* a los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de $P_1(s)$.

Del mismo modo se pueden definir los índices de Wiener–Hopf locales de $P(s)$ respecto a $\pi(s)$ por la derecha como los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la derecha de la matriz $P_1'(s)$, factor de $P(s)$ por la derecha, es decir, $P(s) = Q'(s)P_1'(s)$, tal que los factores invariantes de $P_1'(s)$ son potencias de $\pi(s)$ y los factores invariantes de $Q'(s)$ son relativamente primos con $\pi(s)$. Es fácil demostrar la existencia de tales matrices $Q'(s)$ y $P_1'(s)$. Además, siguiendo las ideas de la Proposición 2.3.2 se puede demostrar que todas las matrices factor de $P(s)$ por la derecha que satisfacen las condiciones anteriores son equivalentes por la izquierda y por tanto tienen los mismos índices de Wiener–Hopf en el infinito por la derecha.

2.4. Índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y estructura infinita de matrices racionales

Primero estudiamos la relación entre los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y los factores invariantes en el infinito para matrices polinomiales no singulares. Después extenderemos el resultado a matrices racionales no singulares.

Lema 2.4.1 (a) *Sea* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *y* $q = d(P(s))$. *Entonces* $s^q P(1/s)$ *es una matriz polinomial.*

(b) *Sea* $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *una matriz unimodular. Entonces* $\det U(1/s) = c \in \mathbb{F}, c \neq 0$ *y* $U(1/s)$ *es una matriz bipropia.*

(c) *Sea* $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ *bipropia y* $m(s)$ *el polinomio mónico mínimo común múltiplo de los denominadores de la matriz* $B(1/s)$. *En-*

tonces la matriz $m(s)B(1/s)$ es polinomial, $\text{m.c.d.}(m(s), s) = 1$ *y* $\text{m.c.d.}(\det(m(s)B(1/s)), s) = 1$.

(d) *Si $P(s)$ es una matriz propia por columnas con grados de sus columnas $p_1, \ldots, p_m$ y $D(s) = \mathrm{Diag}(s^{p_1}, \ldots, s^{p_m})$, entonces $P(1/s)D(1/s)^{-1}$ es una matriz polinomial.*

Demostración.

(a) Sea $p(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ un elemento cualquiera de la matriz polinomial $P(s)$, $a_n \neq 0$ y $n \leq q$. Entonces

$$p(1/s) = \frac{a_n + a_{n-1}s + \cdots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{s^n}.$$

Por tanto como $q - n \geq 0$ se tiene que los elementos de la matriz $s^q P(1/s)$ son polinomios de la forma $s^q p(1/s) = (a_n + a_{n-1}s + \cdots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n)s^{q-n} \in \mathbb{F}[s]$.

(b) Primero veamos que todos los elementos de $U(1/s)$ son funciones racionales propias. Sea $u(s)$ un elemento cualquiera de $U(s)$, $d(u(s)) = p$. Como se ha visto en a), $u(1/s) = \dfrac{n(s)}{s^p}$, con $n(s) \in \mathbb{F}[s]$ tal que $d(n(s)) \leq p$. Por tanto la matriz $U(1/s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$. Además como $\det U(s) = c \neq 0$ con $c \in \mathbb{F}$, entonces $\det U(1/s) = c$ y por tanto $U(1/s)$ es una matriz bipropia.

(c) Sea $g(s) = \dfrac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_p s^p + b_{p-1}s^{p-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$, $a_n \neq 0$, $b_p \neq 0$ y $p \geq n$ un elemento de la matriz $B(s)$. Por tanto

$$g(1/s) = \frac{a_n + a_{n-1}s + \cdots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{b_p + b_{p-1}s + \cdots + b_1 s^{p-1} + b_0 s^p} s^{p-n}.$$

Observemos que los denominadores de los elementos de la matriz $B(1/s)$ son primos con s entonces $\text{m.c.d.}(m(s), s) = 1$ y $m(s)B(1/s)$ es polinomial. Además como $B(s)$ es bipropia su determinante es una unidad en $\mathbb{F}_{pr}(s)$, es decir es una función racional tal que el grado del numerador es igual al grado del denominador, $\det B(s) = \dfrac{p_d s^d + \cdots + p_1 s + p_0}{q_d s^d + \cdots + q_1 s + q_0}$, $p_d \neq 0$, $q_d \neq 0$. En consecuencia

$$\det(m(s)B(1/s)) = m(s)^m \frac{p_d + \cdots + p_1 s^{d-1} + p_0 s^d}{q_d + \cdots + q_1 s^{d-1} + q_0 s^d}.$$

Teniendo en cuenta que en la expresión anterior todos los factores son primos con s, $\det(m(s)B(1/s))$ es el polinomio primo con s que se obtiene al cancelar todos los factores comunes.

(d) La matriz $P(s)$ se puede escribir como (Sección 1.4):

$$P(s) = P_c D(s) + L(s),$$

donde $P_c \in \mathbb{F}^{m\times n}$ es la matriz de coeficientes de los términos de mayor grado en las columnas y $L(s)$ es una matriz polinomial, de tal forma que el grado de su columna j es estrictamente menor que p_j. Entonces

$$P(1/s)D(1/s)^{-1} = P_c + L(1/s)D(1/s)^{-1}$$

Veamos que la matriz $L(1/s)D(1/s)^{-1}$ es polinomial. Sea $l_{ij}(s)$ un elemento arbitrario de la columna j de $L(s)$, con $d(l_{ij}(s)) = d_{ij} < p_j$ y $l_{ij}(1/s) = \dfrac{n_{ij}(s)}{s^{d_{ij}}}$. Por tanto el elemento en la posición (i,j) de la matriz $L(1/s)D(1/s)^{-1} = L(1/s)D(s)$ es polinomial, $l_{ij}(1/s)s^{p_j} = n_{ij}(s)s^{p_j - d_{ij}} \in \mathbb{F}[s]$.

$\square$

Lema 2.4.2 *Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular con $q = d(P(s))$ y sean $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m$ sus índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda. Entonces existe un entero no negativo d y un polinomio relativamente primo con s, $m(s)$, tal que $d+q-k_m, \ldots, d+q-k_1$ son los índices de Wiener–Hopf locales de $m(s)s^{d+q}P(1/s)^T \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ respecto a s por la izquierda.*

Demostración. Como $k_1, k_2, \ldots, k_m$ son los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de $P(s)$, existen matrices $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$, unimodular, y $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$, bipropia, tales que

$$P(s) = B(s)\,\mathrm{Diag}(s^{k_m}, \ldots, s^{k_1})U(s). \tag{2.8}$$

Sea $m(s)$ el mínimo común múltiplo mónico de los denominadores de $B(1/s)$ y $d = d(U(s))$. Entonces, sustituyendo s por $1/s$ y multiplicando por $m(s)s^{d+q}$ en (2.8), tenemos

$$m(s)s^{d+q}P(1/s) = m(s)B(1/s)\,\mathrm{Diag}(s^{d+q-k_m}, \ldots, s^{d+q-k_1})U(1/s),$$

y transponiendo

$$m(s)s^{d+q}P(1/s)^T = U(1/s)^T\,\mathrm{Diag}(s^{d+q-k_m}, \ldots, s^{d+q-k_1})m(s)B(1/s)^T.$$

Llamamos $Q(s) = m(s)B(1/s)^T$ y $P_1(s) = U(1/s)^T\,\mathrm{Diag}(s^{d+q-k_m}, \ldots, s^{d+q-k_1})$. Entonces, usando el Lema 2.4.1, tenemos que:

(i) $m(s)s^{d+q}P(1/s)^T = P_1(s)Q(s)$ es una matriz polinomial. $P_1(s)$ es también polinomial. En efecto, por un lado, $s^dU(1/s)^T$ es polinomial, y por otro lado, se tiene que $q - k_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$ (Lema 1.4.8).

(ii) Los factores invariantes de $P_1(s)$ son potencias de s.

(iii) Los factores invariantes de $Q(s)$ son relativamente primos con s.

(iv) Los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de $P_1(s)$ son $d + q - k_m, \ldots, d + q - k_1$, ya que $U(1/s)$ es una matriz bipropia.

Deducimos de la Definición 2.3.3, que los índices de Wiener–Hopf locales de $m(s)s^{d+q}P(1/s)^T$ respecto a s por la izquierda son $d+q-k_m, \ldots, d+q-k_1$.
□

Recordemos que si $s^{q_1},\dots,s^{q_m}$ son las factores invariantes en el infinito de la matriz polinomial $P(s)$, entonces $q_1=d(P(s))$ (ver Sección 1.2.7). Por tanto $s^{q_1}P(1/s)$ es una matriz polinomial (Lema 2.4.1).

Lema 2.4.3 *Sea $P(s)\in\mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular y $s^{q_1},s^{q_2},\dots,s^{q_m}$, con $q_1\geq q_2\geq\cdots\geq q_m$ sus factores invariantes en el infinito. Entonces para cualquier entero no negativo d y cualquier polinomio relativamente primo con s, $m(s)$, los polinomios $s^{d+q_1-q_1}\mid\cdots\mid s^{d+q_1-q_m}$ son los divisores elementales finitos de la matriz polinomial $m(s)s^{d+q_1}P(1/s)^T\in\mathbb{F}[s]^{m\times m}$ relativos a s.*

Demostración. Sean $\alpha_1(s)\mid\cdots\mid\alpha_m(s)$ los factores invariantes finitos de $s^{q_1}P(1/s)$. Entonces existen matrices unimodulares $U(s),V(s)\in\mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que
$$U(s)s^{q_1}P(1/s)V(s)=\operatorname{Diag}(\alpha_1(s),\dots,\alpha_m(s)). \tag{2.9}$$
Escribimos $\alpha_i(s)=s^{a_i}\beta_i(s)$ con m.c.d.$(\beta_i(s),s)=1$, $i=1,\dots,m$, $0\leq a_1\leq\cdots\leq a_m$. Mediante el cambio s por $1/s$ en (2.9) tenemos que
$$U(1/s)\frac{1}{s^{q_1}}P(s)V(1/s)=\operatorname{Diag}\left(\frac{1}{s^{a_1}}\beta_1(1/s),\dots,\frac{1}{s^{a_m}}\beta_m(1/s)\right). \tag{2.10}$$
Obsérvese que las funciones racionales $\beta_i(1/s)$ son funciones racionales bipropias porque m.c.d.$(\beta_i(s),s))=1$, $i=1,\dots,m$. Por tanto, multiplicando (2.10) por la derecha por la matriz bipropia
$$B(s)=\operatorname{Diag}\left(\frac{1}{\beta_1(1/s)},\dots,\frac{1}{\beta_m(1/s)}\right)$$
y llamando $B_1(s)=U(1/s)$ y $B_2(s)=V(1/s)B(s)$, tenemos que
$$B_1(s)P(s)B_2(s)=\operatorname{Diag}(s^{q_1-a_1},\dots,s^{q_1-a_m}),$$
con $B_1(s)$ y $B_2(s)$ matrices bipropias y $q_1-a_1\geq\cdots\geq q_1-a_m$. Esto significa que $s^{q_1-a_1},s^{q_1-a_2},\dots,s^{q_1-a_m}$ son los factores invariantes en el infinito de

$P(s)$. Pero, por hipótesis, éstos son $s^{q_1}, \ldots, s^{q_m}$. Por tanto, $a_i = q_1 - q_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Ahora, sea d cualquier entero no negativo y $m(s)$ cualquier polinomio relativamente primo con s. Multiplicado (2.9) por $m(s)s^d$ y transponiendo,

$$\begin{aligned} &V(s)^T(m(s)s^{d+q_1}P(1/s)^T)U(s)^T \\ &= \operatorname{Diag}(s^{d+q_1-q_1}m(s)\beta_1(s), \ldots, s^{d+q_1-q_m}m(s)\beta_m(s)), \end{aligned}$$

donde m.c.d.$(m(s)\beta_i(s), s) = 1$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Esto significa que

$$s^{d+q_1-q_1}m(s)\beta_1(s), \ldots, s^{d+q_1-q_m}m(s)\beta_m(s)$$

son los factores invariantes de $m(s)s^{d+q_1}P(1/s)^T$ y por tanto $s^{d+q_1-q_1} \mid \cdots \mid s^{d+q_1-q_m}$ son sus divisores elementales finitos asociados al polinomio irreducible s. $\square$

A continuación damos el Teorema de Rosenbrock local respecto a un polinomio mónico irreducible $\pi(s) \in \mathbb{F}[s]$ para cualquier matriz polinomial no singular. En él demostramos el resultado de mayorización entre los índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda respecto a $\pi(s)$ y los factores invariantes locales respecto a $\pi(s)$. Estos últimos son los divisores elementales potencias de $\pi(s)$ (ver, Sección 1.2.7).

Teorema 2.4.4 *Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$, $t_m \geq \cdots \geq t_1$ enteros no negativos. Sea $\pi(s) \in \mathbb{F}[s]$ un polinomio mónico irreducible. Entonces existe una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda respecto a $\pi(s)$ y $\pi(s)^{t_1} \mid \cdots \mid \pi(s)^{t_m}$ como sus divisores elementales finitos asociados a $\pi(s)$ si y sólo si*

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (t_m d(\pi(s)), \ldots, t_1 d(\pi(s))). \tag{2.11}$$

Demostración. Supongamos que existe una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tal que $\alpha_1(s) \mid \cdots \mid \alpha_m(s)$ son sus factores invariantes finitos. Escribimos $\alpha_i(s) = \pi(s)^{t_i}\beta_i(s)$ con m.c.d.$(\beta_i(s), \pi(s)) = 1$, $i = 1, \ldots, m$. La forma de Smith (finita) de $P(s)$ es $\mathrm{Diag}(\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s))$ y existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que $P(s) = P_1(s)Q(s)$ con

$$P_1(s) = U(s)\,\mathrm{Diag}(\pi(s)^{t_1}, \ldots, \pi(s)^{t_m})$$

y

$$Q(s) = \mathrm{Diag}(\beta_1(s), \ldots, \beta_m(s))V(s).$$

Por la Definición 2.3.3 los índices de Wiener–Hopf locales de $P(s)$ respecto a $\pi(s)$ por la izquierda, i.e., $k_1, \ldots, k_m$, son los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de $P_1(s)$. Como $\pi(s)^{t_1} \mid \cdots \mid \pi(s)^{t_m}$ son los factores invariantes finitos de $P_1(s)$, la condición (2.11) se sigue del Teorema de Rosenbrock (Teorema 2.1.1).

Recíprocamente, por el Teorema de Rosenbrock existe una matriz polinomial no singular $A(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda $k_1, \ldots, k_m$ y $\pi(s)^{t_1} \mid \cdots \mid \pi(s)^{t_m}$ como factores invariantes finitos. Por tanto, es suficiente tomar $P(s) = A(s)$. □

Ahora vamos a dar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.4.5 *Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m \geq 0$ y $q_1 \geq \cdots \geq q_m$ enteros. Entonces existe una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y $s^{q_1}, \ldots, s^{q_m}$ como factores invariantes en el infinito si y sólo si*

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (q_1, \ldots, q_m). \tag{2.12}$$

Demostración. Primero, vamos a probar la necesidad. Recordamos que $q_1 = d(P(s))$. Por el Lema 2.4.2, existe $m(s) \in \mathbb{F}[s]$ tal que m.c.d.$(m(s), s) =$

1 y un entero no negativo d tal que $d+q_1-k_m, \ldots, d+q_1-k_1$ son los índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda de $m(s)s^{d+q_1}P(1/s)^T \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ respecto a s, y por el Lema 2.4.3, $s^{d+q_1-q_1} \mid \cdots \mid s^{d+q_1-q_m}$ son sus divisores elementales asociados al polinomio irreducible s. Entonces, por el Teorema 2.4.4 aplicado a la matriz polinomial $m(s)s^{d+q_1}P(1/s)^T$, tenemos que

$$(d+q_1-k_m, \ldots, d+q_1-k_1) \prec (d+q_1-q_m, \ldots, d+q_1-q_1).$$

De la definición de mayorización deducimos la condición (2.12).

Recíprocamente, si se cumple la condición de mayorización (2.12) y teniendo en cuenta que $q_1 \geq k_1 \geq k_i$, $i = 1, \ldots, m$, tenemos que

$$(q_1-k_m, \ldots, q_1-k_1) \prec (q_1-q_m, \ldots, q_1-q_1).$$

Por el Teorema de Rosenbrock, existe una matriz polinomial no singular $A(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $q_1-k_m, \ldots, q_1-k_1$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y $s^{q_1-q_1} \mid \cdots \mid s^{q_1-q_m}$ como factores invariantes finitos. Como postmultiplicar por matrices unimodulares no cambia ninguno de estos dos conjuntos de invariantes podemos suponer que $A(s)$ es propia por columnas y el grado de su i-ésima columna es q_1-k_{m-i+1}. Por tanto, podemos escribir (ver Capítulo 1)

$$A(s) = A_cD(s) + A_1(s)$$

con A_c no singular, $D(s) = \operatorname{Diag}(s^{q_1-k_m}, \ldots, s^{q_1-k_1})$ y el grado de la columna i de $A_1(s)$ menor que q_1-k_{m-i+1}, $1 \leq i \leq m$. Entonces

$$A(s) = B(s)\operatorname{Diag}(s^{q_1-k_m}, \ldots, s^{q_1-k_1}) \tag{2.13}$$

con $B(s) = (A_c+A_1(s)D(s)^{-1})$ una matriz bipropia, pues A_c es no singular y $A_1(s)D(s)^{-1}$ es una matriz estrictamente propia. Además, ya que $q_1-k_m \geq \cdots \geq q_1-k_1$, se sigue que $d(A(s)) = q_1-k_m$.

Reemplazando s por $1/s$ y multiplicando la ecuación (2.13) por s^{q_1}

$$s^{q_1} A(1/s) = B(1/s)\,\mathrm{Diag}(s^{k_m}, \ldots, s^{k_1}),$$

donde $s^{q_1} A(1/s)$ es una matriz polinomial (Lema 2.4.1). Entonces

$$s^{q_1} A(1/s)^T = \mathrm{Diag}(s^{k_m}, \ldots, s^{k_1}) B(1/s)^T.$$

Recordemos que por el Lema 2.4.1, si $D(s) = \mathrm{Diag}(s^{q_1-k_m}, \ldots, s^{q_1-k_1})$, entonces la matriz $B(1/s) = A(1/s)D(1/s)^{-1}$ es polinomial. Como los factores invariantes de $A(s)$ son $s^{q_1-q_1} \mid \cdots \mid s^{q_1-q_m}$, $\det A(s) = cs^{q_1-q_1} \cdots s^{q_1-q_m}$, con c constante. Se sigue de (2.13) que

$$\det B(s) = c\frac{s^{q_1-q_1} \cdots s^{q_1-q_m}}{s^{q_1-k_m} \cdots s^{q_1-k_1}}.$$

Por hipótesis $\sum_{i=1}^m k_i = \sum_{i=1}^m q_i$, por tanto $\det B(s) = c$ y en consecuencia $\det B(1/s) = c \in \mathbb{F}, c \neq 0$ y $B(1/s)$ es unimodular. De ahí que, los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de $s^{q_1} A(1/s)^T$ sean $k_1, \ldots, k_m$.

Por otra parte, como $s^{q_1-q_1} \mid \cdots \mid s^{q_1-q_m}$ son los factores invariantes finitos de $A(s)$, existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que

$$U(s)A(s)V(s) = \mathrm{Diag}(s^{q_1-q_1}, \ldots, s^{q_1-q_m}). \tag{2.14}$$

Así, sustituyendo s por $1/s$ y multiplicando por s^{q_1}, tenemos que

$$U(1/s)s^{q_1}A(1/s)V(1/s) = \mathrm{Diag}(s^{q_1}, \ldots, s^{q_m})$$

y

$$V(1/s)^T s^{q_1} A(1/s)^T U(1/s)^T = \mathrm{Diag}(s^{q_1}, \ldots, s^{q_m}),$$

donde $U(1/s)^T$ y $V(1/s)^T$ son matrices bipropias (Lema 2.4.1). De este modo $s^{q_1}, \ldots, s^{q_m}$ son los factores invariantes en el infinito de $s^{q_1} A(1/s)^T$. En definitiva, $P(s) = s^{q_1} A(1/s)^T$ es la matriz deseada. □

Terminamos esta sección extendiendo el resultado previo a matrices racionales no singulares.

Teorema 2.4.6 *Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $q_1 \geq \cdots \geq q_m$ enteros. Entonces existe una matriz racional no singular $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ con $k_1, \dots, k_m$ como índices de Wiener-Hopf en el infinito por la izquierda y $s^{q_1}, \dots, s^{q_m}$ como factores invariantes en el infinito si y sólo si*

$$(k_1, \dots, k_m) \prec (q_1, \dots, q_m). \tag{2.15}$$

Demostración. Sea $d(s)$ es el polinomio mónico mínimo común múltiplo de los denominadores de $G(s)$. Entonces

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} N(s),$$

donde $N(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$. Sea $d = d(d(s))$. Usando los Lemas 2.2.2 y 2.2.3 sabemos que $k_1 + d, \dots, k_m + d$ son los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de $N(s)$ y $s^{q_1+d}, \dots, s^{q_m+d}$ son sus factores invariantes en el infinito. Ahora, por el Teorema 2.4.5 aplicado a la matriz polinomial $N(s)$, tenemos que

$$(k_1 + d, \dots, k_m + d) \prec (q_1 + d, \dots, q_m + d),$$

y por tanto tenemos la condición (2.15).

Recíprocamente, sea d cualquier entero tal que $d \geq |k_m|$. Entonces $k_1 + d, \dots, k_m + d$ son enteros no negativos y $q_1 + d, \dots, q_m + d$ son enteros. De (2.15)

$$(k_1 + d, \dots, k_m + d) \prec (q_1 + d, \dots, q_m + d).$$

Por tanto, por el Teorema 2.4.5 existe $N(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $k_1+d, \dots, k_m+d$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y $s^{q_1+d}, \dots, s^{q_m+d}$ como factores invariantes infinitos. Sea $G(s) = \dfrac{1}{d(s)} N(s)$, donde $d(s)$ es cualquier polinomio de grado d. Por los Lemas 2.2.2 y 2.2.3, se sigue que $G(s)$ es la matriz deseada. $\square$

Como una consecuencia tenemos el siguiente resultado para matrices de funciones racionales propias.

Corolario 2.4.7 *Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $q_1 \geq \cdots \geq q_m$ enteros no positivos. Entonces existe una matriz racional propia no singular $G(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ con $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y $s^{q_1}, \ldots, s^{q_m}$ como factores invariantes en el infinito si y sólo si*

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (q_1, \ldots, q_m).$$

2.5. Índices de Wiener–Hopf y estructura finita e infinita de matrices racionales

En esta sección obtenemos una solución al problema de dar condiciones necesarias y suficientes para que exista una matriz racional no singular con los tres tipos de invariantes prescritos: índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y funciones racionales invariantes finitas e infinitas. Aunque, en general, al prescribir los tres tipos de invariantes parece que el problema tendría que resultar más difícil, éste no es el caso. La razón es que, para una matriz racional $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$, los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda de todas las matrices en ambos conjuntos

$$\{B(s)G(s) : B(s) \text{ bipropia}\} \text{ y } \{G(s)U(s) : U(s) \text{ unimodular}\}$$

son los mismos. El siguiente teorema caracteriza la estructura finita e infinita de las matrices racionales no singulares con índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda prescritos.

Teorema 2.5.1 *Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $q_1 \geq \cdots \geq q_m$ enteros. Sean $\dfrac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \dfrac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ funciones racionales irreducibles, donde $\epsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{F}[s]$ son polinomios mónicos y coprimos tales que $\epsilon_i(s) \mid \epsilon_{i+1}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m-$*

1, *y* $\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. *Entonces existe una matriz racional no singular* $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ *con* $k_1, \ldots, k_m$ *como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda,* $s^{q_1}, \ldots, s^{q_m}$ *como funciones racionales invariantes en el infinito, y* $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ *como funciones racionales invariantes finitas si y sólo si*

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (d(\epsilon_m(s)) - d(\psi_m(s)), \ldots, d(\epsilon_1(s)) - d(\psi_1(s))), \tag{2.16}$$

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (q_1, \ldots, q_m). \tag{2.17}$$

Demostración. La necesidad de (2.16) y (2.17) se sigue de los Teoremas 2.2.4 y 2.4.6. Recíprocamente, por el Teorema 2.2.4 existe una matriz racional no singular $T_1(s)$ cuyos índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda son $k_1, \ldots, k_m$ y cuyos funciones racionales invariantes finitas son $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$. Y por el Teorema 2.4.6 existe una matriz racional no singular $T_2(s)$ cuyos índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda son $k_1, \ldots, k_m$ y cuyas funciones racionales invariantes en el infinito son $s^{q_1}, \ldots, s^{q_m}$. Como $T_1(s)$ y $T_2(s)$ tienen los mismos índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda, son equivalentes Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda. Por tanto existe una matriz bipropia $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ y una matriz unimodular $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que $T_1(s) = B(s)T_2(s)U(s)$. De este modo $G(s) = B(s)T_2(s) = T_1(s)U(s)^{-1}$ tiene la misma estructura en el infinito que $T_2(s)$, la misma estructura finita que $T_1(s)$ y los índices de Wiener-Hopf en el infinito por la izquierda de ambas matrices $T_1(s)$ y $T_2(s)$. En definitiva, $G(s)$ es la matriz que buscamos. $\square$

Observación 2.5.2 A lo largo de este capítulo hemos hablado de la equivalencia Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y de sus correspondientes índices. En el Capítulo 1 hemos definido también la equivalencia Wiener–Hopf en el infinito por la derecha de matrices racionales. Ésta se define como la equivalencia Wiener–Hopf por la izquierda intercambiando los papeles de las matrices $B(s)$ bipropia y $U(s)$ unimodular. En otras palabras, $G_1(s)$ y $G_2(s)$ son equivalentes Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda si y sólo si $G_1(s)^T$ y $G_2(s)^T$ son equivalentes Wiener–Hopf en el infinito por la derecha. En el caso polinomial, dada una matriz polinomial $P(s)$, los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la derecha son los grados de las filas de cualquier matriz propia por filas equivalente por la izquierda a $P(s)$.

Teniendo en cuenta que una matriz racional y su transpuesta tienen la misma estructura finita e infinita, todos los resultados de este capítulo pueden ser enunciados sustituyendo los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda por los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la derecha.

Terminamos con dos resultados que relacionan ambos conjuntos de índices: los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y derecha. Un resultado parcial de este problema se encuentra en [16] donde se estudia la relación entre diferentes tipos de índices. En particular, se da una condición necesaria y suficiente para que dos colecciones de enteros sean los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y derecha de una matriz racional. Este resultado es una consecuencia de nuestro Teorema 2.5.4 y lo enunciamos en el Corolario 2.5.5.

Pensemos ahora en los conjuntos

$$\{U(s)G(s) : U(s) \text{ unimodular}\} \text{ y } \{G(s)U(s) : U(s) \text{ unimodular}\}.$$

Todas las matrices en estos conjuntos tienen la misma estructura finita. Y, todas las matrices en los conjuntos

$$\{B(s)G(s) : B(s) \text{ bipropia}\} \text{ y } \{G(s)B(s) : B(s) \text{ bipropia}\}$$

tienen la misma estructura en el infinito. Ideas similares a las usadas en el Teorema 2.5.1 nos permiten demostrar los dos resultados siguientes.

Teorema 2.5.3 *Sean* $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ *y* $l_1 \geq \cdots \geq l_m$ *enteros. Sean* $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ *funciones racionales irreducibles, donde* $\epsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{F}[s]$ *son mónicos y coprimos tales que* $\epsilon_i(s) \mid \epsilon_{i+1}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, *y* $\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. *Entonces existe una matriz racional no singular* $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m \times m}$ *con* $k_1, \ldots, k_m$ *como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda,* $l_1, \ldots, l_m$ *como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la derecha, y* $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ *como funciones racionales invariantes finitas si y sólo si*

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (d(\epsilon_m(s)) - d(\psi_m(s)), \ldots, d(\epsilon_1(s)) - d(\psi_1(s))), \tag{2.18}$$

$$(l_1, \ldots, l_m) \prec (d(\epsilon_m(s)) - d(\psi_m(s)), \ldots, d(\epsilon_1(s)) - d(\psi_1(s))). \tag{2.19}$$

Demostración.

La necesidad de la condición (2.18) es consecuencia del Teorema 2.2.4. Como $G(s)^T$ tiene $l_1, \ldots, l_m$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$ como funciones racionales invariantes, la condición (2.19) se deduce del Teorema 2.2.4 aplicado a la matriz $G(s)^T$. Recíprocamente, por el Teorema 2.2.4 existe una matriz racional no singular $T_1(s)$ cuyos índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda son $k_1, \ldots, k_m$ y cuyas funciones racionales invariantes son $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$, y existe otra matriz racional no singular $T_2(s)$ cuyos índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda son $l_1, \ldots, l_m$ y cuyas funciones racionales invariantes son $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}$. Como $T_1(s)$ y $T_2(s)^T$ tienen la misma estructura finita, existen matrices unimodulares $U_1(s), U_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$ tales que $T_1(s) = U_1(s) T_2(s)^T U_2(s)$. Por tanto, $G(s) = U_1(s) T_2(s)^T = T_1(s) U_2(s)^{-1}$ es la matriz que buscamos. $\square$

Siguiendo las mismas ideas tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.5.4 *Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$, $l_1 \geq \cdots \geq l_m$ y $q_1 \geq \cdots \geq q_m$ enteros. Entonces existe una matriz racional no singular $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ con $k_1, \dots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda, $l_1, \dots, l_m$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la derecha, y $s^{q_1}, \dots, s^{q_m}$ como funciones racionales invariantes en el infinito si y sólo si*

$$(k_1, \dots, k_m) \prec (q_1, \dots, q_m), \tag{2.20}$$

$$(l_1, \dots, l_m) \prec (q_1, \dots, q_m). \tag{2.21}$$

Corolario 2.5.5 *Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $l_1 \geq \cdots \geq l_m$ enteros. Entonces existe una matriz racional no singular $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ con $k_1, \dots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda y $l_1, \dots, l_m$ como índices de Wiener–Hopf en el infinito por la derecha si y sólo si*

$$\sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m} l_i. \tag{2.22}$$

Demostración. La necesidad de la condición (2.22) es clara. Para probar la suficiencia denotamos por $q^+ = \max(q, 0)$ y elegimos enteros $q_1 \geq \cdots \geq q_m$ de la siguiente manera:

$$q_1 = \max\left(\sum_{i=1}^{m} {k_i}^+, \sum_{i=1}^{m} {l_i}^+\right), \quad q_2 = \cdots = q_{m-1} = 0, \quad q_m = \sum_{i=1}^{m} k_i - q_1. \tag{2.23}$$

Tenemos que

$$(k_1, \dots, k_m) \prec (q_1, \dots, q_m), \tag{2.24}$$

$$(l_1, \dots, l_m) \prec (q_1, \dots, q_m). \tag{2.25}$$

La existencia de la matriz $G(s)$ se sigue de estas dos condiciones y del Teorema 2.5.4. $\square$

Capítulo 3

Equivalencia Wiener–Hopf local e índices locales de matrices racionales

3.1. Introducción

La equivalencia Wiener–Hopf y los índices de Wiener–Hopf para matrices de funciones racionales están originalmente definidos respecto a un contorno cerrado γ del plano complejo (véase introducción). Dado que este contorno puede ser tan pequeño como se quiera puede decirse que esta definición es de naturaleza local. Por otra parte, en el Capítulo 2 guiados por la necesidad de obtener una generalización del Teorema de Rosenbrock que incluyera el infinito, hemos definido los índices de Wiener–Hopf locales respecto de un polinomio irreducible. Una cuestión natural es conocer si existe alguna relación entre estos dos tipos de índices. El objetivo de este capítulo es demostrar que definiendo las cosas apropiadamente ambos son expresiones particulares de un concepto más general.

La definición de equivalencia Wiener–Hopf en el plano complejo es la siguiente (ver, por ejemplo, [13, 20]):

Definición 3.1.1 Sea γ una curva rectificable cerrada en el plano complejo con dominio interior Ω_+ y denotamos la región de fuera de γ, la cual contiene al punto del infinito, por Ω_-. Sean $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{C}(s)^{m\times m}$ matrices racionales no singulares que no tienen ceros ni polos en γ. Estas dos matrices son *equivalentes Wiener–Hopf respecto a γ por la izquierda* si existen matrices no singulares $U_-(s) \in \mathbb{C}(s)^{m\times m}$ sin ceros ni polos en $\Omega_- \cup \gamma$ y $U_+(s) \in \mathbb{C}(s)^{m\times m}$ sin ceros ni polos en $\Omega_+ \cup \gamma$ tales que

$$G_2(s) = U_-(s)G_1(s)U_+(s).$$

Identificando, tal y como se expuso en la introducción, a cada punto, z_0, de $\mathbb{C}$ con el ideal primo (o maximal) generado por $s - z_0$, resulta que γ divide el plano complejo en dos conjuntos $(\Omega_+ \cup \gamma)$ y $(\Omega_- \cup \gamma) \setminus \{\infty\}$ cuya unión es todo el plano complejo y su intersección un conjunto de puntos en el que las matrices respecto de las que se define la equivalencia Wiener–Hopf no tienen ni polos ni ceros. Estas son las propiedades fundamentales que hacen interesante el estudio de la relación de equivalencia. Por ello, si identificamos el plano complejo con Specm($\mathbb{C}[s]$), los conjuntos $(\Omega_+ \cup \gamma)$ y $(\Omega_- \cup \gamma) \setminus \{\infty\}$ se pueden asociar con conjuntos $M, M' \subseteq$ Specm($\mathbb{C}[s]$) tales que $M \cup M' =$ Specm($\mathbb{C}[s]$). Es claro entonces que la definición de equivalencia Wiener–Hopf respecto a (M, M') que introducimos en la Definición 3.2.1 generaliza a la dada para matrices con coeficientes en $\mathbb{C}$. Se pone así de manifiesto la naturaleza esencialmente algebraica de esta relación de equivalencia.

Un sistema completo para esta relación de equivalencia la forman los índices de Wiener–Hopf con respecto a M que son una simple generalización de los índices locales definidos en el Capítulo 2 y que son introducidos en la Sección 3.2. En ésta, estudiamos además, para matrices polinomiales no singulares, la existencia, o no, de factorización con respecto a (M, M'); i.e., de formas canónicas. Dichos resultados se estudiarán también para matrices racionales no singulares en la Sección 3.3. Los resultados principales en ambas secciones, tal y como se ha dicho, son que los índices de Wiener–Hopf respecto a un subconjunto $M \subseteq \operatorname{Specm} \mathbb{F}[s]$ forman un sistema completo de invariantes para la relación de equivalencia Wiener–Hopf respecto a (M, M') y que toda matriz es Wiener–Hopf equivalente respecto a (M, M') a una matriz diagonal bajo ciertas condiciones que se cumplen siempre que el cuerpo $\mathbb{F}$ sea algebraicamente cerrado. Veremos algunos ejemplos donde ponemos de manifiesto que tal factorización no siempre existe, por ejemplo, si el cuerpo no es algebraicamente cerrado.

Hasta aquí los resultados mostrados serán para la equivalencia e índices de Wiener–Hopf por la izquierda. En la Sección 3.4 se muestra que los mismos resultados son válidos por la derecha.

En la Sección 3.5 veremos con rigor que nuestros índices definidos para matrices de funciones racionales sobre un cuerpo arbitrario son una generalización de los índices definidos en [13, 20] sobre el plano complejo.

Por último, siguiendo con las mismas técnicas que las utilizadas para definir los índices de Wiener–Hopf podremos dar una definición de índices de Hermite respecto a un subconjunto M de una matriz polinomial no singular. Demostraremos que coinciden con la definición dada en la Sección 1.2.6 donde los índices de Hermite respecto a M representan los grados de los elementos de la diagonal de su forma de Hermite respecto de M. Veremos que la nueva caracterización tiene la ventaja de que nos permite calcular los índices de Hermite respecto a M a partir de la información de la forma de Hermite global, sin necesidad de conocer la estructura de Hermite de la matriz respecto a M. Este hecho también ocurre en el caso de la estructura finita (factores invariantes) de una matriz polinomial donde sabemos que podemos determinar la estructura finita local a partir de la global y viceversa.

3.2. Equivalencia Wiener–Hopf local

Los anillos locales $\mathbb{F}_M(s)$, $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$, cuyos elementos son funciones racionales donde el denominador es primo con todos los polinomios que generan ideales que están en M juegan un papel fundamental en la nueva relación de equivalencia Wiener–Hopf respecto a (M, M') que introducimos en esta sección (Definición 3.2.1).

Como es habitual, dado $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$, una matriz $U(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ si $U(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ y su determinante es una unidad en $\mathbb{F}_M(s)$; es decir, una función racional donde tanto el numerador como el denominador es primo con todos los polinomios que generan ideales que están en M. Entenderemos que una matriz $U(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ si su determinante es una unidad en ambos anillos, $\mathbb{F}_M(s)$ y $\mathbb{F}_{pr}(s)$.

Consideramos que si $M = \emptyset$, entonces $\mathbb{F}_\emptyset(s) = \mathbb{F}(s)$, el cuerpo de las funciones racionales. Notemos que si $M_1, M_2 \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ entonces $M_1 \subseteq M_2$ si y sólo si $\mathbb{F}_{M_2}(s) \subseteq \mathbb{F}_{M_1}(s)$. En particular, si $M = \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ entonces $\mathbb{F}_M(s) = \mathbb{F}[s]$.

La relación de equivalencia Wiener–Hopf respecto a una curva cerrada γ en $\mathbb{C}$ está definida para matrices sin ceros ni polos en γ. Teniendo en cuenta las identificaciones comentadas en la introducción, nuestra relación de equivalencia Wiener–Hopf estará definida para matrices sin ceros ni polos en el correspondiente subconjunto del $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ identificado con γ. Recordamos que una matriz no tenga ceros ni polos respecto a M (o en M) significa que su forma de Smith–McMillan respecto a M es la identidad (Sección 1.2.7). Ahora bien, esto es equivalente a que las funciones racionales invariantes en la forma de Smith–McMillan sean unidades en $\mathbb{F}_M(s)$. En efecto, supongamos que existen matrices unimodulares $U(s), V(s)$ tales que

$$U(s)G(s)V(s) = \operatorname{Diag}\left(\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{\epsilon_r(s)}{\psi_r(s)}\right),$$

donde m.c.d.$(\epsilon_i(s), \pi(s)) = 1$, m.c.d.$(\psi_i(s), \pi(s)) = 1$, para todo ideal $(\pi(s)) \in M$, $i = 1, \ldots, m$. Entonces la matriz $D(s) = \text{Diag}\left(\dfrac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \ldots, \dfrac{\epsilon_r(s)}{\psi_r(s)}\right)$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)$ y por tanto existen $U_M(s) = U(s)$ y $V_M(s) = V(s)D(s)^{-1}$ tales que

$$U_M(s)G(s)V_M(s) = I_m.$$

El recíproco también es cierto: $G(s)$ no tiene ceros ni polos en M si y sólo si es invertible en $\mathbb{F}_M(s)$ y por lo tanto los denominadores, $\psi_i(s)$, en su forma de Smith–McMillan son primos con los polinomios que generan ideales que están en M (Observación 1.1.1). Además como el determinante es una unidad los numeradores, $\epsilon_i(s)$, también satisfacen esa condición. En definitiva, diremos que una matriz $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times n}$ no tiene ceros ni polos en M si sus funciones racionales invariantes son unidades en $\mathbb{F}_M(s)$.

Definición 3.2.1 Sean M y M' subconjuntos de $\text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ tales que $M \cup M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ matrices racionales no singulares sin ceros ni polos en $M \cap M'$. Las matrices $G_1(s), G_2(s)$ son *equivalentes Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda* si existen matrices $U_M(s)$ invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ y $U_{M'}(s)$ invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ tales que

$$G_2(s) = U_{M'}(s)G_1(s)U_M(s).$$

Es fácil comprobar que es una relación de equivalencia. En realidad sería una relación de equivalencia aunque no se impusiera ninguna condición sobre la unión e intersección de M y M'. Sin embargo veremos después que sin estas condiciones no se puede asegurar la existencia y unicidad de un representante diagonal en cada clase de equivalencia.

Estudiamos el siguiente caso particular: Si $M = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y $M' = \emptyset$, las matrices $U_{M'}(s)$ invertibles en $\mathbb{F}_\emptyset(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ son las matrices bipropias y las matrices $U_M(s)$ invertibles en $\mathbb{F}_{\text{Specm}(\mathbb{F}[s])}(s)^{m\times m}$ son las matrices unimodulares. Por lo tanto, en este caso, la equivalencia Wiener–Hopf respecto a $(M, M') = (\text{Specm}(\mathbb{F}[s]), \emptyset)$ por la izquierda es la equivalencia Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda. Por esta razón diremos que la equivalencia Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda es la *equivalencia Wiener–Hopf global por la izquierda* y a los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda les llamaremos los *índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda*.

En el siguiente lema probaremos, como se ha dicho en la introducción, que toda matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ es equivalente Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda a una matriz diagonal $\text{Diag}(s^{k_1}, \ldots, s^{k_m})$, donde los enteros $k_1, \ldots, k_m$ son los grados de las columnas de cualquier matriz propia por columnas equivalente por la derecha a $P(s)$. Estos grados son los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda. Por lo tanto, toda matriz polinomial no singular tiene índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda que son números enteros no negativos.

La demostración del siguiente resultado está hecha en [17] para matrices racionales rectangulares y la incluimos por completitud.

Lema 3.2.2 *Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular. Existen una matriz unimodular $V(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ y una matriz bipropia $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ tales que*

$$P(s) = B(s)\,\text{Diag}(s^{k_1}, \ldots, s^{k_m})V(s)$$

donde $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ son enteros no negativos unívocamente determinados por $P(s)$.

Demostración. Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular. Por el Lema 1.4.7 existe una matriz unimodular $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tal que $P(s)U(s)$ es una matriz propia por columnas; esto es, si $k_1, \ldots, k_m$ son los grados de las columnas de $P(s)U(s)$, esta matriz se puede escribir como

$P(s)U(s) = P_cD(s) + L(s)$ con P_c no singular, $D(s) = \mathrm{Diag}(s^{k_1}, \ldots, s^{k_m})$ y el grado de la columna i de $L(s)$ menor que k_i, $1 \leq i \leq m$. Entonces $P(s)U(s) = P_cD(s) + L(s) = (P_c + L(s)D(s)^{-1})D(s)$. Llamamos $V(s) = U(s)^{-1}$. Como P_c es no singular y $L(s)D(s)^{-1}$ es una matriz estrictamente propia, $B(s) = P_c + L(s)D(s)^{-1}$ es bipropia y $P(s) = B(s)D(s)V(s)$. Además, por el Lema 1.4.7, los grados de las columnas de la matriz propia por columnas equivalente por la derecha a $P(s)$, $k_1, \ldots, k_m$, están unívocamente determinados por la matriz $P(s)$, aunque $U(s)$ no lo está. $\square$

Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Recordemos la Definición 1.2.3: Diremos que un polinomio no constante $\alpha(s) \in \mathbb{F}[s]$ factoriza en M si su factorización coprima, $\alpha(s) = \alpha_1(s)^{d_1} \cdots \alpha_m(s)^{d_m}$, satisface la condición $(\alpha_i(s)) \in M$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Se tiene que si un polinomio no constante factoriza en M entonces también factoriza en todo subconjunto de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ que contiene a M. Consideraremos que los únicos polinomios que factorizan en $M = \emptyset$ son las constantes. Por lo tanto, las constantes factorizan en todo subconjunto de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Se tiene que un polinomio $\alpha(s)$ factoriza en M si y sólo si $\alpha(s)$ es una unidad en $\mathbb{F}_{M'}(s)$ con $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Al igual que en el Capítulo 2 se han definido los índices de Wiener–Hopf locales respecto a un polinomio mónico irreducible por la izquierda, en este capítulo queremos extender esta definición a cualquier subconjunto $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y definir así los índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda. Siguiendo las mismas técnicas que las utilizadas en el Capítulo 2 para demostrar las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.2 se pueden demostrar los dos resultados siguientes que nos garantizan la existencia y unicidad de los índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda para matrices polinomiales no singulares. Las demostraciones son exactamente iguales y por ello las omitimos.

Proposición 3.2.3 *Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular* *y* $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Entonces, existen matrices* $P_1(s), Q(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *tales que*

i) $P(s) = P_1(s)Q(s)$,

ii) $\det P_1(s)$ *factoriza en* M, *y*

iii) $\det Q(s)$ *factoriza en* $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Proposición 3.2.4 *Sea* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *una matriz polinomial no singular y* $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Si existen matrices polinomiales* $P_1(s), Q(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *y* $\overline{P}_1(s), \overline{Q}(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *tales que*

i) $P(s) = P_1(s)Q(s) = \overline{P}_1(s)\overline{Q}(s)$,

ii) $\det P_1(s)$ *y* $\det \overline{P}_1(s)$ *factorizan en* M, *y*

iii) $\det Q(s)$ *y* $\det \overline{Q}(s)$ *factorizan en* $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$,

entonces $P_1(s)$ *y* $\overline{P}_1(s)$ *son equivalentes por la derecha.*

Definición 3.2.5 Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular y $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $P_1(s), Q(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ matrices polinomiales tales que

i) $P(s) = P_1(s)Q(s)$,

ii) $\det P_1(s)$ factoriza en M, y

iii) $\det Q(s)$ factoriza en $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

A los índices de Wiener–Hopf globales de $P_1(s)$ por la izquierda les llamamos *índices de Wiener–Hopf de* $P(s)$ *respecto a* M *por la izquierda.*

Cuando M se reduce a un único ideal generado por un polinomio mónico irreducible $\pi(s)$, los índices de Wiener–Hopf respecto a $M = (\pi(s))$ por la izquierda son los índices de Wiener–Hopf locales respecto a $\pi(s)$ definidos en el capítulo anterior. Y, cuando $M = \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ tomando $P_1(s) = P(s)$ y $Q(s) = I_m$ se tiene que los índices de Wiener–Hopf de $P(s)$ respecto a $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ por la izquierda son los índices de Wiener–Hopf globales de $P(s)$.

Toda matriz polinomial no singular tiene índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda. Por lo tanto, cualquier matriz polinomial no singular tiene índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda, para cualquier $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$.

Uno de los resultados principales de esta sección es el siguiente:

Teorema 3.2.6 *Sean M y M' subconjuntos de* $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ *tales que $M \cup M' = \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $P_1(s), P_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ matrices polinomiales no singulares sin ceros en $M \cap M'$. Las matrices $P_1(s), P_2(s)$ son equivalentes Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda si y sólo si $P_1(s)$, $P_2(s)$ tienen los mismos índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda.*

Demostración. Escribimos

$$P_1(s) = P_1'(s)Q_1(s), \quad P_2(s) = P_2'(s)Q_2(s),$$

con $\det P_1'(s)$ y $\det P_2'(s)$ factorizando en $M \setminus M'$ (recordamos que $P_1(s)$ y $P_2(s)$ no tienen ceros en $M \cap M'$) y $\det Q_1(s)$ y $\det Q_2(s)$ factorizando en $M' \setminus M$.

Supongamos que $P_1(s)$, $P_2(s)$ tienen los mismos índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda, $k_1 \geq \cdots \geq k_m$. En otras palabras, $P_1'(s)$ y $P_2'(s)$ tienen los mismos índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda. Esto significa que existen matrices $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$, bipropia, y $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$, unimodular, tales que

$$P_1'(s) = B(s)P_2'(s)U(s). \tag{3.1}$$

Veamos que $B(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m}$. De (3.1)

$$B(s) = P_1'(s)(P_2'(s)U(s))^{-1} = P_1'(s)\frac{\mathrm{Adj}(P_2'(s)U(s))}{\det(P_2'(s)U(s))}.$$

Como $\det(P_2'(s)U(s))$ factoriza en $M \setminus M'$, los denominadores de los elementos de $B(s)$ factorizan en $M \setminus M'$. Por tanto $B(s) \in \mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$. Además, $\det B(s) = \det P_1'(s) \cdot \det(P_2'(s)U(s))^{-1}$ y ambos determinantes factorizan en $M \setminus M'$. Así, $\det B(s)$ es una unidad en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$. Sea $U_M(s) = Q_2(s)^{-1}U(s)Q_1(s)$. Como $\det Q_1(s)$ y $\det Q_2(s)$ factorizan en $M' \setminus M$ entonces $U_M(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$. En definitiva, existen $U_{M'}(s) = B(s)$ invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ y $U_M(s) = Q_2(s)^{-1}U(s)Q_1(s)$ invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ tales que

$$P_1(s) = U_{M'}(s)P_2(s)U_M(s)$$

y por tanto $P_1(s)$ y $P_2(s)$ son equivalentes Wiener–Hopf con respecto a (M, M') por la izquierda.

Recíprocamente, supongamos que existen $U_{M'}(s)$ invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ y $U_M(s)$ invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ tales que

$$P_1(s) = U_{M'}(s)P_2(s)U_M(s). \tag{3.2}$$

Como $M \cup M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y $U_{M'}(s)$ está en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m}$ sus elementos son funciones racionales cuyos denominadores factorizan en $M \setminus M'$. Sea $d'(s)$ el polinomio mónico mínimo común múltiplo de los denominadores de la matriz $U_{M'}(s)$. Por lo tanto $d'(s)$ factoriza en $M \setminus M'$. Además,

$$d'(s)U_{M'}(s) = R(s)$$

con $R(s)$ una matriz polinomial cuyo determinante es una unidad en $\mathbb{F}_{M'}(s)$, esto es, $\det R(s) = d'(s)^m \det U_{M'}(s)$ factoriza en $M \setminus M'$.

Igualmente, $U_M(s)$ está en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ y sus elementos son funciones racionales cuyos denominadores factorizan en $M' \setminus M$. Sea $d(s)$ el polinomio mónico mínimo común múltiplo de los denominadores de la matriz $U_M(s)$. Por lo tanto $d(s)$ factoriza en $M' \setminus M$ y

$$d(s)U_M(s) = N(s)$$

es una matriz polinomial cuyo determinante es una unidad en $\mathbb{F}_M(s)$, esto es, $\det N(s) = d(s)^m \det U_M(s)$ factoriza en $M' \setminus M$.

Ahora, de (3.2)

$$P_1(s) = \frac{1}{d'(s)} R(s)P_2(s)N(s)\frac{1}{d(s)}$$

o

$$d'(s)P_1(s)d(s) = R(s)P_2(s)N(s).$$

Recordemos que $P_1(s) = P_1'(s)Q_1(s)$ y $P_2(s) = P_2'(s)Q_2(s)$ tales que $\det P_1'(s)$, $\det P_2'(s)$ factorizan en $M \setminus M'$ y $\det Q_1(s), \det Q_2(s)$ factorizan en $M' \setminus M = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Sea $P(s) = d'(s)P_1(s)d(s) = R(s)P_2(s)N(s)$. La matriz $P(s)$ es polinomial y

$$P(s) = d'(s)P_1'(s)Q_1(s)d(s) = R(s)P_2'(s)Q_2(s)N(s).$$

Llamamos $\overline{P}_1(s) = d'(s)P_1'(s)$, $\overline{Q}_1(s) = Q_1(s)d(s)$, $\overline{P}_2(s) = R(s)P_2'(s)$ y $\overline{Q}_2(s) = Q_2(s)N(s)$. Tenemos que

i) $P(s) = \overline{P}_1(s)\overline{Q}_1(s) = \overline{P}_2(s)\overline{Q}_2(s)$,

ii) $\det \overline{P}_1(s), \det \overline{P}_2(s)$ factorizan en M, y

iii) $\det \overline{Q}_1(s), \det \overline{Q}_2(s)$ factorizan en $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Por la Proposición 3.2.4 $\overline{P}_1(s)$ y $\overline{P}_2(s)$ son equivalentes por la derecha, es decir, existe $U(s)$ unimodular tal que

$$\overline{P}_1(s) = \overline{P}_2(s)U(s),$$

$$d'(s)P_1'(s) = R(s)P_2'(s)U(s),$$

$$P_1'(s) = \frac{1}{d'(s)} R(s) P_2'(s) U(s),$$

$$P_1'(s) = U_{M'}(s) P_2'(s) U(s).$$

Como $U_{M'}(s)$ es bipropia y $U(s)$ es unimodular, $P_1'(s)$, $P_2'(s)$ tienen los mismos índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda. En consecuencia, $P_1(s)$ y $P_2(s)$ tienen los mismos índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda. $\square$

En definitiva, para matrices polinomiales no singulares sin ceros en $M \cap M'$, los índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda constituyen un sistema completo de invariantes para la relación de equivalencia Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda con $M \cup M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$.

Una consecuencia inmediata de este último teorema es el siguiente resultado:

Corolario 3.2.7 *Sean M y M' subconjuntos de* $\text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ *tales que* $M \cup M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sean $P_1(s), P_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ matrices polinomiales no singulares sin ceros en $M \cap M'$. Entonces $P_1(s)$, $P_2(s)$ son equivalentes Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda si y sólo si para cualesquiera factorizaciones $P_1(s) = \tilde{P}_1(s)Q_1(s)$ y $P_2(s) = \tilde{P}_2(s)Q_2(s)$ que satisfacen las condiciones i)–iii) de la Definición 3.2.5, $\tilde{P}_1(s)$ y $\tilde{P}_2(s)$ son globalmente Wiener–Hopf equivalentes por la izquierda.*

Ahora nos planteamos para matrices polinomiales no singulares la existencia, o no, de factorización en forma diagonal para la equivalencia Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda. Vamos a demostrar que si existe un ideal generado por un polinomio de grado 1 en M, el cual no está en M', entonces toda matriz polinomial no singular sin ceros en $M \cap M'$ admite una factorización diagonal respecto a (M, M').

Teorema 3.2.8 *Sean M y M' subconjuntos de* Specm($\mathbb{F}[s]$) *tales que* $M \cup M' =$ Specm($\mathbb{F}[s]$). *Supongamos que existen ideales en $M \setminus M'$ generados por polinomios lineales y sea $(s-a)$ uno de ellos. Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular sin ceros en $M \cap M'$ y sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ sus índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda. Entonces, existen $U_M(s)$ invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ y $U_{M'}(s)$ invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ tales que*

$$P(s) = U_{M'}(s)\operatorname{Diag}((s-a)^{k_1}, \ldots, (s-a)^{k_m})U_M(s).$$

Demostración. Sean $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ y $k_1, \ldots, k_m$ los factores invariantes y los índices de Wiener–Hopf por la izquierda de $P(s)$ respecto a M, respectivamente. Escribimos $P(s) = P_1(s)Q(s)$ con

$$\det P_1(s) = c_1\alpha_1(s)\cdots\alpha_m(s), \tag{3.3}$$

c_1 constante distinta de cero y $\det Q(s)$ factorizando en Specm($\mathbb{F}[s]$) $\setminus M = M' \setminus M$. Como $k_1, \ldots, k_m$ son los índices de Wiener–Hopf globales de $P_1(s)$ por la izquierda, por el Lema 3.2.2 existen matrices $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$, unimodular, y $B_1(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$, bipropia, tales que

$$P_1(s) = B_1(s)D_1(s)U(s) \tag{3.4}$$

con $D_1(s) = \operatorname{Diag}(s^{k_1}, \ldots, s^{k_m})$. Llamamos

$$D(s) = \operatorname{Diag}((s-a)^{k_1}, \ldots, (s-a)^{k_m})$$

y

$$U_{M'}(s) = B_1(s)\operatorname{Diag}\left(\frac{s^{k_1}}{(s-a)^{k_1}}, \ldots, \frac{s^{k_m}}{(s-a)^{k_m}}\right).$$

Entonces

$$P_1(s) = U_{M'}(s)D(s)U(s).$$

Sea $U_M(s) = U(s)Q(s)$. Esta matriz es invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ y

$$P(s) = U_{M'}(s)\operatorname{Diag}((s-a)^{k_1}, \ldots, (s-a)^{k_m})U_M(s).$$

Nos falta probar que $U_{M'}(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$. Es claro que $U_{M'}(s)$ está en $\mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ y es bipropia. Escribimos

$$U_{M'}(s) = P_1(s)(D(s)U(s))^{-1}.$$

Entonces utilizando las mismas ideas que en la primera parte de la demostración del Teorema 3.2.6 se demuestra que $U_{M'}(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m}$.

$\square$

Observación 3.2.9 Cuando el cuerpo es algebraicamente cerrado siempre existe factorización diagonal.

El siguiente ejemplo pone de manifiesto las ideas mostradas en la demostración del teorema anterior. En él se muestra por un lado cómo calcular los índices de Wiener–Hopf respecto a un subconjunto $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$, y por otro lado cómo obtener la factorización diagonal. Dadas $P(s)$ y M, escribimos $P(s) = P_1(s)Q(s)$ con $\det P_1(s)$ factorizando en M y $\det Q(s)$ factorizando en $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Los índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda son los grados de las columnas de cualquier matriz propia por columnas equivalente por la derecha a $P_1(s)$.

Ejemplo 3.2.10 Supongamos que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ es el cuerpo de los números reales. Sea la matriz polinomial

$$P(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s^2 & (s^2+1)^2 \end{bmatrix}.$$

Sea $M = \{(s^2+1), (s-1)\}$ que contiene un ideal generado por un polinomio de grado 1 y $M' = \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Se cumple que $P(s) = P_1(s)Q(s)$ con

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s & (s^2+1)^2 \end{bmatrix}, \quad Q(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde los factores invariantes de $P_1(s)$ son potencias de s^2+1 y por tanto factorizan en M y los factores invariantes de $Q(s)$ son relativamente primos con s^2+1 y $s-1$ y por tanto factorizan en M'. Si escribimos $U(s)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s^3+2s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ entonces

$$P_1(s)U(s)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s^3+2s \\ -s & 1 \end{bmatrix}$$

es propia por columnas con grados de columnas 1, 3. Por lo tanto, los índices de Wiener–Hopf globales de $P_1(s)$ son 1 y 3. Y en consecuencia éstos son los índices de Wiener–Hopf de $P(s)$ respecto a M. Escribimos

$$P_1(s)U(s)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B_1(s) \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^3 \end{bmatrix},$$

donde $B_1(s)$ es la siguiente matriz bipropia

$$B_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{s^2+2}{s^2} \\ -1 & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix}.$$

Llamamos $B'(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{s^3}{(s-1)^3} \end{bmatrix}$. Tenemos que

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{s^3}{(s-1)^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & (s-1)^3 \end{bmatrix}.$$

Sea $U_{M'}(s) = B_1(s)B'(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{(s^2+2)s}{(s-1)^3} \\ \frac{-s}{s-1} & \frac{1}{(s-1)^3} \end{bmatrix}$. Los elementos de la matriz $U_{M'}(s)$ son funciones racionales propias con denominadores potencias de $s-1$ y $\det U_{M'}(s) = \frac{(s^2+1)^2}{(s-1)^4}$. Por tanto $U_{M'}(s) \in \mathbb{F}_{M'}(s)^{2\times 2} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{2\times 2}$ es invertible. En definitiva,

$$P_1(s)U(s)^{-1} = B_1(s) \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^3 \end{bmatrix} = U_{M'}(s) \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & (s-1)^3 \end{bmatrix}.$$

Además la matriz $U_M(s) = U(s)Q(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{2\times 2}$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{2\times 2}$ y $P(s) = P_1(s)Q(s) = P_1(s)U(s)^{-1}U(s)Q(s)$. Así,

$$P(s) = U_{M'}(s) \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & (s-1)^3 \end{bmatrix} U_M(s).$$

El siguiente ejemplo muestra que si no imponemos las condiciones sobre la intersección y/o unión de M y M' no podemos garantizar la existencia y/o unicidad de un representante diagonal en cada clase de equivalencia Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda.

Ejemplo 3.2.11

- Sean $M = \{(s), (s+1)\}$ y $M' = \operatorname{Specm} \mathbb{F}[s] \setminus \{(s)\}$. Por tanto, $M \cap M' = \{(s+1)\}$ y existe un único ideal $(s) \in M \setminus M'$. Sea $p_1(s) = s+1$ que tiene ceros en $M \cap M'$. Supongamos que $s+1 = u_{M'}(s)s^k u_M(s)$ con $u_{M'}(s)$ unidad en $\mathbb{F}_{M'}(s) \cap \mathbb{F}_{pr}(s)$ y $u_M(s)$ unidad en $\mathbb{F}_M(s)$. Como las unidades en $\mathbb{F}_{M'}(s)$ son potencias positivas o negativas de s y las unidades en $\mathbb{F}_{pr}(s)$ son funciones bipropias, para que $u_{M'}(s)$ sea a la vez una unidad en ambos anillos, $\mathbb{F}_{M'}(s) \cap \mathbb{F}_{pr}(s)$, necesariamente debe ser $u_{M'}(s) = c$ constante distinta de cero. Además, para que $s+1 = u_{M'}(s)s^k u_M(s)$, $u_M(s) = \frac{1}{c}\frac{s+1}{s^k}$ el cual no es unidad en $\mathbb{F}_M(s)$. En otras palabras, si $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tiene ceros en $M \cap M'$ entonces no podemos asegurar la existencia de factorización diagonal.

  Además, si k fuera igual a 1 los polinomios $s+1$ y s tendrían los mismos índices de Wiener–Hopf respecto a M y sin embargo no serían Wiener–Hopf equivalentes respecto a (M, M') por la izquierda.

- Supongamos que $M \cup M' \neq \operatorname{Specm} \mathbb{F}[s]$. Sea $m = 1$ y $(s-a) \in M \setminus M'$. Supongamos que tenemos una función polinomial que se factoriza como $p(s) = u_{M'}(s)(s-a)^{k_1}u_M(s)$, donde $u_{M'}(s) \in \mathbb{F}_{M'}(s) \cap \mathbb{F}_{pr}(s)$ y $u_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)$ son unidades. Sea $\beta(s)$ un polinomio i-rreducible tal que el ideal que genera, $(\beta(s))$, no está en $M \cup M'$.

Por lo tanto, $p(s)$ admite también la siguiente factorización $p(s) = \tilde{u}_{M'}(s)(s-a)^{k_1-d(\beta(s))}\tilde{u}_M(s)$, donde $\tilde{u}_{M'}(s) = \dfrac{(s-a)^{d(\beta(s))}u_{M'}(s)}{\beta(s)}$ y $\tilde{u}_M(s) = u_M(s)\beta(s)$ son unidades en $\mathbb{F}_{M'}(s) \cap \mathbb{F}_{pr}(s)$ y $\mathbb{F}_M(s)$, respectivamente. Por tanto, si $M \cup M' \neq \operatorname{Specm} \mathbb{F}[s]$ no podemos garantizar la unicidad de los exponentes del polinomio lineal $s-a$ que aparecen en la factorización diagonal.

En el siguiente ejemplo queremos mostrar que si todos los ideales generados por polinomios lineales de grado uno están en $M' \setminus M$ entonces una factorización como la del Teorema 3.2.8 puede no existir.

Ejemplo 3.2.12 Supongamos que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ es el cuerpo de los números reales. Tomamos $M = \{(s^2+1)\} \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{R}[s])$ y $M' = \operatorname{Specm}(\mathbb{R}[s]) \setminus \{(s^2+1)\}$. Sea la matriz

$$P(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s^2 & (s^2+1)^2 \end{bmatrix},$$

que no tiene ceros ni polos en $M \cap M' = \emptyset$. Veremos que es imposible encontrar matrices invertibles $U_{M'}(s)$ en $\mathbb{R}_{M'}(s)^{2\times 2} \cap \mathbb{R}_{pr}(s)^{2\times 2}$, y $U_M(s)$ en $\mathbb{R}_M(s)^{2\times 2}$ tales que $U_{M'}(s)P(s)U_M(s) = \operatorname{Diag}((p(s)/q(s))^{c_1}, (p(s)/q(s))^{c_2})$. Escribimos $\dfrac{p(s)}{q(s)} = u(s)(s^2+1)^a$ con $u(s)$ unidad en $\mathbb{R}_M(s)$ y a un entero. Así,

$$\operatorname{Diag}((p(s)/q(s))^{c_1}, (p(s)/q(s))^{c_2}) =$$
$$= \operatorname{Diag}((s^2+1)^{ac_1}, (s^2+1)^{ac_2}) \operatorname{Diag}(u(s)^{c_1}, u(s)^{c_2}).$$

Observemos que la matriz $\operatorname{Diag}(u(s)^{c_1}, u(s)^{c_2})$ es invertible en $\mathbb{R}_M(s)^{2\times 2}$ y $P(s)$ es también equivalente Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda a la matriz diagonal $\operatorname{Diag}((s^2+1)^{ac_1}, (s^2+1)^{ac_2})$. Por tanto, supongamos que existen matrices invertibles $U_{M'}(s) \in \mathbb{R}_{M'}(s)^{2\times 2} \cap \mathbb{R}_{pr}(s)^{2\times 2}$ y $U_M(s) \in \mathbb{R}_M(s)^{2\times 2}$ tales que $U_{M'}(s)P(s)U_M(s) = \operatorname{Diag}((s^2+1)^{d_1}, (s^2+1)^{d_2})$, con $d_1 \geq d_2$ enteros. Por un lado, por ser $U_{M'}(s)$ invertible en ambos anillos

$\mathbb{R}_{M'}(s)^{2\times 2} \cap \mathbb{R}_{pr}(s)^{2\times 2}$, $\det U_{M'}(s) = c$. Por otro, $\det P(s) = s(s^2+1)^2$ y $\det U_M(s)$ es una función racional con numerador y denominador relativamente primos con s^2+1, entonces $cs(s^2+1)^2 \det U_M(s) = (s^2+1)^{d_1+d_2}$ y $d_1+d_2 = 2$. Sean

$$U_{M'}(s)^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11}(s) & b_{12}(s) \\ b_{21}(s) & b_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad U_M(s) = \begin{bmatrix} u_{11}(s) & u_{12}(s) \\ u_{21}(s) & u_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

Como $P(s)U_M(s) = U_{M'}(s)^{-1}\operatorname{Diag}((s^2+1)^{d_1}, (s^2+1)^{d_2})$ tenemos que

$$su_{11}(s) = b_{11}(s)(s^2+1)^{d_1}, \tag{3.5}$$

$$-s^2u_{11}(s) + (s^2+1)^2u_{21}(s) = b_{21}(s)(s^2+1)^{d_1}, \tag{3.6}$$

$$su_{12}(s) = b_{12}(s)(s^2+1)^{d_2}, \tag{3.7}$$

$$-s^2u_{12}(s) + (s^2+1)^2u_{22}(s) = b_{22}(s)(s^2+1)^{d_2}. \tag{3.8}$$

Como $u_{11}(s) \in \mathbb{R}_M(s)$ y $b_{11}(s) \in \mathbb{R}_{M'}(s) \cap \mathbb{R}_{pr}(s)$, podemos escribir $u_{11}(s) = \dfrac{f_1(s)}{g_1(s)}$ y $b_{11}(s) = \dfrac{h_1(s)}{(s^2+1)^{q_1}}$ con $f_1(s), g_1(s), h_1(s) \in \mathbb{R}[s]$, m.c.d.$(g_1(s), s^2+1) = 1$ y $d(h_1(s)) \le 2q_1$. Además, por (3.5), $s\dfrac{f_1(s)}{g_1(s)} = \dfrac{h_1(s)}{(s^2+1)^{q_1}}(s^2+1)^{d_1}$. Por tanto, $u_{11}(s) = f_1(s)$ o $u_{11}(s) = \dfrac{f_1(s)}{s}$. Igualmente, por (3.7), $u_{12}(s) = f_2(s)$ o $u_{12}(s) = \dfrac{f_2(s)}{s}$ con $f_2(s)$ polinomial. Además, por (3.7), d_2 debe ser no negativo o $u_{12}(s) = b_{12}(s) = 0$. Esto último no se puede dar pues en tal caso por (3.8) tendríamos también que $u_{22}(s) = b_{22}(s) = 0$, lo cual contradice el hecho de que las matrices $U_M(s), U_{M'}(s)$ sean invertibles. Así, $d_1 \ge d_2 \ge 0$. Usando ahora (3.6) y (3.8) y teniendo en cuenta que $u_{21}(s), u_{22}(s) \in \mathbb{R}_M(s)$ y $b_{21}(s), b_{22}(s)$ están en $\mathbb{R}_{M'}(s) \cap \mathbb{R}_{pr}(s)$, deducimos que $u_{21}(s)$ y $u_{22}(s)$ son polinomiales. Distinguimos dos casos:

- Si $d_1 = 2$ y $d_2 = 0$, teniendo en cuenta (3.7) como $b_{12}(s)$ es bipropia entonces $u_{12}(s) = \dfrac{c_1}{s}$, c_1 constante y $b_{12}(s) = c_1$. Por (3.8), $b_{22}(s) = -c_1s + (s^2+1)^2u_{22}(s)$. Como $u_{22}(s)$ es polinomial y $b_{22}(s)$ es propia necesariamente $b_{22}(s) = c_2$, con c_2 constante. Por tanto $u_{22}(s) = \dfrac{c_2 + c_1 s}{(s^2+1)^2}$. Así, $c_1 = c_2 = 0$ y en consecuencia $b_{12}(s) = b_{22}(s) = 0$. Ahora bien esto es imposible ya que $U_{M'}(s)$ es invertible.

- Si $d_1 = d_2 = 1$, por (3.6),

$$\begin{aligned} b_{21}(s) &= \frac{-s^2 u_{11}(s) + (s^2+1)^2 u_{21}(s)}{s^2+1} = \\ &= \frac{-s^2 \dfrac{b_{11}(s)}{s}(s^2+1) + (s^2+1)^2 u_{21}(s)}{s^2+1} = \\ &= -s b_{11}(s) + (s^2+1) u_{21}(s) = \\ &= -s\frac{h_1(s)}{(s^2+1)^{q_1}} + (s^2+1)u_{21}(s) = \\ &= \frac{-s h_1(s) + (s^2+1)^{q_1+1} u_{21}(s)}{(s^2+1)^{q_1}}. \end{aligned}$$

Observemos que $d(-sh_1(s)) \leq 1 + 2q_1$ y $d((s^2+1)^{q_1+1}u_{21}(s)) = 2(q_1+1) + d(u_{21}(s)) \geq 2q_1 + 2$ a menos que $u_{21}(s) = 0$. Si por el contrario $u_{21}(s) \neq 0$, $d(-sh_1(s) + (s^2+1)^{q_1+1}u_{21}(s)) \geq 2q_1 + 2$ el cual es mayor que $d((s^2+1)^{q_1}) = 2q_1$. Esto no puede ocurrir porque $b_{21}(s)$ es una función racional propia. De este modo, $u_{21}(s) = 0$. Igualmente razonando con (3.8) debe ser que $u_{22}(s)$ es también cero. Ambas cosas son imposibles ya que $U_M(s)$ es invertible.

3.3. Índices de Wiener–Hopf locales para matrices racionales

Nuestro objetivo ahora es extender el concepto de índices de Wiener–Hopf y los resultados mostrados en la Sección 3.2 a matrices de funciones racionales no singulares siguiendo el procedimiento mostrado en el Capítulo 2: Dada $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ sea $d(s)$ el polinomio mónico mínimo común múltiplo de sus denominadores. Entonces $d(s)G(s)$ es una matriz polinomial y por lo tanto se pueden aplicar los resultados obtenidos hasta ahora en este capítulo.

Necesitamos extender la Definición 1.2.3 a funciones racionales.

Definición 3.3.1 Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Si $g(s) = \dfrac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{F}(s)$ es una función racional no constante tal que su numerador y su denominador factorizan en M diremos que $g(s)$ factoriza en M.

Observación 3.3.2 Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. En el caso de una matriz polinomial $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ decir que sus factores invariantes factorizan en M es equivalente a decir que $\det P(s)$ factoriza en M. En el caso de matrices racionales no es así. Dada una matriz racional no singular $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ si sus funciones racionales invariantes factorizan en M entonces $\det G(s)$ factoriza en M. El recíproco no es cierto en general pues puede haber simplificaciones entre factores comunes del numerador y denominador que corresponden a diferentes fracciones de la forma de Smith–McMillan. Por ejemplo, el determinante de $\mathrm{Diag}\left(\dfrac{1}{s}, \dfrac{s}{1}\right)$ factoriza en $M = \{(s+1)\}$ pero los elementos de la diagonal no.

Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ una matriz racional no singular tal que sus funciones racionales invariantes factorizan en M. Por lo tanto, el polinomio mónico mínimo común múltiplo de sus denominadores, que es el denominador de su primera función racional invariante $\psi_1(s)$ ([50, p. 109]), factoriza en M.

Proposición 3.3.3 *Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ una matriz racional no singular y $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Entonces existen matrices $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ tales que*

(i) $G(s) = G_1(s)G_2(s)$,

(ii) las funciones racionales invariantes de $G_1(s)$ factorizan en M, y

(iii) las funciones racionales invariantes de $G_2(s)$ factorizan en $M' =$ $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Demostración. Sea $S(s) = \operatorname{Diag}\left(\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\right)$ la forma de Smith–McMillan (finita) de $G(s)$ donde $\epsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{F}[s]$ son polinomios mónicos y coprimos tales que $\epsilon_1(s) \mid \cdots \mid \epsilon_m(s)$ mientras que $\psi_m(s) \mid \cdots \mid \psi_1(s)$. Por lo tanto, existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que

$$G(s) = U(s) \operatorname{Diag}\left(\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{\epsilon_m(s)}{\psi_m(s)}\right) V(s). \tag{3.9}$$

Escribimos $\epsilon_i(s) = \epsilon_i'(s)\bar{\epsilon}_i(s)$, $\psi_i(s) = \psi_i'(s)\bar{\psi}_i(s)$ siendo $\epsilon_i'(s), \psi_i'(s)$ polinomios que factorizan en M y $\bar{\epsilon}_i(s), \bar{\psi}_i(s)$ polinomios que factorizan en M'. Si $\epsilon_i(s)$ factoriza en M (M') entonces $\bar{\epsilon}_i(s) = 1$ ($\epsilon_i'(s) = 1$) y si $\psi_i(s)$ factoriza en M (M') entonces $\bar{\psi}_i(s) = 1$ ($\psi_i'(s) = 1$). Tomamos $G_1(s) = U(s) \operatorname{Diag}\left(\frac{\epsilon_1'(s)}{\psi_1'(s)}, \dots, \frac{\epsilon_m'(s)}{\psi_m'(s)}\right)$ y $G_2(s) = \operatorname{Diag}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_1(s)}{\bar{\psi}_1(s)}, \dots, \frac{\bar{\varepsilon}_m(s)}{\bar{\psi}_m(s)}\right) V(s)$ que cumplen las condiciones que deseamos. □

Proposición 3.3.4 *Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ una matriz racional no singular y $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Si existen matrices racionales $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ y $\overline{G}_1(s), \overline{G}_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ tales que*

i) $G(s) = G_1(s)G_2(s) = \overline{G}_1(s)\overline{G}_2(s)$,

ii) las funciones racionales invariantes de $G_1(s), \overline{G}_1(s)$ factorizan en M,

iii) las funciones racionales invariantes de $G_2(s), \overline{G}_2(s)$ factorizan en $M' =$ $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$,

entonces $G_1(s)$ y $\overline{G}_1(s)$ son equivalentes por la derecha.

Demostración. Sean $d_1(s), d_2(s), \overline{d}_1(s), \overline{d}_2(s)$ los mínimos comunes múltiplos mónicos de los denominadores de las matrices $G_1(s), G_2(s), \overline{G}_1(s)$ y

$\overline{G}_2(s)$, respectivamente. Por tanto de (ii) y (iii) se deduce que $d_1(s), \overline{d}_1(s)$ factorizan en M y $d_2(s), \overline{d}_2(s)$ factorizan en M'. Sean los polinomios mónicos $d_1'(s) = \text{m.c.m.}(d_1(s), \overline{d}_1(s))$ y $d_2'(s) = \text{m.c.m.}(d_2(s), \overline{d}_2(s))$ factorizando en M y M', respectivamente. Así, por un lado

$$d_1'(s)d_2'(s)G(s) = d_1'(s)G_1(s)d_2'(s)G_2(s),$$

por otro

$$d_1'(s)d_2'(s)G(s) = d_1'(s)\overline{G}_1(s)d_2'(s)\overline{G}_2(s).$$

Llamamos $P(s) = d_1'(s)d_2'(s)G(s)$, $P_1(s) = d_1'(s)G_1(s)$, $Q(s) = d_2'(s)G_2(s)$, $\overline{P}_1(s) = d_1'(s)\overline{G}_1(s)$ y $\overline{Q}(s) = d_2'(s)\overline{G}_2(s)$. Se tiene que $P_1(s), Q(s), \overline{P}_1(s)$ y $\overline{Q}(s)$ son matrices polinomiales safisfaciendo

i) $P(s) = P_1(s)Q(s) = \overline{P}_1(s)\overline{Q}(s)$,

ii) $\det P_1(s)$ y $\det \overline{P}_1(s)$ factorizan en M, y

iii) $\det Q(s)$ y $\det \overline{Q}(s)$ factorizan en $M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Entonces $P_1(s)$ y $\overline{P}_1(s)$ son equivalentes por la derecha. Por tanto, existe $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ unimodular tal que $P_1(s) = \overline{P}_1(s)U(s)$. Así, $d_1'(s)G_1(s) = d_1'(s)\overline{G}_1(s)U(s)$, esto es, $G_1(s) = \overline{G}_1(s)U(s)$. □

Como los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda son invariantes para la equivalencia por la derecha podemos dar la siguiente definición.

Definición 3.3.5 Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ una matriz racional no singular y $M \subseteq \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ matrices racionales tales que

i) $G(s) = G_1(s)G_2(s)$,

ii) las funciones racionales invariantes de $G_1(s)$ factorizan en M, y

iii) las funciones racionales invariantes de $G_2(s)$ factorizan en $M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

A los índices de Wiener–Hopf globales de $G_1(s)$ por la izquierda les llamamos *índices de Wiener–Hopf de $G(s)$ respecto a M por la izquierda.*

Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ una matriz racional y sea $d(s)$ el polinomio mónico mínimo común múltiplo de sus denominadores. Entonces $G(s)$ se puede escribir como

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} N(s), \tag{3.10}$$

donde $N(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$. Conocida la relación entre los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $N(s)$ y $G(s)$ (Lema 2.2.3) no es difícil demostrar el siguiente resultado, que es una generalización del Teorema 3.2.6 a matrices de funciones racionales.

Teorema 3.3.6 *Sean M y M' subconjuntos de* $\text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ *tales que* $M \cup M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sean $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ matrices racionales no singulares sin ceros ni polos en $M \cap M'$. Las matrices $G_1(s), G_2(s)$ son equivalentes Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda si y sólo si $G_1(s)$, $G_2(s)$ tienen los mismos índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda.*

Demostración. Sea $d_i(s)$ el polinomio mónico mínimo común múltiplo de los denominadores de $G_i(s)$ para $i = 1, 2$, y $d(s) = \text{m.c.m.}(d_1(s), d_2(s))$. Por tanto, $d(s)G_i(s) = P_i(s)$ son matrices polinomiales tales que

$$d(s)G_1(s) = P_1(s) = P_1'(s)Q_1(s),$$

$$d(s)G_2(s) = P_2(s) = P_2'(s)Q_2(s),$$

donde $\det P_1'(s), \det P_2'(s)$ factorizan en $M \setminus M'$ y $\det Q_1(s), \det Q_2(s)$ factorizan en $M' \setminus M$. Como $G_1(s)$ y $G_2(s)$ no tienen polos en $M \cap M'$, entonces

$d(s)$ no tiene ceros en $M \cap M'$. Sea $d(s) = q(s)\overline{q}(s)$ tal que $q(s)$ factoriza en $M \setminus M'$ y $\overline{q}(s)$ factoriza en $M' \setminus M$. Así,

$$G_1(s) = \frac{1}{q(s)} P_1'(s) \frac{1}{\overline{q}(s)} Q_1(s) = G_1'(s)\overline{G}_1(s),$$

$$G_2(s) = \frac{1}{q(s)} P_2'(s) \frac{1}{\overline{q}(s)} Q_2(s) = G_2'(s)\overline{G}_2(s),$$

donde las funciones racionales invariantes de $G_1'(s) = \frac{1}{q(s)} P_1'(s)$, $G_2'(s) = \frac{1}{q(s)} P_2'(s)$ factorizan en M, y las funciones racionales invariantes de $\overline{G}_1(s) = \frac{1}{\overline{q}(s)} Q_1(s)$, $\overline{G}_2(s) = \frac{1}{\overline{q}(s)} Q_1(s)$ factorizan en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ los índices de Wiener–Hopf de $G_1(s)$ y $G_2(s)$ respecto a M por la izquierda, es decir, las matrices $G_1'(s) = \frac{1}{q(s)} P_1'(s)$ y $G_2'(s) = \frac{1}{q(s)} P_2'(s)$ tienen los mismos índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda iguales a $k_1, \ldots, k_m$. Por el Lema 2.2.3 esto equivale a que las matrices polinomiales $P_1'(s), P_2'(s)$ tienen los mismos índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda iguales a $k_1 + q \geq \cdots \geq k_m + q$ siendo $q = d(q(s))$. Dicho de otra forma las matrices $P_1(s), P_2(s)$ tienen los mismos índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda. Por el Teorema 3.2.6, esto ocurre si y sólo si las matrices $P_1(s), P_2(s)$, las cuales no tienen ceros en $M \cap M'$, son equivalentes Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda. En otras palabras, existen matrices $U_M(s)$ invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ y $U_{M'}(s)$ invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ tales que $P_2(s) = U_{M'}(s)P_1(s)U_M(s)$, y por tanto $\frac{1}{d(s)} P_2(s) = U_{M'}(s) \frac{1}{d(s)} P_1(s) U_M(s)$ o lo que es lo mismo $G_2(s) = U_{M'}(s)G_1(s)U_M(s)$. □

Al igual que en el caso polinomial, para matrices racionales no singulares sin ceros ni polos en $M \cap M'$, los índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda constituyen un sistema completo de invariantes para la relación de equivalencia Wiener–Hopf por la izquierda respecto a (M, M')

con $M \cup M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Se dice que forman la *estructura Wiener–Hopf respecto a M* de la matriz racional. Además, también tenemos el siguiente resultado sobre la factorización de matrices racionales.

Teorema 3.3.7 *Sean M y M' subconjuntos de* $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ *tales que $M \cup M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Supongamos que existen ideales en $M \setminus M'$ generados por polinomios lineales y sea $(s-a)$ uno de ellos. Sea $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ una matriz racional no singular sin ceros ni polos en $M \cap M'$ y sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ sus índices de Wiener–Hopf con respecto a M por la izquierda. Entonces, existen $U_M(s)$ invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ y $U_{M'}(s)$ invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ tales que*

$$G(s) = U_{M'}(s)\,\mathrm{Diag}((s-a)^{k_1}, \ldots, (s-a)^{k_m})U_M(s).$$

Demostración. Sea $d(s)$ el polinomio mónico mínimo común múltiplo de los denominadores de $G(s)$ y $d(s)G(s) = P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$. Como $G(s)$ no tiene ceros ni polos en $M \cap M'$ entonces $P(s)$ no tiene ceros en $M \cap M'$. Por el Teorema 3.2.8 existen $U_M(s)$, invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$, y $U_{M'}(s)$ invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ tales que

$$P(s) = U_{M'}(s)\,\mathrm{Diag}((s-a)^{k'_1}, \ldots, (s-a)^{k'_m})U_M(s),$$

donde $k'_1 \geq \cdots \geq k'_m$ son enteros no negativos unívocamente determinados por $P(s)$; concretamente son los índices de Wiener–Hopf de $P(s)$ respecto a M por la izquierda. Así,

$$\frac{1}{d(s)}P(s) = U_{M'}(s)\,\mathrm{Diag}\left(\frac{(s-a)^{k'_1}}{d(s)}, \ldots, \frac{(s-a)^{k'_m}}{d(s)}\right)U_M(s).$$

Observemos que $d(s)$ no tienen ceros en $M \cap M'$. Por tanto, podemos escribir $d(s) = d_1(s)d_2(s)$ con $d_1(s)$ factorizando en M y $d_2(s)$ factorizando en M'. En realidad $d_1(s)$ factoriza en $M \setminus M'$ y $d_2(s)$ factoriza en $M' \setminus M$. Además, si $d_1 = d(d_1(s))$

$$\mathrm{Diag}\left(\frac{(s-a)^{k'_1}}{d(s)}, \ldots, \frac{(s-a)^{k'_m}}{d(s)}\right) =$$

$$\frac{(s-a)^{d_1}}{d_1(s)} \operatorname{Diag}\left((s-a)^{k'_1-d_1}, \ldots, (s-a)^{k'_m-d_1}\right) \frac{1}{d_2(s)}.$$

Por tanto, existen $\widetilde{U}_M(s) = U_M(s)\dfrac{1}{d_2(s)}$, invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$, y $\widetilde{U}_{M'}(s) = U_{M'}(s)\dfrac{(s-a)^{d_1}}{d_1(s)}$ invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ tales que

$$G(s) = \widetilde{U}_{M'}(s) \operatorname{Diag}((s-a)^{k'_1-d_1}, \ldots, (s-a)^{k'_m-d_1})\widetilde{U}_M(s).$$

Escribimos $G(s) = \dfrac{1}{d_1(s)}P_1(s)\dfrac{1}{d_2(s)}P_2(s)$ con $\det P_1(s)$ factorizando en $M \setminus M'$, $\det P_2(s)$ en $M' \setminus M$ y tal que $k'_1 \geq \cdots \geq k'_m$ son los índices de Wiener–Hopf de $P_1(s)$ en el infinito por la izquierda. De este modo $k_j = k'_j - d_1$, $j = 1, \ldots, m$, son los índices de Wiener–Hopf globales de $\dfrac{1}{d_1(s)}P_1(s)$ por la izquierda (véase Lema 2.2.3). Dicho de otra forma $k_j = k'_j - d_1$, $j = 1, \ldots, m$, son los índices de Wiener–Hopf de $G(s)$ respecto a M por la izquierda .

□

3.4. Equivalencia Wiener–Hopf local por la derecha

La equivalencia Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la derecha de matrices racionales no singulares se define de manera similar intercambiando los papeles de las matrices $U_{M'}(s)$ y $U_M(s)$: Sean M y M' subconjuntos de $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ tales que $M \cup M' = \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times m}$ matrices racionales no singulares sin ceros ni polos en $M \cap M'$. Las matrices $G_1(s), G_2(s)$ son *equivalentes Wiener–Hopf respecto a* (M, M') *por la derecha* si existen matrices $U_M(s)$ invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ y $U_{M'}(s)$ invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ tales que

$$G_2(s) = U_M(s)G_1(s)U_{M'}(s).$$

En otras palabras, dos matrices racionales $G_1(s), G_2(s)$ son equivalentes Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda si y sólo si $G_1(s)^T, G_2(s)^T$

son equivalentes Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la derecha. Por otra parte, dada una matriz racional no singular $G(s)$ se pueden definir los índices de Wiener–Hopf respecto a M por la derecha como los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la derecha de la matriz factor de $G(s)$ por la derecha, esto es, como los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la derecha de $G_2(s)$ tal que

i) $G(s) = G_1(s)G_2(s)$,

ii) las funciones racionales invariantes de $G_2(s)$ factorizan en M, y

iii) las funciones racionales invariantes de $G_1(s)$ factorizan en M' con $M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Esta definición está fundamentada en el hecho de que para dos factorizaciones diferentes de $G(s)$ que satisfacen estas condiciones, se puede demostrar repitiendo los argumentos de la prueba de la Proposición 3.2.4, que las matrices factor por la derecha son equivalentes por la izquierda y por lo tanto tienen los mismos índices de Wiener–Hopf en el infinito por la derecha. Por tanto, se deduce por simple transposición que los índices de Wiener–Hopf de $G(s)$ respecto a M por la izquierda son los índices de Wiener–Hopf de $G(s)^T$ respecto a M por la derecha.

En consecuencia, los resultados mostrados hasta ahora en este capítulo en términos de la equivalencia Wiener–Hopf por la izquierda y los índices de Wiener–Hopf por la izquierda pueden ser enunciados en términos de la equivalencia Wiener–Hopf por la derecha y los índices de Wiener–Hopf por la derecha.

3.5. Caso Complejo

En esta sección justificamos y mostramos las ideas de la generalización de la relación de equivalencia Wiener–Hopf definida en $\mathbb{C}$ a cuerpos arbitrarios. Concretamente, veremos que la equivalencia Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda (Definición 3.2.1) generaliza a la dada en el plano complejo (Definición 3.1.1). Para esta última podemos dar la siguiente factorización relativa al contorno γ (ver [13]) .

Teorema 3.5.1 *Sea γ una curva rectificable cerrada en el plano complejo con dominio interior Ω_+ y denotamos por Ω_- la región de fuera de γ la cual contiene al punto del infinito. Sea $z_0 \in \Omega_+$ y $G(s) \in \mathbb{C}(s)^{m\times m}$ una matriz racional no singular sin polos ni ceros en γ. Entonces existen matrices invertibles $U_-(s) \in \mathbb{C}(s)^{m\times m}$ sin ceros ni polos en $\Omega_- \cup \gamma$ y $U_+(s) \in \mathbb{C}(s)^{m\times m}$ sin ceros ni polos en $\Omega_+ \cup \gamma$ tales que*

$$G(s) = U_-(s)\,\mathrm{Diag}((s-z_0)^{k_1}, \ldots, (s-z_0)^{k_m})U_+(s),$$

donde $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ son enteros unívocamente determinados por $G(s)$.

Definición 3.5.2 Los enteros $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ constituyen un sistema completo de invariantes para la equivalencia Wiener–Hopf respecto a γ por la izquierda y se llaman los *índices de Wiener–Hopf de $G(s)$ respecto a γ por la izquierda* .

Análogamente, dadas matrices $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{C}(s)^{m\times m}$ que no tienen polos ni ceros en γ, intercambiando los papeles de las matrices $U_-(s)$ y $U_+(s)$, definimos la *equivalencia Wiener–Hopf respecto a γ por la derecha.* Los enteros invariantes para la equivalencia Wiener–Hopf respecto a γ por la derecha de una matriz racional $G(s)$ no singular sin polos ni ceros en γ se llaman los *índices de Wiener–Hopf de $G(s)$ respecto a γ por la derecha* (ver también [23]).

Cada subconjunto del plano complejo lo podemos identificar con un subconjunto M de ideales maximales y viceversa. En efecto, podemos asociar a cada número complejo z_0 de $\mathbb{C}$ el ideal maximal $(s - z_0)$ generado por el polinomio $\pi(s) = s - z_0$ y a este ideal el anillo local $\mathbb{C}_\pi(s)$:

$$z_0 \longleftrightarrow s - z_0 \longleftrightarrow (s - z_0) \longleftrightarrow \mathbb{C}_\pi(s).$$

Los elementos de $\mathbb{C}_\pi(s)$ no tienen a z_0 como polo y sus unidades son las funciones racionales $u(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$ para las cuales z_0 no es cero ni polo. Por tanto, existe una correspondencia biyectiva entre subconjuntos de $\mathbb{C}$ y subconjuntos de $\mathrm{Specm}(\mathbb{C}[s])$ donde a cada subconjunto no vacío $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ le asociamos el conjunto $M = \{(s - z_0) \in \mathrm{Specm}(\mathbb{C}[s]) : z_0 \in \Omega\} \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{C}[s])$ y a su vez a M la intersección de anillos locales $\mathbb{C}_M(s) = \bigcap_{(\pi(s))\in M} \mathbb{C}_\pi(s)$. Los elementos de $\mathbb{C}_M(s)$ no tienen polos en Ω y sus unidades son funciones racionales $u(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$ tales que z_0 no es cero ni polo de $u(s)$ para todo $z_0 \in \Omega$.

Consideramos que si $\Omega = \emptyset$, entonces $M = \emptyset$ y $\mathbb{C}_\emptyset(s) = \mathbb{C}(s)$ es el cuerpo de funciones racionales.

Pero nosotros debemos tener en cuenta el punto del infinito. En realidad, queremos identificar subconjuntos de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con intersecciones de anillos locales. Por tanto necesitamos extender la idea de anillo local de $\mathbb{C}[s]$ al punto del infinito. Hemos justificado en la Sección 1.2.5 que al igual que asociamos a un punto finito $z_0 \in \mathbb{C}$ el anillo local $\mathbb{C}_\pi(s)$ donde $\pi(s) = s - z_0$, asociaremos con el ∞ el anillo local $\mathbb{C}_{pr}(s)$. Así, si a un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ asociado a $M = \{(s - z_0) \in \mathrm{Specm}(\mathbb{C}[s]) : z_0 \in \Omega\}$ le añadimos el punto del infinito, tenemos la siguiente correspondencia

$$\Omega \cup \{\infty\} \longleftrightarrow \mathbb{C}_M(s) \cap \mathbb{C}_{pr}(s).$$

Las unidades en $\mathbb{C}_M(s) \cap \mathbb{C}_{pr}(s)$ son las funciones racionales propias $u(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$ tales que z_0 no es cero ni polo de $u(s)$ para todo $z_0 \in \Omega$ y $d(p(s)) = d(q(s))$.

Sea γ un contorno en $\mathbb{C}$ con dominio interior Ω_+ y sea Ω_- el complementario de $\Omega_+ \cup \gamma$ en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, el cual contiene a $\{\infty\}$. Podemos identificar

$\Omega_+ \cup \gamma$ con el conjunto $M = \{(s - z_0) \in \text{Specm}(\mathbb{C}[s]) : z_0 \in \Omega_+ \cup \gamma\}$ y $(\Omega_- \cup \gamma) \setminus \{\infty\}$ con otro conjunto $M' = \{(s - z_0) \in \text{Specm}(\mathbb{C}[s]) : z_0 \in (\Omega_- \cup \gamma) \setminus \{\infty\}\}$. Con estas identificaciones tenemos que:

- Una matriz $G(s) \in \mathbb{C}(s)^{m \times m}$ no tiene ceros ni polos en γ si y sólo si $G(s)$ no tiene ceros ni polos en $M \cap M'$.

- Una matriz no singular $U_+(s) \in \mathbb{C}(s)^{m \times m}$ no tiene ceros ni polos en $\Omega_+ \cup \gamma$ si y sólo si $U_+(s)$ es invertible en $\mathbb{C}_M(s)^{m \times m}$.

- Una matriz no singular $U_-(s) \in \mathbb{C}(s)^{m \times m}$ no tiene ceros ni polos en $\Omega_- \cup \gamma$ si y sólo si $U_-(s)$ es invertible en $\mathbb{C}_{M'}(s)^{m \times m} \cap \mathbb{C}_{pr}(s)^{m \times m}$.

Observemos que los conjuntos M y M' cumplen la condición $M \cup M' = \text{Specm}(\mathbb{C}[s])$. Así, dados γ, Ω_+ y Ω_- bajo las condiciones expuestas más arriba, tenemos que dos matrices racionales no singulares $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{C}(s)^{m \times m}$ sin ceros ni polos en γ son equivalentes Wiener–Hopf respecto a γ por la izquierda si y sólo si $G_1(s), G_2(s) \in \mathbb{C}(s)^{m \times m}$ son equivalentes Wiener–Hopf respecto a (M, M') donde $M = \{(s - z_0) \in \text{Specm}(\mathbb{C}[s]) : z_0 \in \Omega_+ \cup \gamma\}$ y $M' = \{(s - z_0) \in \text{Specm}(\mathbb{C}[s]) : z_0 \in (\Omega_- \cup \gamma) \setminus \{\infty\}\}$. En definitiva, la relación de equivalencia dada en [13, 20] (Definición 3.1.1) es un caso particular de la relación de equivalencia dada en la Sección 3.2 (Definición 3.2.1). Y, por el Teorema 3.3.7 (el cual se puede aplicar ya que en $\mathbb{C}$ los polinomios irreducibles son de grado 1) para matrices racionales no singulares sin ceros ni polos en γ los índices de Wiener–Hopf respecto a γ por la izquierda son los índices de Wiener–Hopf respecto a M, donde $M = \{(s - z_0) \in \text{Specm}(\mathbb{C}[s]) : z_0 \in \Omega_+ \cup \gamma\}$.

3.6. Índices de Hermite locales para matrices polinomiales

Recordemos que $\mathbb{F}[s] \subseteq \mathbb{F}_M(s)$ para cualquier $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. De ahí que toda matriz polinomial no singular se puede considerar como una matriz con elementos en $\mathbb{F}_M(s)$.

En esta sección estamos interesados en ver que los índices de Hermite de una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ respecto a un subconjunto no vacío de $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$, se pueden obtener factorizando la matriz como producto de matrices, $P(s) = P_1(s)Q(s)$, tales que $\det P_1(s)$ factoriza en M y $\det Q(s)$ factoriza en $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Por la Proposición 3.2.4 podemos garantizar que todas las matrices $P_1(s)$, factor de $P(s)$ por la izquierda, que satisfacen estas condiciones son equivalentes por la derecha y por lo tanto tienen los mismos índices de Hermite globales. En la proposición siguiente demostramos que los índices de Hermite globales de las matrices factor por la izquierda de $P(s)$ que satisfacen las condiciones anteriormente mencionadas coinciden con los índices de Hermite respecto a M de $P(s)$ definidos en la Sección 1.2.6 del Capítulo 1.

Proposición 3.6.1 *Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular y $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $P_1(s), Q(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ matrices polinomiales tales que*

i) $P(s) = P_1(s)Q(s)$,

ii) $\det P_1(s)$ *factoriza en* M, *y*

iii) $\det Q(s)$ *factoriza en* $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Entonces $h_1, h_2, \ldots, h_m$ son los índices de Hermite globales de $P_1(s)$ si y sólo si $h_1, h_2, \ldots, h_m$ son los índices de Hermite de $P(s)$ respecto a M.

Demostración.

Supongamos que $h_1, h_2, \ldots, h_m$ son los índices de Hermite globales de $P_1(s)$. Entonces existe una matriz unimodular $W(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tal que $P_1(s)W(s) = H_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con

$$H_1(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(s) & h_{m2}(s) & \cdots & h_{mm}(s) \end{bmatrix}$$

la forma de Hermite global de $P_1(s)$ donde los polinomios de la diagonal son mónicos y tales que $d(h_{ij}(s)) < d(h_{ii}(s))$ para todo $j = 1, \ldots, i-1$, con $i = 1, 2, \ldots, m$. Por una parte tenemos que $\det H_1(s) = \det P_1(s) \det W(s) = c \det P_1(s)$ con c constante. Por la condición (ii) deducimos que $\det H_1(s) = h_{11}(s) \cdots h_{mm}(s)$ factoriza en M. En consecuencia cada uno de los polinomios mónicos de la diagonal $h_{ii}(s)$ factoriza en M para todo $i = 1, \ldots, m$. Por otra parte, para $i = 1, \ldots, m$, $d(h_{ii}(s)) = h_i$ y si escribimos $h_{ij}(s) = u_{ij}(s)\overline{h}_{ij}(s)$, con $u_{ij}(s) \in \mathbb{F}[s]$ unidad en $\mathbb{F}_M(s)$, tenemos que $d_M(h_{ii}(s)) = d(h_{ii}(s)) = h_i > d(h_{ij}(s)) = d(u_{ij}(s)) + d(\overline{h}_{ij}(s)) \geq d(\overline{h}_{ij}(s)) = d_M(h_{ij}(s))$ para todo $j = 1, \ldots, i-1$. Sea

$$P(s) = P_1(s)W(s)W(s)^{-1}Q(s) = H_1(s)W(s)^{-1}Q(s)$$

y llamamos $V(s)^{-1} = W(s)^{-1}Q(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$. La matriz $V(s)^{-1}$ es polinomial; por tanto sus elementos están en $\mathbb{F}_M(s)$. Además es invertible en $\mathbb{F}_M(s)$ porque por (iii) $\det V(s)^{-1} = \det W(s)^{-1} \det Q(s) = c \det Q(s)$ es una unidad en $\mathbb{F}_M(s)$. En definitiva, existe $V(s)$ invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ tal que $P(s)V(s) = H_1(s)$ que cumple las condiciones del Lema 1.2.5. Por tanto $H_1(s)$ es la forma de Hermite respecto a M de $P(s)$ y $h_1, h_2, \ldots, h_m$ son los índices de Hermite respecto a M de $P(s)$.

Recíprocamente, supongamos que $h_1, h_2, \ldots, h_m$ son los índices de Hermite respecto a M de $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$. Sea $H(s)$ la forma de Hermite global de $P(s)$, entonces existe una matriz unimodular $U(s)$ tal que $P(s)U(s) = H(s)$, donde

$$H(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(s) & h_{m2}(s) & \cdots & h_{mm}(s) \end{bmatrix}.$$

Sea $h_{ii}(s) = \alpha_{ii}(s)\beta_{ii}(s)$ tal que $\alpha_{ii}(s)$ factoriza en M y $\beta_{ii}(s)$ factoriza en $\text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Entonces m.c.d.$(\alpha_{ii}(s), \beta_{ii}(s)) = 1,\ 1 \leq i \leq m$. Dado que $\alpha_{ii}(s)$ y $\beta_{jj}(s)$ son coprimos para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, por la identidad de Bezout ([31, Lema 2.4-10, p.141]) existen polinomios $a_{ij}(s), b_{ij}(s) \in \mathbb{F}[s]$, con $j = 1, \ldots, i-1$, $i = 2, \ldots, m$, tales que $H(s) = H_1(s)H_2(s)$ donde

$$H_1(s) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}(s) & \alpha_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(s) & a_{m2}(s) & \cdots & \alpha_{mm}(s) \end{bmatrix},$$

y

$$H_2(s) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21}(s) & \beta_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}(s) & b_{m2}(s) & \cdots & \beta_{mm}(s) \end{bmatrix},$$

son matrices polinomiales. Tenemos que $P(s) = H_1(s)H_2(s)U(s)^{-1}$. Si la matriz $H_1(s)$ no es dominante en grado por filas, podemos realizar transformaciones por columnas, que no modifican los elementos de la diagonal, para obtener una matriz con esta propiedad. En este caso, existe una matriz unimodular $W(s)$ tal que $H_1(s)W(s)$ es una matriz triangular inferior con elementos en la diagonal $\alpha_{ii}(s)$ y dominante en grado por filas. Entonces $d(\alpha_{ii}(s))$ son los índices de Hermite globales de $H_1(s)$, $i = 1, \ldots, m$.

Por otro lado, $P(s) = H_1(s)W(s)W(s)^{-1}H_2(s)U(s)^{-1}$. Sean $H_M(s) = H_1(s)W(s)$ y $V(s) = W(s)^{-1}H_2(s)U(s)^{-1}$. Se tiene que

$$P(s) = H_M(s)V(s),$$

con $V(s)$ una matriz polinomial con determinante igual a $c\beta_{11}(s)\cdots\beta_{mm}(s)$ donde c es constante y los polinomios $\beta_{ii}(s)$ son tales que factorizan en $\text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Por tanto, $V(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)$. Además, si denotamos por $a'_{ij}(s)$ los elementos no diagonales de la matriz $H_M(s)$ tenemos que $d_M(\alpha_{ii}(s)) = d(\alpha_{ii}(s)) > d(a'_{ij}(s)) \geq d_M(a'_{ij}(s))$ para $j = 1, \ldots, i-1$, con $i = 1, 2, \ldots, m$. Por el Lema 1.2.5 deducimos que $H_M(s)$ es la forma de Hermite respecto a M de $P(s)$. Entonces, por hipótesis $d(\alpha_{ii}(s)) = h_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Por último, como $P(s) = H_M(s)V(s) = P_1(s)Q(s)$ con $\det H_M(s), \det P_1(s)$ factorizando en M y $\det V(s), \det Q(s)$ factorizando en $\text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ se sigue de la Proposición 3.2.4 que $H_M(s)$ y $P_1(s)$ son equivalentes por la derecha. Por tanto, $H_M(s)$ y $P_1(s)$ tienen los mismos índices de Hermite globales y éstos son $h_1, \ldots, h_m$. $\square$

Observación 3.6.2 Obsérvese que la forma de Hermite y los índices de Hermite (globales o respecto a un subconjunto de $\text{Specm}(\mathbb{F}[s])$) de una matriz son únicos. Por lo tanto en la demostración de la Proposición 3.6.1 no es necesario demostrar el recíproco. Ahora bien, ambas demostraciones son ilustrativas pues de ellas se deduce lo siguiente para matrices polinomiales no singulares:

- La forma de Hermite respecto a cualquier subconjunto no vacío M de una matriz polinomial es también polinomial.

- La forma de Hermite respecto a un subconjunto M de una matriz $P(s) = P_1(s)Q(s)$ con $\det P_1(s)$ y $\det Q(s)$ factorizando en M y $\text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$, respectivamente, es la forma de Hermite global del factor de la izquierda, $P_1(s)$.

- Si conocemos la forma de Hermite global de una matriz polinomial podemos determinar los índices de Hermite respecto a cualquier M, pues dicha información está en los elementos de la diagonal de su forma de Hermite global. Este hecho será analizado posteriormente para estudiar la relación local y global de los índices de Hermite en el caso de matrices polinomiales.

Capítulo 4

Índices locales de sistemas

4.1. Introducción

Buena parte del estudio de la estructura de un sistema lineal de tipo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4.1}$$

se puede realizar a través del estudio de sus representaciones polinomiales matriciales pues, como ya hemos comentado en el Capítulo 1, mucha información global del sistema está en la matriz polinomial y viceversa. Por ejemplo, del hecho de que las matrices polinomiales de sistema $[sI_n - A\ B]$ y $\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \end{bmatrix}$ sean equivalentes en el sentido de Rosenbrock se deduce que $U(s)(sI_n - A)V(s) = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ 0 & P(s) \end{bmatrix}$. En otras palabras, la matriz característica de A y $P(s)$ son equivalentes. Por tanto la matriz de estados de un sistema controlable y cualquier representación polinomial matricial del mismo tienen los mismos factores invariantes no triviales.

Además, los resultados de las Proposiciones 1.4.5 y 1.4.6 relacionan diferentes invariantes para pares de matrices y sus correspondientes representaciones polinomiales. Por un lado, si dos pares son semejantes sus correspondientes representaciones polinomiales matriciales son equivalentes por la derecha y por lo tanto tienen los mismos índices de Hermite globales. Aún más, en [58] se demuestra que los índices de Hermite de un par controlable (A, B) y los grados de las filas de la forma de Hermite de una representación polinomial matricial de dicho par coinciden, esto es, los índices de Hermite de un par son los índices de Hermite de cualquier representación polinomial matricial del mismo. Por otro, si dos pares son equivalentes por feedback sus representaciones polinomiales matriciales son globalmente Wiener–Hopf equivalentes. Como consecuencia si dos pares tienen los mismos índices de controlabilidad sus representaciones polinomiales matriciales tienen los mismos índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda. En efecto, dado un par controlable, el cual podemos pensar que está en su forma canónica de Brunovsky (ver Capítulo 1), admite una representación polinomial matricial cuyos índices de Wiener–Hopf son los índices de controlabilidad del par. Sea (A_c, B_c) el par en forma canónica de Brunovsky equivalente por feedback a (A, B) y con índices de controlabilidad $k_1 \geq \cdots \geq k_m$. Llamamos

$$D(s) = \operatorname{Diag}(s^{k_1}, \ldots, s^{k_m}),\ \Psi(s) = \operatorname{Diag}\{\begin{bmatrix} 1 & s & \cdots & s^{k_i - 1} \end{bmatrix}^T : i = 1, \ldots, m\}.$$

Entonces, se puede demostrar (ver [31]) que

$$(sI_n - A_c)^{-1} B_c = \Psi(s) D(s)^{-1}$$

donde las matrices $\Psi(s)$, $D(s)$ son coprimas por la derecha.

Esto significa que $D(s) = \operatorname{Diag}(s^{k_1}, \ldots, s^{k_m})$ es una representación polinomial matricial de (A_c, B_c). Por lo tanto, tenemos que si $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$ es cualquier representación polinomial matricial de (A, B), entonces por la Proposición 1.4.6 existen $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m \times m}$, bipropia, y $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$, unimodular, tales que

$$P(s) = B(s) \operatorname{Diag}(s^{k_1}, \ldots, s^{k_m}) U(s).$$

Así, los índices de controlabilidad $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ de un par controlable (A, B) son los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de cualquiera de sus representaciones polinomiales matriciales.

Resumiendo, en el caso global se conocen relaciones entre algunos invariantes globales de un matriz polinomial no singular (factores invariantes finitos, índices de Hermite globales e índices de Wiener–Hopf globales) y algunos invariantes (estructura finita de la matriz de estados, índices de Hermite e índices de controlabilidad) de una realización de dicha matriz polinomial. En el Capítulo 3 hemos definido para matrices polinomiales no singulares algunos de esos invariantes en un cierto sentido local, es decir, respecto a un subconjunto M de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. En este capítulo definimos los siguientes invariantes de pares de matrices controlables: índices de Hermite respecto a M e índices de controlabilidad respecto a M y estudiamos (Sección 4.3) la relación entre estos invariantes de pares de matrices y los correspondientes invariantes de sus respectivas representaciones polinomiales matriciales.

Los resultados correspondientes están publicados en [3].

El segundo objetivo en este capítulo es estudiar cómo están relacionados los índices globales y locales tanto para matrices polinomiales como para sistemas. Esta relación es bien conocida en el caso de los factores invariantes (globales y locales) de una matriz polinomial sobre un cuerpo arbitrario. Como se ha dicho en la introducción el conocimiento de la estructura finita local (divisores elementales) nos permite obtener la estructura finita global (factores invariantes) y viceversa.

En la Sección 4.4 tratamos de estudiar si es posible determinar los índices de Hermite globales (locales) de un par controlable (A, B) a partir de los índices de Hermite locales (globales). Igualmente para los índices de controlabilidad (Sección 4.5). En ambos casos hacemos previamente este estudio para matrices polinomiales no singulares y después trasladamos las relaciones obtenidas a los sistemas.

4.2. Índices locales de sistemas

Primero presentamos dos proposiciones que nos van a permitir dar una correcta definición de los índices de sistemas respecto a un subconjunto M de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$.

En lo sucesivo hablaremos de cuándo el polinomio característico de una matriz cuadrada con elementos en el cuerpo $\mathbb{F}$ factoriza, o no, en un subconjunto $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Recordamos que los únicos polinomios que factorizan en $M = \emptyset$ son las constantes. Ahora bien, el polinomio característico asociado a cualquier matriz cuadrada nunca es constante. Por tanto, es claro que no existe ninguna matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ cuyo polinomio característico, $\det(sI_n - A)$, factorice en $M = \emptyset$.

Proposición 4.2.1 *Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y sea $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ un par controlable. Entonces existen enteros no negativos n_1, n_2 tales que $n = n_1 + n_2$ y existen pares controlables $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$, $(A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n_2\times n_2} \times \mathbb{F}^{n_2\times m}$ tales que*

(i) (A, B) *es semejante a* $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$,

(ii) $\det(sI_{n_1} - A_1)$ *factoriza en* M*, y*

(iii) $\det(sI_{n_2} - A_2)$ *factoriza en* $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Demostración. Es claro que si $M = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ o $\det(sI_n - A)$ factoriza en $M \subsetneq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ entonces $n_1 = n, n_2 = 0$ y $(A_1, B_1) = (A, B)$. Por el contrario, si $M = \emptyset$ o $\det(sI_n - A)$ factoriza en $M' \subsetneq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ entonces $n_1 = 0, n_2 = n$ y $(A_2, B_2) = (A, B)$. Supongamos que $M \neq \emptyset$, $M \neq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y $\det(sI_n - A) = \beta(s)\gamma(s)$ tal que $\beta(s)$ es un polinomio de grado n_1 que factoriza en M, mientras que $\gamma(s)$ es un polinomio de grado n_2 que factoriza en M' ($n = n_1 + n_2$).

Denotamos por

$$\alpha_i(s) = \pi_1(s)^{d_{i1}}\pi_2(s)^{d_{i2}} \cdots \pi_t(s)^{d_{it}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

los factores invariantes de la matriz polinomial $sI_n - A$. El conjunto de divisores elementales es el conjunto de potencias $\pi_j(s)^{d_{ij}}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t$ diferentes de 1 (incluyendo repeticiones). Denotamos por $L^{(ij)}$ la matriz compañera correspondiente al divisor elemental $\pi_j(s)^{d_{ij}}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t$, distinto de 1. Entonces existe una matriz $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$ no singular tal que A es semejante a la segunda forma normal natural de la matriz A (Capítulo 1),

$$QAQ^{-1} = \operatorname{Diag}(L^{(11)}, \ldots, L^{(1t)}, \ldots, L^{(n1)}, \ldots, L^{(nt)}).$$

Sea $A_1 \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1}$ la matriz diagonal por bloques cuyos bloques diagonales son matrices compañeras cuyos polinomios característicos factorizan en M y $A_2 \in \mathbb{F}^{n_2\times n_2}$ la matriz diagonal por bloques con bloques las restantes matrices compañeras, cuyos polinomios característicos factorizan en M'. Tras permutaciones de filas y columnas tenemos que existe una matriz no singular $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M mientras que $\det(sI_{n_2} - A_2)$ factoriza en M'. Sea $PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$. Ahora queremos probar que (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son pares controlables. Por ser (A, B) controlable, existen $n = n_1 + n_2$ filas en la matriz de controlabilidad $C(A, B)$ linealmente independientes. Escribimos $C(A, B) = P^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & A_1^2B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 \\ B_2 & A_2B_2 & A_2^2B_2 & \cdots & A_2^{n-1}B_2 \end{bmatrix}$. Por tanto el rango de cada matriz $\begin{bmatrix} B_i & A_iB_i & \cdots & A_i^{n-1}B_i \end{bmatrix}$ es n_i. Ahora bien, por el Teorema de Hamilton–Cayley ([18, p. 83]) $\operatorname{rang} C(A_i, B_i) = n_i$. Por tanto, se tiene que (A_i, B_i) es controlable, $i = 1, 2$. □

Proposición 4.2.2 *Sea* $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ *y sean* $(A_i, B_i), (A'_i, B'_i) \in \mathbb{F}^{n_i\times n_i} \times \mathbb{F}^{n_i\times m}$ *pares controlables,* $i = 1, 2$, *tales que* *(i)* $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$ *es semejante a* $\left(\begin{bmatrix} A_1' & 0 \\ 0 & A_2' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} \right)$,

(ii) $\det(sI_{n_1} - A_1)$, $\det(sI_{n_1} - A_1')$ *factorizan en* M, *y*

(iii) $\det(sI_{n_2} - A_2)$, $\det(sI_{n_1} - A_2')$ *factorizan en* $M' = \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Entonces (A_i, B_i) *es semejante a* (A_i', B_i'), $i = 1, 2$.

Demostración. Por (i) existe una matriz invertible $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $n = n_1 + n_2$, tal que

$$P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} A_1' & 0 \\ 0 & A_2' \end{bmatrix}, \quad P \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1' \\ B_2' \end{bmatrix}.$$

Sea $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$, $P_1 \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1}$, $P_4 \in \mathbb{F}^{n_2\times n_2}$. Entonces

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1' & 0 \\ 0 & A_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$P_1 A_1 = A_1' P_1, \tag{4.2}$$

$$P_2 A_2 = A_1' P_2, \tag{4.3}$$

$$P_3 A_1 = A_2' P_3, \tag{4.4}$$

$$P_4 A_2 = A_2' P_4. \tag{4.5}$$

Por (i), los factores invariantes de $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} A_1' & 0 \\ 0 & A_2' \end{bmatrix}$ son los mismos. Además, teniendo en cuenta (ii) y (iii), A_1 y A_1' tienen los mismos factores invariantes y, A_2 y A_2' también. Por tanto, m.c.d.$(\det(sI_{n_1} - A_1'), \det(sI_{n_2} - A_2)) = 1$ y m.c.d.$(\det(sI_{n_1} - A_1), \det(sI_{n_2} - A_2')) = 1$. Utilizando las ideas de [34, Sección 12.5] deducimos de (4.3) y (4.4) que $P_2 = 0$ y $P_3 = 0$. Como consecuencia, $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1' \\ B_2' \end{bmatrix}$. Entonces,

$$P_1 B_1 = B_1', \tag{4.6}$$

$$P_4 B_2 = B_2'. \tag{4.7}$$

Además del hecho de que P sea invertible, se deduce que P_1, P_4 son también invertibles. Se tiene, de las condiciones (4.2) y (4.6), que (A_1, B_1) es semejante a (A_1', B_1') y de (4.5) y (4.7) que (A_2, B_2) es semejante a (A_2', B_2'). $\square$

Teniendo en cuenta las Proposiciones 4.2.1 y 4.2.2 y el hecho de que tanto los índices de controlabilidad como los de Hermite son invariantes para la semejanza, tienen perfecto sentido las siguientes definiciones.

Definición 4.2.3 Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ un par controlable. Sean $c_1, \ldots, c_m$ enteros no negativos tales que $c_1 \geq \cdots \geq c_m$. Estos números se llaman los *índices de controlabilidad respecto a* M *de* (A, B) si existen enteros no negativos n_1, n_2 tales que $n = n_1 + n_2$ y existen pares controlables $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$ y $(A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n_2\times n_2} \times \mathbb{F}^{n_2\times m}$ tales que

(i) (A, B) es semejante a $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$,

(ii) $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M,

(iii) $\det(sI_{n_2} - A_2)$ factoriza en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$, y

(iv) $c_1, \ldots, c_m$ son los índices de controlabilidad del par (A_1, B_1).

Definición 4.2.4 Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ un par controlable. Sean $h_1, \ldots, h_m$ enteros no negativos. Estos números se llaman los *índices de Hermite respecto a* M *de* (A, B) si existen enteros no negativos n_1, n_2 tales que $n = n_1 + n_2$ y existen pares controlables $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$ y $(A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n_2\times n_2} \times \mathbb{F}^{n_2\times m}$ tales que

(i) (A, B) es semejante a $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$,

(ii) $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M,

(iii) $\det(sI_{n_2} - A_2)$ factoriza en $M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$, y

(iv) $h_1, \ldots, h_m$ son los índices de Hermite del par (A_1, B_1).

Obsérvese que cuando $M = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ entonces $n_1 = n, n_2 = 0$ y $(A_1, B_1) = (A, B)$. Por tanto los índices de controlabilidad (Hermite) respecto a $\text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ son los índices de controlabilidad (Hermite) de (A, B). De ahí que a los índices de controlabilidad (Hermite) de un par controlable (A, B) les llamamos los *índices de controlabilidad (Hermite) globales de* (A, B). Si por el contrario $M = \emptyset$ o $\det(sI_n - A)$ factoriza en M' entonces $n_1 = 0, n_2 = n$ y $(A_2, B_2) = (A, B)$. En este caso, cuando no exista el par (A_1, B_1), consideraremos que los índices de controlabilidad (Hermite) de (A, B) respecto a M son todos iguales a cero. Cuando M se reduce a un único ideal generado por un polinomio mónico irreducible $\pi(s)$, a los índices de controlabilidad (Hermite) respecto a $M = (\pi(s))$ les llamamos los *índices de controlabilidad (Hermite) locales respecto a* $\pi(s)$ *de* (A, B).

4.3. Relación entre los índices locales de sistemas y los índices locales de sus representaciones polinomiales matriciales

El objetivo de esta sección es estudiar la relación entre los índices de controlabilidad respecto a M de un par y los índices de Wiener–Hopf respecto a M de sus representaciones polinomiales matriciales. Igualmente para los índices de Hermite.

El siguiente lema se puede probar siguiendo las ideas de [58, Teorema 2.4].

Lema 4.3.1 *Sean* $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n\times n}\times\mathbb{F}^{n\times m}$ *pares controlables,* $P_1(s)$, $P_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *representaciones polinomiales matriciales de* (A_1, B_1) *y* (A_2, B_2)*, respectivamente y* $G_1(s)$, $G_2(s) \in \mathbb{F}(s)^{n\times m}$ *matrices de transferencia de* (A_1, B_1) *y* (A_2, B_2)*, respectivamente.*

Sean $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *y* $Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$ *matrices invertibles y sea* $F \in \mathbb{F}^{m\times n}$ *tal que* $(A_1, B_1) = (PA_2P^{-1} + PB_2F, PB_2Q)$*. Si* $B(s) = Q^{-1}[I_m - FPG_2(s)]$ *y* $U(s) = [B(s)P_2(s)]^{-1}P_1(s)$*, entonces* $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ *es bipropia,* $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *es unimodular y* $P_1(s) = B(s)P_2(s)U(s)$*.*

Recíprocamente, si $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ *es bipropia y* $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *es unimodular tal que* $P_1(s) = B(s)P_2(s)U(s)$*, entonces existen* $P \in \mathbb{F}^{n\times n}, Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$ *matrices invertibles y* $F \in \mathbb{F}^{m\times n}$ *tal que* $B(s) = Q^{-1}[I_m - FPG_2(s)]$ *y* $(A_1, B_1) = (PA_2P^{-1} + PB_2F, PB_2Q)$*.*

Demostración. Por ser $G_i(s)$ matriz de transferencia de (A_i, B_i) y $P_i(s)$ representación polinomial matricial de (A_i, B_i), existen matrices polinomiales $N_i(s)$ tales que $N_i(s)$ y $P_i(s)$ son coprimas a derecha satisfaciendo $G_i(s) = (sI_n - A_i)^{-1}B_i = N_i(s)P_i(s)^{-1}$, $i = 1, 2$. Supongamos que existen P, Q, F tales que

$$(A_1, B_1) = (PA_2P^{-1} + PB_2F, PBQ).$$

Construimos $B(s) = Q^{-1}[I_m - FPG_2(s)]$. La matriz $B(s)$ es bipropia pues Q^{-1} es invertible y $Q^{-1}FPG_2(s)$ es estrictamente propia.

Pensemos en un sistema lineal de tipo (1.6)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_2x(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) \end{aligned}$$

para $C_2 = I$ que tras realizar la transformada de Laplace tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} (sI_n - A_2)\bar{x}(s) &= B_2\bar{u}(s) \\ \bar{y}(s) &= \bar{x}(s) \end{aligned}$$

donde la relación entrada-salida está dada por

$$\bar{y}(s) = G_2(s)\bar{u}(s). \tag{4.8}$$

Si realizamos una transformación de tipo (t_3) (ver Capitulo 1) el nuevo sistema queda

$$\begin{array}{l} (sI_n - A_2 - B_2FP)\bar{x}(s) = B_2\bar{u}(s) \\ \bar{y}(s) = \bar{x}(s) \end{array}$$

y

$$\bar{y}(s) = (sI_n - A_2 - B_2FP)^{-1}B_2\bar{v}(s). \tag{4.9}$$

Tenemos que $\bar{v}(s) = \bar{u}(s) - FP\bar{x}(s) = \bar{u}(s) - FP\bar{y}(s)$. Ahora por (4.8) $\bar{u}(s) = [I_m - FPG_2(s)]^{-1}v(s)$. Sustituyendo en (4.8) queda $\bar{y}(s) = G_2(s)[I_m - FPG_2(s)]^{-1}\bar{v}(s)$. Por lo tanto, por (4.9),

$$(sI_n - A_2 - B_2FP)^{-1}B_2 = G_2(s)[I_m - FPG_2(s)]^{-1}.$$

Así, $G_1(s) = (sI_n - A_1)^{-1}B_1 = (sI_n - PA_2P^{-1} - PB_2F)^{-1}PB_2Q = P(sI_n - A_2 - B_2FP)^{-1}B_2Q = PG_2(s)[I_m - FPG_2(s)]^{-1}Q = PG_2(s)B(s)^{-1} = PN_2(s)(B(s)P_2(s))^{-1}$. Obsevemos que la matriz $B(s)P_2(s)$ es polinomial pues $B(s)P_2(s) = Q^{-1}[I_m - FPG_2(s)]P_2(s) = Q^{-1}P_2(s) - Q^{-1}FPN_2(s)$. Ahora, siguiendo las mismas ideas que en [58, Teorema 2.4] se tiene que $PN_2(s)$ y $B(s)P_2(s)$ son coprimas a derecha. Por lo tanto, tenemos dos factorizaciones coprimas a la derecha de $G_1(s)$,

$$G_1(s) = N_1(s)P_1(s)^{-1} = PN_2(s)(B(s)P_2(s))^{-1}.$$

Por el Teorema 1.4.1 existe una matriz unimodular $U(s)$ tal que $P_1(s) = B(s)P_2(s)U(s)$.

Recíprocamente, supongamos que existen $B(s)$ bipropia y $U(s)$ unimodular tales que $P_1(s) = B(s)P_2(s)U(s)$. Razonando de la misma manera que en la prueba de [58, Teorema 2.4] se llega a la conclusión de que existen matrices $Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$ invertible y $\tilde{F} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ tales que $B(s) = Q^{-1}[I_m -$

$\tilde{F}G_2(s)]$ y $(A_2 + B_2\tilde{F}, B_2Q)$ y (A_1, B_1) son semejantes. Luego, existe $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ invertible tal que $(A_1, B_1) = (P(A_2 + B_2\tilde{F})P^{-1}, PB_2Q)$. Sea $F = \tilde{F}P^{-1}$. Entonces $(A_1, B_1) = (PA_2P^{-1} + PB_2F, PB_2Q)$ y $B(s) = Q^{-1}[I_m - FPG_2(s)]$. $\square$

Lema 4.3.2 *Sea $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$ un par controlable, sea $P_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una representación polinomial matricial de (A_1, B_1) y sea $Q_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz no singular tal que* m.c.d.$(\det P_1(s), \det Q_2(s)) = 1$*. Entonces existe un par controlable $(A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n_2\times n_2}\times\mathbb{F}^{n_2\times m}$, $n_2 = d(\det Q_2(s))$, tal que A_2 tiene los mismos factores invariantes no triviales que $Q_2(s)$ y $P(s) = P_1(s)Q_2(s)$ es una representación polinomial matricial del par controlable*

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m},\ n = n_1 + n_2.$$

Demostración. Sea $P_1(s)$ una representación polinomial matricial de (A_1, B_1) con índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda $c_1 \geq \cdots \geq c_m$. Entonces existen matrices $B(s) \in \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$, bipropia, y $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$, unimodular, tales que $B(s)P_1(s)U(s) = \mathrm{Diag}(s^{c_1}, \ldots, s^{c_m})$. Por lo tanto, $B(s)P(s) = B(s)P_1(s)U(s)U(s)^{-1}Q_2(s) = \mathrm{Diag}(s^{c_1}, \ldots, s^{c_m})D_2(s)$, donde $D_2(s) = U(s)^{-1}Q_2(s)$. La matriz diagonal $\mathrm{Diag}(s^{c_1}, \ldots, s^{c_m})$ es una representación polinomial matricial de la forma canónica de Brunovsky (A_{1c}, B_{1c}) de (A_1, B_1), donde, $A_{1c} = \mathrm{Diag}(A_{11}, \ldots, A_{1t})$, $B_{1c} = [\tilde{B}_{1c}\ 0]$, con $\tilde{B}_{1c} = \mathrm{Diag}(B_{11}, \ldots, B_{1t})$, $A_{1i} = \begin{bmatrix} 0 & I_{c_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{c_i\times c_i}$ y $B_{1i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{c_i\times 1}$, $1 \leq i \leq t$, con $t = \mathrm{rang}\, B_1$.

Sea $A_2 \in \mathbb{F}^{n_2\times n_2}$ una matriz tal que $D_2(s)$ y $sI_{n_2} - A_2$ tienen los mismos factores invariantes no triviales. Entonces (véase [59, Lema 3.1]), existe una matriz $\tilde{X} \in \mathbb{F}^{n_2\times m}$ tal que $(A_2, \tilde{X})$ es controlable y $D_2(s)$ es una representación polinomial matricial de $(A_2, \tilde{X})$. Además, como $\mathrm{Diag}(s^{c_1}, \ldots, s^{c_m})$ es una representación polinomial matricial de (A_{1c}, B_{1c}), siguiendo las ideas de [49, Teorema 4.1.8], tenemos que $B(s)P(s) = \mathrm{Diag}(s^{c_1}, \ldots, s^{c_m})D_2(s)$ es una representación polinomial matricial de

$$\left(\begin{bmatrix} A_2 & X_1 \\ 0 & A_{1c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & X_2 \\ \tilde{B}_{1c} & 0 \end{bmatrix} \right),$$

donde $X_1 = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} x_1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & x_t & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_1}$, $X_2 = [x_{t+1} \ \cdots \ x_m] \in \mathbb{F}^{n_2 \times (m-t)}$ con x_i la i–ésima columna de $\tilde{X}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Teniendo en cuenta que $B(s)P_1(s)U(s) = \mathrm{Diag}(s^{c_1}, \ldots, s^{c_m})$, por el Lema 4.3.1, existen matrices $P \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_1}, Q \in \mathbb{F}^{m \times m}$, invertibles, y $F \in \mathbb{F}^{m \times n_1}$ tales que $B(s) = Q^{-1}[I_m - FPG_1(s)]$ con $G_1(s) = (sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1$ y $(A_{1c}, B_{1c}) = (PA_1P^{-1} + PB_1F, PB_1Q)$. Entonces, se tiene que existen matrices $\overline{P} = \begin{bmatrix} I_{n_2} & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$, $\overline{Q} = Q$, invertibles, y $\overline{F} = \begin{bmatrix} 0 & F \end{bmatrix}$ tales que

$$\overline{P} \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & X_1P - ZFP & Z \\ 0 & A_1 & B_1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \overline{P}^{-1} & 0 \\ \overline{F} & \overline{Q} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_2 & X_1 & 0 & X_2 \\ 0 & A_{1c} & \tilde{B}_{1c} & 0 \end{array} \right],$$

donde $Z = [0 \ X_2]\overline{Q}^{-1}$. Llamamos $Y = X_1P - ZFP$. Si $\overline{P}(s)$ es una representación polinomial matricial de $\left(\begin{bmatrix} A_2 & Y \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z \\ B_1 \end{bmatrix} \right)$ y puesto que $B(s)P(s)$ es una representación polinomial matricial de

$$\left(\begin{bmatrix} A_2 & X_1 \\ 0 & A_{1c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & X_2 \\ \tilde{B}_{1c} & 0 \end{bmatrix} \right),$$

por el Lema 4.3.1, existen una matriz bipropia $\overline{B}(s) = [I_m - \overline{FPG}_1(s)]^{-1}\overline{Q}$, con $\overline{G}_1(s)$ la matriz de transferencia del par $\left(\begin{bmatrix} A_2 & Y \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z \\ B_1 \end{bmatrix} \right)$, y $\overline{U}(s)$ unimodular tal que

$$\overline{P}(s) = \overline{B}(s)B(s)P(s)\overline{U}(s).$$

Es fácil ver que $\overline{B}(s) = B(s)^{-1}$. Por tanto, hemos probado que existe un par (A_2, Y) y una matriz Z tal que $P(s)\overline{U}(s)$, y por lo tanto $P(s)$, es una representación polinomial matricial de $\left(\begin{bmatrix} A_2 & Y \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z \\ B_1 \end{bmatrix} \right)$.

Recordamos que por hipótesis m.c.d.$(\det P_1(s), \det Q_2(s)) = 1$. Por tanto, m.c.d.$(\det(sI_{n_1} - A_1), \det(sI_{n_2} - A_2)) = 1$. Entonces, de [34, Sección 12.5], dada Y existe una única solución $\tilde{Z}$ de la ecuación $-A_2\tilde{Z} + \tilde{Z}A_1 = Y$. Ahora, si consideramos la matriz invertible $T = \begin{bmatrix} I & -\tilde{Z} \\ 0 & I \end{bmatrix}$ y $B_2 = -\tilde{Z}B_1 + Z$ tenemos que

$$T \begin{bmatrix} A_2 & Y \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T \begin{bmatrix} Z \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1 \end{bmatrix}.$$

Así, $\left(\begin{bmatrix} A_2 & Y \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z \\ B_1 \end{bmatrix} \right)$ es semejante a $\left(\begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1 \end{bmatrix} \right)$, que a su vez es semejante a $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$. Como $P(s)$ es una representación polinomial matricial de $\left(\begin{bmatrix} A_2 & Y \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z \\ B_1 \end{bmatrix} \right)$, $P(s)$ es también una representación polinomial matricial del par controlable

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right).$$

Además, (A_2, B_2) es controlable (véase la demostración de la Proposición 4.2.1). $\square$

Observación 4.3.3 En la demostración de la Proposición 4.2.1 hemos visto que si un par de la forma $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$ es controlable entonces, necesariamente, (A_1, B_1) es controlable y (A_2, B_2) es controlable. El recíproco no tiene por qué ser en general cierto como lo pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Sean $A_1 \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ y $A_2 \in \mathbb{F}^{4\times 4}$ las matrices compañeras de los polinomios mónicos (s^2+1) y $(s^2+1)^2$, respectivamente, y $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{F}^{2\times 1}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{F}^{4\times 1}$. Entonces, (A_1, B_1), (A_2, B_2) son pares controlables y el par de matrices

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{F}^{6\times 6} \times \mathbb{F}^{6\times 1}$$

no es controlable porque el rango de la matriz de controlabilidad es 4.

Sin embargo, si (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son pares controlables de matrices tales que $\text{m.c.d.}(\det(sI_{n_1} - A_1), \det(sI_{n_2} - A_2)) = 1$ entonces la demostración del siguiente teorema demuestra, entre otras cosas, que

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \tag{4.10}$$

es controlable. Más aun, tratamos de caracterizar las representaciones polinomiales matriciales de pares de matrices controlables de la forma (4.10) bajo la condición $\text{m.c.d.}(\det(sI_{n_1} - A_1), \det(sI_{n_2} - A_2)) = 1$.

Teorema 4.3.4 *Sean* $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1 \times m}$, $(A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_2} \times \mathbb{F}^{n_2 \times m}$ *pares controlables tales que* $\text{m.c.d.}(\det(sI_{n_1} - A_1), \det(sI_{n_2} - A_2)) = 1$. *Sean* $P_1(s), P_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$ *representaciones polinomiales matriciales de* (A_1, B_1) *y* (A_2, B_2), *respectivamente. Sea* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$ *una matriz polinomial.* $P(s)$ *es una representación polinomial matricial del par controlable*

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{F}^{n \times n} \times \mathbb{F}^{n \times m}, \ n = n_1 + n_2,$$

si y sólo si existen matrices polinomiales $Q_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$, *con los mismos factores invariantes no triviales que* A_1, *y* $Q_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$, *con los mismos factores invariantes no triviales que* A_2, *tales que* $P(s) = P_1(s)Q_2(s) = P_2(s)Q_1(s)$.

Demostración. Primero probaremos la suficiencia. Si $P(s) = P_1(s)Q_2(s)$ con $\text{m.c.d.}(\det P_1(s), \det Q_2(s)) = 1$, por el Lema 4.3.2 existe un par controlable $(\overline{A}_2, \overline{B}_2) \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_2} \times \mathbb{F}^{n_2 \times m}$ tal que las matrices $sI_{n_2} - \overline{A}_2$ y $Q_2(s)$ tienen los mismos factores invariantes no triviales y $P(s)$ es una representación polinomial matricial de

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \overline{A}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix} \right). \tag{4.11}$$

Análogamente, como $P(s) = P_2(s)Q_1(s)$ con m.c.d.$(\det P_2(s), \det Q_1(s)) = 1$, existe un par controlable $(\overline{A}_1, \overline{B}_1) \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$ tal que las matrices $sI_{n_1} - \overline{A}_1$ y $Q_1(s)$ tienen los mismos factores invariantes no triviales y $P(s)$ es una representación polinomial matricial de

$$\left(\begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & \overline{A}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_2 \\ \overline{B}_1 \end{bmatrix} \right). \tag{4.12}$$

De modo que los pares (4.11) y (4.12) son semejantes. Y este último semejante a su vez a $\left(\begin{bmatrix} \overline{A}_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$. En definitiva, tenemos que $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \overline{A}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix} \right)$ es semejante a $\left(\begin{bmatrix} \overline{A}_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$.

Por otro lado, los factores invariantes de $Q_i(s)$ y $P_i(s)$ son los mismos y éstos a su vez coinciden con los factores invariantes, excepto quizá algunos factores invariantes triviales, de $sI_{n_i} - \overline{A}_i$ y $sI_{n_i} - A_i$, respectivamente, para $i = 1, 2$. Sean

$$\alpha_i(s) = \pi_1(s)^{d_{i1}}\pi_2(s)^{d_{i2}} \cdots \pi_t(s)^{d_{it}}, \quad i = 1, \ldots, n_1,$$

los factores invariantes de $sI_{n_1} - A_1$, o bien de $sI_{n_1} - \overline{A}_1$. Tomamos el siguiente subconjunto de Specm$(\mathbb{F}[s])$, $M = \{(\pi_1(s)), \ldots, (\pi_t(s))\}$. Por un lado, $\det(sI_{n_1} - A_1)$ y $\det(sI_{n_1} - \overline{A}_1)$ factorizan en M. Por otro lado, como m.c.d.$(\det(sI_{n_1} - A_1), \det(sI_{n_2} - \overline{A}_2))$ = m.c.d.$(\det(sI_{n_1} - \overline{A}_1), \det(sI_{n_2} - A_2)) = 1$, entonces $\det(sI_{n_2} - A_2)$ y $\det(sI_{n_2} - \overline{A}_2)$ factorizan en $M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Entonces, tenemos que

(i) $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \overline{A}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix} \right)$ es semejante a $\left(\begin{bmatrix} \overline{A}_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$,

(ii) $\det(sI_{n_1} - A_1)$ y $\det(sI_{n_1} - \overline{A}_1)$ factorizan en M, y

(iii) $\det(sI_{n_1} - A_2)$ y $\det(sI_{n_1} - \overline{A}_2)$ factorizan en $M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Por la Proposición 4.2.2, (A_i, B_i) es semejante a $(\overline{A}_i, \overline{B}_i)$, $i = 1, 2$. Por tanto, $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$ es semejante a $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \overline{A}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix} \right)$, y en consecuencia, $P(s)$ es también una representación polinomial matricial de

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right).$$

Ahora vamos a mostrar la necesidad. Como $P_i(s)$ es una representación polinomial matricial de (A_i, B_i), existen matrices unimodulares $U_i(s), V_i(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_i \times n_i}$ y matrices $Y_i(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_i \times m}$ tales que

$$U_i(s) \begin{bmatrix} sI_{n_i} - A_i & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i(s) & Y_i(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_i - m} & 0 & 0 \\ 0 & P_i(s) & I_m \end{bmatrix}, \; i = 1, 2.$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} U_1(s) & 0 \\ 0 & U_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & sI_{n_2} - A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) & 0 & Y_1(s) \\ 0 & V_2(s) & Y_2(s) \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} I_{n_1 - m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s) & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & I_{n_2 - m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2(s) & I_m \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es equivalente en el sentido de Rosenbrock a

$$\begin{bmatrix} I_{n-2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s) & 0 & I_m \\ 0 & 0 & P_2(s) & I_m \end{bmatrix} \text{ y a } \begin{bmatrix} I_{n-2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s) & 0 & I_m \\ 0 & -P_1(s) & P_2(s) & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, $\begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & sI_{n_2} - A_2 & B_2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} I_{n-2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s) & 0 & I_m \\ 0 & -P_1(s) & P_2(s) & 0 \end{bmatrix}$ son también equivalentes en el sentido de Rosenbrock. Además, dado que

$$\text{m.c.d.}(\det(sI_{n_1} - A_1), \det(sI_{n_2} - A_2)) = 1,$$

entonces

$$\text{m.c.d.}(\det P_1(s), \det P_2(s)) = 1. \tag{4.13}$$

Sea $R(s)$ un divisor común a la izquierda de $P_1(s)$ y $P_2(s)$. Por tanto $P_1(s) = R(s)\overline{P}_1(s)$, $P_2(s) = R(s)\overline{P}_2(s)$ y

$$1 = \text{m.c.d.}(\det P_1(s), \det P_2(s)) = \text{m.c.d.}(\det(R(s)\overline{P}_1(s)), \det(R(s)\overline{P}_2(s))) =$$

$$= \det R(s)\, \text{m.c.d.}(\det(\overline{P}_1(s)), \det(\overline{P}_2(s))).$$

De modo que $\det R(s)$ es una constante no nula y por tanto $R(s)$ es una matriz unimodular. En definitiva $P_1(s)$ y $P_2(s)$ son matrices coprimas por la izquierda (ver Capítulo 1) y por tanto existen matrices polinomiales $X(s), Y(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que $\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \\ -P_1(s) & P_2(s) \end{bmatrix}$ es unimodular (ver [31, Lema 6.3-9]). Escribimos $\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \\ -P_1(s) & P_2(s) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11}(s) & Q_{12}(s) \\ Q_{21}(s) & Q_{22}(s) \end{bmatrix}$. Entonces

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \\ -P_1(s) & P_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}(s) & Q_{12}(s) \\ Q_{21}(s) & Q_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

y

$$\begin{bmatrix} P_1(s) & 0 \\ -P_1(s) & P_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}(s) & Q_{12}(s) \\ Q_{21}(s) & Q_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(s)Q_{11}(s) & P_1(s)Q_{12}(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\begin{bmatrix} I_{n-2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s) & 0 & I_m \\ 0 & -P_1(s) & P_2(s) & 0 \end{bmatrix}$ es equivalente en el sentido de Rosenbrock a $\begin{bmatrix} I_{n-2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s)Q_{11}(s) & P_1(s)Q_{12}(s) & I_m \\ 0 & 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}$, el cual es a su vez equivalente en el sentido de Rosenbrock a $\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s)Q_{11}(s) & I_m \end{bmatrix}$. En definitiva, $\begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & sI_{n_2} - A_2 & B_2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s)Q_{11}(s) & I_m \end{bmatrix}$ son equivalentes en el sentido de Rosenbrock y $P_1(s)Q_{11}(s)$ es una representación polinomial matricial del par $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$. Además, de (4.14) se tiene que

$$P_1(s)Q_{11}(s) = P_2(s)Q_{21}(s). \tag{4.15}$$

De modo que, $P(s)$ y $P_1(s)Q_{11}(s) = P_2(s)Q_{21}(s)$ son representaciones polinomiales del mismo par y por tanto son equivalentes por la derecha. Entonces, existe una matriz unimodular $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tal que $P(s) = P_1(s)Q_{11}(s)U(s) = P_2(s)Q_{21}(s)U(s)$, lo cual implica que existen matrices $Q_2(s) = Q_{11}(s)U(s)$ y $Q_1(s) = Q_{21}(s)U(s)$ tales que $P_1(s)Q_2(s)$ y $P_2(s)Q_1(s)$ son representaciones polinomiales matriciales del par controlable

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right).$$

Ahora sólo falta demostrar que $Q_i(s)$ tiene los mismos factores invariantes que A_i, $i = 1, 2$. En realidad, veremos que $Q_{21}(s)$ y $Q_{11}(s)$ tienen los mismos factores invariantes que A_1 y A_2, respectivamente. Por un lado, $\begin{bmatrix} I_{n-2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s) & 0 & I_m \\ 0 & 0 & P_2(s) & I_m \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s)Q_{11}(s) & I_m \end{bmatrix}$ son equivalentes en el sentido de Rosenbrock. Por tanto, las matrices $\begin{bmatrix} P_1(s) & 0 \\ 0 & P_2(s) \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & P_1(s)Q_{11}(s) \end{bmatrix}$ son equivalentes. De modo que, $\det P_1(s) \det P_2(s) = \det P_1(s) \det Q_{11}(s)$ y

$$\det P_2(s) = \det Q_{11}(s). \tag{4.16}$$

Por las condiciones (4.15) y (4.16) se tiene que $\det P_1(s) = \det Q_{21}(s)$. Usando (4.13), obtenemos

$$\text{m.c.d.}(\det Q_{21}(s), \det Q_{11}(s)) = 1. \tag{4.17}$$

Teniendo en cuenta otra vez que $P_1(s)Q_{11}(s) = P_2(s)Q_{21}(s)$, deducimos que los factores invariantes de $Q_{11}(s)$ dividen a los factores invariantes de $P_2(s)Q_{21}(s)$ (ver [46, Teorema II.14, p. 33]) y usando (4.17) concluimos que los factores invariantes de $Q_{11}(s)$ dividen a los factores invariantes de $P_2(s)$. Igualmente, los factores invariantes de $P_2(s)$ dividen a los factores invariantes de $P_1(s)Q_{11}(s)$ y por (4.13), los factores invariantes de $P_2(s)$

dividen a los factores invariantes de $Q_{11}(s)$. Por tanto, $Q_{11}(s)$ tiene los mismos factores invariantes que $P_2(s)$, los cuales a su vez coinciden con los factores invariantes (salvo triviales) de A_2 . Análogamente, se demuestra que $Q_{21}(s)$ tiene los mismos factores invariantes que A_1. $\square$

Sabemos que en el caso global, es decir cuando $M = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$, los índices de controlabilidad globales y los índices de Hermite globales de un par controlable (A, B) coinciden con los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda y los índices de Hermite globales de cualquiera de sus representaciones polinomiales matriciales, respectivamente. La necesidad del Teorema 4.3.4 nos va a permitir relacionar los índices respecto a M de sistemas con los correspondientes índices respecto a M de sus representaciones polinomiales matriciales.

Proposición 4.3.5 *Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ un par controlable. Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una representación polinomial matricial de (A, B). Entonces los índices de controlabilidad respecto a M de (A, B) son los índices de Wiener–Hopf de $P(s)$ respecto a M por la izquierda y los índices de Hermite respecto a M de (A, B) son los índices de Hermite de $P(s)$ respecto a M.*

Demostración. Primero analizaremos los casos extremos. Si $M = \emptyset$ o $\det(sI_n - A)$ factoriza en M' los índices respecto a $M = \emptyset$ tanto de las matrices polinomiales como de los pares son ceros. Si $M = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ o $\det(sI_n - A)$ factoriza en M los índices son los globales y por lo tanto se tiene el resultado. En cualquier otro caso pensemos que $\det(sI_n - A) = \beta(s)\gamma(s)$ tal que $\beta(s) \in \mathbb{F}[s]$ factoriza en M mientras que $\gamma(s) \in \mathbb{F}[s]$ factoriza en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Sea $d(\beta(s)) = n_1$ y $d(\gamma(s)) = n_2$. Por la Proposición 4.2.1, existen pares controlables $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$ y $(A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n_2\times n_2} \times \mathbb{F}^{n_2\times m}$ tales que

(i) (A,B) es semejante a $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$,

(ii) $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M, y

(iii) $\det(sI_{n_2} - A_2)$ factoriza en $M' = \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Es claro que de (ii) y (iii) m.c.d.$(\det(sI_{n_1} - A_1), \det(sI_{n_2} - A_2)) = 1$. Sea $P_1(s)$ una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). Por el Teorema 4.3.4 existe una matriz polinomial $Q_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$, con los mismos factores invariantes que A_2, tal que $P_1(s)Q_2(s)$ es una representación polinomial matricial del par controlable $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$. Ahora bien, de la condición (i) se tiene que las representaciones polinomiales matriciales de los pares (A,B) y $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$ son equivalentes por la derecha (Proposición 1.4.5). Entonces, existe una matriz unimodular $U(s)$ tal que

$$P(s) = P_1(s)Q_2(s)U(s),$$

donde los factores invariantes de $P_1(s)$ factorizan en M, mientras que los factores invariantes de $Q_2(s)U(s)$ factorizan en M'. Por tanto, los índices de Wiener–Hopf de $P(s)$ respecto a M por la izquierda son los índices de Wiener–Hopf globales de $P_1(s)$ por la izquierda que coinciden con los índices de controlabilidad globales del par (A_1, B_1). Ahora bien, por definición, estos últimos a su vez son los índices de controlabilidad respecto a M de (A,B). Igualmente se tiene que los índices de Hermite respecto a M de $P(s)$ coinciden con los índices de Hermite respecto a M de (A,B). $\square$

4.4. Índices de Hermite globales y locales

Primero, estudiamos la relación entre los índices de Hermite globales y locales de matrices polinomiales.

Teorema 4.4.1 *Sea* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *tal que* $\det P(s) = a\pi_1(s)^{d_1}\cdots\pi_t(s)^{d_t}$, *donde* a *es una constante distinta de cero, y* $\pi_i(s)$ *diferentes polinomios mónicos irreducibles en* $\mathbb{F}[s]$, $1 \leq i \leq t$. *Sean* $h_1,\ldots,h_m$ *y* $h_{i1},\ldots,h_{im}$ *sus índices de Hermite globales y sus índices de Hermite locales respecto a* $\pi_i(s)$, $1 \leq i \leq t$, *respectivamente. Entonces*

$$h_j = \sum_{i=1}^{t} h_{ij}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Demostración. Existe una matriz unimodular $U(s)$ tal que $P(s)U(s) = H(s)$, donde

$$H(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(s) & h_{m2}(s) & \cdots & h_{mm}(s) \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

es la forma de Hermite global de $P(s)$. Por lo tanto,

$$h_j = d(h_{jj}(s)) = d(\pi_1(s)^{r_{1j}}) + \cdots + d(\pi_t(s)^{r_{tj}}), \quad 1 \leq j \leq m, \tag{4.19}$$

con r_{ij} enteros tales que $d_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}$, $i = 1,\ldots,t$. Teniendo en cuenta que los polinomios $\pi_2(s)^{r_{2,i-1}}\cdots\pi_t(s)^{r_{t,i-1}}$ y $\pi_1(s)^{r_{1,i}}$ son relativamente primos, por la identidad de Bezout ([31, Lema 2.4-10, p.141]) sabemos que existen polinomios $a_{i,i-1}(s)$ y $b_{i,i-1}(s)$ tales que

$$h_{i,i-1}(s) = \pi_2(s)^{r_{2,i-1}}\cdots\pi_t(s)^{r_{t,i-1}}a_{i,i-1}(s) + \pi_1(s)^{r_{1i}}b_{i,i-1}(s),$$

para $i = 2,\ldots,m$. Del mismo modo, determinados los elementos $a_{i,i-1}(s)$, $b_{i,i-1}(s)$, $i = 2,\ldots,m$, como $\pi_2(s)^{r_{2,i-2}}\cdots\pi_t(s)^{r_{t,i-2}}$ y $\pi_1(s)^{r_{1,i}}$ son relativamente primos, para $i = 3,\ldots,m$, existen polinomios $a_{i,i-2}(s)$, $b_{i,i-2}(s)$ tales que

$$h_{i,i-2}(s) - a_{i,i-1}(s)b_{i-1,i-2}(s) = \pi_2(s)^{r_{2,i-2}}\ldots\pi_t(s)^{r_{t,i-2}}a_{i,i-2}(s) + \pi_1(s)^{r_{1i}}b_{i,i-2}(s).$$

Así sucesivamente, vamos obteniendo, en un cierto orden, los elementos $a_{ij}(s), b_{ij}(s) \in \mathbb{F}[s]$, con $j = 1, \ldots, i-1$, $i = 2, \ldots, m$ de matrices triangulares que llamaremos $H_1(s)$ y $\overline{H}_1(s)$ que cumplen la siguiente relación matricial $H(s) = H_1(s)\overline{H}_1(s)$ donde

$$H_1(s) = \begin{bmatrix} \pi_1(s)^{r_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}(s) & \pi_1(s)^{r_{12}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(s) & a_{m2}(s) & \cdots & \pi_1(s)^{r_{1m}} \end{bmatrix}$$

y

$$\overline{H}_1(s) = \begin{bmatrix} \pi_2(s)^{r_{21}} \ldots \pi_t(s)^{r_{t1}} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21}(s) & \pi_2(s)^{r_{22}} \ldots \pi_t(s)^{r_{t2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}(s) & b_{m2}(s) & \cdots & \pi_2(s)^{r_{2m}} \ldots \pi_t(s)^{r_{tm}} \end{bmatrix}.$$

Del hecho de que dos matrices polinomiales no singulares equivalentes por la derecha tengan los mismos índices de Hermite locales respecto a cualquier polinomio irreducible, se tiene que los índices de Hermite locales de $P(s)$ respecto a $\pi_1(s)$ son los índices de Hermite locales de $H(s)$ respecto a $\pi_1(s)$ y éstos son los índices de Hermite globales de $H_1(s)$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que la matriz $H_1(s)$ es dominante en grado por filas. En caso contrario realizamos transformaciones por columnas para obtener una matriz con esta propiedad. Por tanto, $h_{11} = d(\pi_1(s)^{r_{11}}), h_{12} = d(\pi_1(s)^{r_{12}}), \ldots, h_{1m} = d(\pi_1(s)^{r_{1m}})$ son los índices de Hermite locales respecto a $\pi_1(s)$ de $P(s)$. De la misma manera, podemos escribir $H(s) = H_i(s)\overline{H}_i(s)$ con $H_i(s)$ en forma de Hermite y tal que los elementos de la diagonal sean $\pi_i(s)^{r_{i1}}, \ldots, \pi_i(s)^{r_{im}}$. Esto significa que

$$h_{i1} = d(\pi_i(s)^{r_{i1}}), h_{i2} = d(\pi_i(s)^{r_{i2}}), \ldots, h_{im} = d(\pi_i(s)^{r_{im}}), \tag{4.20}$$

son los índices de Hermite locales de $H(s)$ respecto a $\pi_i(s)$, $1 \leq i \leq t$. Por (4.19) y (4.20), concluimos que $h_j = \sum_{i=1}^{t} h_{ij}$, $1 \leq j \leq m$. $\square$

Tenemos el mismo resultado para sistemas.

Teorema 4.4.2 *Sea* $(A,B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *un par controlable tal que* $\det(sI_n - A) = \pi_1(s)^{d_1}\cdots\pi_t(s)^{d_t}$ *con* $\pi_i(s)$ *diferentes polinomios mónicos irreducibles en* $\mathbb{F}[s]$, $1 \leq i \leq t$. *Sean* $h_1,\ldots,h_m$ *y* $h_{i1},\ldots,h_{im}$ *sus índices de Hermite globales y sus índices de Hermite locales respecto a* $\pi_i(s)$, $1 \leq i \leq t$, *respectivamente. Entonces*

$$h_j = \sum_{i=1}^{t} h_{ij}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Como dijimos en el Capítulo 3 (Observación 3.6.2) y se ilustra en la demostración del Teorema 4.4.1, en general, la información de los índices de Hermite locales respecto a un subconjunto cualquiera $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ de una matriz polinomial está en los elementos de la diagonal de su forma de Hermite global. De este hecho se deduce el siguiente corolario:

Corolario 4.4.3 *Sea* $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$ *y* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *una matriz polinomial. Sean* $h_1,\ldots,h_m$ *y* $h'_1,\ldots,h'_m$ *los índices de Hermite globales y locales respecto a* M *de* $P(s)$, *respectivamente. Entonces*

(a) $h'_j \leq h_j$ *para* $j = 1,\ldots,m$.

(a) $h_1 - h'_1,\ldots,h_m - h'_m$ *son los índices de Hermite locales respecto a* $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ *de* $P(s)$.

4.5. Índices de controlabilidad globales y locales: Forma reducida local

En esta sección nos gustaría obtener un resultado similar al obtenido en el caso de los índices de Hermite globales y locales para los índices de controlabilidad: Dado un par controlable (A,B) con $\det(sI_n - A) = \pi_1(s)^{d_1}\cdot$

$\dots \cdot \pi_t(s)^{d_t}$, y $c_{i1} \geq \cdots \geq c_{im}$ sus índices de controlabilidad locales respecto a $\pi_i(s)$, entonces $k_j = c_{1j} + \cdots + c_{tj}$ son los índices de controlabilidad globales de (A, B). Sin embargo, no podemos esperar que se cumpla tal resultado como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5.1 Sea (A, B) un par controlable para el cual

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ s & s^2(s+1)^2 \end{bmatrix}$$

es una de sus representaciones polinomiales matriciales. $P(s)$ es propia por columnas con grados de columnas $4, 2$. Así, los índices de Wiener–Hopf globales de $P(s)$ por la izquierda, y por lo tanto los índices de controlabilidad de (A, B), son $k_1 = 4, k_2 = 2$. Además, podemos escribir

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ s^2 + s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & (s+1)^2 \end{bmatrix} = P_1(s)Q_1(s).$$

Los índices de Wiener–Hopf locales de $P(s)$ respecto a $\pi_1(s) = s$ por la izquierda son los índices de Wiener–Hopf globales de $P_1(s)$ por la izquierda, es decir, $c_{11} = 2, c_{12} = 2$. Por otro lado,

$$P(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s-2 & (s+1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ s & s^2 \end{bmatrix} = P_2(s)Q_2(s),$$

y los índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda de $P(s)$ respecto a $\pi_2(s) = s + 1$ son los índices de Wiener–Hopf globales de $P_2(s)$ por la izquierda, es decir, $c_{21} = 1, c_{22} = 1$ (sumamos a la segunda columna la primera multiplicada por s). Es claro que el j–ésimo índice de controlabilidad global, k_j, no se puede obtener como suma de los j–ésimos índices de controlabilidad locales, c_{1j}, c_{2j}, para ningún j.

Lo que nosotros mostramos en relación a este problema es una forma reducida del par controlable (A, B), bajo la equivalencia por feedback, en la cual los índices de controlabilidad globales, que coinciden con los del par (A,B), se pueden escribir como suma de los índices de controlabilidad locales del par en forma reducida.

El siguiente lema aparece en [8]:

Lema 4.5.2 *Sea $D(s)=\mathrm{Diag}(s^{c_1},\dots,s^{c_m})$, $c_1\geq\cdots\geq c_m$. Sean $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ y $k_1\geq\cdots\geq k_m$ polinomios mónicos no nulos y enteros no negativos, respectivamente. Si existe una matriz $X(s)\in\mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $\alpha_1(s),\dots,\alpha_m(s)$ como factores invariantes tal que $D(s)X(s)$ tiene $k_1,\dots,k_m$ como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda entonces*

$$c_i\leq k_i,\quad 1\leq i\leq m, \tag{4.21}$$

$$(k_1-c_1,\dots,k_m-c_m)\prec(d(\alpha_m(s)),\dots,d(\alpha_1(s))). \tag{4.22}$$

Recíprocamente, si $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado y se tienen las condiciones (4.21), (4.22) entonces existe una matriz $X(s)\in\mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $\alpha_1(s)$, ..., $\alpha_m(s)$ como factores invariantes tal que $D(s)X(s)$ tiene $k_1,\dots,k_m$ como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda.

Lema 4.5.3 *Sean $P(s),P_1(s),P_2(s)\in\mathbb{F}[s]^{m\times m}$ matrices polinomiales no singulares tales que $P(s)=P_1(s)P_2(s)$. Sean $k_1\geq\cdots\geq k_m$ y $c_1\geq\cdots\geq c_m$ los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $P(s)$ y $P_1(s)$, respectivamente, y $\alpha_1(s),\dots,\alpha_m(s)$ los factores invariantes de $P_2(s)$. Entonces*

$$c_i\leq k_i,\ 1\leq i\leq m,$$

$$(k_1-c_1,\dots,k_m-c_m)\prec(d(\alpha_m(s)),\dots,d(\alpha_1(s))).$$

Demostración. Los índices de Wiener–Hopf globales de $P_1(s)$ por la izquierda son $c_1,\dots,c_m$. Entonces existen matrices $B(s)\in\mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$, bipropia, y $U(s)\in\mathbb{F}[s]^{m\times m}$, unimodular, tales que $B(s)P_1(s)U(s)=D(s)$ con $D(s)=\mathrm{Diag}(s^{c_1},\dots,s^{c_m})$. Por tanto,

$$B(s)P(s)=B(s)P_1(s)U(s)U(s)^{-1}P_2(s)=D(s)X(s),$$

donde $X(s) = U(s)^{-1}P_2(s)$ tiene $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ como factores invariantes y $D(s)X(s)$ tiene $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda. Por el Lema 4.5.2 se sigue el resultado. $\square$

Lema 4.5.4 *Sean $P(s), P_1(s), P_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ matrices polinomiales no singulares tales que $P(s) = P_1(s)P_2(s)$. Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $c_1 \geq \cdots \geq c_m$ los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $P(s)$ y $P_1(s)$, respectivamente. Entonces existe un matriz unimodular $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tal que para algún $\sigma \in \Sigma_m$ (grupo simétrico de orden m) $k_{\sigma(1)}-c_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(m)}-c_{\sigma(m)}$ son los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $U(s)P_2(s)$.*

Demostración. Sean $\alpha_1(s) \mid \cdots \mid \alpha_m(s)$ los factores invariantes de $P_2(s)$. Por el Lema 4.5.3

$$c_i \leq k_i,\ 1 \leq i \leq m,$$

$$(k_1 - c_1, \ldots, k_m - c_m) \prec (d(\alpha_m(s)), \ldots, d(\alpha_1(s))).$$

Sea $\sigma \in \Sigma_m$ tal que $k_{\sigma(1)} - c_{\sigma(1)} \geq \cdots \geq k_{\sigma(m)} - c_{\sigma(m)}$. Entonces, por el Teorema de Rosenbrock en su forma polinomial (Teorema 2.1.1), existe una matriz $A(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tal que $k_{\sigma(1)} - c_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(m)} - c_{\sigma(m)}$ son sus índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda y $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ sus factores invariantes. Las matrices $A(s)$ y $P_2(s)$ tienen los mismos factores invariantes. Entonces existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que $U(s)P_2(s) = A(s)V(s)$. Además, $U(s)P_2(s)$ tiene los mismos índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda que $A(s)$. $\square$

Teorema 4.5.5 *Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tal que* $\det P(s) = a\pi_1(s)^{d_1}\cdots\pi_t(s)^{d_t}$, *donde a es una constante distinta de cero, $\pi_i(s)$ diferentes polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{F}[s]$, $1 \leq i \leq t$, y $k_1, \ldots, k_m$ sus índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda. Entonces existen matrices $P_1(s), \ldots, P_t(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que* $\det P_i(s) = a_i\pi_i(s)^{d_i}$, *$a_i$ constante distinta de cero, $1 \leq i \leq t$, $a = \prod_{i=1}^t a_i$ y* *(i)* $P(s) = P_1(s) \cdots P_t(s)$,

(ii) *si* $c_{i1}, \ldots, c_{im}$ *son los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de* $P_i(s)$, $1 \leq i \leq t$, *entonces existen* $\sigma_2, \ldots, \sigma_t \in \Sigma_m$ *tales que*

$$k_j = c_{1j} + \sum_{i=2}^{t} c_{i\sigma_i(j)}, \; 1 \leq j \leq m.$$

Además, los índices de Wiener–Hopf globales de $P_1(s)$ *por la izquierda son los índices de Wiener–Hopf locales de* $P(s)$ *respecto a* $\pi_1(s)$ *por la izquierda.*

Demostración. Hacemos la demostración por inducción sobre t. Para $t = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que el teorema es cierto para matrices cuyo determinante se factoriza a lo sumo en $t-1$ factores irreducibles. Sea $S(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$ la forma de Smith de $P(s)$. Dado que $\det P(s) = a\pi_1(s)^{d_1}\delta(s)$, con $\delta(s) = \prod_{i=2}^{t} \pi_i(s)^{d_i}$, entonces $S(s)$ se puede escribir como producto de matrices $S(s) = D_1(s)D_2(s)$, donde $D_1(s)$, $D_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$ son matrices polinomiales diagonales con $\det D_1(s) = \pi_1(s)^{d_1}$ y $\det D_2(s) = \delta(s)$. Por tanto existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$ tales que $P(s) = U(s)D_1(s)D_2(s)V(s)$. Llamamos $P_1'(s) = U(s)D_1(s)$ y denotamos por $c_{11}, \ldots, c_{1m}$ sus índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda. Sea $P_2'(s) = D_2(s)V(s)$. Así $P(s) = P_1'(s)P_2'(s)$ y, por el Lema 4.5.4, existe una matriz unimodular $W(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$ tal que $k_{\sigma(1)} - c_{1\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(m)} - c_{1\sigma(m)}$ son los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $W(s)P_2'(s)$, para algún $\sigma \in \Sigma_m$. Sean $P_1(s) = P_1'(s)W(s)^{-1}$ y $Q(s) = W(s)P_2'(s)$. Entonces $P(s) = P_1(s)Q(s)$, $\det P_1(s) = a_1\pi_1(s)^{d_1}$, $a_1 \neq 0$, $\det Q(s) = b\delta(s)$, $b \neq 0$, $a = a_1 b$ y $c_{11}, \ldots, c_{1m}$ son los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $P_1(s)$. Por lo tanto, ellos son también los índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda de $P(s)$ respecto a $\pi_1(s)$. Sean $l_i = k_{\sigma(i)} - c_{1\sigma(i)}$, $1 \leq i \leq m$. Así, si $j = \sigma(i)$ para $1 \leq i \leq m$ y $\sigma_2 = \sigma^{-1}$, se tiene que para $1 \leq j \leq m$

$$k_j = c_{1j} + l_{\sigma_2(j)}. \tag{4.23}$$

Dado que $\det Q(s) = b\delta(s)$ y $\delta(s) = \prod_{i=2}^{t} \pi_i(s)^{d_i}$, por la hipótesis de inducción existen $t-1$ matrices $P_2(s), \ldots, P_t(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que $Q(s) = P_2(s)\cdots P_t(s)$, para $2 \leq i \leq t$ $\det P_i(s) = a_i\pi_i(s)^{d_i}$, $a_i \neq 0$, $b = a_2 \cdots a_t$ y si $c_{i1}, \ldots, c_{im}$ son los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $P_i(s)$ entonces existen $\sigma'_3, \ldots, \sigma'_t \in \Sigma_m$ tales que

$$l_j = c_{2j} + \sum_{h=3}^{t} c_{h\sigma'_h(j)}, \ 1 \leq j \leq m. \tag{4.24}$$

Ahora, si $\sigma_h = \sigma'_h \circ \sigma_2$ para $3 \leq h \leq t$, de (4.23), (4.24) se sigue que

$$k_j = c_{1j} + l_{\sigma_2(j)} = c_{1j} + c_{2\sigma_2(j)} + \sum_{h=3}^{t} c_{h\sigma'_h(\sigma_2(j))} = c_{1j} + \sum_{i=2}^{t} c_{i\sigma_i(j)},$$

para $1 \leq j \leq m$, con $\sigma_i \in \Sigma_m$, $2 \leq i \leq t$. □

En el teorema anterior hemos factorizado la matriz polinomial $P(s)$ como producto de matrices polinomiales $P_i(s)$ tal que existe una relación de suma entre los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $P(s)$ y los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de cada una de las matrices factores. Pero sin embargo los índices de las matrices factores no son, en general, los índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda de $P(s)$. Por otra parte, en la siguiente proposición mostramos que toda matriz polinomial no singular $P(s)$ puede ser factorizada como producto de matrices cuyos índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda son los índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda de $P(s)$, pero en este caso, estos índices no cumplen la condición de suma.

Proposición 4.5.6 *Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular tal que* $\det P(s) = a\pi_1(s)^{d_1} \cdots \pi_t(s)^{d_t}$, *donde a es una constante distinta de cero y $\pi_i(s)$ son diferentes polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{F}[s]$. Sean $c_{i1}, \ldots, c_{im}$ sus índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda respecto a $\pi_i(s)$, $1 \leq i \leq t$. Entonces existen matrices $P_1(s), \ldots, P_t(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales* *que* $\det P_i(s) = a_i \pi_i(s)^{d_i}$ *con* a_i *constante distinta de cero,* $a = \prod_{i=1}^{t} a_i$*,* $P_i(s)$ *tiene* $c_{i1}, \ldots, c_{im}$ *como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda,* $1 \leq i \leq t$*, y* $P(s) = P_1(s) \cdots P_t(s)$*.*

Demostración. Como $\det P(s) = a\pi_1(s)^{d_1} \cdots \pi_t(s)^{d_t}$ existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$ tales que $P(s) = U(s)D_1(s) \cdots D_t(s)V(s)$, donde $D_i(s)$ es una matriz diagonal donde los elementos de la diagonal son los divisores elementales de $P(s)$ que son potencias de $\pi_i(s)$, para $i = 1, \ldots, t$. Así, $P(s)$ se puede expresar como sigue

$$P(s) = U(s)D_i(s)D_1(s) \cdots D_{i-1}(s)D_{i+1}(s) \cdots D_t(s)V(s), \ i = 1, \ldots, t.$$

Por tanto, $c_{i1}, \ldots, c_{im}$ son los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $U(s)D_i(s)$, $i = 1, \ldots, t$. Escribimos

$$P(s) = U(s)D_1(s)U(s)^{-1}U(s)D_2(s) \cdots D_{t-1}(s)U(s)^{-1}U(s)D_t(s)V(s).$$

Si llamamos $P_i(s) = U(s)D_i(s)U(s)^{-1}$ para $i = 1, \ldots, t-1$ y $P_t(s) = U(s)D_t(s)V(s)$, obtenemos el resultado. $\square$

Ahora, queremos aplicar el resultado obtenido en el Teorema 4.5.5 a pares controlables. En este sentido, dado un par controlable (A, B) construimos un par en “forma reducida” (la matriz de estados es una matriz diagonal por bloques donde los bloques diagonales A_i son matrices compañeras y en B_i una de sus columnas es un vector unitario y el resto de columnas son cero) equivalente por feedback al par dado (A, B), para el cual cada índice de controlabilidad global puede ser obtenido como la suma de los índices de controlabilidad locales de su forma reducida en un cierto orden. Este resultado será cierto para $\mathbb{F}$ un cuerpo algebraicamente cerrado.

Necesitaremos el Lema 4.5.7 para el cual recordamos lo siguiente.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$ y A un operador lineal de este espacio. Sea x un vector arbitrario de V. Se llama *polinomio anulador de x* a un polinomio mónico $\varphi(\lambda) = \lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + \cdots + a_{p-1}\lambda + a_p$, $0 \leq p \leq n$ tal que

$$\varphi(A)x = 0,$$

esto es,

$$A^p x + a_1 A^{p-1} x + \cdots + a_{p-1} A x + a_p x = 0.$$

Para A fija, hay un único polinomio mónico de grado mínimo entre todos los polinomios anuladores de x. A este polinomio se le llama *polinomio mínimo de x* respecto de A.

Lema 4.5.7 *Sean*

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{in_i} & a_{i(n_i-1)} & a_{i(n_i-2)} & \cdots & a_{i1} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n_i \times n_i} \tag{4.25}$$

las matrices compañeras de los polinomios mónicos relativamente primos dos a dos $a_i(s) = s^{n_i} - a_{i1}s^{n_i-1} - \cdots - a_{i(n_i-1)}s - a_{in_i} \in \mathbb{F}[s]$, , $1 \leq i \leq t$. Entonces

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_t \end{bmatrix} \right), \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n_i \times 1}, 1 \leq i \leq t,$$

es un par controlable.

Demostración. Sean

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_t \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times 1},$$

donde $n = n_1 + \cdots + n_t$. El vector b se puede escribir como $b = e_1 + \cdots + e_t$ donde $e_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_i^T & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Es fácil ver que el polinomio mínimo de e_i respecto de A es $a_i(s)$, con $i = 1, \ldots, t$. Como estos polinomios son relativamente primos dos a dos, usando [18, Lema p. 181] se tiene que el polinomio mínimo de b respecto de A es $a_1(s)\cdots a_t(s)$. Como el grado de este polinomio es igual a n, rang $\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$. $\square$

Teorema 4.5.8 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Sea $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ un par controlable con índices de controlabilidad globales $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $\det(sI_n - A) = (s - \lambda_1)^{n_1} \cdots (s - \lambda_t)^{n_t}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Entonces para cada λ_i existen una permutación de orden m, $\sigma_i \in \Sigma_m$ ($\sigma_1 = id$), y un par controlable $(A_i, B_i) \in \mathbb{F}^{n_i\times n_i} \times \mathbb{F}^{n_i\times m}$ con índices de controlabilidad globales $c_{i1} \geq \cdots \geq c_{is_i} > 0 = c_{is_i+1} = \cdots = c_{im}$ de la forma*

$$A_i = \mathrm{Diag}(L_{i1}, \ldots, L_{is_i}) \in \mathbb{F}^{n_i\times n_i}, \tag{4.26}$$

donde $L_{ij} \in \mathbb{F}^{c_{ij}\times c_{ij}}$ es la matriz compañera como en (4.25) de $(s - \lambda_i)^{c_{ij}}$, $1 \leq j \leq s_i$ y

$$B_i = [\mathrm{Diag}(H_{i1}, \ldots, H_{is_i})\ 0]\, M_i \in \mathbb{F}^{n_i\times m}, \quad H_{ij} = [0, \ldots, 0, 1]^T \in \mathbb{F}^{c_{ij}\times 1} \tag{4.27}$$

con $1 \leq j \leq s_i$, donde M_i es la matriz de permutación de σ_i para $1 \leq i \leq t$, tal que:

(i) (A, B) es equivalente por feedback al par controlable

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_t \end{bmatrix} \right), \ y \tag{4.28}$$

(ii) $k_j = c_{1j} + \sum_{i=2}^{t} c_{i\sigma_i^{-1}(j)}, \quad 1 \leq j \leq m.$

Además, los índices de controlabilidad locales de (A, B) respecto a $s - \lambda_1$ son $c_{11}, \ldots, c_{1m}$.

Demostración. Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una representación polinomial matricial de (A,B). Entonces $\det P(s) = a(s-\lambda_1)^{n_1}\cdots(s-\lambda_t)^{n_t}$ y $k_1,\dots,k_m$ son los índices de Wiener–Hopf globales de $P(s)$ por la izquierda. Por el Teorema 4.5.5 existen matrices polinomiales $P_1(s), P_2(s),\dots,P_t(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$, $detP_i(s) = a_i(s-\lambda_i)^{n_i}$, $a = \prod_{i=1}^t a_i$, tales que:

(i) $P(s) = P_1(s)P_2(s)\cdots P_t(s)$,

(ii) si $c_{i1} \geq \cdots \geq c_{is_i} > 0 = c_{is_i+1} = \cdots = c_{im}$ son los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $P_i(s)$, entonces

$$k_j = c_{1j} + \sum_{i=2}^{t} c_{i\sigma_i^{-1}(j)}, \quad \sigma_i \in \Sigma_m, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq i \leq t.$$

Además, los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $P_1(s)$ son los índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda de $P(s)$ respecto a $s-\lambda_1$.

Con los elementos $\lambda_i \in \mathbb{F}$, los índices c_{ij} y las permutaciones σ_i, construimos las matrices A_i y B_i como en (4.26) y (4.27), respectivamente. Es fácil ver que los pares (A_i, B_i) son controlables con índices de controlabilidad $c_{i1},\dots,c_{im}$. Ahora queremos probar que los pares de matrices (A,B) y

$$(\bar{A},\bar{B}) = \left(\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_t \end{bmatrix} \right)$$

son equivalentes por feedback.

Supongamos que $k_1 \geq \cdots \geq k_v > 0 = k_{v+1} = \cdots = k_m$. Como para cada $j = v+1,\dots,m$ se tiene que $k_j = 0$, entonces $c_{1j} + \sum_{i=2}^t c_{i\sigma_i^{-1}(j)} = 0$, lo cual implica que $c_{1j} = 0$ y $c_{i\sigma_i^{-1}(j)} = 0$, $2 \leq i \leq t$. Por tanto, $s_1 + 1 \leq j \leq m$ y $s_i + 1 \leq \sigma_i^{-1}(j) \leq m$, $2 \leq i \leq t$. Así, la columna j de $\bar{B}$ es igual a 0. En consecuencia, las $m-v$ últimas columnas de $\bar{B}$ son 0.

Sea $j = 1,\dots v$. Denotamos por $L_j = \operatorname{Diag}(L_{i_1\sigma_{i_1}^{-1}(j)},\dots,L_{i_u\sigma_{i_u}^{-1}(j)})$ la matriz diagonal por bloques donde los bloques $L_{i_h\sigma_{i_h}^{-1}(j)} \in \mathbb{F}^{c_{i_h\sigma_{i_h}^{-1}(j)}\times c_{i_h\sigma_{i_h}^{-1}(j)}}$

son tales que en la columna j–ésima de $\bar{B}$ su correspondiente vector es $x_{jh} = [0,\dots,0,1]^T \in \mathbb{F}^{c_{i_h\sigma_{i_h}^{-1}(j)}\times 1}$, $1 \le h \le u, 1 \le i_1 < \cdots < i_u \le t$. Llamamos $x_j = \begin{bmatrix} x_{j1} \\ \vdots \\ x_{ju} \end{bmatrix}$. Obsérvese que si $i \neq i_1,\dots,i_u$ entonces $\sigma_i(1) \neq j,\dots,\sigma_i(s_i) \neq j$. Por tanto $s_i + 1 \le \sigma_i^{-1}(j) \le m$. Así, $c_{i\sigma_i^{-1}(j)} = 0$ y $k_j = \sum_{i=1}^t c_{i\sigma_i^{-1}(j)} = \sum_{h=1}^u c_{i_h\sigma_{i_h}^{-1}(j)}$. Esta es la razón por la cual $L_j \in \mathbb{F}^{k_j\times k_j}$ y $x_j \in \mathbb{F}^{k_j\times 1}$.

Ahora bien, haciendo uso de esta notación y realizando permutaciones de filas y columnas podemos transformar el par $(\bar{A},\bar{B})$ en un par de la forma

$$Q\bar{A}Q^{-1} = \begin{bmatrix} L_1 & & \\ & \ddots & \\ & & L_v \end{bmatrix},\ Q\bar{B} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_v & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

donde $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$ es una matriz no singular. Ahora, vamos a demostrar que el par $(\widetilde{A},\widetilde{B}) = (Q\bar{A}Q^{-1}, Q\bar{B})$ es controlable con índices de controlabilidad globales $k_1,\dots,k_m$. Teniendo en cuenta que la estructura de estas matrices es diagonal por bloques, si denotamos por b_j la j–ésima columna de $\widetilde{B}$, tenemos que

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \widetilde{B} & \widetilde{A}\widetilde{B} & \cdots & \widetilde{A}^{n-1}\widetilde{B} \end{bmatrix} =$$

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_v & \widetilde{A}b_1 & \cdots & \widetilde{A}b_v & \cdots & \widetilde{A}^{n-1}b_1 & \cdots & \widetilde{A}^{n-1}b_v \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{j=1}^{v}\operatorname{rang}\begin{bmatrix} b_j & \widetilde{A}b_j & \cdots & \widetilde{A}^{n-1}b_j \end{bmatrix}.$$

Ahora, por el Teorema de Hamilton–Cayley ([18, p. 83]) y el Lema 4.5.7, se tiene que

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} b_j & \widetilde{A}b_j & \cdots & \widetilde{A}^{n-1}b_j \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} x_j & L_jx_j & \cdots & L_j^{n-1}x_j \end{bmatrix} =$$

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} x_j & L_jx_j & \cdots & L_j^{k_j-1}x_j \end{bmatrix} = k_j,\ 1 \le j \le v.$$

En consecuencia,

$$\operatorname{rang}\left[\begin{array}{cccc} \widetilde{B} & \widetilde{A}\widetilde{B} & \cdots & \widetilde{A}^{n-1}\widetilde{B} \end{array}\right] = k_1 + \cdots + k_v = n.$$

Así, el par de matrices $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ es controlable y por tanto es también controlable el par $(\bar{A}, \bar{B})$. Por otra parte, para calcular los índices de controlabilidad globales de este par podemos estudiar independientemente cada columna b_j de $\widetilde{B}$, esto es, $\operatorname{rang}\left[\begin{array}{cccc} b_j & \widetilde{A}b_j & \cdots & \widetilde{A}^{n-1}b_j \end{array}\right] = k_j$, $1 \leq j \leq v$. Por tanto, los índices de controlabilidad globales de $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ son $k_1, \ldots, k_m$. Dado que los pares controlables (A, B) y $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ tienen los mismos índices de controlabilidad son feedback equivalentes, con lo cual hemos probado (i). Además, como los índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda de $P(s)$ respecto a $s - \lambda_1$ son $c_{11}, \ldots, c_{1m}$, por la Proposición 4.3.5 concluimos que los índices de controlabilidad locales de (A, B) respecto a $s - \lambda_1$ son $c_{11}, \ldots, c_{1m}$. □

Es importante observar que los índices de controlabilidad de los pares (A_i, B_i) son los índices de controlabilidad locales respecto a $\pi_i(s)$ del par en forma reducida (4.28) pero no son los locales del par (A, B), ya que los índices locales no son invariantes por feedback.

Ejemplo 4.5.9 Sea $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y $(A, B) \in \mathbb{C}^{10\times 10} \times \mathbb{C}^{10\times 3}$ tal que $\det(sI - A) = (s - \lambda_1)^7 (s - \lambda_2)^3$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Supongamos que los índices de controlabilidad globales de (A, B) son $k_1 = 5, k_2 = 3$ y $k_3 = 2$ y sus índices de controlabilidad locales respecto a $s - \lambda_1$ son $c_{11} = 4, c_{12} = 3$ y $c_{13} = 0$. Se tiene que $k_1 - c_{11} = 1, k_2 - c_{12} = 0$ y $k_3 - c_{13} = 2$. La permutación que ordena estos números en orden no creciente es $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, $c_{21} = 2, c_{22} = 1$ y $c_{23} = 0$. Además,

$$M_1 = I, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así, (A, B) es equivalente por feedback al par controlable

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|cc|c||ccc}
0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & 0 & 0 & 0\\
-\lambda_1^4 & 4\lambda_1^3 & -6\lambda_1^2 & 4\lambda_1 & & & & & & & 1 & 0 & 0\\ \hline
 & & & & 0 & 1 & 0 & & & & 0 & 0 & 0\\
 & & & & 0 & 0 & 1 & & & & 0 & 0 & 0\\
 & & & & \lambda_1^3 & -2\lambda_1^2 & 2\lambda_1 & & & & 0 & 1 & 0\\ \hline\hline
 & & & & & & & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & & & -\lambda_2^2 & 2\lambda_2 & & 0 & 0 & 1\\ \hline
 & & & & & & & & & \lambda_2 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right].$$

Ahora vamos a mostrar un ejemplo en el cual se puede ver que la condición sobre el cuerpo no puede evitarse en general, es decir, si el cuerpo no es algebraicamente cerrado no podemos asegurar el resultado del Teorema 4.5.8.

Ejemplo 4.5.10 Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y sea $(A, B) \in \mathbb{R}^{5\times 5} \times \mathbb{R}^{5\times 2}$ un par para el cual

$$P(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s^2 & (s^2+1)^2 \end{bmatrix}$$

es una representación polinomial matricial. Sus factores invariantes son $1,\ s(s^2+1)^2$ y sus índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda $k_1 = 3$ y $k_2 = 2$. Factorizamos $P(s)$ como producto de matrices $P(s) = P_1(s)P_2(s)$ con

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s & (s^2+1)^2 \end{bmatrix}, \quad P_2(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los factores invariantes de $P_1(s)$ son $1, (s^2+1)^2$, mientras que los factores invariantes de $P_2(s)$ son $1, s$. Además, los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $P_1(s)$ son $3, 1$, mientras que los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de $P_2(s)$ son $1, 0$. Por lo tanto, los índices de Wiener–Hopf locales por la izquierda de $P(s)$ respecto a $s^2 + 1$ son $c_{11} = 3$ y $c_{12} = 1$. En definitiva, vemos que es imposible construir una matriz compañera de alguna potencia del polinomio irreducible $s^2 + 1$ de orden $c_{11} \times c_{11}$, esto es, 3×3.

Capítulo 5

Realizaciones locales y representaciones polinomiales matriciales locales

5.1. Introducción

El concepto de representación polinomial matricial aparece en varios contextos aunque expresado a veces de forma distinta a como se ha venido expresando aquí, e incluso con una denominación también distinta. Por ejemplo, en [40, Capítulo 2] se demuestra que una matriz polinomial no singular $P(s)$ es una representación polinomial matricial de (A, B) si y sólo si (A, B) es un par nulo por la izquierda de $P(s)$ respecto a todo el plano complejo.

La definición de par nulo por la izquierda definida en $\mathbb{C}$ es la siguiente (ver [20, Capítulo 10]): Sea γ un contorno en $\mathbb{C}$ con dominio interior Ω. Un par $(A, B) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ controlable es un *par nulo por la izquierda respecto a* Ω *de* $P(s)$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

i) A tiene todos sus valores propios en Ω, el orden de A es igual a la suma de las multiplicidades de los ceros de $\det P(s)$ en Ω y $(sI_n - A)^{-1}BP(s)$

es una matriz polinomial.

ii) Existe un matriz $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que (A, C) es observable, es decir (A^T, C^T) es controlable, y $P(s)^{-1} - C(sI_n - A)^{-1}B$ no tiene polos en Ω.

Si z_0 es el único cero de $\det P(s)$ en Ω entonces se dice que (A, B) es un *par nulo en* z_0. Un par nulo con respecto a $\mathbb{C}$ se llama simplemente un *par nulo por la izquierda de* $P(s)$ o *par estándar por la izquierda* (ver [21]).

Recordemos que si $P(s)$ es una representación polinomial matricial de un par controlable (A, B), entonces decimos que (A, B) es una realización de $P(s)$. Por lo tanto tenemos que (A, B) es una realización de $P(s)$ si y sólo si (A, B) es un par nulo por la izquierda de $P(s)$. Aunque sabemos que los conceptos de realización y par nulo coinciden en el caso global (cuando tomamos todo el plano complejo), no nos podemos olvidar de que el concepto de par nulo por la izquierda está definido en el cuerpo de los complejos de manera local, es decir, respecto a un subconjunto del plano complejo. Nuestro objetivo en este capítulo es definir para cuerpos arbitrarios los conceptos de realización local y representación polinomial matricial local. Utilizaremos las mismas técnicas que en los capítulos anteriores y hablaremos de realización respecto a M y representación polinomial matricial respecto a M, siendo M un subconjunto de $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Veremos que lo que aquí llamamos realización local, cuando el cuerpo sea el de los complejos, coincide con lo que se llama en [20] par nulo por la izquierda. Esto lo haremos en la Sección 5.3.

Sabemos que en el caso global los conceptos de realización y representación polinomial matricial son muy "simétricos", en el sentido de que si (A, B) es una realización de $P(s)$, entonces $P(s)$ es una representación polinomial matricial de (A, B) y viceversa. Aunque, en un principio esperábamos que definido el concepto de realización en un sentido local estuviera definido el concepto de representación polinomial matricial local, esto no funciona así. En las realizaciones locales (Definición 5.3.1) la información local está en el par y la global en la matriz polinomial, mientras que en las representaciones polinomiales matriciales locales (Definición 5.4.1) la información local está en la matriz polinomial y la global en el par. Así pues, en la Sección 5.4 realizamos un estudio similar al de la sección anterior para representaciones polinomiales matriciales locales.

Como era de esperar veremos que ambos conceptos están relacionados y que en el caso global, es decir cuando $M = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$, nos dan el mismo resultado.

En el artículo [4] están contenidos los resultados de este capítulo.

5.2. Matrices localmente coprimas

En esta sección, definimos los conceptos de divisor común por la izquierda (derecha) y matrices coprimas por la izquierda (derecha) dados en el Capítulo 1 para matrices polinomiales, ahora, para matrices con elementos en $\mathbb{F}_M(s)$ con el mismo número de filas (columnas).

Definición 5.2.1 Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $A(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times p}$, $B(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times q}$. Un *divisor común por la izquierda de $A(s)$ y $B(s)$ respecto a M* es una matriz $R(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times n}$ para la cual existen $\overline{A}(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times p}$ y $\overline{B}(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times q}$ tales que $A(s) = R(s)\overline{A}(s)$ y $B(s) = R(s)\overline{B}(s)$.

Definición 5.2.2 Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Dos matrices $A(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times p}$, $B(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times q}$ son *coprimas por la izquierda respecto a M* si sus únicos divisores comunes por la izquierda respecto a M son matrices invertibles en $\mathbb{F}_M(s)^{n\times n}$.

Como en capítulos anteriores, cuando M se reduce a un único ideal maximal, $(\pi(s))$, con $\pi(s)$ un polinomio mónico irreducible hablaremos de *divisor* *local común por la izquierda respecto a* $\pi(s)$ y de *localmente coprimas por la izquierda respecto a* $\pi(s)$. Si $M = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$, $\mathbb{F}_M(s) = \mathbb{F}[s]$ y por tanto los conceptos de divisor común por la izquierda respecto a $\text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y coprimas por la izquierda respecto a $\text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ coinciden con los conceptos de divisor común por la izquierda y coprimas por la izquierda dados en el Capítulo 1. A continuación tratamos de obtener nuevas caracterizaciones del concepto de coprimas por la izquierda respecto a M, basándonos en las caracterizaciones de este mismo concepto en el caso global, es decir cuando $M = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$.

Las demostraciones son análogas a las del caso global (véase [31], [50] y [54]). Sólo mostraremos las que no aparecen en estos libros.

Lema 5.2.3 *Sea* $A(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times p}$ *y* $B(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times q}$, $p+q \geq n$. *Son equivalentes:*

i) $A(s)$ *y* $B(s)$ *son coprimas por la izquierda respecto a* M,

ii) La forma de Smith respecto a M *de* $[A(s)\ B(s)]$ *es* $[I_n\ 0]$,

iii) Existen $X(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{(p+q-n)\times p}$, $Y(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{(p+q-n)\times q}$ *tales que la forma de Smith respecto a* M *de* $\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ X(s) & Y(s) \end{bmatrix}$ *es* I_{p+q},

iv) Existen $X(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{p\times n}$, $Y(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{q\times n}$ *tales que*

$$A(s)X(s) + B(s)Y(s) = I_n.$$

Demostración.

ii)⇒iii) Dado que la forma de Smith de $[A(s)\ B(s)]$ respecto a M es $[I_n\ 0]$, todos sus factores invariantes respecto a M son triviales, esto es, $\alpha_1(s) = \cdots = \alpha_n(s) = 1$. Sea $\gamma_1(s) = \cdots = \gamma_{p+q}(s) = 1$. Dado que $\gamma_i(s) \mid \alpha_i(s) \mid \gamma_{i+(p+q-n)}(s)$, por [53] (o [42] en el caso de matrices polinomiales), existen $X(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{(p+q-n)\times p}$, $Y(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{(p+q-n)\times q}$ tales que la forma de Smith de $\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ X(s) & Y(s) \end{bmatrix}$ respecto a M es I_{p+q}.

$\square$

Los conceptos de divisor común por la derecha respecto a M y coprima por la derecha respecto a M se pueden dar análogamente para matrices con elementos en $\mathbb{F}_M(s)$ que tengan el mismo número de columnas. Así como un lema análogo al 5.2.3 para las diferentes caracterizaciones de este último concepto.

Además, tenemos las siguientes caracterizaciones de divisor por la izquierda y coprimas por la izquierda para matrices polinomiales ([14]).

Proposición 5.2.4 *Sea $A(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times p}$. Una matriz polinomial no singular $R(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$ es un divisor por la izquierda de $A(s)$ si y sólo si $R(s)$ es un divisor local por la izquierda de $A(s)$ respecto a $\pi(s)$ para todo ideal primo $(\pi(s))$ de $\mathbb{F}[s]$.*

Demostración. Supongamos que existe $\overline{A}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times p}$ tal que $A(s) = R(s)\overline{A}(s)$. Como toda matriz polinomial de dimensión $n\times p$ está en $\mathbb{F}_\pi(s)^{n\times p}$ para todo $\pi(s)$, se sigue que existe $\overline{A}(s) \in \mathbb{F}_\pi(s)^{n\times p}$ tal que $A(s) = R(s)\overline{A}(s)$. Recíprocamente, supongamos que existe $\overline{A}_\pi(s) \in \mathbb{F}_\pi(s)^{n\times p}$ tal que $A(s) = R(s)\overline{A}_\pi(s)$ para todo ideal primo $(\pi(s))$. Entonces $R(s)^{-1}A(s) \in \mathbb{F}_\pi(s)^{n\times p}$ para todo $\pi(s)$. Por tanto $R(s)^{-1}A(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times p}$. Así, existe la matriz polinomial $\overline{A}(s) = R(s)^{-1}A(s)$ tal que $A(s) = R(s)\overline{A}(s)$. $\square$

Proposición 5.2.5 *Sean $A(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times p}$ y $B(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times q}$. Las matrices $A(s)$ y $B(s)$ son coprimas por la izquierda si y sólo si son localmente coprimas por la izquierda respecto a $\pi(s)$ para todo ideal primo $(\pi(s))$ de $\mathbb{F}[s]$.*

Demostración. Si $A(s)$ y $B(s)$ son coprimas por la izquierda existen $X(s) \in \mathbb{F}[s]^{p\times n} \subseteq \mathbb{F}_\pi(s)^{p\times n}$, $Y(s) \in \mathbb{F}[s]^{q\times n} \subseteq \mathbb{F}_\pi(s)^{q\times n}$ tales que $A(s)X(s)+$

$B(s)Y(s) = I_n$ para todo $\pi(s)$. Por tanto son localmente coprimas respecto a $\pi(s)$ para todo ideal primo $(\pi(s))$. Recíprocamente, sea $R(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$ un divisor común a izquierda de $A(s)$ y $B(s)$, es decir existe $\overline{A}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times p}$ y $\overline{B}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times q}$ tales que $A(s) = R(s)\overline{A}(s)$ y $B(s) = R(s)\overline{B}(s)$. Queremos demostrar que $R(s)$ es unimodular. Ahora bien, como $R(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n} \subseteq \mathbb{F}_\pi(s)^{n\times n}$ es también un divisor local común a izquierda respecto a $\pi(s)$ para todo ideal primo $(\pi(s))$, por hipótesis tenemos que $R(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_\pi(s)$ para todo $\pi(s)$. Por tanto es unimodular. $\square$

5.3. Realizaciones locales

El concepto de par nulo por la izquierda está definido con respecto a un subconjunto Ω de $\mathbb{C}$. Dado que nosotros trabajamos con un cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$ necesitamos algo que juegue el papel de Ω en $\mathbb{C}$. Siguiendo las técnicas del Capítulo 3, cuando el cuerpo sea el de los numeros complejos, es claro que podemos identificar cada punto z_0 de $\mathbb{C}$ con el ideal maximal generado por el polinomio irreducible $s - z_0 \in \mathbb{C}[s]$ y por lo tanto podemos identificar Ω con el conjunto de ideales maximales generados por todos los polinomios irreducibles $s - z_0$ con $z_0 \in \Omega$, al cual seguiremos llamando M.

Definición 5.3.1 Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sea $P(s) = P_1(s)Q(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular tal que $\det P_1(s)$ factoriza en M y $\det Q(s)$ factoriza en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Diremos que un par $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$ controlable, $n_1 \geq m$, es una *realización respecto a M de $P(s)$* si (A_1, B_1) es una realización de $P_1(s)$.

Cuando $M = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$, tenemos que toda matriz polinomial no singular se puede escribir como $P(s) = P(s)I_m$ tal que $\det P(s)$ factoriza en M y $\det I_m$ factoriza en $M' = \emptyset$. Por tanto, una realización respecto a $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ de $P(s)$ es una realización de $P(s)$, a la cual llamaremos *realización global de $P(s)$*.

Proposición 5.3.2 *Sea* $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sea* $P(s) = P_1(s)Q(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *una matriz polinomial no singular tal que* $\det P_1(s)$ *factoriza en* M *y* $\det Q(s)$ *factoriza en* $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. *Sea* $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$ *un par controlable,* $n_1 \geq m$, *tal que* $\det(sI_{n_1} - A_1)$ *factoriza en* M. *Entonces* (A_1, B_1) *es una realización respecto a* M *de* $P(s)$ *si y sólo si*

a) $d(\det P_1(s)) = n_1$, *y*

b) $(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1P(s)$ *es una matriz polinomial.*

Demostración. Supongamos que (A_1, B_1) es una realización respecto a M de $P(s) = P_1(s)Q(s)$, lo cual significa que $P_1(s)$ una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). Por [40, Teorema 2.3.7] se tiene que $d(\det P_1(s)) = n_1$ y $(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1P_1(s)$ es una matriz polinomial. Por lo tanto, $(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1P_1(s)Q(s) = (sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1P(s)$ es también polinomial.

Recíprocamente, llamamos $R(s) = (sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1P(s)$. Por hipótesis $R(s)$ es polinomial y podemos escribir

$$\begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R(s) \\ P(s) \end{bmatrix} = 0.$$

Sea $\overline{P}_1(s)$ una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). Entonces, existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1\times n_1}$ y una matriz $Y(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1\times m}$ tal que

$$U(s)[sI_{n_1} - A_1\ B_1] \begin{bmatrix} V(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{P}_1(s) & I_m \end{bmatrix}.$$

Así,

$$U(s)^{-1} \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{P}_1(s) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s)^{-1} & -V(s)^{-1}Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R(s) \\ P(s) \end{bmatrix} = 0.$$

Si escribimos $\begin{bmatrix} -R_1(s) \\ -R_2(s) \\ P(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(s)^{-1} & -V(s)^{-1}Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R(s) \\ P(s) \end{bmatrix}$, donde $R_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{(n_1-m)\times m}$ y $R_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$, entonces $P(s) = \overline{P}_1(s)R_2(s)$.

$\overline{P}_1(s)$ es una representación polinomial matricial de (A_1, B_1) y $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M. Por tanto, $\det \overline{P}_1(s)$ factoriza en M y $n_1 = d(\det \overline{P}_1(s))$. Ahora bien, por la hipótesis *a)*, n_1 es igual a la suma de los grados de todos los divisores elementales de $P(s)$ potencias de polinomios irreducibles $\pi_i(s)$ que satisfacen la condición $(\pi_i(s)) \in M$. Por tanto, $\det R_2(s)$ factoriza en M'. Tenemos que

$$P_1(s)Q(s) = \overline{P}_1(s)R_2(s)$$

con $\det P_1(s), \det \overline{P}_1(s)$ factorizando en M y $\det Q(s), \det R_2(s)$ factorizando en M'. Entonces, por la Proposición 3.2.4, $P_1(s)$ y $\overline{P}_1(s)$ son equivalentes por la derecha y $P_1(s)$ es una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). $\square$

Pensemos en el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Sea γ un contorno en $\mathbb{C}$ con dominio interior Ω. Como hemos dicho en la introducción, podemos identificar Ω con el conjunto $M = \{(s - z_0) \in \text{Specm}(\mathbb{C}[s]) : z_0 \in \Omega\}$. Con estas identificaciones tenemos que:

- A_1 tiene todos sus valores propios en Ω si y sólo si $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M.

- El orden de $A_1 \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_1}$ es igual a la suma de las multiplicidades de los ceros de $\det P(s)$ en Ω es equivalente a decir que $n_1 = d(\det P_1(s))$, siendo $P(s) = P_1(s)Q(s)$ tal que $\det P_1(s)$ factoriza en M y $\det Q(s)$ factoriza en $M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Teniendo esto en cuenta, en particular cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, el concepto de realización y el concepto definido por Gohberg, Kaashoek y van Schagen de par nulo por la izquierda están muy relacionados. Como consecuencia de la Proposición 5.3.2 tenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.3.3 *Sea $(A_1, B_1) \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1} \times \mathbb{C}^{n_1 \times m}$ un par controlable, $n_1 \geq m$. (A_1, B_1) es un par nulo por la izquierda respecto a Ω de una* *matriz polinomial no singular* $P(s) \in \mathbb{C}[s]^{m\times m}$ *si y sólo si* (A_1, B_1) *es una realización respecto a* $M = \{(s - z_0) \in \mathrm{Specm}(\mathbb{C}[s]) : z_0 \in \Omega\}$ *de* $P(s)$*.*

Por tanto, nosotros extendemos el concepto de par nulo por la izquierda para cuerpos arbitrarios. Aún más, por un lado conocemos dos caracterizaciones del concepto de par nulo por la izquierda y por otro lado conocemos diferentes caracterizaciones del concepto de representación polinomial matricial y por tanto de realización. En consecuencia, gracias a la relación entre estos conceptos, nos planteamos obtener diferentes caracterizaciones del concepto de realización respecto a un subconjunto M (y por tanto de par nulo respecto a Ω por la izquierda cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) mostradas en el siguiente teorema. Antes recordamos el siguiente resultado que es bien conocido:

Lema 5.3.4 *Sea* $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ *y* $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$*. Toda matriz racional* $G(s) \in \mathbb{F}(s)^{m\times n}$ *puede representarse de la siguiente forma* $G(s) = P(s) + H_M(s) + H_{M'}(s)$ *donde* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$*,* $H_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times n}$ *es estrictamente propia y* $H_{M'}(s) \in \mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times n}$ *es estrictamente propia. Esta representación es única.*

Teorema 5.3.5 *Sea* $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$*. Sea* $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$*,* $n_1 \geq m$*, un par controlable tal que* $\det(sI_{n_1} - A_1)$ *factoriza en* M *y sea* $P(s) = P_1(s)Q(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *una matriz polinomial no singular tal que* $\det P_1(s)$ *factoriza en* M *y* $\det Q(s)$ *factoriza en* $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$*. Son equivalentes:*

i) (A_1, B_1) *es una realización respecto a* M *de* $P(s)$*,*

ii) Existe un par controlable $(A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{(n-n_1)\times(n-n_1)} \times \mathbb{F}^{(n-n_1)\times m}$*,* $n = d(\det P(s))$*, tal que:*

a) $\det(sI_{(n-n_1)} - A_2)$ *factoriza en* M'*, y* *b)* $P(s)$ *es una representación polinomial de*

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right),$$

iii) *Existen matrices* $U(s)$, $V(s)$ *invertibles en* $\mathbb{F}_M(s)^{n_1\times n_1}$ *y una matriz* $Y(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n_1\times m}$ *tal que*

$$U(s)[sI_{n_1} - A_1 \ B_1] \begin{bmatrix} V(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \end{bmatrix},$$

iv) *Existen* $L_1(s), L_2(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times n_1}$, $X(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ *tales que*

a) $L_1(s)$ *y* $P(s)$ *son coprimas por la izquierda con respecto a* M,

b) $L_2(s)$ *y* $sI_{n_1} - A_1$ *son coprimas por la derecha respecto a* M, *y*

c) $L_1(s)[sI_{n_1} - A_1 \ B_1] = [P(s) \ I_m] \begin{bmatrix} L_2(s) & X(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$,

v) *Existe* $N_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n_1\times m}$ *coprima por la derecha respecto a* M *con* $P(s)$ *tal que*

$$(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 = N_M(s)P(s)^{-1},$$

vi) *a)* $d(\det P_1(s)) = n_1$, *y*

b) $(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1P(s)$ *es una matriz polinomial,*

vii) *Existe* $C_1 \in \mathbb{F}^{m\times n_1}$ *tal que*

a) (A_1, C_1) *es observable, y*

b) $P(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$.

Demostración.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Es consecuencia del Lema 4.3.2.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sea $\overline{P}_1(s)$ una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). Por el Teorema 4.3.4 existe una matriz polinomial $\overline{Q}(s)$, con los mismos factores invariantes no triviales que A_2, y por tanto $\det \overline{Q}(s)$ factoriza en M', tal que $P(s) = \overline{P}_1(s)\overline{Q}(s)$. Por la Proposición 3.2.4, $P_1(s)$ y $\overline{P}_1(s)$ son equivalentes por la derecha y $P_1(s)$ es una representación polinomial matricial de (A_1, B_1).

(i) $\Rightarrow$ (iii) Tenemos que $P(s) = P_1(s)Q(s)$ donde $P_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ es una representación polinomial matricial de (A_1, B_1), $\det P_1(s)$ factoriza en M y $\det Q(s)$ factoriza en M'. Entonces existen matrices unimodulares $\overline{U}(s), \overline{V}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1\times n_1}$ y una matriz $\overline{Y}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1\times m}$ tales que

$$\overline{U}(s)[sI_{n_1} - A_1 \; B_1] \begin{bmatrix} \overline{V}(s) & \overline{Y}(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s) & I_m \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\overline{U}(s)[sI_{n_1} - A_1 \; B_1] \begin{bmatrix} \overline{V}(s) & \overline{Y}(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & Q(s) & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \end{bmatrix}.$$

Llamamos $U(s) = \overline{U}(s)$, $V(s) = \overline{V}(s) \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 \\ 0 & Q(s) \end{bmatrix}$ y $Y(s) = \overline{Y}(s)$. Dado que $\det Q(s)$ factoriza en M', $V(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{n_1\times n_1}$ y por tanto obtenemos la relación deseada.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Se deduce siguiendo las ideas de [31, pp. 567–568].

(iv) $\Rightarrow$ (v) Se deduce siguiendo las ideas de la demostración [40, Teorema 2.3.3, p. 44].

(v) $\Rightarrow$ (vi) Por hipótesis $(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 = N_M(s)P(s)^{-1}$. Escribimos

$$\begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_M(s) \\ P(s) \end{bmatrix} = 0$$

Sea $\overline{P}_1(s)$ una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). Existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1\times n_1}$ y una matriz $Y(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1\times m}$ tales que

$$U(s) \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{P}_1(s) & I_m \end{bmatrix}.$$

Así,

$$U(s)^{-1} \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{P}_1(s) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s)^{-1} & -V(s)^{-1}Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_M(s) \\ P(s) \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{P}_1(s) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V(s)^{-1}N_M(s) - V(s)^{-1}Y(s)P(s) \\ P(s) \end{bmatrix} = 0.$$

Si escribimos

$$\begin{bmatrix} -R_1(s) \\ -R_2(s) \end{bmatrix} = -V(s)^{-1}N_M(s) - V(s)^{-1}Y(s)P(s), \tag{5.1}$$

donde $R_1(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{(n_1-m)\times m}$ y $R_2(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$, entonces $R_1(s) = 0$ y $P(s) = \overline{P}_1(s)R_2(s)$.

Veamos que $R_2(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$. Por (5.1), $N_M(s) + Y(s)P(s) = V(s) \begin{bmatrix} 0 \\ R_2(s) \end{bmatrix}$ y

$$N_M(s) = V(s) \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} R_2(s) - Y(s)\overline{P}_1(s)R_2(s).$$

Llamamos $\overline{N}_M(s) = V(s) \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} - Y(s)\overline{P}_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1\times m}$. Así, $N_M(s) = \overline{N}_M(s)R_2(s)$ y $P(s) = \overline{P}_1(s)R_2(s)$. Como por hipótesis $N_M(s)$ es coprima por la derecha respecto a M con $P(s)$, $R_2(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$.

Por otro lado, $\det P(s) = \det \overline{P}_1(s) \det R_2(s)$ con $\det P(s)$ y $\det \overline{P}_1(s)$ polinomios, $\det \overline{P}_1(s)$ factoriza en M y $R_2(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$. Por tanto, $\det R_2(s)$ debe ser polinomial. De hecho, si suponemos que $\det R_2(s) = \dfrac{r(s)}{q(s)}$, ya que m.c.d.$(q(s), \det \overline{P}_1(s)) = 1$, necesariamente $q(s)$ divide a $r(s)$.

Además, $R_2(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$, entonces $\det R_2(s)$ factoriza en M'.

Recordemos que $P(s) = P_1(s)Q(s)$. Tenemos que

$$P(s) = P_1(s)Q(s) = \overline{P}_1(s)R_2(s)$$

tales que $\det P_1(s)$ y $\det \overline{P}_1(s)$ factorizan en M y $\det R_2(s)$ y $\det Q(s)$ factorizan en M'. Por la Proposición 3.2.4, $P_1(s)$ y $\overline{P}_1(s)$ son equivalentes por la derecha. Así, $n_1 = d(\det \overline{P}_1(s)) = d(\det P_1(s))$ y se tiene a). Además, existe $N_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1\times m}$ coprima por la derecha con $\overline{P}_1(s)$ tal que

$$(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 = N_1(s)\overline{P}_1(s)^{-1}.$$

Por lo tanto, $(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1\overline{P}_1(s) = N_1(s)$ y $(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1\overline{P}_1(s)R_2(s) = N_1(s)R_2(s)$. Tenemos que

$$(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1P(s) = N(s), \tag{5.2}$$

con $N(s) = N_1(s)R_2(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n_1\times m}$. Por (5.2), $\operatorname{Adj}(sI_{n_1} - A_1)B_1P(s) = \det(sI_{n_1} - A_1)N(s)$. Dado que el lado izquierdo de esta igualdad es una matriz polinomial, además $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M y $N(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$, entonces $N(s)$ debe ser polinomial.

(vi) $\Rightarrow$ (i) Está demostrado en la Proposición 5.3.2.

(i) $\Rightarrow$ (vii) Dado que ya hemos probado i)$\Rightarrow$ ii), existe un par controlable $(A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{(n-n_1)\times(n-n_1)} \times \mathbb{F}^{(n-n_1)\times m}$ tal que $\det(sI_{(n-n_1)} - A_2)$ factoriza en M' y $P(s)$ es una representación polinomial matricial del par controlable

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right).$$

Por [40, Teorema 2.3.7, p. 47] existe una matriz $C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, con $C_1 \in \mathbb{F}^{m\times n_1}$ y $C_2 \in \mathbb{F}^{m\times(n-n_1)}$, tal que (A, C) es observable y

$$P(s)^{-1} - [C_1\ C_2] \begin{bmatrix} (sI_{n_1} - A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI_{(n-n_1)} - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = D(s),$$

con $D(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ polinomial. Por tanto, $P(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 = D(s) + C_2(sI_{(n-n_1)} - A_2)^{-1}B_2$. Como $\det(sI_{(n-n_1)} - A_2)$ factoriza en M', $D(s) + C_2(sI_{(n-n_1)} - A_2)^{-1}B_2 \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$. Además (A, C) es observable, en otras palabras (A^T, C^T) es controlable, por tanto $\operatorname{rang}\mathcal{C}(A^T, C^T) = n$. Siguiendo las ideas de la demostración de la Proposición 4.2.1, se deduce que $\operatorname{rang}\mathcal{C}(A_1^T, C_1^T) = n_1$. Por tanto el par (A_1, C_1) es también observable.

(vii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que existe una matriz $C_1 \in \mathbb{F}^{m\times n_1}$ tal que (A_1, C_1) es observable y

$$P(s)^{-1} = C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 + H_M(s)$$

con $H_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$. Como $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M, $H_{M'}(s) = C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 \in \mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m}$ y (A_1, B_1, C_1) es una realización minimal de $H_{M'}(s)$. Por la Proposición 1.4.4, sea $(\overline{A}_1, \overline{B}_1) \in \mathbb{F}^{\overline{n}_1\times\overline{n}_1} \times \mathbb{F}^{\overline{n}_1\times m}$ un par controlable tal que $\overline{n}_1 = d(\det P_1(s))$ y $P_1(s)$ es una de sus representaciones polinomiales matriciales. Entonces como ya hemos probado que i) implica vii), existe $\overline{C}_1$ tal que $(\overline{A}_1, \overline{C}_1)$ es observable y

$$P(s)^{-1} = \overline{C}_1(sI_{\overline{n}_1} - \overline{A}_1)^{-1}\overline{B}_1 + \overline{H}_M(s)$$

con $\overline{H}_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$. El polinomio $\det(sI_{\overline{n}_1} - \overline{A}_1)$ factoriza en M, de ahí que $\overline{H}_{M'}(s) = \overline{C}_1(sI_{\overline{n}_1} - \overline{A}_1)^{-1}\overline{B}_1 \in \mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m}$ y $(\overline{A}_1, \overline{B}_1, \overline{C}_1)$ es una realización minimal de $\overline{H}_{M'}(s)$.

Por el Lema 5.3.4, $H_{M'}(s) = \overline{H}_{M'}(s)$. Por el Lema 1.1.5, $n_1 = \overline{n}_1$ y existe una matriz no singular $P \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1}$ tal que $\overline{A}_1 = PA_1P^{-1}$, $\overline{B}_1 = PB_1$, $\overline{C}_1 = C_1P^{-1}$ y tenemos que $P_1(s)$ es una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). $\square$

Recordemos que un par $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ es una realización global de una matriz polinomial no singular $P(s)$ si y sólo si los sistemas $[sI_n -$

$A\ B]$, $\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \end{bmatrix}$ son sistemas estrictamente equivalentes o equivalentes según Rosenbrock. En la caracterización *iii*) del teorema anterior estamos diciendo que un par $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1 \times m}$ es una realización respecto a M de $P(s)$ si y sólo si los sistemas $[sI_{n_1} - A_1\ B_1]$, $\begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \end{bmatrix}$ son sistemas localmente equivalentes respecto a M (ver [14]).

La condición *iv*) está motivada por el hecho de que matrices de sistemas son equivalentes según Rosenbrock si y sólo si son equivalentes según Fuhrmann (véase [31]).

En [19, Proposición 2.4] se demuestra un resultado similar al Teorema 4.3.4 para matrices racionales sobre el cuerpo de los complejos. Basándonos en la relación que nosotros conocemos, Proposición 5.3.3, entre los conceptos de par nulo por la izquierda respecto a un subconjunto de $\mathbb{C}$ y de realización respecto al correspondiente subconjunto M del $\text{Specm}(\mathbb{C}[s])$ podemos dar el siguiente resultado válido para cualquier cuerpo $\mathbb{F}$.

Proposición 5.3.6 *Sean $M_1, M_2 \in \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ con $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Sean $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1 \times m}$, $(A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_2} \times \mathbb{F}^{n_2 \times m}$ pares controlables tales que $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M_1 y $\det(sI_{n_2} - A_2)$ factoriza en M_2. Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$ una matriz polinomial no singular. Entonces*

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{F}^{n \times n} \times \mathbb{F}^{n \times m}, n = n_1 + n_2,$$

es una realización de $P(s)$ respecto a $M_1 \cup M_2$ si y sólo si (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son realizaciones de $P(s)$ respecto a M_1 y M_2, respectivamente.

Demostración. Supongamos que existen $\overline{P}(s), Q(s) \in \mathbb{F}^{m \times m}$ tales que $P(s) = \overline{P}(s)Q(s)$, $\det \overline{P}(s)$ factoriza en $M_1 \cup M_2$, $\det Q(s)$ factoriza en $\text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus (M_1 \cup M_2)$ y $\overline{P}(s)$ es una representación polinomial matricial de

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right).$$

Por el Teorema 4.3.4 existen $P_1(s), P_2(s), Q_1(s)$ y $Q_2(s)$ tales que

$$\overline{P}(s) = P_1(s)Q_2(s), \qquad \overline{P}(s) = P_2(s)Q_1(s),$$

donde $\det Q_1(s) = \det(sI_{n_1} - A_1)$ (salvo constante) factoriza en $M_1 \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M_2$, $\det Q_2(s) = \det(sI_{n_2} - A_2)$ (salvo constante) factoriza en $M_2 \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M_1$ y $P_1(s), P_2(s)$ representaciones polinomiales matriciales de (A_1, B_1) y (A_2, B_2), respectivamente. Por tanto, si llamamos $R_1(s) = Q_2(s)Q(s)$ y $R_2(s) = Q_1(s)Q(s)$ se tiene

$$P(s) = P_1(s)R_1(s), \qquad P(s) = P_2(s)R_2(s),$$

donde $\det P_i(s)$ factoriza en M_i, $\det R_i(s)$ factoriza en $\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M_i$ y $P_i(s)$ es representación polinomial matricial de (A_i, B_i), $i = 1, 2$. Por tanto, (A_i, B_i) es realización de $P(s)$ respecto a M_i, para $i = 1, 2$.

Recíprocamente, supongamos que (A_1, B_1) es una realización de $P(s)$ respecto a M_1. Entonces por el Teorema 5.3.5 existe una matriz $C_1 \in \mathbb{F}^{m\times n_1}$ tal que (A_1, C_1) es observable y $P(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 \in \mathbb{F}_{M_1}(s)^{m\times m}$. Igualmente, por ser (A_2, B_2) es una realización de $P(s)$ respecto a M_2, existe una matriz $C_2 \in \mathbb{F}^{m\times n_2}$ tal que (A_2, C_2) es observable y $P(s)^{-1} - C_2(sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 \in \mathbb{F}_{M_2}(s)^{m\times m}$. Dado que $\det(sI_{n_i} - A_i)$ factoriza en M_i, $i = 1, 2$, y $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, se sigue que $C_2(sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 \in \mathbb{F}_{M_1}(s)^{m\times m}$ y $C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 \in \mathbb{F}_{M_2}(s)^{m\times m}$. Así,

$$P(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 - C_2(sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 \in \mathbb{F}_{M_1}(s)^{m\times m}, \tag{5.3}$$

$$P(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 - C_2(sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 \in \mathbb{F}_{M_2}(s)^{m\times m}. \tag{5.4}$$

Además, del hecho de que los pares $(A_1, C_1), (A_2, C_2)$ sean observables se tiene que existe $C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ tal que el par

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right)$$

es observable. De (5.3), (5.4) y la propiedad (1.12)

$$P(s)^{-1} - [C_1\ C_2] \begin{bmatrix} (sI_{n_1} - A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI_{(n-n_1)} - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} =$$

$$P(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 - C_2(sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 \in \mathbb{F}_{M_1 \cup M_2}(s)^{m\times m}.$$

$\square$

Al igual que en el caso global, todas las realizaciones respecto a M de una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}^{m\times m}$ son semejantes (ver [19, Lema 2.2]). En efecto, si $P(s) = P_1(s)Q(s)$ donde $\det P_1(s)$ factoriza en M y $\det Q(s)$ factoriza en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$, una realización de $P_1(s)$ es una realización de $P(s)$ respecto a M. Igualmente si $P(s) = \overline{P}_1(s)\overline{Q}(s)$ donde $\det \overline{P}_1(s)$ factoriza en M y $\det \overline{Q}(s)$ factoriza en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$, una realización de $\overline{P}_1(s)$ es también una realización de $P(s)$ respecto a M. Pero, sabemos por la Proposición 3.2.4 que en ese caso $P_1(s)$ y $\overline{P}_1(s)$ son equivalentes por la derecha y por lo tanto se sigue de la Proposición 1.4.5 que sus realizaciones son semejantes.

Ahora, vamos a justificar que algunos de los resultados que se dan en [20] y [58], los primeros referentes al concepto de par nulo por la izquierda y los segundos referentes a resultados globales donde se relacionan las diferentes relaciones de equivalencia entre pares y sus correspondientes representaciones polinomiales matriciales, son consistentes con nuestros conceptos de realización respecto a M y las relaciones de equivalencia definidas respecto a M: equivalencia Wiener–Hopf respecto a (M, M') (Capítulo 3) y equivalencia por la derecha respecto a M (Capítulo 1).

El siguiente resultado puede ser comparado con [20, Teorema 3.2, p. 187] cuando tomamos $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Teorema 5.3.7 *Sea* $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sea* (A_1, B_1) *una realización de* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *respecto a* M. *Entonces, los índices de Wiener–Hopf de*

$P(s)$ respecto a M por la izquierda son los índices de controlabilidad de (A_1, B_1).

Demostración. Sea $P(s) = P_1(s)Q(s)$, tal que $\det P_1(s)$ factoriza en M, $\det Q(s)$ factoriza en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ y $P_1(s)$ es una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). Dado que los índices de controlabilidad de un par de matrices controlable coinciden con los índices de Wiener–Hopf de sus representaciones polinomiales matriciales, los índices de Wiener–Hopf de $P_1(s)$, que son los de $P(s)$ respecto a M, son los índices de controlabilidad de (A_1, B_1). $\square$

Obsérvese que si en teorema anterior tomamos $M = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$, entonces el resultado concuerda con el hecho ya conocido de que los índices de controlabilidad de un par controlable son los índices de Wiener–Hopf por la izquierda de cualquiera de sus representaciones polinomiales matriciales.

Se puede comparar el siguiente resultado con [20, Teorema 3.1, p. 186], donde, para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, se ha demostrado un resultado similar para matrices polinomiales equivalentes Wiener–Hopf por la izquierda respecto a un contorno en el plano complejo (ver Definición 3.1.1).

Teorema 5.3.8 *Sea M y M' subconjuntos de* $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ *tales que $M \cup M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $P(s), P'(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ matrices polinomiales no singulares sin ceros en $M \cap M'$ y $(A_1, B_1), (A_1', B_1') \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$ realizaciones de $P(s)$ y $P'(s)$ respecto a M, respectivamente. Entonces $P(s)$ y $P'(s)$ son equivalentes Wiener–Hopf respecto a (M, M') por la izquierda si y sólo si $(A_1, B_1), (A_1', B_1')$ son equivalentes por feedback.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.6, $P(s)$ y $P'(s)$ tienen los mismos índices de Wiener–Hopf respecto a M. Entonces por el Teorema 5.3.7 sus realizaciones, (A_1, B_1) y (A_1', B_1'), respecto a M tienen los mismos índices de controlabilidad y por tanto son equivalentes por feedback. $\square$

Si tomamos $M = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y $M' = \emptyset$ el teorema anterior nos da el mismo resultado global ya conocido, la Proposición 1.4.6.

Teorema 5.3.9 *Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $P(s), P'(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ matrices polinomiales no singulares y sean $(A_1, B_1), (A_1', B_1') \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$ realizaciones de $P(s)$ y $P'(s)$ respecto a M, respectivamente. Entonces los pares (A_1, B_1), (A_1', B_1') son semejantes si y sólo si existe una matriz invertible $V(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ tal que $P(s) = P'(s)V(s)$.*

Demostración. Por ser $(A_1, B_1), (A_1', B_1')$ realizaciones de $P(s)$ y $P'(s)$ respecto a M, respectivamente, existen matrices polinomiales $P_1(s)$, $Q(s)$, $P_1'(s)$, $Q'(s)$ tales que

$$P(s) = P_1(s)Q(s),$$
$$P'(s) = P_1'(s)Q'(s),$$

donde $\det P_1(s), \det P_1'(s)$ factorizan en M, $\det Q(s), \det Q'(s)$ factorizan en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ y $P_1(s), P_1'(s)$ son representaciones polinomiales matriciales de (A_1, B_1), (A_1', B_1'), respectivamente.

Si $(A_1, B_1), (A_1', B_1')$ son semejantes, por la Proposición 1.4.5 existe una matriz unimodular $U(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tal que $P_1(s) = P_1'(s)U(s)$. Por tanto,

$$P(s) = P_1(s)Q(s) = P_1'(s)U(s)Q(s) = P_1'(s)Q'(s)Q'(s)^{-1}U(s)Q(s).$$

Llamamos $V(s) = Q'(s)^{-1}U(s)Q(s)$. Entonces $P(s) = P'(s)V(s)$, con $V(s)$ una matriz invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$, ya que $\det Q(s)$ y $\det Q'(s)$ factorizan en M'.

Recíprocamente, supongamos que $P(s) = P'(s)V(s)$ con $V(s)$ una matriz invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$. Entonces,

$$P_1(s)Q(s) = P_1'(s)Q'(s)V(s).$$

Sea $g(s)$ el polinomio mónico mínimo común múltiplo de los denominadores de $V(s)$. Escribimos $V(s) = \dfrac{N(s)}{g(s)}$ con $N(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$. Dado que $V(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ y $\det V(s) = \dfrac{\det N(s)}{g(s)^m}$, $\det N(s)$ y $g(s)$ se factorizan en M'. Llamamos $Q_1(s) = Q(s)g(s)$, $Q_1'(s) = Q'(s)N(s)$, tales que ambas factorizan en $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Tenemos que $P_1(s)Q_1(s) = P_1'(s)Q_1'(s)$. Por la Proposición 3.2.4, $P_1(s)$ y $P_1'(s)$ son equivalentes por la derecha. En consecuencia, por la Proposición 1.4.5, (A_1, B_1) y (A_1', B_1') son semejantes. $\square$

Si tomamos $M = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ el teorema anterior nos da el mismo resultado global de la Proposición 1.4.5.

5.4. Representaciones polinomiales matriciales locales

Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Dado un par controlable $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ sabemos que existen enteros no negativos n_1, n_2 tales que $n = n_1 + n_2$ y existe una matriz invertible $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$ tal que

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

con (A_1, B_1) y (A_2, B_2) pares controlables tales que $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M y $\det(sI_{n_2} - A_2)$ factoriza en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Definimos el concepto de representación polinomial matricial del par de matrices (A, B) respecto a M como la representación polinomial de la parte de (A, B) que contiene la información referente a M, es decir como la representación polinomial matricial de (A_1, B_1).

Definición 5.4.1 Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sea $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ un par controlable y sea $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ una matriz invertible tal que $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M, $\det(sI_{n_2} - A_2)$ factoriza en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ y $n_1 \geq m$. Escribimos $PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$. Diremos que $P_M(s) \in$

$\mathbb{F}[s]^{m\times m}$ es una *representación polinomial matricial de* (A,B) *respecto a* M si $P_M(s)$ es una representación polinomial matricial de (A_1,B_1).

Observemos que cuando $M=\text{Specm}(\mathbb{F}[s])$, $PAP^{-1}=A_1$ y $\det(sI_{n_1}-A_1)$ factoriza en M. Sea $PB=B_1$. Por tanto toda representación polinomial de (A_1,B_1) es representación polinomial de (A,B) y viceversa.

Teorema 5.4.2 *Sea* $M\subseteq\text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sea* $(A,B)\in\mathbb{F}^{n\times n}\times\mathbb{F}^{n\times m}$ *un par controlable y sea* $P\in\mathbb{F}^{n\times n}$ *una matriz invertible tal que* $PAP^{-1}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}$, $\det(sI_{n_1}-A_1)$ *factoriza en* M, $\det(sI_{n_2}-A_2)$ *factoriza en* $M'=\text{Specm}(\mathbb{F}[s])\setminus M$ *y* $n_1\geq m$. *Escribimos* $PB=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$. *Sea* $P_M(s)\in\mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *una matriz polinomial no singular tal que su determinante factoriza en* M. *Son equivalentes:*

i) $P_M(s)$ *es una representación polinomial matricial de* (A,B) *respecto a* M,

ii) *Existe* $Q(s)\in\mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *tal que*

a) $\det Q(s)$ *factoriza en* M', *y*

b) $P_M(s)Q(s)$ *es una representación polinomial matricial de* (A,B),

iii) *Existen* $U(s)$, $V(s)$ *invertibles en* $\mathbb{F}_M(s)^{n\times n}$ *y una matriz* $Y(s)\in\mathbb{F}_M(s)^{n\times m}$ *tales que*

$$U(s)[sI_n-A\;\;B]\begin{bmatrix}V(s) & Y(s)\\ 0 & I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{n-m} & 0 & 0\\ 0 & P_M(s) & I_m\end{bmatrix},$$

iv) *Existen* $L_1(s),L_2(s)\in\mathbb{F}_M(s)^{m\times n}$, $X(s)\in\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$ *tales que*

a) $L_1(s)$ *y* $P_M(s)$ *son coprimas por la izquierda respecto a* M,

b) $L_2(s)$ *y* sI_n-A *son coprimas por la derecha respecto a* M, *y* *c)* $L_1(s)[sI_n - A\ B] = [P_M(s)\ I_m] \begin{bmatrix} L_2(s) & X(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$,

v) *Existe* $N_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times m}$ *coprima por la derecha respecto a* M *con* $P_M(s)$ *tal que*

$$(sI_n - A)^{-1}B = N_M(s)P_M(s)^{-1},$$

vi) *a)* $d(\det P_M(s)) = n_1$, *y*

b) $(sI_n - A)^{-1}BP_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times m}$,

vii) *Existe* $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$ *tal que*

a) (A, C) *es observable, y*

b) $P_M(s)^{-1} - C(sI_n - A)^{-1}B \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$.

Demostración.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por hipótesis $P_M(s)$ es una representación polinomial matricial de (A_1, B_1) y el resultado se sigue del Teorema 4.3.4, Capítulo 4.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Dado que $P_M(s)Q(s)$ es una representación polinomial matricial de (A, B), existen matrices unimodulares $\overline{U}(s), \overline{V}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times n}$ y una matriz $\overline{Y}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n\times m}$ tales que

$$\overline{U}(s)[sI_n - A\ B] \begin{bmatrix} \overline{V}(s) & \overline{Y}(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P_M(s)Q(s) & I_m \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\overline{U}(s)[sI_n - A\ B] \begin{bmatrix} \overline{V}(s) & \overline{Y}(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & Q(s)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P_M(s) & I_m \end{bmatrix}.$$

$\overline{U}(s)$ es también invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{n\times n}$ y las matrices $\begin{bmatrix} \overline{V}(s) & \overline{Y}(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & Q(s)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$ son invertibles en $\mathbb{F}_M(s)^{(n+m)\times(n+m)}$. Deducimos que existen $U(s) = \overline{U}(s)$, $V(s) = \overline{V}(s)\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ 0 & Q(s)^{-1} \end{bmatrix}$ y $Y(s) = \overline{Y}(s)$ cumpliendo las condiciones deseadas.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Se deduce siguiendo las ideas de [31, pp. 567–568].

(iv) $\Rightarrow$ (v) Se deduce siguiendo las ideas de la demostración [40, Teorema 2.3.3, p. 44].

(v) $\Rightarrow$ (i) Recordemos que

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}P, \quad B = P^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Por hipótesis,

$$N_M(s)P_M(s)^{-1} = (sI_n - A)^{-1}B = P^{-1}\begin{bmatrix} (sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 \\ (sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 \end{bmatrix}.$$

Sea $PN_M(s) = \begin{bmatrix} N_1(s) \\ N_2(s) \end{bmatrix}$ con $N_1(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n_1\times m}$ y $N_2(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n_2\times m}$. Así,

$$(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 = N_1(s)P_M(s)^{-1}, \tag{5.5}$$

y

$$(sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 = N_2(s)P_M(s)^{-1}. \tag{5.6}$$

Queremos demostrar que $P_M(s)$ es una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). Teniendo en cuenta la condición (5.5) tendremos que demostrar que $N_1(s)$ es polinomial y coprima por la derecha con $P_M(s)$. Por (5.5),

$$\mathrm{Adj}(sI_{n_1} - A_1)B_1P_M(s) = \det(sI_{n_1} - A_1)N_1(s).$$

En la igualdad anterior la matriz de la izquierda es polinomial y $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M, entonces $N_1(s)$ debe ser polinomial. Además, por (5.6),

$$N_2(s) = \frac{\operatorname{Adj}(sI_{n_2} - A_2)}{\det(sI_{n_2} - A_2)} B_2 P_M(s).$$

Sea $N_1(s) = \overline{N}_1(s)D(s)$, $P_M(s) = \overline{P}_M(s)D(s)$, donde $\overline{N}_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1 \times m}$, $\overline{P}_M(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ y $D(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$. Por un lado, como $\det P_M(s)$ factoriza en M, $\det D(s)$ también factoriza en M. Por otro lado,

$$N_M(s) = P^{-1} \begin{bmatrix} (sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 \\ (sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 \end{bmatrix} P_M(s) = P^{-1} \begin{bmatrix} N_1(s) \\ N_2(s) \end{bmatrix},$$

o bien

$$N_M(s) = \overline{N}_M(s)D(s)$$

con

$$\overline{N}_M(s) = P^{-1} \begin{bmatrix} \overline{N}_1(s) \\ \dfrac{\operatorname{Adj}(sI_{n_2} - A_2)}{\det(sI_{n_2} - A_2)} B_2 \overline{P}_M(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times m}.$$

Dado que $N_M(s)$ y $P_M(s)$ son coprimas por la derecha con respecto a M, $D(s)$ es invertible en $\mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$. Por tanto, $D(s)$ es unimodular.

(i) $\Rightarrow$ (vi) Supongamos que $P_M(s)$ es una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). Entonces existe una matriz $N(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1\times m}$ coprima por la derecha con $P_M(s)$ y tal que $(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 = N(s)P_M(s)^{-1}$. Por tanto, $(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1P_M(s) = N(s)$ es polinomial. Además, existen matrices unimodulares $U(s), V(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1\times n_1}$ tales que $U(s)(sI_{n_1} - A_1)V(s) = \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 \\ 0 & P_M(s) \end{bmatrix}$. De este hecho, si $\det U(s) \det V(s) = c \in \mathbb{F}$, $c \neq 0$, entonces $\det P_M(s) = c \det(sI_{n_1} - A_1)$. En consecuencia, $d(\det P_M(s)) = n_1$ y por tanto se deduce a).

Por hipótesis, existe un matriz no singular $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que

$$(sI_n - A)^{-1}BP_M(s) = \left(sI_n - P^{-1} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} P\right)^{-1} P^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} P_M(s) =$$

$$P^{-1}\begin{bmatrix} (sI_{n_1}-A_1)^{-1}B_1P_M(s) \\ (sI_{n_2}-A_2)^{-1}B_2P_M(s) \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$(sI_n-A)^{-1}BP_M(s) = P^{-1}\begin{bmatrix} N(s) \\ (sI_{n_2}-A_2)^{-1}B_2P_M(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times m}.$$

(vi) $\Rightarrow$ (i) Tenemos que

$$(sI_n-A)^{-1}BP_M(s) = P^{-1}\begin{bmatrix} (sI_{n_1}-A_1)^{-1}B_1P_M(s) \\ (sI_{n_2}-A_2)^{-1}B_2P_M(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_M(s)^{n\times m}.$$

Así, $(sI_{n_1}-A_1)^{-1}B_1P_M(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n_1\times m}$. Además,

$$(sI_{n_1}-A_1)^{-1}B_1P_M(s) = \frac{\operatorname{Adj}(sI_{n_1}-A_1)}{\det(sI_{n_1}-A_1)}B_1P_M(s) \in \mathbb{F}_{M'}(s)^{n_1\times m}.$$

Por tanto, $(sI_{n_1}-A_1)^{-1}B_1P_M(s)$ debe ser polinomial. Además por hipótesis $d(\det P_M(s)) = n_1$. Por tanto el resultado se sigue de [40, Teorema 2.3.7, p. 47].

(i) $\Rightarrow$ (vii) Sea $P_M(s)$ una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). Por [40, Teorema 2.3.7, p. 47] existe $C_1 \in \mathbb{F}^{m\times n_1}$ tal que el par (A_1, C_1) es observable y la matriz $P_M(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1}-A_1)^{-1}B_1 = D(s)$ es polinomial.

Por otra parte, veamos ahora que existe una matriz $C_2 \in \mathbb{F}^{m\times n_2}$ tal que el par de matrices $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right)$ es observable. Dado que (A, B) es controlable es fácil ver que (A_2, B_2) es también un par controlable. Por tanto, el número de factores invariantes no triviales de A_2 no es mayor que m. Además, (A_1^T, C_1^T) es controlable. Por [59, Corolario 2.6], existe $X \in \mathbb{F}^{n_2\times n_1}$ tal que el par de matrices $\left(\begin{bmatrix} A_2^T & X \\ 0 & A_1^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ C_1^T \end{bmatrix} \right)$ es controlable. Dado que m.c.d.$(\det(sI_{n_1}-A_1^T), \det(sI_{n_2}-A_2^T)) = 1$, por [34, Sección 12.5], existe una única solución $Z \in \mathbb{F}^{n_2\times n_1}$ de la ecuación $ZA_1^T - A_2^TZ = X$. Ahora, si consideramos la matriz $R = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_1} \\ I_{n_2} & -Z \end{bmatrix}$ y llamamos

$C_2^T = -ZC_1^T$ entonces $R\begin{bmatrix} A_2^T & X \\ 0 & A_1^T \end{bmatrix}R^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ 0 & A_2^T \end{bmatrix}$ y $R\begin{bmatrix} 0 \\ C_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \end{bmatrix}$. Por tanto, el par de matrices $\left(\begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ 0 & A_2^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \end{bmatrix}\right)$ es controlable y $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\right)$ es observable.

Recordemos que

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}P, \quad B = P^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Llamamos $C = [C_1\ C_2]P$. Así, (A, C) es observable. Además,

$$P_M(s)^{-1} - C(sI_n - A)^{-1}B =$$

$$P_M(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 - C_2(sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 =$$

$$D(s) - C_2(sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}.$$

(vii) $\Rightarrow$ (i) Por hipótesis $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = PAP^{-1}$, $\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = PB$. Llamamos $[C_1\ C_2] = CP^{-1}$. Del hecho de que (A, C) es observable es fácil probar que (A_1, C_1) es también observable. Por un lado como $\det P_M(s)$ y $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factorizan en M, $P_M(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 \in \mathbb{F}_{M'}(s)^{m\times m}$. Por otro lado

$$P_M(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 - C_2(sI_{n_2} - A_2)^{-1}B_2 =$$

$$P_M(s)^{-1} - C(sI_n - A)^{-1}B \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}.$$

Por tanto, $P_M(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$. Así, $P_M(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1 \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ es polinomial. Tenemos pues que (A_1, C_1) es observable y $P_M(s)^{-1} - C_1(sI_{n_1} - A_1)^{-1}B_1$ polinomial. Se sigue de [40, Teorema 2.3.7, p. 47] que $P_M(s)$ es una representación polinomial matricial de (A_1, B_1). $\square$

Como en el caso de las realizaciones respecto a M tenemos una caracterización del concepto de representación polinomial matricial respecto a M en términos de sistemas localmente equivalentes. Recordemos que una matriz polinomial no singular $P(s)$ es una representación polinomial matricial de un par $(A,B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ si y sólo si los sistemas $[sI_n - A\ B]$, $\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \end{bmatrix}$ son sistemas estrictamente equivalentes o equivalentes en el sentido de Rosenbrock. En la caracterización *iii*) del concepto de representación polinomial matricial respecto a M estamos diciendo que una matriz $P_M(s)$ es una representación polinomial matricial de (A,B) respecto a M si y sólo si los sistemas $[sI_n - A\ B]$, $\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P_M(s) & I_m \end{bmatrix}$ son sistemas localmente equivalentes respecto a M (ver [14]).

En ambos Teoremas 5.3.5 y 5.4.2 cuando $M = \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$, obtenemos las diferentes caracterizaciones del concepto de representación polinomial matricial (global) que fueron estudiadas en [40, Capítulo 2].

El siguiente resultado relaciona los conceptos de representación polinomial matricial respecto a M y realización respecto a M.

Proposición 5.4.3 *Sea* $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sea* $(A,B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *un par de matrices controlable y sea* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *una matriz polinomial no singular. Sea* (A,B) *semejante a* $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$ *tal que* $(A_1,B_1) \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$, $n_1 \geq m$, $\det(sI_{n_1} - A_1)$ *factoriza en* M *y* $\det(sI_{(n-n_1)} - A_2)$ *factoriza en* $M' = \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])\backslash M$. *Sea* $P(s) = P_1(s)Q(s)$ *tal que* $\det P_1(s)$ *factoriza en* M *y* $\det Q(s)$ *factoriza en* M'. *Entonces,* $P_1(s)$ *es una representación polinomial matricial de* (A,B) *respecto a* M *si y sólo si* (A_1,B_1) *es una realización de* $P(s)$ *respecto a* M.

Demostración. Supongamos que $P_1(s)$ es una representación polinomial matricial de (A,B) respecto a M, o lo que es lo mismo, $P_1(s)$ es una representación polinomial matricial global de (A_1,B_1). Por tanto, existen matrices unimodulares $\overline{U}(s), \overline{V}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1 \times n_1}$ y una matriz polinomial $\overline{Y}(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1 \times m}$ tales que

$$\overline{U}(s)[sI_{n_1} - A_1 \ B_1] \begin{bmatrix} \overline{V}(s) & \overline{Y}(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & P_1(s) & I_m \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$U(s)[sI_{n_1} - A_1 \ B_1] \begin{bmatrix} V(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & I_m \end{bmatrix},$$

con $U(s) = \overline{U}(s)$, $V(s) = \overline{V}(s) \begin{bmatrix} I_{n_1-m} & 0 \\ 0 & Q(s) \end{bmatrix}$ invertibles en $\mathbb{F}_M(s)^{n_1 \times n_1}$ y $Y(s) = \overline{Y}(s) \in \mathbb{F}_M(s)^{n_1 \times m}$. Por el Teorema 5.3.5 iii), (A_1, B_1) es una realización de $P(s)$ respecto a M.

Recíprocamente, supongamos que (A_1, B_1) es una realización de $P(s)$ respecto a M, el Teorema 5.3.5 *vi*) nos garantiza que $n_1 = d(\det P_1(s))$ y $(sI_{n_1} - A_1)^{-1} B_1 P(s) \in \mathbb{F}[s]^{n_1 \times m}$. Dado que el par (A, B) es semejante a $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$, existe una matriz no singular $T \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_1}$ tal que $A = T \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T^{-1}$ and $B = T \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$. Entonces, dado que $\det Q(s)$ y $\det(sI_{(n-n_1)} - A_2)$ factorizan en M'

$$(sI_n - A)^{-1} B P_1(s) = T \begin{bmatrix} (sI_{n_1} - A_1)^{-1} B_1 P(s) Q(s)^{-1} \\ (sI_{(n-n_1)} - A_2)^{-1} B_2 P_1(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_M(s)^{n \times m}.$$

Por el Teorema 5.4.2 vi), $P_1(s)$ es una representación polinomial matricial de (A, B) respecto a M. □

Capítulo 6

Sobre la existencia de sistemas lineales con invariantes para la semejanza prescritos

6.1. Introducción

Recordamos que a lo largo de esta memoria hemos citado los siguientes tipos de invariantes globales y locales para la semejanza de pares de matrices: factores invariantes, índices de controlabilidad e índices de Hermite.

En este capítulo nos planteamos problemas de tipo inverso, tratamos de determinar bajo qué condiciones existe un sistema lineal con algunos de los invariantes locales y/o globales anteriormente citados prescritos. Concretamente, en las Secciones 6.2 y 6.3 nos plantemos los siguientes problemas:

Encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un par controlable $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *con factores invariantes globales de la matriz de estados e índices de controlabilidad globales y locales prescritos.*

Encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un par controlable $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *con factores invariantes globales de la matriz de estados e índices de Hermite globales y locales prescritos.*

El primer problema lo resolvemos completamente para cuerpos algebraicamente cerrados. Y, en el segundo obtenemos una solución para cualquier cuerpo.

Teniendo en cuenta que dado un par controlable existe una matriz polinomial no singular que es una representación polinomial matricial del mismo y que todos los invariantes asociados a sistemas controlables están también definidos para matrices polinomiales no singulares, estos problemas se pueden plantear también en el contexto de matrices polinomiales no singulares. Los problemas serán los siguientes:

Encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con factores invariantes globales e índices de Wiener–Hopf globales y locales por la izquierda prescritos.

Encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con factores invariantes globales e índices de Hermite globales y locales prescritos.

Primero resolvemos estos problemas para matrices polinomiales y teniendo en cuenta las relaciones conocidas entre los invariantes para sistemas y sus representaciones polinomiales matriciales obtenemos la solución de los problemas planteados inicialmente.

Algunos resultados de este tipo se pueden obtener como consecuencias de resultados globales ya conocidos (ver, por ejemplo, [7], [50], [58]). Esto se debe a que para cualquier subconjunto M de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$, dada una matriz polinomial $P(s)$ no singular su estructura Wiener–Hopf respecto a M, su forma de Hermite respecto a M y su forma de Smith respecto a M están determinadas por la estructura Wiener–Hopf global, forma de Hermite global y forma de Smith global, respectivamente, de cualquier matriz polinomial $P_1(s)$ cuyo determinante factoriza en M y tal que $P(s) = P_1(s)Q(s)$, con $Q(s)$ una matriz polinomial cuyo determinante factoriza en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. En consecuencia todas las relaciones conocidas entre estos tres tipos de invariantes globales se siguen verificando entre los correspondientes invariantes respecto a M. Algunos de estos resultados, tanto para matrices polinomiales como para sistemas se recopilan en la Sección 6.4.

6.2. Sobre la existencia de sistemas lineales con índices de controlabilidad prescritos

Tratamos de encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una matriz polinomial $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con factores invariantes globales, índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda e índices de Wiener–Hopf respecto a un subconjunto M de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ por la izquierda prescritos.

El siguiente lema de Marques de Sá ([43]) caracteriza las posibles diagonales de matrices polinomiales triangulares con factores invariantes prescritos.

Lema 6.2.1 *Sean $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ y $\delta_1(s),\dots,\delta_m(s)$ polinomios mónicos. Entonces, existe una matriz polinomial triangular con elementos en la diagonal $(\delta_1(s),\dots,\delta_m(s))$ y $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ como factores invariantes si y sólo si*

$$\alpha_1(s)\cdots\alpha_k(s)|\,\mathrm{m.c.d.}\{\delta_{i_1}(s)\cdots\delta_{i_k}(s), 1\le i_1<\cdots<i_k\le m\},$$

$$1\le k\le m-1, \tag{6.1}$$

$$\alpha_1(s)\cdots\alpha_m(s) = \delta_1(s)\cdots\delta_m(s). \tag{6.2}$$

Observación 6.2.2 En el lema anterior, cuando se den las condiciones (6.1) y (6.2), podemos suponer sin pérdida de generalidad que la matriz triangular que existe es dominante en grado por columnas (filas), pues en caso contrario realizaríamos transformaciones por filas (columnas) que no afectan ni a los elementos de la diagonal ni a los factores invariantes.

El siguiente lema aparece en [8]:

Lema 6.2.3 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y sean $k_1, \ldots, k_m$ y $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ enteros no negativos y polinomios mónicos, respectivamente. Si*

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (d(\alpha_m(s)), \ldots, d(\alpha_1(s)))$$

entonces existen polinomios mónicos $\delta_1(s), \ldots, \delta_m(s)$ tales que $d(\delta_i(s)) = k_i, 1 \leq i \leq m$ y

$$\alpha_1(s)\cdots\alpha_k(s) |\, \text{m.c.d.}\{\delta_{i_1}(s)\cdots\delta_{i_k}(s), 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\},$$

$$1 \leq k \leq m-1,$$

$$\alpha_1(s)\cdots\alpha_m(s) = \delta_1(s)\cdots\delta_m(s).$$

En general, el producto de una matriz propia por columnas y una matriz dominante en grado por columnas (ver Capítulo 1) no es propia por columnas. Ahora bien, tenemos el siguiente caso particular:

Lema 6.2.4 *Sean $a_1 \geq \cdots \geq a_m$ y $c_1 \geq \cdots \geq c_m$ secuencias de enteros no negativos. Sea $T(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz no singular triangular inferior dominante en grado por columnas con a_j el grado de su columna j. Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz no singular propia por columnas con c_j el grado de su columna j. Entonces la matriz producto $P(s)T(s)$ es propia por columnas con $c_j + a_j$ el grado de su columna j.*

Demostración. La matriz $T(s)$ dominante en grado por columnas se puede escribir como

$$T(s) = D_T(s) + T_1(s),$$

donde $D_T(s) = \mathrm{Diag}(s^{a_1}, s^{a_2}, \ldots, s^{a_m})$, y $T_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ es una matriz triangular inferior tal que el grado de su columna j es estrictamente menor que a_j. La matriz $P(s)$ se puede escribir como

$$P(s) = P_c D_P(s) + P_1(s),$$

donde $D_P(s) = \mathrm{Diag}(s^{c_1}, s^{c_2}, \ldots, s^{c_m})$, $P_c \in \mathbb{F}^{m\times m}$ es la matriz de coeficientes de los términos de mayor grado en las columnas con $\det P_c \neq 0$ y $P_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ es una matriz polinomial que recoge el resto de los términos, de tal forma que el grado de su columna j es estrictamente menor que c_j. Por tanto, $P(s)T(s) = (P_c D_P(s) + P_1(s))(D_T(s) + T_1(s)) = P_c D_P(s) D_T(s) + P_1(s) D_T(s) + P_c D_P(s) T_1(s) + P_1(s) T_1(s)$.

La columna j de la matriz producto $P_1(s)D_T(s)$ consiste en multiplicar la columna j de $P_1(s)$, cuyo grado es menor que c_j, por s^{a_j}. De ahí que la columna j de $P_1(s)D_T(s)$ sea de grado menor que $c_j + a_j$.

Si llamamos $R(s) = D_P(s)T_1(s) = [r_{ij}(s)]$, entonces $r_{ij}(s) = 0$ para $i < j$ y para $i \geq j$, $r_{ij}(s) = s^{c_i} t_{ij}(s)$ siendo $t_{ij}(s)$ el elemento en la posición (i, j) de la matriz $T_1(s)$. Así, para $i \geq j$, $d(r_{ij}(s)) = c_i + d(t_{ij}(s)) < c_i + a_j \leq c_j + a_j$. En definitiva el grado de los elementos de la columna j de la matriz $P_c D_P(s) T_1(s)$ es menor que $a_j + c_j$.

Sea $Q(s) = P_1(s)T_1(s) = [q_{ij}(s)]$. Sea $q_{ij}(s)$ un elemento arbitrario de la columna j de la matriz $Q(s)$, el cual se obtiene multiplicando la fila i de la matriz $P_1(s) = [p_{ij}(s)]$ por la columna j de la matriz triangular $T_1(s)$. Por tanto, $q_{ij}(s) = \sum_{k=j}^{m} p_{ik}(s) t_{kj}(s)$, donde $d(p_{ik}(s))d(t_{kj}(s)) < c_k + a_j \leq c_j + a_j$, o bien $d(q_{ij}(s)) < c_j + a_j$. En consecuencia, el grado de la columna j de la matriz $Q(s)$ es menor que $c_j + a_j$.

Llamamos $S(s) = P_1(s)D_T(s) + P_cD_P(s)T_1(s) + P_1(s)T_1(s)$, tenemos que

$$P(s)T(s) = P_cD(s) + S(s)$$

donde $D(s) = \mathrm{Diag}(s^{c_1+a_1}, \ldots, s^{c_m+a_m})$, $P_c \in \mathbb{F}^{m\times n}$ es tal que $\det P_c \neq 0$ y $S(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times n}$ es una matriz polinomial tal que el grado de su columna j es estrictamente menor que $c_j + a_j$. $\square$

Presentamos primero condiciones necesarias y veremos que éstas son también suficientes si el cuerpo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado.

Teorema 6.2.5 *Sea* $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sean* $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ *y* $c_1 \geq \cdots \geq c_m$ *enteros no negativos y para* $i = 1, \ldots, m$ *sean* $\alpha_i(s) = \gamma_i(s)\beta_i(s)$ *polinomios mónicos tales que* $\gamma_i(s)$ *factoriza en* M, $\beta_i(s)$ *factoriza en* $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ *y* $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$. *Si existe un matriz polinomial* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *con* $k_1, \ldots, k_m$ *como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda,* $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ *como factores invariantes globales y* $c_1, \ldots, c_m$ *como índices de Wiener–Hopf respecto a* M *por la izquierda, entonces se tienen las siguientes condiciones:*

$$c_i \leq k_i, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{6.3}$$

$$(k_1 - c_1, \ldots, k_m - c_m) \prec (d(\beta_m(s)), \ldots, d(\beta_1(s))), \tag{6.4}$$

$$(c_1, \ldots, c_m) \prec (d(\gamma_m(s)), \ldots, d(\gamma_1(s))). \tag{6.5}$$

Recíprocamente, si $\mathbb{F}$ *es algebraicamente cerrado y se cumplen las condiciones (6.3), (6.4) y (6.5) entonces existe una matriz polinomial* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *con* $k_1, \ldots, k_m$ *como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda,* $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ *como factores invariantes globales y* $c_1, \ldots, c_m$ *como índices de Wiener–Hopf respecto a* M *por la izquierda.*

Demostración. Dado que $c_1, \ldots, c_m$ son los índices de Wiener–Hopf respecto a M de $P(s)$ por la izquierda, $P(s) = P_1(s)P_2(s)$, donde $P_1(s)$ tiene $c_1, \ldots, c_m$ como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda y $\gamma_1(s)|\cdots|\gamma_m(s)$ como factores invariantes (véase Lema 1.2.7). Además los factores invariantes de $P_2(s)$ son $\beta_1(s)|\cdots|\beta_m(s)$. Por lo tanto, la condición (6.5) es una consecuencia del Teorema de Rosenbrock aplicado a la matriz $P_1(s)$. La condiciones (6.3) y (6.4) se siguen del Lema 4.5.3.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado y se verifican las condiciones (6.3) y (6.4). Por el Lema 6.2.3 existen polinomios mónicos $\delta_1(s), \ldots, \delta_m(s)$ tales que $d(\delta_i(s)) = k_i - c_i, 1 \leq i \leq m$ y

$$\beta_1(s)\cdots\beta_k(s)|\,\text{m.c.d.}\{\delta_{i_1}(s)\cdots\delta_{i_k}(s), 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\},$$

$$1 \leq k \leq m-1,$$

$$\beta_1(s)\cdots\beta_m(s) = \delta_1(s)\cdots\delta_m(s).$$

Por el Lema 6.2.1 y la Observación 6.2.2 existe una matriz polinomial triangular inferior, $X(s)$, dominante en grado por columnas con $\beta_1(s), \ldots, \beta_m(s)$ como factores invariantes y $k_i - c_i$ como grado de la i–ésima columna, $1 \leq i \leq m$. Por otra parte, por el Teorema de Rosenbrock, la condición de mayorización (6.5) implica que existe una matriz polinomial no singular, $Q_1(s)$, con $c_1, \ldots, c_m$ como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda y $\gamma_1(s), \ldots, \gamma_m(s)$ como factores invariantes. Si $Q_1(s)$ no es propia por columnas por el Lema 1.4.7 existe una matriz unimodular $U(s)$ tal que $Q(s) = Q_1(s)U(s)$ es propia por columnas. Esta matriz $Q(s)$ tiene los mismos factores invariantes y los mismos índices de Wiener–Hopf que $Q_1(s)$. Dado que $X(s)$ es una matriz polinomial triangular inferior, dominante en grado por columnas con grados de columnas $k_1 - c_1, \ldots, k_m - c_m$ y $Q(s)$ es propia por columnas con grados de columnas $c_1, \ldots, c_m$, podemos asegurar que la matriz producto, $P(s) = Q(s)X(s)$, es una matriz propia por columnas con grado de columnas $k_1, \ldots, k_m$ (ver Lema 6.2.4). Entonces, $P(s)$

tiene $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda, $\alpha_i(s) = \gamma_i(s)\beta_i(s), i = 1, \ldots, m$, como factores invariantes globales (véase Lema 1.2.7) y $c_1, \ldots, c_m$ como índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda. $\square$

Por otro lado podemos obtener condiciones suficientes que nos garantizan la existencia de una matriz polinomial $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda, factores invariantes globales e índices de Wiener–Hopf respecto a un $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ por la izquierda prescritos, para $\mathbb{F}$ un cuerpo arbitrario, simplemente sustituyendo la condición (6.4) por las condiciones del Lema 6.2.3. Sin embargo, dichas condiciones no son necesarias.

Teorema 6.2.6 *Sea* $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sean* $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ *y* $c_1 \geq \cdots \geq c_m$ *enteros no negativos,* $c_i \leq k_i$, *y para* $i = 1, \ldots, m$ *sean* $\alpha_i(s) = \gamma_i(s)\beta_i(s)$ *polinomios mónicos tales que* $\gamma_i(s)$ *factoriza en* M, $\beta_i(s)$ *factoriza en* $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ *y* $\alpha_1(s) | \cdots | \alpha_m(s)$. *Si existen polinomios mónicos* $\delta_1(s), \ldots, \delta_m(s)$ *tales que* $d(\delta_i(s)) = k_i - c_i, 1 \leq i \leq m$ *y*

$$\beta_1(s) \cdots \beta_k(s) | \,\mathrm{m.c.d.}\{\delta_{i_1}(s) \cdots \delta_{i_k}(s), 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\},$$

$$1 \leq k \leq m-1, \tag{6.6}$$

$$\beta_1(s) \cdots \beta_m(s) = \delta_1(s) \cdots \delta_m(s), \tag{6.7}$$

$$(c_1, \ldots, c_m) \prec (d(\gamma_m(s)), \ldots, d(\gamma_1(s))), \tag{6.8}$$

entonces existe una matriz polinomial $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *con* $k_1, \ldots, k_m$ *como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda,* $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ *como factores invariantes y* $c_1, \ldots, c_m$ *como índices de Wiener–Hopf respecto a* M *por la izquierda.*

Veamos que dichas condiciones no son necesarias. Tomamos $M = \{(s)\}$. Sea la matriz polinomial

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^3(s^2+1)^3 & 0 \\ 0 & s^4(s^2+1) \end{bmatrix}.$$

Sus índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda son los grados de las columnas $k_1 = 9,\ k_2 = 6$. Sus factores invariantes $\alpha_1(s) = s^3(s^2+1)$ y $\alpha_2(s) = s^4(s^2+1)^3$. Además, podemos escribir

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^3 & 0 \\ 0 & s^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s^2+1)^3 & 0 \\ 0 & (s^2+1) \end{bmatrix},$$

por lo tanto los índices de Wiener–Hopf locales respecto a $\pi(s) = s$ por la izquierda son $c_1 = 4$ y $c_2 = 3$. En efecto, se cumplen las condiciones necesarias (6.3), (6.4) y (6.5). Sin embargo, no existen polinomios $\delta_1(s), \delta_2(s)$ tales que $d(\delta_1(s)) = k_1 - c_1 = 5$ y $d(\delta_2(s)) = k_2 - c_2 = 3$ verificando la condición (6.7) siguiente

$$(s^2+1)(s^2+1)^3 = \delta_1(s)\delta_2(s).$$

Ahora estudiamos una versión más simplificada de este problema cuando los factores invariantes no están prescritos. En este caso obtenemos condiciones que serán suficientes bajo la condición de que haya un ideal generado por un polinomio lineal en $\text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Dicha condición se cumple siempre que el cuerpo sea algebraicamente cerrado.

Teorema 6.2.7 *Sea M un subconjunto de* $\text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Supongamos que existen ideales en* $\text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ *generados por polinomios lineales y sea $(s-a)$ uno de ellos. Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $c_1 \geq \cdots \geq c_m$ enteros no negativos. Entonces existe una matriz polinomial $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda y $c_1, \ldots, c_m$ como índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda si y sólo si*

(i) $k_i \geq c_i, \quad 1 \leq i \leq m$, *y*

(ii) Existen polinomios mónicos $\gamma_1(s), \ldots, \gamma_m(s)$, que factorizan en M, tales que $\gamma_1(s)|\cdots|\gamma_m(s)$ satisfaciendo

$$(c_1, \ldots, c_m) \prec (d(\gamma_m(s)), \ldots, d(\gamma_1(s))).$$

Demostración. Supongamos que $c_1, \ldots, c_m$ son los índices de Wiener–Hopf respecto a M de $P(s)$. Por tanto, existen matrices no singulares $P_1(s), P_2(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ tales que $P(s) = P_1(s)P_2(s)$, $\det P_1(s)$ factoriza en M, $\det P_2(s)$ factoriza en $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ y $c_1, \ldots, c_m$ son los índices de Wiener–Hopf globales de $P_1(s)$ por la izquierda. Los factores invariantes de $P_1(s)$ cumplen la condición (ii). La condición (i) se sigue del Lema 4.5.3.

Recíprocamente, por (ii) y el Teorema de Rosenbrock se tiene que existe una matriz $P_1(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda $c_1, \ldots, c_m$ y factores invariantes $\gamma_1(s), \ldots, \gamma_m(s)$. Podemos suponer que la matriz $P_1(s)$ es propia por columnas, si no es así, se puede transformar mediante operaciones elementales por columnas, es decir, postmultiplicándola por matrices unimodulares, en una matriz propia por columnas con los mismos índices de Wiener–Hopf y los mismos factores invariantes que $P_1(s)$. Sea $P_2(s) = \mathrm{Diag}((s-a)^{k_1-c_1}, \ldots, (s-a)^{k_m-c_m})$ la cual es polinomial por (i). Así, la matriz $P(s) = P_1(s)P_2(s)$ propia por columnas, con grado de sus columnas $k_1, \ldots, k_m$ cumple las condiciones deseadas. $\square$

En el caso particular de que el subconjunto M contenga un único ideal maximal, $M = (\pi(s))$, las condiciones son muy sencillas.

Corolario 6.2.8 *Sea $\pi(s) \in \mathbb{F}[s]$ un polinomio mónico irreducible. Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $c_1 \geq \cdots \geq c_m$ enteros no negativos. Entonces existe una matriz polinomial $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda y $c_1, \ldots, c_m$ como índices de Wiener–Hopf locales respecto a $\pi(s)$ por la izquierda si y sólo si*

(i) $k_i \geq c_i, \quad 1 \leq i \leq m$,

(ii) $d(\pi(s)) \mid \sum_{i=1}^{m} c_i$.

Observación 6.2.9 Es claro que si $d(\pi(s)) = 1$, en el resultado anterior tenemos una única condición. Por tanto si $\mathbb{F}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado la condición (i) del Coroloario 6.2.8 es suficiente para asegurar la existencia de una matriz polinomial con índices de Wiener–Hopf globales y locales respecto a un polinomio mónico irreducible prescritos. Ahora bien si $d(\pi(s)) > 1$ la condición (i) no es suficiente. Sea $\pi(s) = s^2 + 1,\ k_1 = 5,\ k_2 = 3,\ c_1 = 3,\ c_2 = 2$. En este caso es imposible encontrar una matriz polinomial $P_1(s)$ con índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda 3,2, y factores invariantes potencias de $\pi(s)$ pues por el Teorema de Rosenbrock $c_1 + c_2 = 5$ debería ser múltiplo de $d(\pi(s)) = 2$.

Sea $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ una matriz polinomial no singular y supongamos que $d(\det(P(s)) = n$. Por la Proposición 1.4.4 existe un par controlable $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ para el cual $P(s)$ es una representación polinomial matricial. Recordamos que los índices de controlabilidad globales de (A, B) son los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda de cualquiera de sus representaciones polinomiales matriciales. Además, en la Proposición 4.3.5 probamos que esta relación es verdad en un sentido local: los índices de controlabilidad de (A, B) respecto a M son los índices de Wiener–Hopf respecto a M de cualquiera de sus representaciones polinomiales matriciales. Teniendo esto en cuenta, podemos dar solución al problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes par la existencia de un par controlable $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{m\times m}$ con factores invariantes para la matriz de estados, índices de controlabilidad globales e índices de controlabilidad respecto a M prescritos.

Teorema 6.2.10 *Sea* $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sean* $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ *y* $c_1 \geq \cdots \geq c_m$ *enteros no negativos y para* $i = 1, \ldots, m$ *sean* $\alpha_i(s) = \gamma_i(s)\beta_i(s)$ *polinomios mónicos tales que* $\gamma_i(s)$ *factoriza en* M, $\beta_i(s)$ *factoriza en* $M' =$

$\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ *y* $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$*. Si existe un par controlable* $(A,B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *con* $k_1,\ldots,k_m$ *como índices de controlabilidad,* $c_1,\ldots,c_m$ *como índices de controlabilidad respecto a* M *y* $\alpha_1(s),\ldots,\alpha_m(s)$ *como factores invariantes, aparte de algunos triviales, de* $sI_n - A$*, entonces se cumplen las condiciones (6.3), (6.4) y (6.5).*

Recíprocamente, si $\mathbb{F}$ *es algebraicamente cerrado y se dan las condiciones (6.3), (6.4) y (6.5) entonces existe un par controlable* $(A,B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *con* $k_1,\ldots,k_m$ *como índices de controlabilidad globales,* $c_1,\ldots,c_m$ *como índices de controlabilidad respecto a* M *y* $\alpha_1(s),\ldots,\alpha_m(s)$ *como factores invariantes, aparte de algunos triviales, de* $sI_n - A$*.*

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata del Teorema 6.2.5. □

Teorema 6.2.11 *Sea* $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$*. Sean* $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ *y* $c_1 \geq \cdots \geq c_m$ *enteros no negativos,* $c_i \leq k_i$*, y para* $i = 1,\ldots,m$ *sean* $\alpha_i(s) = \gamma_i(s)\beta_i(s)$ *polinomios mónicos tales que* $\gamma_i(s)$ *factoriza en* M*,* $\beta_i(s)$ *factoriza en* $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ *y* $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$*. Si existen polinomios mónicos* $\delta_1(s),\ldots,\delta_m(s)$ *tales que* $d(\delta_i(s)) = k_i - c_i, 1 \leq i \leq m$ *satisfaciendo las condiciones (6.6), (6.7) y (6.8), entonces existe un par controlable* $(A,B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *con* $k_1,\ldots,k_m$ *como índices de controlabilidad globales,* $c_1,\ldots,c_m$ *como índices de controlabilidad respecto a* M *y* $\alpha_1(s),\ldots,\alpha_m(s)$ *como factores invariantes, aparte de algunos triviales, de* $sI_n - A$*.*

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata del Teorema 6.2.6. □

Teorema 6.2.12 *Sea* M *un subconjunto de* $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$*. Supongamos que existen ideales en* $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ *generados por polinomios lineales y sea* $(s-a)$ *uno de ellos. Sean* $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ *y* $c_1 \geq \cdots \geq c_m$ *enteros no* *negativos. Entonces existe un par controlable* $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *con* $k_1, \dots, k_m$ *como índices de controlabilidad globales y* $c_1, \dots, c_m$ *como índices de controlabilidad respecto a* M *si y sólo si se cumplen las condiciones* (i) *y* (ii) *del Teorema 6.2.7.*

Demostración. La demostración es consecuencia del Teorema 6.2.7. $\square$

Corolario 6.2.13 *Sea* $\pi(s) \in \mathbb{F}[s]$ *un polinomio mónico. Sean* $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ *y* $c_1 \geq \cdots \geq c_m$ *enteros no negativos. Entonces, existe un par controlable* $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n}\times\mathbb{F}^{n\times m}$ *con* $k_1, \dots, k_m$ *como índices de controlabilidad globales y* $c_1, \dots, c_m$ *como índices de controlabilidad locales respecto a* $\pi(s)$ *si y sólo si se cumplen las condiciones* (i) *y* (ii) *del Teorema 6.2.8.*

Demostración. La demostración es consecuencia del Teorema 6.2.8. $\square$

6.3. Sobre la existencia de sistemas lineales con índices de Hermite prescritos

Ahora, estudiamos el problema similar para los índices de Hermite: Encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una matriz polinomial $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con factores invariantes globales, índices de Hermite globales e índices de Hermite locales prescritos. En este caso damos la solución al problema para cualquier cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$.

Teorema 6.3.1 *Sea* $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sean* $h_1, \dots, h_m$ *y* $h'_1, \dots, h'_m$ *enteros no negativos y para* $i = 1, \dots, m$ *sean* $\alpha_i(s) = \gamma_i(s)\beta_i(s)$ *polinomios mónicos tales que* $\gamma_i(s)$ *factoriza en* M, $\beta_i(s)$ *factoriza en* $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])\setminus M$ *y* $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$. *Existe un matriz polinomial* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *con* $h_1, \dots, h_m$ *como índices de Hermite globales,* $\alpha_1(s), \dots, \alpha_m(s)$ *como factores invariantes globales y* $h'_1, \dots, h'_m$ *como índices de Hermite respecto a* M *si y sólo si*

(a) *existen polinomios mónicos* $\delta'_1(s), \ldots, \delta'_m(s)$ *tales que* $d(\delta'_i(s)) = h'_i, 1 \leq i \leq m$ *y*

$$\gamma_1(s) \cdots \gamma_k(s) | \,\text{m.c.d.}\{\delta'_{i_1}(s) \cdots \delta'_{i_k}(s), 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\},$$
$$1 \leq k \leq m-1, \tag{6.9}$$
$$\gamma_1(s) \cdots \gamma_m(s) = \delta'_1(s) \cdots \delta'_m(s), \tag{6.10}$$

(b) *existen polinomios mónicos* $\delta_1(s), \ldots, \delta_m(s)$ *tales que* $d(\delta_i(s)) = h_i - h'_i, 1 \leq i \leq m$ *y*

$$\beta_1(s) \cdots \beta_k(s) | \,\text{m.c.d.}\{\delta_{i_1}(s) \cdots \delta_{i_k}(s), 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\},$$
$$1 \leq k \leq m-1, \tag{6.11}$$
$$\beta_1(s) \cdots \beta_m(s) = \delta_1(s) \cdots \delta_m(s), \tag{6.12}$$

Demostración. Supongamos que $h_1, \ldots, h_m$ y $h'_1, \ldots, h'_m$ son los índices de Hermite globales y locales respecto a M de $P(s)$. Entonces por la Proposición 3.6.1 $P(s) = P_1(s)Q(s)$ tal que $P_1(s)$ tiene como factores invariantes $\gamma_1(s), \ldots, \gamma_m(s)$ y como índices de Hermite globales $h'_1, \ldots, h'_m$. En consecuencia existe una matriz unimodular $U(s)$ tal que $P_1(s)U(s) = H_1(s)$ es la forma de Hermite de $P_1(s)$, es decir es una matriz triangular inferior, dominante en grado por filas y tal que los grados de los elementos de la diagonal, $(\delta'_1(s), \ldots, \delta'_m(s))$, son $h'_1, \ldots, h'_m$. Por el Lema 6.2.1 se siguen las condiciones (6.9) y (6.10). Por otra parte, por el Corolario 4.4.3 tenemos que $h_1 - h'_1, \ldots, h_m - h'_m$ son los índices de Hermite respecto a $\text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$ de $P(s)$. Entonces, repitiendo el razonamiento anterior se siguen las condiciones (6.11) y (6.12). Recíprocamente, si se dan las condiciones (6.9) y (6.10) por el Lema 6.2.1 existe una matriz triangular, $T'(s)$, con elementos en la diagonal $(\delta'_1(s), \ldots, \delta'_m(s))$ y factores invariantes $\gamma_1(s), \ldots, \gamma_m(s)$. Por las condiciones (6.11) y (6.12) también tenemos que existe otra matriz triangular $T(s)$ con elementos en la diagonal $(\delta_1(s), \ldots, \delta_m(s))$ y factores invariantes $\beta_1(s), \ldots, \beta_m(s)$. La matriz producto $T'(s)T(s)$ es triangular inferior con $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ como factores invariantes globales y $h'_1, \ldots, h'_m$ como índices de Hermite respecto a M. Si dicha matriz no es dominante en grado por filas realizamos transformaciones por columnas que no modifican los elementos de la diagonal. En tal caso la matriz obtenida tiene como índices de Hermite globales los grados de los elementos de la diagonal, es decir, $h_1, \ldots, h_m$. $\square$

Obsérvese que si en el Lema 6.2.1 los polinomios $\alpha_j(s)$ son potencias de un mismo polinomio irreducible $\pi(s)$, esto es, $\alpha_j(s) = \pi(s)^{d_j}$ con $d_1 \leq \cdots \leq d_m$, y los polinomios $\delta_j(s)$ son tales que $d(\delta_j(s)) = a_j$ para $j = 1, \ldots, m$ entonces las condiciones (6.1) y (6.2) son equivalentes a

$$(a_1, \ldots, a_m) \prec (d_m d(\pi(s)), \ldots, d_1 d(\pi(s))),$$

$$d(\pi(s)) \mid a_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Como consecuencia inmediata del Lema 6.2.1 tenemos el siguiente resultado:

Lema 6.3.2 *Sea $\pi(s) \in \mathbb{F}[s]$ un polinomio mónico irreducible. Sean $d_1 \leq \cdots \leq d_m$ y $a_1, \ldots, a_m$ enteros no negativos. Entonces existen m polinomios mónicos $\delta_1(s), \ldots, \delta_m(s)$ tales que $d(\delta_j(s)) = a_j$, $1 \leq j \leq m$, y una matriz polinomial triangular con elementos en la diagonal $(\delta_1(s), \ldots, \delta_m(s))$ y $\pi(s)^{d_1}, \ldots, \pi(s)^{d_m}$ como factores invariantes si y sólo si*

$$(a_1, \ldots, a_m) \prec (d_m d(\pi(s)), \ldots, d_1 d(\pi(s))),$$

$$d(\pi(s)) \mid a_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Así, tenemos que cuando la información local está referida a un polinomio irreducible, las condiciones del Teorema 6.3.1 se reducen a las del lema anterior. Además, como en el caso de los índices de Hermite se satisface una relación de suma entre los índices globales y locales (Teorema 4.4.1), esto nos permite dar una solución al problema planteado cuando prescribimos toda la estructura local de Hermite de una matriz polinomial con respecto a cada polinomio mónico irreducible.

Teorema 6.3.3 *Sean $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ polinomios mónicos tales que $\alpha_j(s) = \pi_1(s)^{d_{1j}}\pi_2(s)^{d_{2j}}\cdots\pi_t(s)^{d_{tj}}$, $1 \leq j \leq m$, con $\pi_i(s)$ diferentes polinomios mónicos irreducibles, $1 \leq i \leq t$. Sean $h_1,\ldots,h_m$ y $h_{i1},\ldots,h_{im}$ enteros no negativos, $1 \leq i \leq t$. Entonces existe una matriz polinomial $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $h_1,\ldots,h_m$ como índices de Hermite globales, $\alpha_1(s),\ldots,\alpha_m(s)$ como factores invariantes y $h_{i1},\ldots,h_{im}$ como índices de Hermite locales respecto a $\pi_i(s)$, $i = 1,\ldots,t$, si y sólo si*

$$h_j = \sum_{i=1}^{t} h_{ij}, \quad 1 \leq j \leq m, \tag{6.13}$$

$$(h_{i1},\ldots,h_{im}) \prec (d_{im}d(\pi_i(s)),\ldots,d_{i1}d(\pi_i(s))), \quad 1 \leq i \leq t, \tag{6.14}$$

$$d(\pi_i(s)) \mid h_{ij}, \quad 1 \leq i \leq t, \quad 1 \leq j \leq m. \tag{6.15}$$

Demostración. La condición (6.13) es una consecuencia del Teorema 4.4.1. Dado que $h_{i1},\ldots,h_{im}$ son los índices de Hermite locales respecto a $\pi_i(s)$ de $P(s)$, para cada $1 \leq i \leq t$, existen matrices polinomiales no singulares $P_i(s), \overline{P}_i(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $P(s) = P_i(s)\overline{P}_i(s)$ tales que $P_i(s)$ tiene $\pi_i(s)^{d_{i1}},\ldots,\pi_i(s)^{d_{im}}$ como factores invariantes y los factores invariantes de $\overline{P}_i(s)$ son relativamente primos con $\pi_i(s)$. Además, los índices de Hermite globales de $P_i(s)$ son $h_{i1},\ldots,h_{im}$. La matriz $P_i(s)$ es equivalente por la derecha a su forma normal de Hermite. Entonces existe una matriz unimodular $U_i(s)$ tal que

$$P_i(s)U_i(s) = \begin{bmatrix} \pi_i(s)^{r_{i1}} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \pi_i(s)^{r_{i2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \pi_i(s)^{r_{im}} \end{bmatrix}$$

donde los grados de los elementos de la diagonal son $h_{ij} = d(\pi_i(s)^{r_{ij}}), 1 \leq j \leq m$, y los factores invariantes $\pi_i(s)^{d_{i1}}, \ldots, \pi_i(s)^{d_{im}}$. Por el Lema 6.3.2,

$$(h_{i1}, \ldots, h_{im}) \prec (d_{im}d(\pi_i(s)), \ldots, d_{i1}d(\pi_i(s))),$$

$$d(\pi_i(s)) \mid h_{ij}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Recíprocamente, por (6.14), (6.15) y el Lema 6.3.2, para cada $1 \leq i \leq t$, existe una matriz polinomial triangular

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} \delta_{i1}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ * & \delta_{i2}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \delta_{im}(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$$

con $d(\delta_{i1}(s)) = h_{i1}, \ldots, d(\delta_{im}(s)) = h_{im}$ y $\pi_i(s)^{d_{i1}}, \ldots, \pi_i(s)^{d_{im}}$ sus factores invariantes. Entonces, la matriz triangular

$$P(s) = P_1(s)P_2(s)\ldots P_t(s) = \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^t \delta_{i1}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ * & \prod_{i=1}^t \delta_{i2}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \prod_{i=1}^t \delta_{im}(s) \end{bmatrix},$$

tiene $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ como factores invariantes. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $P(s)$ es dominante en grado por filas. En caso contrario realizaríamos transformaciones elementales por columnas que en ningún caso modificarían ni los elementos de la diagonal ni los factores invariantes. Por tanto, la matriz $P(s)$ tiene como índices de Hermite globales los grados de los elementos de la diagonal, $\sum_{i=1}^t h_{ij}, 1 \leq j \leq m$, que por la condición (6.13) son $h_1, \ldots, h_m$. Además, los índices de Hermite locales de $P(s)$ respecto a $\pi_1(s)$ son los índices de Hermite globales de $P_1(s)$, esto es, $h_{11}, \ldots, h_{1m}$. Ahora bien, de la demostración del Teorema 4.4.1, se tiene que $P(s) = H_i(s)\overline{H}_i(s)$ con $H_i(s)$ en forma normal de Hermite y con elementos en la diagonal $\delta_{i1}(s), \ldots, \delta_{im}(s)$. De ahí que $h_{i1}, \ldots, h_{im}$ son los índices de Hermite locales de $P(s)$ respecto a $\pi_i(s)$. □

Al igual que en el caso de los índices de Wiener–Hopf, el problema estudiado en el teorema anterior es mucho más sencillo si no se prescriben los factores invariantes. En este caso, las condiciones (6.13) y (6.15) son necesarias y suficientes para la existencia de un matriz polinomial $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con estructura de Hermite global y local prescrita.

Corolario 6.3.4 *Sean $\pi_i(s)$ polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{F}[s]$, $1 \leq i \leq t$. Sean $h_1, \ldots, h_m$ y $h_{i1}, \ldots, h_{im}$ enteros no negativos, $1 \leq i \leq t$. Entonces existe una matriz polinomial $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $h_1, \ldots, h_m$ como índices de Hermite globales y $h_{i1}, \ldots, h_{im}$ como índices de Hermite locales respecto a $\pi_i(s)$, $i = 1, \ldots, t$, si y sólo si*

$$h_j = \sum_{i=1}^{t} h_{ij}, \quad 1 \leq j \leq m, \tag{6.16}$$

$$d(\pi_i(s)) \mid h_{ij}, \quad 1 \leq i \leq t, \quad 1 \leq j \leq m. \tag{6.17}$$

Demostración. La necesidad se sigue del Teorema 6.3.3. Recíprocamente, por la condición (6.17) tenemos que existen enteros a_{ij}, tales que $h_{ij} = a_{ij}d(\pi_i(s))$, $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq m$. Así, la matriz

$$P(s) = \operatorname{Diag}\left(\prod_{i=1}^{t} \pi_i(s)^{a_{i1}}, \ldots, \prod_{i=1}^{t} \pi_i(s)^{a_{im}}\right)$$

tiene como índices de Hermite globales los grados de los elementos de la diagonal que por la condición (6.16) son $h_1, \ldots, h_m$ y como índices de Hermite locales respecto a $\pi_i(s)$, $h_{i1}, \ldots, h_{im}$, $1 \leq i \leq t$. □

Ahora, teniendo en cuenta que los índices de Hermite globales de los sistemas lineales coinciden con los índices de Hermite de sus representaciones polinomiales matriciales y que esta misma relación se da en el caso local (ver Proposición 4.3.5) podemos dar los resultados equivalentes para sistemas controlables.

Teorema 6.3.5 *Sean $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ polinomios mónicos tales que $\alpha_j(s) = \pi_1(s)^{d_{1j}}\pi_2(s)^{d_{2j}}\ldots\pi_t(s)^{d_{tj}}$, $1 \leq j \leq m$, con $\pi_i(s)$ deferentes polinomios mónicos irreducibles, $1 \leq i \leq t$. Sean $h_1,\ldots,h_m$ y $h_{i1},\ldots,h_{im}$ enteros no negativos, $1 \leq i \leq t$. Entonces existe un par controlable $(A,B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ con $h_1,\ldots,h_m$ como índices de Hermite globales, $h_{i1},\ldots,h_{im}$ como índices de Hermite locales respecto a $\pi_i(s)$, $i = 1,\ldots,t$, y $\alpha_1(s),\ldots,\alpha_m(s)$ como factores invariantes, aparte de algunos triviales, de $sI_n - A$ si y sólo si se cumplen las condiciones (6.13), (6.14) y (6.15).*

Corolario 6.3.6 *Sean $\pi_i(s)$ polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{F}[s]$, $1 \leq i \leq t$. Sean $h_1,\ldots,h_m$ y $h_{i1},\ldots,h_{im}$ enteros no negativos, $1 \leq i \leq t$. Entonces existe un par controlable $(A,B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ con $h_1,\ldots,h_m$ como índices de Hermite globales y $h_{i1},\ldots,h_{im}$ como índices de Hermite locales respecto a $\pi_i(s)$ $i = 1,\ldots,t$, si y sólo si se cumplen las condiciones (6.16) y (6.17).*

6.4. Consecuencias

Recordemos que la estructura local respecto a un subconjunto cualquiera $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$ de una matriz polinomial $P(s)$ está determinada por la estructura global de cualquier factor por la izquierda, $P_1(s)$, tal que $P(s) = P_1(s)Q(s)$, $\det P_1(s)$ factoriza en M y $\det Q(s)$ factoriza en $M' = \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$. Son conocidos algunos resultados globales donde sabemos bajo que condiciones existe una matriz polinomial no singular con algunos de los invariantes globales prescritos. Dichos resultados pueden ser aplicados a la matriz polinomial factor por la izquierda de $P(s)$ satisfaciendo las condiciones anteriores. Por lo tanto, en esta sección recopilamos algunos resultados locales que se obtienen, de manera directa, aplicando los resultados globales a la matriz $P_1(s)$.

En [58] se estudia la relación entre algunos de los invariantes globales para la semejanza de sistemas controlables citados anteriormente. Por un lado se estudia la relación entre los índices de Hermite y los factores invariantes y por otro lado entre los índices de Hermite y los índices de controlabilidad. En consecuencia tenemos los siguientes resultados:

Corolario 6.4.1 *Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $h_1, \dots, h_m$ enteros no negativos y $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ polinomios mónicos que factorizan en M. Si existe una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $\alpha_1(s), \dots, \alpha_m(s)$ como factores invariantes respecto a M y $h_1, \dots, h_m$ como índices de Hermite respecto a M entonces*

$$(h_1, \dots, h_m) \prec (d(\alpha_m(s)), \dots, d(\alpha_1(s))).$$

Se tiene el recíproco si $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado.

Corolario 6.4.2 *Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $h_1, \dots, h_m$ enteros no negativos, respectivamente. Si existe una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $k_1, \dots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda y $h_1, \dots, h_m$ como índices de Hermite respecto a M entonces*

$$(k_1, \dots, k_m) \prec (h_1, \dots, h_m).$$

Se tiene el recíproco si los índices $h_1, \dots, h_m$ están en orden no creciente.

El Teorema de estructura de Rosenbrock (Teorema 2.1.1) nos da la relación entre la estructura finita (factores invariantes globales) y la estructura Wiener–Hopf (índices de Wiener–Hopf globales) de matrices polinomiales no singulares. Como consecuencia tenemos el siguiente resultado local al que llamaremos *Teorema de Rosenbrock respecto a M*. El caso particular $M = (\pi(s))$, con $\pi(s)$ un polinomio mónico irreducible, está dado en el Capítulo 2 (Teorema 2.4.4).

Corolario 6.4.3 *Sea $M \subseteq \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ enteros no negativos y $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ polinomios mónicos que factorizan en M. Entonces existe una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ como factores invariantes respecto a M y los enteros $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda si y sólo si*

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (d(\alpha_m(s)), \ldots, d(\alpha_1(s))).$$

Este mismo resultado se tiene para los índices de Wiener–Hopf respecto a M por la derecha. Además, del resultado global [1, Teorema 5.2] se deduce el siguiente resultado.

Corolario 6.4.4 *Sea $M \subseteq \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$, $l_1 \geq \cdots \geq l_m$ enteros no negativos y $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ polinomios mónicos que factorizan en M. Entonces existe una matriz polinomial no singular $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ con $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ como factores invariantes respecto a M, $k_1, \ldots, k_m$ como índices de Wiener–Hopf respecto a M por la izquierda y $l_1, \ldots, l_m$ como índices de Wiener–Hopf respecto a M por la derecha si y sólo si*

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (d(\alpha_m(s)), \ldots, d(\alpha_1(s))),$$

$$(l_1, \ldots, l_m) \prec (d(\alpha_m(s)), \ldots, d(\alpha_1(s))).$$

En [7] los autores estudian la existencia de sistemas lineales con ciertos invariantes globales para la semejanza prescritos. Concretamente, de los resultados principales de este trabajo [7, Teorema 2.11, Corolario 2.12] se deducen los siguientes:

Corolario 6.4.5 *Sea* $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sean* $k_1 \geq \cdots \geq k_m > 0$, $h_1 \geq \cdots \geq h_m \geq 0$ *enteros no negativos y* $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ *polinomios mónicos que factorizan en* M. *Entonces existe una matriz polinomial no singular* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *con* $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ *como factores invariantes respecto a* M, $k_1, \ldots, k_m$ *como índices de Wiener–Hopf respecto a* M *por la izquierda y* $h_1, \ldots, h_m$ *como índices de Hermite respecto a* M *si y sólo si existen* m *polinomios mónicos* $\beta_1(s), \ldots, \beta_m(s)$ *tales que* $d(\beta_i(s)) = h_i$, $1 \leq i \leq m$ *y se satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\alpha_1(s)\cdots\alpha_k(s)|\, \text{m.c.d.}\{\beta_{i_1}(s)\cdots\beta_{i_k}(s) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\},$$

$$1 \leq k \leq m-1,$$

$$\alpha_1(s)\cdots\alpha_m(s) = \beta_1(s)\cdots\beta_m(s),$$

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (h_1, \ldots, h_m).$$

Corolario 6.4.6 *Sea* $\mathbb{F}$ *un cuerpo algebraicamente cerrado y sea* $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. *Sean* $k_1 \geq \cdots \geq k_m > 0$, $h_1 \geq \cdots \geq h_m \geq 0$ *enteros no negativos y* $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_m(s)$ *polinomios mónicos que factorizan en* M. *Entonces existe una matriz polinomial no singular* $P(s) \in \mathbb{F}[s]^{m\times m}$ *con* $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_m(s)$ *como factores invariantes respecto a* M, *los enteros* $k_1, \ldots, k_m$ *como índices de Wiener–Hopf respecto a* M *por la izquierda y* $h_1, \ldots, h_m$ *como índices de Hermite respecto a* M *si y sólo si*

$$(h_1, \ldots, h_m) \prec (d(\alpha_m(s)), \ldots, d(\alpha_1(s))),$$

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (h_1, \ldots, h_m).$$

Como aplicación del resultado dado en la Proposición 4.3.5 podemos reescribir los resultados anteriores en términos de pares de matrices y obtener en consecuencia las condiciones necesarias y suficientes para que exista un par de matrices controlable con ciertos invariantes respecto a M para la semejanza prescritos.

Necesitamos la siguiente definición:

Definición 6.4.7 Sea $M \subseteq \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$, $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{n_1\times n_1} \times \mathbb{F}^{n_1\times m}$ y $(A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n_2\times n_2} \times \mathbb{F}^{n_2\times m}$ pares controlables tales que

(i) (A, B) es semejante a $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$,

(ii) $\det(sI_{n_1} - A_1)$ factoriza en M, y

(iii) $\det(sI_{n_2} - A_2)$ factoriza en $M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus M$.

Entonces a los factores invariantes globales de A_1 les llamamos *factores invariantes de A respecto a M*.

Obsérvese que gracias al Teorema 4.3.4, sabemos que bajo las condiciones de la definición anterior una representación polinomial matricial de un par $\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$ es de la forma $P(s) = P_1(s)Q_2(s)$ con $P_1(s)$ representación polinomial matricial de (A_1, B_1) y tal que $\det Q_2(s)$ factoriza en M'. Por lo tanto se deduce que los factores invariantes de A respecto a M no triviales coinciden con los factores invariantes respecto a M de cualquier representación polinomial matricial del par (A, B).

Corolario 6.4.8 *Sea $M \subseteq \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $h_1, \dots, h_m$ enteros no negativos y $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_{n_1}(s)$, $n_1 \geq m$, polinomios mónicos que factorizan en M. Si existe un par controlable $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ con $\alpha_1(s), \dots, \alpha_{n_1}(s)$ como factores invariantes respecto a M de la matriz de estados y $h_1, \dots, h_m$ como índices de Hermite respecto a M entonces*

$$\alpha_i(s) = 1, \; 1 \leq i \leq n_1 - m,$$

$$(h_1, \dots, h_m) \prec (d(\alpha_{n_1}(s)), \dots, d(\alpha_{n_1-m+1}(s))).$$

Se tiene el recíproco si $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado.

Corolario 6.4.9 *Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ y $h_1, \ldots, h_m$ enteros no negativos, respectivamente. Si existe un par controlable $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ con $k_1, \ldots, k_m$ como índices de controlabilidad respecto a M y $h_1, \ldots, h_m$ como índices de Hermite respecto a M entonces*

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (h_1, \ldots, h_m).$$

Se tiene el recíproco si los índices $h_1, \ldots, h_m$ están en orden no creciente.

Corolario 6.4.10 *Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m$ enteros no negativos y $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_{n_1}(s)$, $n_1 \geq m$, polinomios mónicos que factorizan en M. Entonces existe un par controlable $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ con $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_{n_1}(s)$ como factores invariantes de A respecto a M y $k_1, \ldots, k_m$ como índices de controlabilidad respecto a M si y sólo si*

$$\alpha_i(s) = 1,\ 1 \leq i \leq n_1 - m,$$

$$(k_1, \ldots, k_m) \prec (d(\alpha_{n_1}(s)), \ldots, d(\alpha_{n_1-m+1}(s))).$$

Corolario 6.4.11 *Sea $M \subseteq \mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m > 0$ y $h_1 \geq \cdots \geq h_m \geq 0$ enteros no negativos y $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_{n_1}(s)$, $n_1 \geq m$, polinomios mónicos que factorizan en M. Entonces existe un par controlable $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ con $\alpha_1(s), \ldots, \alpha_{n_1}(s)$ como factores invariantes de A respecto a M, $k_1, \ldots, k_m$ como índices de controlabilidad respecto a M y $h_1, \ldots, h_m$ como índices de Hermite respecto a M si y sólo si existen m polinomios mónicos $\beta_1(s), \ldots, \beta_m(s)$ tales que $d(\beta_i(s)) = h_i$, $1 \leq i \leq m$ y se satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\alpha_i = 1,\ 1 \leq i \leq n_1 - m,$$

$$\alpha_{n_1-m+1}(s) \cdots \alpha_{n_1-m+k}(s) | \, \mathrm{m.c.d.}\{\beta_{i_1}(s) \cdots \beta_{i_k}(s) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\},$$
$$1 \leq k \leq m-1,$$

$$\alpha_1(s)\cdots\alpha_{n_1}(s) = \beta_1(s)\cdots\beta_m(s),$$

$$(k_1,\ldots,k_m) \prec (h_1,\ldots,h_m).$$

Corolario 6.4.12 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $M \subseteq \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sean $k_1 \geq \cdots \geq k_m > 0$ y $h_1 \geq \cdots \geq h_m \geq 0$ enteros no negativos y $\alpha_1(s)|\cdots|\alpha_{n_1}(s)$, $n_1 \geq m$, polinomios mónicos que factorizan en M. Entonces existe un par controlable $(A,B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ con $\alpha_1(s),\ldots,\alpha_{n_1}(s)$ como factores invariantes de A respecto a M, $k_1,\ldots,k_m$ como índices de controlabilidad respecto a M y $h_1,\ldots,h_m$ como índices de Hermite respecto a M si y sólo si*

$$\alpha_i = 1,\ 1 \leq i \leq n_1 - m,$$

$$(h_1,\ldots,h_m) \prec (d(\alpha_{n_1}(s)),\ldots,d(\alpha_{n_1-m+1}(s))),$$

$$(k_1,\ldots,k_m) \prec (h_1,\ldots,h_m).$$

Capítulo 7

Problemas abiertos

Presentamos a continuación algunos problemas en el marco de trabajo de esta memoria que hasta donde sabemos, están sin resolver.

Problema 1

Un resultado donde se desarrollan métodos algebraico-geométricos aplicados a la teoría de sistemas controlables consiste en asociar a cada sistema de control

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

un fibrado vectorial, $E_{A,B}$, sobre la recta proyectiva ([45, Sección 4]). Se demuestra que los sistemas feedback equivalentes determinan isomorfismos de fibrados vectoriales. En otras palabras, $E_{A,B}$ es isomorfo a $E_{A',B'}$ si y sólo si (A, B) es equivalente por feedback a (A', B'). En dicha prueba se hace uso de la forma canónica para la equivalencia por feedback (Lema 1.1.6), la cual induce una descomposición de los fibrados vectoriales $E_{A,B}$ como suma directa de fibrados lineales (Teorema de Grotendieck, ver también [26], [37]). Como tal descomposición es única (salvo el orden) se tiene que los invariantes de feedback, es decir los índices de controlabilidad, son los invariantes de Grotendieck.

Por otra parte, sabemos que los índices de controlabilidad son los índices de Wiener–Hopf por la izquierda de una representación polinomial del par (A, B). Por lo tanto, estos últimos también son los invariantes de Grotendieck. Una prueba de este hecho se encuentra en [26]. Concretamente, para $\mathbb{F}$ un cuerpo arbitrario, se demuestra que las clases de isomorfismos de fibrados vectoriales de dimensión m definidos sobre la recta proyectiva están caracterizados por clases de equivalencia entre matrices $A(s, s^{-1})$ con elementos en $\mathbb{F}[s, s^{-1}]$ y $\det A(s, s^{-1}) = s^d$, $d \in \mathbb{Z}$. La relación de equivalencia es la siguiente: $A(s, s^{-1})$ está relacionada con $A'(s, s^{-1})$ si existen matrices $U(s)$ y $V(s^{-1})$ invertibles en $\mathbb{F}[s]$ y $\mathbb{F}[s^{-1}]$ tales que

$$A'(s, s^{-1}) = V(s^{-1})A(s, s^{-1})U(s). \tag{7.1}$$

Analizamos con más detalle el anillo $\mathbb{F}[s, s^{-1}]$. En general, sea $\pi(s) = s - s_0$, $s_0 \in \mathbb{F}$, un polinomio mónico irreducible. El anillo local que obtenemos mediante el llamado proceso de localización en $\pi(s)$ (Ejemplo (2), Sección 1.2.3), el cual denotamos

$$\mathbb{F}_{\pi^-}(s) = \left\{ \frac{p(s)}{\pi(s)^n} : p(s) \in \mathbb{F}[s], n \geq 0 \right\},$$

es el anillo de las funciones regulares del abierto básico del espacio afín de dimensión 1 ([33], p. 67), $D(\pi(s)) = D(s - s_0) = \{s \in \mathbb{A}^1 : s - s_0 \neq 0\} = \mathbb{A}^1 \setminus \{s_0\}$. Es decir,

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^1 \setminus \{s_0\}) = \mathbb{F}_{\pi^-}(s) = \mathbb{F}_{M'}(s)$$

para $M' = \operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus (\pi(s))$. Se tiene que, ([52], p. 268), las matrices $U_{M'}(s)$ invertibles en $\mathbb{F}_{M'}(s)$, es decir aquellas cuyo determinante es una potencia de $\pi(s)$, $\det U_{M'}(s) = \pi(s)^d, d \in \mathbb{Z}$, caracterizan los isomorfismos de fibrados producto. En particular cuando $\pi(s) = s$

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) = \mathbb{F}_{\operatorname{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus (s)}(s) = \mathbb{F}[s, s^{-1}].$$

Sean $M = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y $M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus \{(s)\}$, tales que $M \cup M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ y $M \cap M' = \text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus \{(s)\}$. Se tiene que

- $\det A(s, s^{-1}) = s^d$, $d \in \mathbb{Z}$ es equivalente a que $A(s, s^{-1})$ no tiene polos ni ceros en $M \cap M' = M'$.
- Invertible en $\mathbb{F}[s]$ es equivalente a invertible en $\mathbb{F}_M(s)$ con $M = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$.
- Invertible en $\mathbb{F}[s^{-1}]$ es equivalente a invertible en $\mathbb{F}_{M'}(s) \cap \mathbb{F}_{pr}(s)$.

Por lo tanto, la relación de equivalencia (7.1), entre matrices $A(s, s^{-1})$, $A'(s, s^{-1})$ sin polos ni ceros en $M \cap M'$, es un caso particular de la relación de equivalencia Wiener–Hopf con respecto a (M, M') por la izquierda definida en el Capítulo 3 de esta memoria. Se trata de la equivalencia Wiener–Hopf con respecto a $(\text{Specm}(\mathbb{F}[s]), \text{Specm}(\mathbb{F}[s]) \setminus \{(s)\})$ por la izquierda, tal que $M \setminus M' = \{(s)\}$ contiene un polinomio de grado 1, $\pi(s) = s$. Así, el resultado de la Proposición 3.1 en [26], es un caso particular del Teorema 3.3.7.

En conclusión, los fibrados vectoriales de dimensión m sobre la recta proyectiva están clasificados por m tuplas de enteros que son los índices de Wiener-Hopf locales con respecto a $M = \text{Specm}(\mathbb{F}[s])$ por la izquierda, esto es, por los índices de Wiener–Hopf en el infinito por la izquierda. Conocida la interpretación de los índices de Wiener–Hopf globales por la izquierda en la teoría de los fibrados vectoriales nos gustaría saber

¿Qué significa el Teorema de Rosenbrock en el contexto de los fibrados vectoriales sobre la recta proyectiva? ¿Qué son los índices de Wiener–Hopf locales en este contexto?

Problema 2

Dado un sistema lineal invariante en el tiempo (1.6), representado por la terna (A, B, C), con $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{F}^{p \times m}$, sabemos que la matriz polinomial de sistema es $P(s) = \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$ y su matriz de transferencia $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$. Por un lado, cuando el sistema es minimal, es decir, (A, B) es controlable y (A, C) es observable, conocemos la relación entre la forma de Smith–McMillan finita de la matriz de transferencia del sistema y de la matriz polinomial de sistema (Lema 1.1.4). Más concretamente, si $\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\epsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \ldots, \frac{\epsilon_r(s)}{\psi_r(s)}$ son las funciones racionales invariantes de $G(s)$, los numeradores $\epsilon_1(s) \mid \epsilon_2(s) \mid \cdots \mid \epsilon_r(s)$ (salvo factores invariantes triviales) son los factores invariantes de $P(s)$. Y, recíprocamente, a partir de cualquier realización minimal (A, B, C) de $G(s)$ podemos determinar la estructura finita de $G(s)$ pues los denominadores están determinados por los factores invariantes de $sI_n - A$ y sus numeradores por los factores invariantes de la matriz polinomial del sistema. Por otro lado, para la estructura en el infinito tenemos el mismo resultado, es decir, conocemos la relación entre la forma de Smith–McMillan en el infinito de la matriz de transferencia del sistema y la de la matriz polinomial del sistema. En efecto, en [2, Lema 3.2] se demuestra que $\begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} sI_n & 0 \\ 0 & G(s) \end{bmatrix}$ son equivalentes en el infinito. Por lo tanto, si $s^{q_1}, \ldots, s^{q_r}$ son las funciones racionales invariantes en el infinito de $G(s)$, $0 \geq q_1 \geq \cdots \geq q_r$, $r = \operatorname{rang} G(s)$, entonces $s, \ldots, s, s^{q_1}, \ldots, s^{q_r}$ son las funciones invariantes en el infinito de $P(s)$. Recíprocamente, conocemos los factores invariantes en el infinito de $G(s)$ a partir de la estructura en el infinito de cualquier realización de $G(s)$. Ahora bien, en gran parte de esta memoria se ha hablado, además, de la estructura Wiener–Hopf. Por lo tanto, nos gustaría conocer la relación entre los índices de Wiener–Hopf de la matriz de transferencia de un sistema y su matriz polinomial de sistema. En otras palabras, nos gustaría:

Determinar la estructura Wiener–Hopf de una matriz racional en función de cualquiera de sus realizaciones.

Problema 3

La estructura en el infinito de la matriz polinomial de un sistema de tipo (1.2), $P(s) = \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}$ esta determinada completamente (salvo unos) por su estructura de ceros en el infinito. En efecto, recordamos que para matrices polinomiales, $\sum_{i=1}^{j} q_i$ es el máximo grado entre los grados de todos los menores de orden j de la matriz polinomial, $j = 1, \ldots, r$, con r el rango de dicha matriz polinomial (ver, Capítulo 1). Por lo tanto, $P(s)$ es una matriz polinomial con n polos en el infinito cada uno de orden 1 y $r - n$ ceros en el infinito. Así que la estructura de ceros en el infinito determina completamente la estructura en el infinito de las matrices polinomiales de sistema.

Pensemos ahora en la matriz polinomial de un sistema como un haz de matrices. Se llaman divisores elementales infinitos de un haz $H(s) = sE - F$ a los divisores elementales en 0 de la matriz polinomial $sH(1/s)$. Si el rango de $H(s)$ como matriz polinomial es r y $e_1, \ldots, e_r$ son los exponentes de sus divisores elementales en el infinito entonces $q_1 = 1 - e_1, \ldots, q_r = 1 - e_r$ son sus órdenes invariantes en el infinito. En general dada una matriz polinomial de grado distinto de uno, la relación entre sus divisores elementales infinitos y su estructura en el infinito esta dada en [27, Teorema 1]. Sea $\mathcal{P}'(p, m)$ el conjunto de haces de matrices $(r+p) \times (r+m)$, donde el entero r es variable y $r > \max(-p, -m)$. En [48] se define la siguiente relación de equivalencia completa para haces de matrices: Dos haces de matrices $H_1(s) = sE_1 - F_1$, $H_2(s) = sE_2 - F_2$ en $\mathcal{P}'(p, m)$ se dice que son *completamente equivalentes* si existen matrices de constantes M y N tales que

$$MH_1(s) = H_2(s)N$$

donde

a) $H_2(s)$ y M son coprimas por la izquierda,

b) N y $H_1(s)$ son coprimas por la derecha y

c) $\left[\begin{array}{cc} H_2(s) & M \end{array}\right]$ y $\left[\begin{array}{c} H_1(s) \\ -N \end{array}\right]$ no tienen ceros en el infinito.

En el caso particular de haces de matrices regulares tenemos que dos haces de matrices son completamente equivalentes si y sólo si tienen la misma estructura finita (divisores elementales finitos) y la misma estructura de ceros en el infinito (divisores elementales infinitos no triviales).

Ahora bien el haz del sistema representado por la matriz polinomial del sistema no tiene porqué ser regular. En un contexto más amplio podemos pensar en las matrices polinomiales de sistemas como matrices en $\mathcal{P}(p,m)$ donde $\mathcal{P}(p,m)$ denota el conjunto de matrices polinomiales $(r+p)\times(r+m)$ donde p,m son enteros positivos fijos pero r es variable, $r > \text{máx}(-p,-m)$. Observemos que $\mathcal{P}'(p,m) \subset \mathcal{P}(p,m)$. En $\mathcal{P}(p,m)$ se define una relación de equivalencia que generaliza a la anterior: Dadas dos matrices polinomiales $P_1(s), P_2(s)$ en $\mathcal{P}(p,m)$ se dice que son *completamente equivalentes* si existen matrices $M(s)$ y $N(s)$ tales que

$$M(s)P_1(s) = P_2(s)N(s)$$

donde las matrices $[M(s)\ P_2(s)]$ y $\left[\begin{array}{c} P_1(s) \\ -N(s) \end{array}\right]$ cumplen las siguientes condiciones:

a) Tienen rango completo,

b) No tienen ceros finitos ni ceros en el infinito y

c) Verifican las siguientes condiciones sobre el grado de McMillan

$$\delta([M(s)\ P_2(s)]) = \delta(P_2(s)),\ \ \delta(\left[\begin{array}{c} P_1(s) \\ -N(s) \end{array}\right]) = \delta(P_1(s)).$$

La importancia de esta relación de equivalencia es que si dos matrices $P_1(s)$, $P_2(s)$ en $\mathcal{P}(p,m)$ son completamente equivalentes entonces tienen la misma estructura finita y la misma estructura infinita de ceros [28].

Por otra parte sean $G_i(s)$, $i = 1, 2$, las matrices de transferencia de sistemas de orden mínimo representados por su matriz polinomial $P_i(s) = \begin{bmatrix} sI_{n_i} - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}$ donde n_1 puede ser distinto de n_2. Si las matrices $G_1(s)$ y $G_2(s)$ tienen la misma estructura finita e infinita entonces las matrices polinomiales de sistema tienen la misma estructura finita y la misma estructura infinita determinada en este caso por los ceros en el infinito. Como acabamos de decir, conocemos una relación de equivalencia en el conjunto de las matrices polinomiales de sistemas, como elementos de $\mathcal{P}(p, m)$, que mantiene invariantes los divisores elementales finitos e infinitos no triviales. Sin embargo no conocemos una relación de equivalencia entre las matrices de transferencia que mantenga invariantes su estructura finita e infinita de ceros. Las matrices de transferencia son matrices racionales propias, en consecuencia sus órdenes invariantes en el infinito son enteros no positivos (ver Capítulo 2). Por lo tanto, la estructura de ceros en el infinito determina completamente (salvo unos) la estructura en el infinito de dicha matriz. Por tanto, queremos hacer un estudio similar al hecho para las matrices polinomiales de sistema pero ahora en el contexto de las matrices racionales propias. Sean $G_1(s)$ y $G_2(s)$ las matrices de transferencia de sistemas con matrices polinomiales de sistema $P_1(s)$, $P_2(s)$. Planteamos el siguiente problema:

Definir una relación de equivalencia entre matrices racionales propias cuyos invariantes sean los divisores elementales finitos e infinitos.

Otro posible problema, del cual no hemos podido reunir mucha información, pero que generalizaría a los anteriores sería definir relaciones de equivalencia que:

- para matrices polinomiales conserve la estructura de ceros finitos y la estructura de ceros y polos en el infinito,

- para matrices racionales conserve la estructura de ceros y polos finitos y la estructura de ceros y polos en el infinito.

Problema 4

En el Capítulo 5 de esta memoria hemos estudiado el concepto de par nulo por la izquierda de una matriz polinomial no singular. Este mismo concepto está también definido para matrices racionales no singulares en [20, Capítulo XI], el cual a su vez se define en términos de par polo por la izquierda de una matriz racional.

Sea γ un contorno en $\mathbb{C}$ con dominio interior Ω y sea $G(s)$ una matriz racional sin polos en γ. Un par $(A, B) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ controlable es un *par polo de G(s) con respecto a* Ω *por la izquierda* si

i) A tiene todos sus valores propios en Ω, y

ii) existe $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que (A, C) es observable y $G(s) - C(sI_n - A)^{-1}B$ no tiene polos en Ω.

Se deduce de la propia definición que los valores propios de A son los polos de la matriz $G(s)$ en Ω. En el caso de que Ω sea todo el plano complejo le llamamos *par polo global de* $G(s)$ *por la izquierda.*

Se llama *par nulo de* $G(s)$ *con respecto a* Ω *por la izquierda* a un par polo de $G(s)^{-1}$ con respecto a Ω por la izquierda. Se tiene que si (A, B) es un par nulo de $G(s)$ los valores propios de A son los polos de la matriz $G(s)^{-1}$ en Ω, por lo tanto son los ceros de $G(s)$ en Ω. Si $\Omega = \mathbb{C}$ le llamamos *par nulo global de* $G(s)$ *por la izquierda.*

En [20, Sección XI.2, Capítulo XI] se resuelve el siguiente problema de interpolación homogéneo en un sentido global: Sean $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times m}$ pares controlables tales que A_1 y A_2 no tienen valores propios comunes. Se dan condiciones necesarias y suficientes para que exista una matriz $G(s) \in \mathbb{C}_{pr}(s)^{m\times m}$, bipropia, tal que (A_1, B_1) sea un par polo global de $G(s)$ por la izquierda y (A_2, B_2) sea un par nulo global de $G(s)$ por la izquierda. En este problema los polos de la matriz $G(s)$ son los ceros de $sI_n - A_1$ y los ceros de $G(s)$ son los ceros de $sI_n - A_2$.

Basándonos en las mismas ideas ya mostradas a lo largo de esta memoria podemos definir los conceptos de par polo y par nulo de una matriz racional por la izquierda en un cuerpo $\mathbb{F}$ arbitrario como sigue:

- Sea M un subconjunto de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sea $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ un par controlable tal que $\det(sI_n - A)$ factoriza en M. Diremos que (A, B) es un par polo de una matriz racional $G(s) \in \mathbb{F}^{m\times m}$ con respecto a M por la izquierda si existe $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$ tal que (A, C) es observable y $G(s) - C(sI_n - A)^{-1}B \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$.
- Sea M un subconjunto de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$. Sea $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ un par controlable tal que $\det(sI_n - A)$ factoriza en M. Diremos que (A, B) es un par nulo de una matriz racional $G(s) \in \mathbb{F}^{m\times m}$ con respecto a M por la izquierda si existe $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$ tal que (A, C) es observable y $G(s)^{-1} - C(sI_n - A)^{-1}B \in \mathbb{F}_M(s)^{m\times m}$.

Observemos que en particular cuando la matriz $G(s)$ es polinomial el concepto de par nulo por la izquierda es el concepto de realización local estudiado en el Capítulo 5 de esta memoria.

Nos planteamos el siguiente problema que sería una generalización a cuerpos arbitrarios y en un sentido local (con respecto a M) del problema de interpolación homogéneo.

Sea M un subconjunto de $\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])$*. Sean* $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ *pares controlables tales que* $\det(sI_n - A_1)$ *y* $\det(sI_n - A_1)$ *sean relativamente primos. ¿Bajo que condiciones existe una matriz $G(s)$ invertible en* $\mathbb{F}_{\mathrm{Specm}(\mathbb{F}[s])\setminus M}(s)^{m\times m} \cap \mathbb{F}_{pr}(s)^{m\times m}$ *tal que (A_1, B_1) sea un par polo con re-*

specto a M de $G(s)$ por la izquierda y (A_2, B_2) sea un par nulo con respecto a M de $G(s)$ por la izquierda.?

Al igual que en el caso global la estructura finita local con respecto a M de la matriz $G(s)$ está determinada por la estructura finita de las matrices $sI_n - A_1$ y $sI_n - A_2$. En particular si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y $M = \mathrm{Specm}(\mathbb{C}[s])$ el problema está resuelto.

Bibliografía

[1] A. Amparan, S. Marcaida, I. Zaballa, *Wiener–Hopf Factorization Indices and Infinite Structure of Rational Matrices*, SIAM J. Control Optim. 42 (6), (2004), 2130–2144.

[2] A. Amparan, S. Marcaida, I. Zaballa, *Assignment of infinite structure to an open-loop system*, Linear Algebra and its Applications, 379, (2004), 249–266.

[3] A. Amparan, S. Marcaida, I. Zaballa, *On the existence of linear systems with prescribed invariants for system similarity*, Linear Algebra and its Applications, 413, (2006), pp. 510–533.

[4] A. Amparan, S. Marcaida, I. Zaballa, *Local realizations and local polynomial matrix representations of systems*, Linear Algebra and its Applications, 425, (2007), pp. 757–775.

[5] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introducción al álgebra conmutativa*, Editorial Reverté, 1980.

[6] I. Baragaña, V. Fernández, I. Zaballa, *Hermite indices and Equivalence Relations*, Linear Algebra and its Applications, 379, (2004) 201–211.

[7] I. Baragaña, V. Fernández, I. Zaballa, *Linear Systems with Prescribed Similarity Structural Invariants*, SIAM J. Control Optim., 38(4), (2000) 1033–1049.

[8] I. Baragaña, I. Zaballa, *Feedback invariants of restrictions and quotients: series connected systems*, Linear Algebra and its Applications, 351–352 (2002) 69–89.

[9] H. Bourlès, B. Marinescu, *Poles and Zeros at Infinity of Linear Time-Varying Systems* IEEE Trans. Aut. Control, 44 (10) (1999), 1981–1985.

[10] P. Brunovsky, *Classification of Linear Controllable System*, Kybernetika, 3,6, (1970) 173–188.

[11] F. M. Callier, C. D. Nahum *Necessary and sufficient conditions for the complete controllability and observavbility of systems in series using the coprime factorization of rational matrices*, IEEE, U.S.A., (1975) 90–95.

[12] C.-T. Chen, *Linear system theory and design*, Oxford University Press, New York, 1984.

[13] K. Clancey, I. Gohberg, *Factorization of matrix functions and singular integral operators*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1981.

[14] D. J. Cullen, *Local system equivalence*, Mathematical Systems Theory, 19 (1986), 67–78.

[15] J. M. Dion, C. Commault, *Smith-McMillan factorization at infinity of rational matrix functions and their control interpretation*, Systems Control Lett., 1 (1982), 312–320.

[16] I. Feldman, A. Markus, *On some properties of factorization indices*, Integral Equations Operator Theory, 30 (1998), pp. 326–337.

[17] P. Fuhrmann, J. C. Willems, *Factorization indices at infinity for rational matrix functions*, Integral Equations Operator Theory, 2/3, (1979), 287–301.

[18] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*, Vol. I, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

[19] I. Gohberg, M. A. Kaashoek, *Regular rational matrix functions with prescribed pole and zero structure*, Operator Theory: Advances and Applications 33 (1988) 109–122.

[20] I. Gohberg, M. A. Kaashoek, F. van Schagen, *Partially specified matrices and operators: classification, completion, applications*, Bikhäuser, Basel, 1995.

[21] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman, *Matrix polynomials*, Academic Press, New York, 1982.

[22] I. Gohberg, L. Lerer, *Factorization indices and Kronecker indices of matrix polynomials*, Integral Equations and Operator Theory, Vol. 2/2, (1979) 199–243.

[23] I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, *Factorization indices for matrix polynomials*, American Mathematical Society, Vol. 84, Number 2, 1978.

[24] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman, *Invariant Subspaces of Matrices with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1986.

[25] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967.

[26] M. Hazewinkel, C. F. Martin, *A short elementary proof of Grothendieck's theorem on algebraic vectorbundles over the proyective line*, Journal of Pure and Applied Algebra, 25 (1982) 207-211.

[27] G. E. Hayton, A. C. Pugh P. Fretwell, *Infinite elementary divisors of a matrix polynoand implications*, Int. J. Control, 47, 1, (1988) 53-64.

[28] G. E. Hayton, A.B. Walker, A. C. Pugh, *Matrix pencil equivalents of a general polynomial matrix*, Int. J. Control, 49, 6, (1989) 1979-1987.

[29] U. Helmke, *Topology of the moduli space for reachable linear dynamical systems: the complex case*, Math. Systems Theory, 19, (1986), 155–187.

[30] Hinrichsen D. and Prätzel–Wolters, *Generalized Hermite matrices and complete invariants of strict system euquivalence*, SIAM J. Control, 21, (1983), 289–305.

[31] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice Hall, Nex Jersey, 1980.

[32] V. Kučera, *Analysis and Design of Discrete Linear Contol Systems*, Academia, Prague, 1991.

[33] Ernst Kunz, *Introduction to Conmutative Algebra and Algebraic Geometry*, Bikhäuser, 1985.

[34] P. Lancaster, M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, Academic Press, 1985.

[35] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London, 1984.

[36] J. J. Loiseau, P. Zagalak, *On Various Interpretations of the Rosenbrock Theorem* Kybernetika, 29 (6), (1993) 583-592.

[37] V. Lomadze, *Applications of vector bundles to factorization of rational matrices*, Linear Algebra and its Applications, 288, 249–258, 1999.

[38] B. R. Macdonald, *Linear algebra over conmutative rings*, Marcel Dekker, Inc., New York ans Basel, 1984.

[39] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon, Oxford, 1979.

[40] S. Marcaida, *Sobre Representaciones Polinomiales Matriciales de Sistemas Dinámicos Lineales*, PhD Thesis, Univ. del Pais Vasco/ Euskal Herriko Unibertsitatea, Bilbao, 2006.

[41] S. Marcaida, I. Zaballa, *Invariant Factors, Wiener–Hopf Factorization Indices, and Invariant Factors at Infinity of Rational Matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 52, 6, 427–439, 2004.

[42] E. Marques de Sá, *Imbedding Conditions for λ-matrices*, Linear Algebra and its Applications, 24, 33–50, 1979.

[43] E. Marques de Sá, *On the diagonal of integer matrices*, Czechoslovak Math. 5, 30, 207–212, 1979.

[44] A. W. Marshall, I. Olkin, *Inequalities: theory of majorization and its applications*, Academic Press, New York, 1979.

[45] C. Martin, R. Hermann, *Applications of algebraic geometry to systems theory: The McMillan degree and Kronecker indices of transfer functions as topological and holomorphic system invariants*, SIAM J. Control Optim. 16 (5) (1978) 743–755.

[46] M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York and London, 1972.

[47] V.M. Popov, *Invariant description of linear time–invariant controllable systems*, SIAM J. Control, 10, 2, (1972), 252-264.

[48] A.C. Pugh, G.E. Hayton, P. Fretwell *Transformations of matrix pencils and implications in linear system theory*, Int. J. Control, 45, 2, (1987), 529-548.

[49] A. Roca, *Asignación de Invariantes en Sistemas de Control*, PhD Thesis, Univ. Politécnica de Valencia, Valencia, 2003.

[50] H. H. Rosenbrock, *State-Space and Multivariable Theory*, Thomas Nelson and Sons, London, 1970.

[51] H. H. Rosenbrock, C. Storey, *Mathematics of dinamical systems*, Thomas Nelson and Sons, London, 1970.

[52] I.R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1974.

[53] R. C. Thompson, *Interlacing Inequalities for Invariant Factors*, Linear Algebra Appl., 24, (1979), 1–31.

[54] A. I. G. Vardulakis, *Linear multivariable control*, John Wiley and Sons, New York, 1991.

[55] G. L. Verghese, *Infinite Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems*, Ph.D. Thesis, Stanford University, 1978.

[56] W. A. Wolovich, *Linear Multivariable Systems*, Appl. Math. Sci. 11, Springer-Verlag, New York, 1974.

[57] I. Zaballa, *Matrices with prescribed rows and invariant factors*, Linear Alg. Appli., 87, (1987) 113–146.

[58] I. Zaballa, *Controllability and Hermite indices of matrix pairs*, Int. J. Control 68 (1) (1997) 61–86.

[59] I. Zaballa, *Feedback invariants of restrictions - a polynomial approach*, Automatica 37 (2001) 185–195.

Índice alfabético